

# 이중 지수 점프확산 모형하에서의 마코브 체인을 이용한 아메리칸 옵션 가격 측정

한규식<sup>†</sup>

전북대학교 상과대학 경영학부

## Valuation of American Option Prices Under the Double Exponential Jump Diffusion Model with a Markov Chain Approximation

Gyu-Sik Han

Division of Business Administration, Chonbuk National University

This paper suggests a numerical method for valuation of American options under the Kou model (double exponential jump diffusion model). The method is based on approximation of underlying asset price using a finite-state, time-homogeneous Markov chain. We examine the effectiveness of the proposed method with simulation results, which are compared with those from the conventional numerical method, the finite difference method for PIDE (partial integro-differential equation).

**Keywords:** Markov Chain, Double Exponential Jump Diffusion Model, American Option

### 1. 서론

블랙-숄츠(Black-Scholes, 이하BS) 모형이 제안된 이래로 주가의 움직임을 설명하는 모형으로 많이 사용되어 왔으나, 주식시장에는 BS 모형의 가정에 맞지 않은 두 가지의 중요한 현상, Asymmetric Leptokurtic 현상과 변동성 스마일(Volatility Smile)이 존재한다(Barberis *et al.*, 1998; Fama, 1998). 전자는 주가의 로그 수익률 분포가 Negative Skewness를 가지면서 두터운 꼬리 및 높은 첨점(More Heavy Tailed and Higher Peak than Normal)을 갖게 되는 현상을 의미하고, 후자는 옵션 거래시장에서 계산되는 기초자산의 내재변동성(Implied Volatility)이 옵션의 잔존 만기와 행사가격에 따라 다르게 나타나는 현상을 일컫는다. 이를 반영하기 위한 여러 연구 중 점프확산(Jump Diffusion, 이하 JD) 모형은 BS 모형에 주가의 비연속적 점프(Discontinuous Jump)를 단순 결합한 구조이다. 이 때, 점프발생 빈도는 포아송(Poisson) 모형을, 점프의 크기는 특정 확률분포를 따르도록

한다. 대표적인 JD 모형은 점프 크기의 로그값이 정규분포를 따르는 Merton 모형(Merton, 1976)과 이중 지수분포(Double Exponential Distribution)를 따르는 이중 지수 점프확산 모형(이하 Kou 모형)이 있다(Kou, 2002). 이 중 Kou 모형이 Asymmetric Leptokurtic 현상을 더 잘 반영하는 것으로 알려져 있다(Ramezani and Zeng, 2002). 다른 모형에 비해 JD 모형이 가진 단순성 및 주가 수익률의 독립성을 가정한 구조는 유럽피언 옵션 가격 공식을 이끌어 낼 수 있도록 하여줄 뿐만 아니라, 유럽피언 옵션의 시장 가격 정보를 이용한 모수추정(Parameter Calibration)도 용이하도록 만들어준다. BS 모형이 오랜 기간 동안 업계와 학계에서 많이 사용되어 왔던 것도 이와 같은 이유 때문이다.

그러나, JD 모형에서도 BS 모형에서처럼 아메리칸 옵션은 정확한 가격 공식을 유도해 낼 수 없어 아메리칸 옵션의 가격 측정에 대한 수치적 방법론 연구가 많이 이루어져 왔다. 크게 세 가지 방법이 가장 많이 연구되어 왔는데, 트리(Tree) 모형,

이 논문은 2011년도 전북대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음.

<sup>†</sup> 연락저자 : 한규식 교수, 561-756 전라북도 전주시 덕진구 덕진동 1가 664-14 전북대학교 상과대학 경영학부, Tel : 063-270-2984,

Fax : 063-270-2985, E-mail : gshan0815@jbnu.ac.kr

2012년 11월 4일 접수; 2012년 11월 13일 게재 확정.

유한 차분법(FDM, Finite Difference Method), 그리고 몬테 카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation) 방법론이다(Amin, 1993; Zhang, 1997; Kwon and Lee, 2011; Longstaff and Schwartz, 2001). 이 방법들은 주가의 움직임을 가정한 모형의 확률분포를 직접 이용하지 않는다. Duan and Simonato(2001)는 처음으로 확률분포를 직접 이용한 아메리칸 옵션의 가격 추정 방법을 제안하였는데, 주가의 변화는 GARCH를 가정하고 주가와 변동성 변화를 시간 동질적인(Time-homogeneous) 이산화 마코브 체인(Discrete Markov Chain)으로 근사화함으로써 아메리칸 옵션의 가격을 추정하였다. Simonato(2011)은 JD 모형 중 확률 분포함수에 대한 공식이 주어지는 Merton 모형에 대해서만 마코브 체인을 이용한 아메리칸 옵션 추정 방법을 제안하였다.

Kou 모형은 확률분포에 대한 정확한 함수 형태가 주어지지 않았다. 그러나, Kou 모형의 확률분포함수 공식이 정확하게 주어지지 않더라도 근사식을 구할 수 있다면, 이에 대해서도 마코브 체인을 이용한 아메리칸 옵션 가격의 추정이 가능할 것이다. 따라서, 본 논문은 제 2장에서 Kou 모형에 대한 소개와 함께 이 모형 하에서 마코브 체인을 이용한 아메리칸 옵션 추정 방법론을 제안하고, 제 3장에서 제안된 방법론의 유효성을 보이기 위하여 간단한 실험결과를 보여주고, 제 4장에서 결론을 맺고자 한다.

## 2. 모형 소개 및 방법론

### 2.1 이중 지수 점프확산 모형의 소개

Kou 모형의 주가  $S(t)$ 는 위험중립 확률측도(Q)하에서 다음과 같은 추계적 미분방정식(SDE, Stochastic Differential Equation)으로 표현된다.

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = (r - d - \lambda^Q \kappa^Q) dt + \sigma dW_t^Q + d\left(\sum_{i=1}^{N_t^Q} (V_i^Q - 1)\right)$$

그리고, 로그수익률  $X(t) = \ln\{S(t)/S(0)\}$ 에 대하여

$$dX(t) = (r - d - 0.5\sigma^2 - \lambda^Q \kappa^Q) dt + \sigma dW_t^Q + d\left(\sum_{i=1}^{N_t^Q} Y_i^Q\right) \quad (1)$$

로 바뀐다. 식 (1)에서  $W_t^Q$ 는 Wiener 과정, 즉, 평균이 0이고 분산이  $t$ 인 정규분포이다.  $N_t^Q$ 은 시점  $t$ 까지 점프가 일어나는 횟수를 의미하며 모수가  $\lambda$ 인 포아송 과정을 따르며,  $r$ 과  $d$ 는 각각 무위험 수익률과 배당수익률을 의미한다. 그리고,  $Y_i^Q = \ln(V_i^Q)$ 는 i.i.d.(Independent Identically Distributed)인 확률변수로서  $i$ 번째 점프의 크기를 뜻하며, 다음과 같이 표현되는 비대칭적인 이중 지수분포를 따른다.

$$f_Y(y) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{-\eta_2 y} 1_{\{y < 0\}}$$

위 식에서  $p$ 와  $q$ 는 점프에 의해 상승 확률과 하락 확률을 의미하며,  $p + q = 1$ 이다.  $W_t^Q$ ,  $N_t^Q$ ,  $Y_i^Q$ 는 서로 독립임을 가정하며,  $\kappa^Q$ 는

$$\kappa^Q = E^Q[V^Q] - 1 = \frac{p\eta_1^Q}{\eta_1^Q - 1} + \frac{q\eta_2^Q}{\eta_2^Q + 1} - 1 \quad (2)$$

이다. 식 (2)에 의해  $\eta_1 > 1$ ,  $\eta_2 > 0$ 가 된다.

### 2.2 이중 지수 점프확산 모형의 구간 확률분포 근사

본 논문에서는 Kou 모형하에서 아메리칸 옵션의 가격을 추정하기 위하여 이산화 마코브 체인을 이용하고자 한다. 이를 위해서는 주가의 변화를 나타내는 전이확률행렬(Transition Probability Matrix)을 구해야 하는데, 주가의 로그수익률에 관한 확률분포함수 공식이 있다면 전이확률행렬을 쉽게 구할 수 있으나, 그렇지 않다면 전이확률행렬을 구할 수 없다. 식 (1)과 같이 표현된 Kou 모형은 Cont and Tankov(2004)가 밝히고 있듯이 정확한 확률분포함수 공식이 주어지지 않는다. 그러나, 정확한 공식은 아니어도 정확도가 높은 근사식을 구할 수만 있다면 전이확률행렬을 구할 수 있다. Hanson(2007)과 Hanson and Zhu(2004)는 JD 모형의 구간 확률분포(Bin Probability Distribution)에 관한 근사 방법을 제안하고 있다. 이 방법은 포아송 분포에 관한 이차 근사를 이용하여 JD 모형의 본래 확률분포를 계산한다. 이를 식 (1)과 같이 표현된 Kou 모형에 대해 적용하면, 현재에서  $h$ 년 후  $X(h)$ 의 특정 구간인  $[x_1, x_2]$  ( $x_2 \geq x_1$ )의 구간 확률분포,  $\Phi_{Kou}(x_1, x_2)$ 는 식 (3)과 같이 근사할 수 있다 (위험중립 확률측도Q는 생략한다). 식 (3)과 같이 근사된 Kou 모형의 구간 확률분포는 시간의 흐름에 따라 바뀌지 않는다. 즉, 특정 시점에서는  $h$ 년 후 주가 로그수익률의 구간 확률분포는 항상 동일하게 식 (3)과 같다. 즉, 시간 동질적인(Time-homogeneous) 주가의 전이확률행렬을 구성하여 이산화 마코브 체인을 구성할 수 있다.

$$\Phi_{Kou}(x_1, x_2) \approx \frac{\sum_{j=0}^2 \phi_{Pbs}(j, \lambda h) \Phi_{Kou}^j(x_1, x_2)}{\sum_{j=0}^2 \phi_{Pbs}(j, \lambda h)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{Pbs}(j, \lambda) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}, \Phi_{Kou}^0 \equiv \Phi_n(x_1, x_2; \mu_n, \sigma_n^2), \\ \Phi_{Kou}^1 &\equiv \Phi_n(x_1, x_2; \mu_n, \sigma_n^2) + p(\rho_{x_1, \nu_1} - \rho_{x_2, \nu_1}) + q(\rho_{x_2, \nu_2} - \rho_{x_1, \nu_2}) \\ \Phi_n(x_1, x_2; \mu_n, \sigma_n^2) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(u-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} du \\ \mu_n &= (r - 0.5\sigma^2 - \lambda\kappa)h, \sigma_n = \sigma\sqrt{h}, \\ \nu_1 &= \mu_n + 0.5\sigma_n^2\eta_1, \nu_2 = \mu_n - 0.5\sigma_n^2\eta_2 \\ \rho_{x_1, \nu_1} &= e^{-(x_1 - \nu_1)\eta_1} \Phi_n(-\infty, x_1; \mu_n + \sigma_n^2\eta_1, \sigma_n^2), \\ \rho_{x_2, \nu_1} &= e^{-(x_2 - \nu_1)\eta_1} \Phi_n(-\infty, x_2; \mu_n + \sigma_n^2\eta_1, \sigma_n^2), \end{aligned}$$

$$\rho_{x_1, \nu_2} = e^{-(x_1 - \nu_2)\eta_2} \Phi_n(-\infty, x_1; -\mu_n + \sigma_n^2 \eta_2, \sigma_n^2)$$

$$\rho_{x_2, \nu_2} = e^{-(x_2 - \nu_2)\eta_2} \Phi_n(-\infty, x_2; -\mu_n + \sigma_n^2 \eta_2, \sigma_n^2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{Kou}^2 \equiv & \frac{1}{\eta_2} \left[ \left\{ p_{21} + p_{22} \left( \mu_n - \sigma_n^2 \eta_2 + \frac{1}{\eta_2} - x_2 \right) \right\} \rho_{x_2, \nu_2} \right. \\ & \left. - \left\{ p_{21} + p_{22} \left( \mu_n - \sigma_n^2 \eta_2 + \frac{1}{\eta_2} - x_1 \right) \right\} \rho_{x_1, \nu_2} \right] \\ & + \frac{1}{\eta_1} \left[ \left\{ p_{21} - p_{11} \left( \mu_n + \sigma_n^2 \eta_1 - \frac{1}{\eta_1} - x_1 \right) \right\} \rho_{x_1, \nu_1} \right. \\ & \left. - \left\{ p_{21} - p_{11} \left( \mu_n + \sigma_n^2 \eta_1 - \frac{1}{\eta_1} - x_2 \right) \right\} \rho_{x_2, \nu_1} \right] \\ & + \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{p_{11}}{\eta_1} - \frac{p_{22}}{\eta_2} \right) \left( e^{-z_1^2/2} - e^{-z_2^2/2} \right) + \Phi_n(x_1, x_2; \mu_n, \sigma_n^2) \end{aligned}$$

$$p_{11} = (p \cdot \eta_1)^2, p_{22} = (q \cdot \eta_2)^2, p_{21} = \frac{2pq}{(1/\eta_1 + 1/\eta_2)}$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu_n}{\sigma_n}, z_2 = \frac{x_2 - \mu_n}{\sigma_n}$$

### 2.3 마코브 체인 방법론에 의한 옵션 계산

#### 2.3.1 마코브 체인(Markov Chain)의 생성

미래 주가의 로그값 구간을 구성하기 위하여 다음과 같은 주가의 로그값 열벡터(Column Vector)를 정의하자.

$$S = [s_1, s_2, \dots, s_n]', s_j = \ln S_0 + \frac{2j-n-1}{n-1} I_S \quad (4)$$

식 (4)에서  $\ln S_0$ 은 현재의 주가 로그값을 의미하며,  $1 \leq j \leq n$ 인 자연수이므로  $s_1 = \ln S_0 - I_S$ 이고,  $s_n = \ln S_0 + I_S$ 가 된다.  $n$ 은 홀수로 한정한다. 그러면, 항상  $s_{(n+1)/2} = \ln S_0$ 가 되어 현재 주가에서 옵션의 가격 측정이 가능하다. 한편,  $I_S$ 는 주가 로그값의 변동폭을 만들어 내는 부분으로 옵션의 잔존만기( $T$ )와 Kou 모형의 분산을 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$I_S = f(n) \times v \times \sqrt{T}, v = \sqrt{\sigma^2 + \lambda p / \eta_1^2 + \lambda q / \eta_2^2} \quad (5)$$

식 (5)에서  $v$ 는 식 (1)의 연분산(Annualized Standard Deviation)이다. 그리고,  $f(n)$ 은 구간 조정인자로서  $n$ 의 증가함수 형태이되, 모든  $n$ 에 대해서  $f(n) < n$ 이어야 한다(Duan and Simonato, 2001). 전이확률행렬  $M$ 을 만들기 위해서 다음과 같은  $n$ 개의 주가 로그값 구간을 정의하자.

$$\begin{aligned} C_j &= [c_j, c_{j+1}) \\ c_1 &= -\infty, c_{n+1} = \infty, c_j = \frac{s_j + s_{j-1}}{2} \quad (2 \leq j \leq n) \end{aligned}$$

그리고, 현재 주가가  $s_i$ 일 때,  $h$ 년이 지난 후에  $j$ 번째 주가의 구간인  $C_j$ 에 속할 확률, 즉 주가의 전이확률을  $m_{ij} (\in M)$ 라고 정의하면, 식 (3)으로부터

$$m_{ij} = \Pr(C_j | s_i) = \Phi_{Kou}(c_j - s_i, c_{j+1} - s_i)$$

이고, 전이확률행렬  $M$ 은

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

가 된다. 앞서 언급했듯이, 식 (4)에서 식 (9)를 살펴보면  $n$ 이 증가할수록 전체적으로 주가의 변화를 더 자세하게 표현할 수 있어서  $M$ 이 Kou 모형에 가깝게 표현되고 있음을 확인할 수 있다. 식 (6)을 보면 전체  $n^2$ 의 계산횟수가 필요한 것으로 보인다. 그러나, 식 (4)에서와 같이 주가의 로그값 구간을 동일한 크기로 주었기 때문에 그로부터 계산되는 전이확률  $m_{ij}$ 는 각  $i$ 와  $j$ 마다 다른 값이 아닌 동일한 값이 발생하거나 이미 계산된 값으로부터 유추되는 값이 생긴다. 예를 들면,  $n = 7$ 인 경우에  $M$ 은

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} & m_{17} \\ \Sigma_{j=1}^6 m_{7j} & m_{22} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & \Sigma_{j=6}^7 m_{1j} \\ \Sigma_{j=1}^5 m_{7j} & m_{76} & m_{22} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \Sigma_{j=5}^7 m_{1j} \\ \Sigma_{j=1}^4 m_{7j} & m_{75} & m_{76} & m_{22} & m_{12} & m_{13} & \Sigma_{j=4}^7 m_{1j} \\ \Sigma_{j=1}^3 m_{7j} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{22} & m_{12} & \Sigma_{j=3}^7 m_{1j} \\ \Sigma_{j=1}^2 m_{7j} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{22} & \Sigma_{j=2}^7 m_{1j} \\ m_{71} & m_{72} & m_{73} & m_{74} & m_{75} & m_{76} & m_{77} \end{bmatrix} \quad (7)$$

된다. 식 (7)의 전이확률행렬에서 diagonal element의 값은  $m_{11}$ 과  $m_{77}$ 을 제외하고는 모두 동일한 값이며, upper diagonal element는 첫째 행의 값으로부터 모두 계산이 가능하며, lower diagonal element는 마지막 행의 값으로부터 모두 계산이 가능한 것을 볼 수 있다. 따라서, 전이확률행렬의 계산 횟수는 총  $n^2$ 이 아닌  $2n+1$ 이고,  $n$ 이 증가하더라도 계산 복잡도(Computation Complexity)가 선형적으로 증가하여 효율적임을 알 수 있다.

#### 2.3.2 아메리칸 옵션 가격의 측정

완성된 마코브 체인을 이용한 아메리칸 옵션 가격의 측정은 트리 모형이나 FDM과 같이 옵션 만기로부터의 역산을 이용한다. 만약, 만기가  $T$ 년, 행사가격이  $K$ 인 아메리칸 옵션의 가격을 측정한다고 할 때, 만기를  $L$ 개의 기간으로 나눈 단위 시간  $h = T/L$ 라 하자. 그러면, 만기 시점  $T$ 에서

$$OV(S, T) = \max[\alpha(e^S - K \cdot I), 0] \quad (8)$$

이다. 식 (8)에서  $S$ 는 식 (4)의 정의를 따르고 있으며,  $I$ 은 숫자 1로만 구성된  $n$ 차원의 열벡터이고,  $\alpha$ 는 콜옵션일 때 1을 풋옵션일 때 -1을 의미한다. 그리고,  $\max[\cdot, \cdot]$ 은 element-wise 연산을 하는 함수로 정의한다. 따라서,  $OV(S, T)$ 는  $n$ 차원 열벡터가 된다. 한편, 만기 이전의  $\tau$ 시점에서는 ( $\tau = j \cdot h$  ( $j=0, 1, \dots, L-1$ ))

$$OV(S, \tau) = \max[\max\{\alpha(e^S - K \cdot I), 0\}, e^{-r\tau} \cdot M \cdot OV(S, \tau+h)] \quad (9)$$

이다.  $\max\{\alpha(e^S - K \cdot I), 0\}$ 은  $\tau$ 시점에서 옵션 행사시 가치

이고,  $e^{-rh} \cdot M \cdot OV(S, \tau+h)$ 는  $\tau$ 시점에서 옵션을 행사하지 않고  $\tau+h$ 시점까지 보유시 가치이다. 이와 같은 방식으로 현재 시점까지 역산한  $OV(S, 0)$ 은  $n$ 차원 열벡터이고, 이 중  $(n+1)/2$ 번째 값이 구하고자 하는 아메리칸 옵션의 가격이 된다. 만약 유러피언 옵션의 가격을 구하고자 할 때에는 식 (8)은 동일한 방식으로 계산하되, 식 (9)에서  $\max\{\alpha(e^S - K \cdot I), 0\}$ 는 제외하고 계산하면 가격 측정이 가능하다. 식 (8)과 식 (9)에서 살펴보면  $n$ 이 증가할수록 전이확률행렬 뿐만 아니라 옵션의 가격 또한 참값에 수렴할 것을 예상할 수 있다.

### 3. 실험 결과

제 2.2절과 제 2.3절에서 제안된 방법론에 따라 유러피언 콜 옵션, 유러피언 풋옵션, 아메리칸 풋옵션에 대한 가격 측정을 실시하였으며, 이 결과를 동일한 조건 하에서 Kwon and Lee (2011)에 제안된 방법론을 이용한 결과(기준 가격)와 비교

하였다. Kou 모형의 모수는  $r=5\%$ ,  $\sigma=20\%$ ,  $\lambda=7$ ,  $\eta_1=\eta_2=25$ ,  $p=0.6$ 이다. 본 실험에서는  $f(n)=\ln(n)$ 으로,  $m_{ij} \leq 10^{-10}$ 이면  $m_{ij}=0$ 로, 옵션 가격 계산시 사용할 단위 시간은 하루 간격과 비슷하도록  $h=1/364$ 로 설정한다. 그리고, 주가의 구간 수( $n$ ), 만기 ( $T$ , 단위 : 년), 현재 주가( $S_0$ ), 행사 가격( $K$ )는

$$n \in \{101, 501, 1001, 5001\}, T \in \{0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}, S_0 \in \{90, 100, 110, 120, 130\}, K = 110$$

로 놓고, 실험 결과를 구한다. 마코브 체인 방법론을 이용하여 구한 옵션 가격( $OP_{Markov}$ )과 기준 가격( $OP_{Benchmark}$ )간 오차율 (ARS, Absolute Relative Error)은

$$ARS(\%) = \frac{|OP_{Markov} - OP_{Benchmark}|}{OP_{Benchmark}} \times 100$$

이다.

유러피언 콜옵션, 유러피언 풋옵션, 아메리칸 풋옵션에 대한

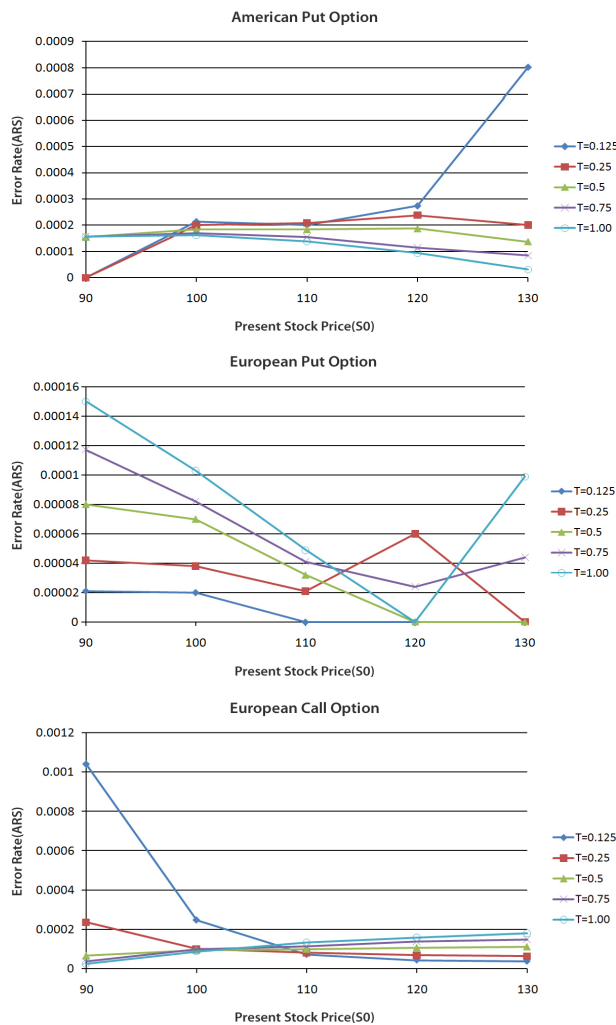


Figure 1. The ARS of  $OP_{Markov}$  with respect to time to maturity and moneyness

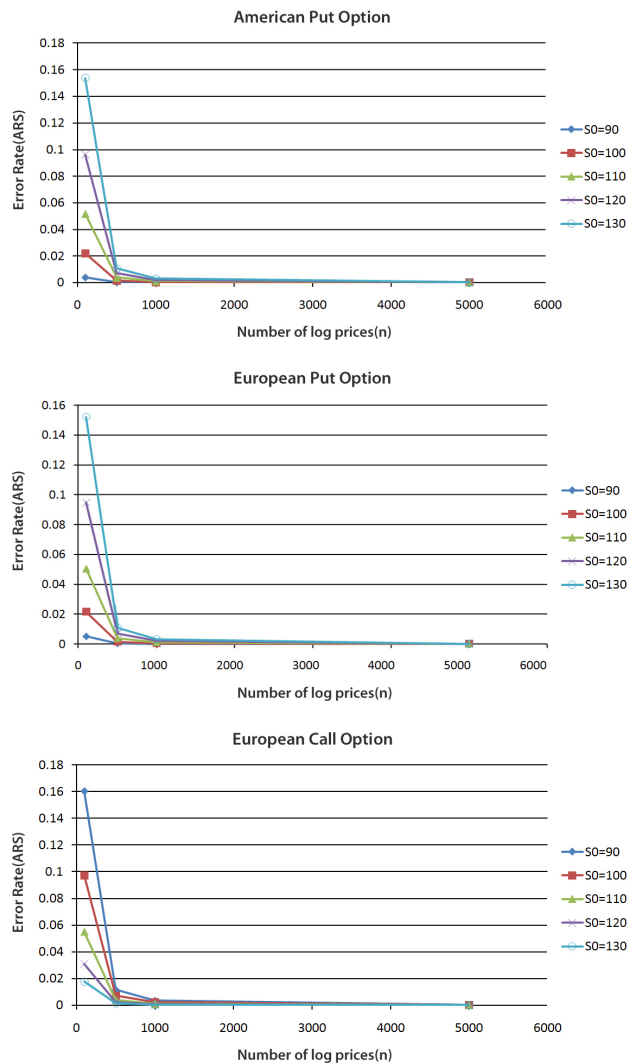


Figure 2. The convergence of  $OP_{Markov}$

ARS 결과는 <Figure 1>에 나와 있다. 이는  $n = 5001$ 에서 나온 결과이며, 오차율의 최대 값은 약 0.1%이다. 따라서, 마코브 체인을 이용한 방법론은 만기나 옵션 상태(내가격, 등가격, 외가격)에 관계없이 안정적인 결과를 보여주고 있다. 한편, 주가로 그 값의 구간 수( $n$ )가 늘어날수록  $OP_{\text{Markov}}$ 가  $OP_{\text{Benchmark}}$ 에 수렴하는지 확인해보기 위하여  $T = 0.5$ 에 대하여 구간 수를 101부터 5001까지 늘려가며 오차율을 계산하여 유러피언 콜옵션, 유러피언 풋옵션, 아메리칸 풋옵션 각각에 대하여 결과를 정리하였고, 그 결과는 <Figure 2>에 나와 있다. <Figure 1>과 <Figure 2>를 도출하기 위한 자세한 수치적 결과는 지면 관계상 생략하기로 한다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 Kou 모형하에서 옵션의 가격을 측정하는 방법으로 마코브 체인을 이용한 방법을 제안하였다. 제안한 방법론은 Kou 모형의 구간 확률분포 근사를 통해 전이확률 행렬을 계산함으로써 시간 동질적인 이산화 마코브 체인을 구성할 수 있다는 간단한 아이디어를 이용하였다. 이 방법론의 유효성은 충분히 가늠하기 위하여 크게 두 가지 실험을 하였다. 첫 번째 실험에서는 제안한 방법론에 따라 유러피언 콜옵션, 유러피언 풋옵션, 아메리칸 풋옵션에 대한 가격을 각 조건마다 계산하여 기준 가격과 비교하였다. 오차율이 모든 결과에서 0.1%보다 적게 나오으로써 실험 결과는 안정적인임을 확인할 수 있었다. 그리고, 두 번째 실험에서는 주가의 구간 수를 늘리면서 옵션 가격의 수렴성을 조사하였다. 그 결과 역시 기준 가격에 수렴하고 있음을 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

Amin, K. (1993), Jump-diffusion Option Valuation in Discrete Time,

- Journal of Finance*, **48**, 1833-1863.
- Approximation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **25**, 1689-1718.
- Barberis, N., Shleifer, A., and Vishny, R. (1998), A Model of Investor Sentiment, *Journal of Financial Economics*, **49**, 307-343.
- Black, F. and Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.
- Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial Modelling with Jump Processes*, 2<sup>nd</sup> Edition, Chapman and Hall/CRC Press, London.
- Duan, J. C. and Simonato, J.-G. (2001), American Option Pricing under GARCH by a Markov Chain.
- Fama, E. (1998), Market Efficiency, Long-term Returns, and Behavioral Finance, *Journal of Financial Economics*, **49**, 283-306.
- Hanson, F. B. (2007), *Applied Stochastic Processes and Control for Jump Diffusions : Modeling, Analysis, and Computation*, SIAM Books, Philadelphia, USA.
- Hanson, F. B. and Zhu, Z. (2004), Comparison of Market Parameters for Jump-Diffusion Distributions Using Multinomial Maximum Likelihood Estimation, *Proceedings of 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, Invited Paper, 3919-3924.
- Kou, S. G. (2002), A Jump-diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, **48**, 1086-1101.
- Kwon, Y. and Lee, Y. (2011), A Second-order Tridiagonal Method for American Options Under Jump-diffusion Models, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**, 1860-1872.
- Longstaff, F. and Schwartz, E. (2001), Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-squares Approach, *Review of Financial Studies*, **14**, 113-148.
- Merton, R. C. (1976), Option Pricing When the Underlying Process for Stock Returns is Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 124-144.
- Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (2002), Maximum Likelihood Estimation of Asymmetric Jump-diffusion Process : Application to Security Prices, *Working paper*, University of Missouri at Kansas City, Department of Mathematics and Statistics.
- Simonato, J.-G. (2011), Computing American Option Prices in the Lognormal Jump-diffusion Framework with a Markov Chain, *Finance Research Letters*, **8**, 220-226.
- Zhang, X. L. (1997), Numerical Analysis of American Option Pricing in a Jump-diffusion Model, *Mathematics of Operations Research*, **22**, 668-690.