

선분, 직선, 반직선에 대한 초등학교 3학년의 이해 분석

정순원(동탄목동초등학교, 교사)

본 연구의 목적은 선분, 직선, 반직선에 대한 초등학교 3학년 학생들의 이해를 분석하는 것이다. 이를 위해 220명의 학생들에게 선분, 직선, 반직선이 각각 어떠한 선인지 설명하도록 요구하는 문항을 제시하고 학생들의 응답을 수집하여 분석하였다. 분석의 결과는 다음과 같다. 첫째, 선의 끝음, 즉 직선성에 대해 적절히 표현한 비율은 선분이 46.5%, 직선이 24.5%, 반직선이 17.7%로 나타났다. 둘째, 선분의 유한성(끝이 있음)에 대해서는 전체 학생의 74%가 적절하게 표현한 반면, 직선과 반직선의 무한성(끝없이 이어짐)에 대해서는 각각 33.5%와 43.8%의 학생들이 적절한 표현을 사용하였다. 셋째, '직선은 두 점을 넘는 선', '직선은 두 점이 모두 안에 있다'와 같이 개념 이미지가 선의 표상에 국한되는 경우는 직선과 반직선에서 각각 약 32%를 차지하였다. 이 외에도 한 선을 다른 선을 이용하여 모호하게 표현하거나 오류가 있는 유형, 개념 이미지가 가로 방향의 선에 국한되는 유형, 선을 줄로 인식하는 유형이 관찰되었다. 이러한 결과를 바탕으로 선분, 직선, 반직선의 교수학습에 대한 시사점을 논의하였다.

I. 서론

선분, 직선, 반직선은 초등 기하 교육에서 중요한 기초 개념으로 자리 잡고 있다(김상미, 2023). 초등학교 3학년에서 학습하는 선분, 직선, 반직선은 다양한 도형 및 기하 개념을 정의하는 데에 활용된다. 예를 들어 2015 개정 교육과정의 초등학교 3~4학년군에서 선분은 원의 지름, 다각형, 대각선을 정의하는 데 활용된다. 또한 직선은 수직선, 수선, 평행선의 개념을, 반직선은 각의 변을 정의하는 데 활용된다. 이후 5~6학년군에서는 선분이 직육면체와 정육면체의 면과 모서리를 정의하는 데에 사용된다. 더 나아가 선분, 직선, 반직선은 중등 교육과정에서도 다시 정의와 새로운 표기법을 다루게 되며 기하 학습의 기초로써 재조명된다.

초등에서 선분, 직선, 반직선에 대한 정의는 교육과정의 변화에 따라 조금씩 변화하였으나 2009 개정 교육과정 이후로 비교적 일관되게 정의되었다. 2015 개정 교육과정의 국정 교과서에서는 선분을 '두 점을 끝이 이은 선(p. 31)', 직선을 '선분을 양쪽으로 끝없이 늘인 끝은 선(p. 33)', 반직선을 '한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘인 끝은 선(p. 32)'으로 정의하고 있다(교육부, 2018). 점과 선, 그리고 끝은 선이 무정의 용어임을 고려할 때 선분, 직선, 반직선 개념에 대해 올바르게 학습하고 이해하는 것은 기하 학습의 중요한 지점이라 할 수 있다(정순원, 2023).

하지만 일부 선행 연구는 학생들이 선의 개념을 이해하는 데 부정적인 영향을 미칠 수 있는 요인들을 지적하고 있다. 백대현(2010)은 교과서에서 선분인지 직선인지 구분할 수 없는 모호한 선들이 존재하고 선분의 표상을 직선으로 지칭하는 등 일관성이 없는 교과서 내용이 개념 이해에 부정적 영향을 줄 수 있음을 주장하였다. 이규희(2021)는 외국 교과서와는 달리 선이 두께가 없음을 명확히 지도하지 않는 국내 교과서의 내용이 학생들로 하여금 두께가 있는 선에 대한 개념 이미지를 유발할 수 있음을 지적하였다. 또한 외국의 연구는 학생들이 선에 대한 정의와 상이한 개념 이미지를 갖고 있음을 보여주고 있다. Moravcová & Hromadová(2020)는 연구 참여자 중 절반 이상의 학생들이 직선이 양쪽으로 끝없이 이어지는 것을 인식하지 못한다고 하였다. Youkap(2021)은 일부 학생들의 직선에 대한 개념 이미지가 단순히 유한하게 나타내어진 직선의 표상에 머무르거나 다른 선들과 구별할 수 있는 속성을 명확히 포함하지 않음을 지적하였다.

위의 선행 연구에서 살펴볼 수 있듯이 선에 대한 학습의 어려움은 선의 표상을 통해 물리적 한계를 초월하는 이상적인 선의 개념을 상상하고 이해해야 한다는 데에 있다. 직선과 반직선은 각각 양쪽과 한쪽 방향으로 끝없이 뻗어나가는 선이지만 교과서에서는 끝이 있는 선으로 나타낼 수 밖에 없다. 유한한 선과 두

* 접수일(2024년 9월 12일), 심사(수정)일(2024년 9월 29일), 게재확정일(2024년 10월 29일)
* MSC2020분류 : 97G40
* 주제어 : 선분, 직선, 반직선, 직선성, 유한성, 무한성

개의 점으로 나타내어진 표상을 보며 학생들은 끝없이 뻗어나가는 선을 상상하고, 직선인지 반직선인지 구분해야 한다. 또한 학생들이 연필로 두 점을 연결하여 그린 선은 완벽하게 끝지 않지만 이를 끝은 선이라 간주하고 선분이라 부른다. 이렇게 선에 대한 표상과 개념과의 차이는 개념의 이해에 어려움을 초래할 수 있는 요소이다(Youkap, 2021).

지금까지 살펴본 바와 같이 선분, 직선, 반직선 개념의 중요성 및 이해의 어려움에도 불구하고 이 개념들에 대한 우리나라 학생들의 이해를 분석한 연구는 찾아보기 힘들다. 고진아(2009)는 여러 기초 도형에 대한 학생들의 인식을 조사하는 연구에서 선분에 대해 다루기는 하였지만 ‘학생들이 선분을 도형으로 인식하지 않는다’는 점 외에 선분을 구체적으로 어떻게 이해하는지는 다루지 않았다. 또한 선과 관련된 기존의 국내 연구들은 교과서 및 교육과정에 대한 연구(백대현, 2010; 도중훈, 2011; 이규희, 2021; 김상미, 2018, 2023)가 주를 이룬다. 따라서 선분, 직선, 반직선 개념에 대한 학생들의 이해를 종합적이고 심층적으로 분석하는 연구가 필요하다.

이러한 맥락에서 본 연구는 선분, 직선, 반직선을 이제 막 학습한 초등학교 3학년 학생들이 이 개념들을 어떻게 이해하고 있는지 분석하고자 한다. 이를 위해 초등학교 3학년 학생들에게 선분, 직선, 반직선에 대한 설명을 요구하는 문항을 제시하고 그에 대한 학생들의 지필 응답을 분석 대상으로 삼았다. 응답을 분석할 때는 선이 갖는 특성을 어떻게 표현하였는지를 기준으로 삼고자 한다. 첫 번째 분석 기준은 세 선이 공통적으로 지니는 특성인 직선성(선의 끝음)을 설정하였으며, 두 번째 분석 기준으로는 선분에 대해서는 유한성(끝이 있음), 직선과 반직선에 대해서는 무한성(끝없이 이어짐)을 설정하였다. 이러한 기준을 바탕으로 선분, 직선, 반직선 개념에 대한 학생들의 이해를 분석하고 선에 대해 갖고 있는 개념 이미지를 살펴보고자 한다. 연구 문제를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교 3학년 학생들은 선분, 직선, 반직선을 어떻게 이해하고 설명하는가?

둘째, 초등학교 3학년 학생들이 선분, 직선, 반직선에 대해 갖고 있는 개념 이미지는 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 선분, 직선, 반직선 개념에 대한 정의

가. 국내 교과서에서 제시된 정의

선행 연구(김지영, 2020; 정순원, 2023; 김상미, 2023)를 토대로 2차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지 선분, 직선, 반직선의 정의 변화를 정리하였다. 특히 2015 개정 교육과정은 국정 교과서에서 검정 교과서로 전환된 시기이므로 국정 교과서와 검정 교과서 10종 간의 정의에 차이가 있을 경우 이를 병기하였다.

먼저, 선분의 정의 변화는 [표 1]과 같이 구분할 수 있다. 2차 교육과정에서 선분은 자와 실이라는 구체물을 이용하여 정의되었다. 3차 및 4차 교육과정에서는 선분에 대한 정의가 2학년과 3학년에서 한 번씩 등장하였다. 이후 점을 지칭하는 기호가 사라지며 2015 개정 교육과정의 국정과 검정 교과서에서 모두 ‘두 점을 끝까지 이은 선’으로 정의된다.

[표 1] 교육과정에 따른 선분의 정의 변화

교육과정	정의
2차	자를 대고 실의 자리를 나타내는 선을 그은 것
3차, 4차	두 점 가와 나를 끝까지 이은 것(2-1)
	두 점 기와 리를 이은 끝은 선(3-1)
5차~ 2015 개정	두 점을 끝까지 이은 선

직선의 정의 변화는 [표 2]와 같은 흐름으로 구분할 수 있다. 2차 교육과정에서는 직선을 ‘선분을 끝없이 늘린 것’으로 정의하였으며 3차 및 4차 교육과정에서는 이 정의에 ‘끝은 선’이라는 표현이 추가되었다. 이후 5차 교육과정부터 2007 개정 교육과정에 이르러서는 앞선 정의에 ‘양쪽으로’라는 표현이 추가되었고 2009 개정 교육과정에서는 ‘선분을’이라는 부분이 제거되었다. 이후 2015 개정 교육과정에서는 국정과 검정 9종의 교과서에서 다시 ‘선분을’이라는 부분이 추가되었다. 반면, 1종의 검정 교과서에서는 ‘선분을’이라는 표현을 추가하지 않고 직선의 무한성을 ‘끝이 없는’으로 표현하였다.

[표 2] 교육과정에 따른 직선의 정의 변화

교육과정	정의
2차	선분을 끝없이 늘린 것
3차, 4차	선분을 끝없이 늘린 끝은 선
5차~ 2007 개정	선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선
2009 개정	양쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선
2015 개정	선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선 (국정)
	선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선 (검정 9종)
	양쪽으로 끝이 없는 끝은 선 (검정 1종)

반직선의 정의 변화는 [표 3]과 같이 구분할 수 있다. 선분, 직선과는 다르게 반직선은 3차, 4차, 2009 개정, 2015 개정 교육과정에서만 학습 내용에 포함되었다. 3차 및 4차 교육과정에서는 ‘선분을 한 끝점 방향으로만 끝없이 늘린 끝은 선’으로 정의하였다. 2009 개정 교육과정에서는 ‘한 점에서 한쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선’으로 정의되었다가 2015 개정 교육과정에서는 국정 및 모든 검정 교과서에서 ‘시작하여’가 추가되었다. 다만, 1종의 검정 교과서에서는 ‘끝없이 늘린’이 아닌 ‘끝이 없는’으로 서술하였다.

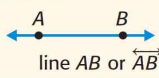
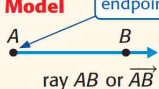
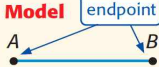
[표 3] 교육과정에 따른 반직선의 정의 변화

교육과정	정의
3차, 4차	선분을 한 끝점 방향으로만 끝없이 늘린 끝은 선
2009 개정	한 점에서 한쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선
2015 개정	한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘린 끝은 선 (국정, 검정 9종)
	한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝이 없는 끝은 선 (검정 1종)

나. 외국 교과서에서 제시된 정의

외국 초등 교과서인 California Mathematics(Altieri et al., 2008), Go Math!(Harcourt, 2015), Progress in mathematics(LeTourneau et al., 2009)에서 선분, 직선, 반직선을 어떻게 정의하는지 살펴보고자 한다. 이들 세 교과서에서는 공통적으로 우리나라의 직선 개념을 ‘선(line)’이라는 용어로 표기하고 있다.

먼저, California Mathematics(Altieri et al., 2008)에서는 직선을 ‘반대 방향으로 끝없이 뻗는 끝은 점들의 집합’으로 정의하고, 반직선은 ‘한 끝점을 갖고 한 방향으로 끝없이 뻗는 직선의 일부분’으로 정의하였다. 또한 선분은 ‘두 끝점 사이에 있는 직선의 일부분’으로 정의하였다([그림 1]).

<p>Words A line is a straight set of points that extend in opposite directions without ending.</p>	<p>Model</p>  <p>line AB or \overleftrightarrow{AB}</p>
<p>Words A ray is a part of a line that has one endpoint and extends in one direction without ending.</p>	<p>Model</p>  <p>ray AB or \overrightarrow{AB}</p>
<p>Words A line segment is a part of a line between two endpoints.</p>	<p>Model</p> 

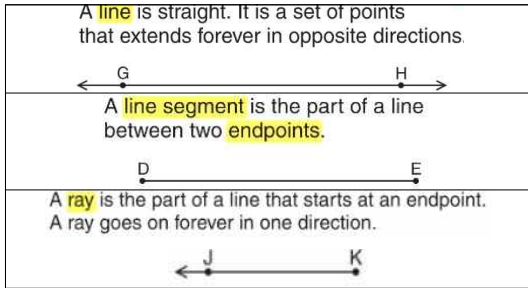
[그림 1] California Mathematics (Altieri et al., 2008, p. 394)

다음으로 Go Math!(Harcourt, 2015)에서는 선이 갖는 여러 특성을 개별적으로 서술하는 점이 두드러진다. 직선은 ‘1) 끝은 선(길)이다. 2) 양방향으로 이어진다. 3) 끝나지 않는다.’는 특성을 지닌다. 선분은 ‘1) 끝다. 2) 직선의 일부분이다. 3) 두 개의 끝점을 갖는다.’는 특성을 지닌다. 또한 반직선은 ‘1) 끝다. 2) 직선의 일부분이다. 3) 한 개의 끝점을 갖는다. 4) 한 방향으로 이어진다’는 특성을 가진다([그림 2]).

<p>line</p> <ul style="list-style-type: none"> • is a straight path • continues in both directions • does not end 	<p>line segment</p> <ul style="list-style-type: none"> • is straight • is part of a line • has 2 endpoints
<p>ray</p> <ul style="list-style-type: none"> • is straight • is part of a line • has 1 endpoint • continues in one direction 	

[그림 2] Go Math! (Harcourt, 2015, p. 727)

마지막으로 Progress in mathematics(LeTourneau et al., 2009)에서는 직선을 ‘직선은 끝다. 그것은 반대 방향으로 영원히 늘어나는 점들의 집합이다’라고 설명하고 있다. 선분은 ‘두 끝점 사이에 있는 직선의 일부’로 정의되며 반직선은 ‘한 끝점에서 시작하는 직선의 일부분이다. 반직선은 한쪽 방향으로 영원히 계속 나아간다.’로 정의하고 있다([그림 3]).



[그림 3] Progress in mathematics (LeTourneau et al., 2009, p. 326, p. 328)

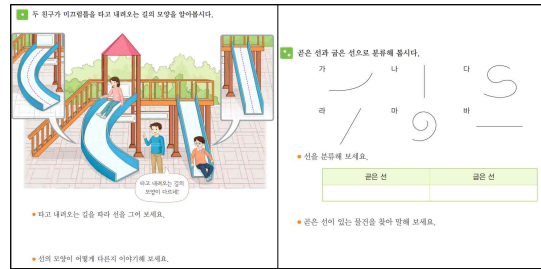
2. 선의 직선성과 무한성

가. 교육과정에서의 직선성

선의 끝음, 즉 직선성(直進成)에 대한 인식은 고대 그리스 시대에도 존재하였다. Heath(1956)는 헤론이 선을 정의하기에 앞서 먼저 끝은 선과 끝지 않은 선을 구분하였다고 언급하였으며, 피타고라스 학파 또한 끝은 것과 끝은 것을 명확히 구분하였다고 전해진다. 당대의 지식을 집대성한 유클리드 원론에서는 선(line)을 먼저 정의한 후, 직선(straight line)을 정의함으로써 직선성에 대한 명확한 인식을 나타내고 있다. 이 외에도 직선에 대한 여러 정의에서 끝음에 대한 다양한 해석이 드러난다(도중훈, 2008). 예를 들어, 아르키메데스는 직선을 ‘두 점을 이은 선들 중에 길이가 가장 짧은 것’이라 하였고, 프로클루스와 헤론은 직선을 ‘모든 부분이 다른 모든 부분들과 똑같이(모든 방향으로) 맞는 것’으로 정의하였다. 라이프니츠는 직선을 ‘평면을 (위치를 제외하고) 모든 면에서 동일한 두 개의 반으로 나누는 것’으로 정의하였다.

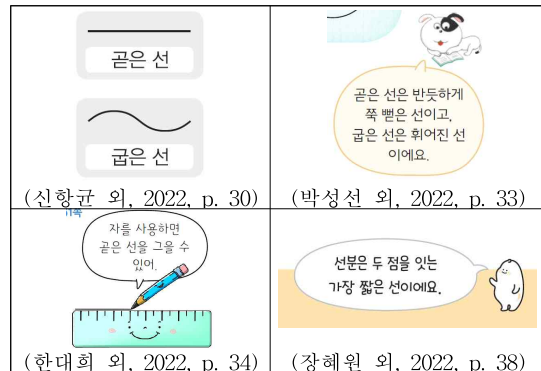
한편, 학교 수학에서의 직선성은 고대 그리스의 인식과 유사하게 끝은 선과 끝은 선을 구분함으로써 명확히 드러난다. 2015 개정 교육과정의 초등학교 3학년

<2. 평면도형> 단원에서는 학생들이 실생활에서 접하는 다양한 선을 직접 그려보고, 이를 끝은 선과 끝은 선으로 구분하는 활동을 수행한다. 이러한 활동은 선분, 직선, 반직선 개념을 학습하는 차시 내에서 선수 학습으로 진행된다([그림 4]).



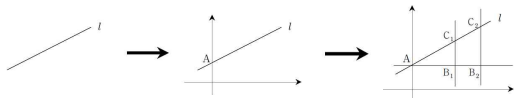
[그림 4] 수학 3-1 (교육부, 2018, pp. 30-31)

일부 초등 검정 교과서에서는 [그림 5]와 같이 끝은 선이나 직선성에 대한 추가 설명을 제공하기도 한다. 신향균 외(2022)의 교과서에는 끝은 선과 끝은 선에 대한 그림 예시를 제시하며 박성선 외(2022)의 교과서에서는 끝은 선을 ‘반듯하게 쪽 뺀 선’으로 설명한다. 한대회 외(2022)의 교과서는 끝은 선의 작도 방법으로 자를 소개하고 있다. 장혜원 외(2022)의 교과서는 끝은 선이라는 용어를 직접 사용하지는 않았지만 ‘두 점을 잇는 가장 짧은 선’이라는 표현을 통해 선분의 직선성을 암시하고 있다. 나머지 검정 교과서와 국정 교과서에서는 별도의 설명 없이 끝은 선을 무정의 용어로써 활동에 사용하였다.



[그림 5] 초등 검정 교과서에서 드러난 직선성

직선성은 선을 대수적으로 다루는 중등 수학에서도 드러난다. 중등 수학에서는 좌표평면 위에서 직선을 대수적으로 표현하는데, 이 과정에서 직선이 곧기 때문에 삼각형의 닮음에 의하여 x 값의 변화량에 대한 y 값의 변화량이 항상 일정하다([그림 6]). 이 일정한 두 값의 변화량의 비는 바로 기울기를 의미하며, 따라서 중등 교육과정에서 학습하는 기울기는 직선성을 함의하는 것이기도 하다(도종훈, 2008).



[그림 6] 중등 수학에서의 직선성 (도종훈, 2008)

나. 무한성에 대한 개념 이미지

개념 이미지(Concept image)란 개념과 관련된 모든 심상의 집합을 의미한다. 여기서 심상은 개념에 대한 기호, 다이어그램, 그래프와 같은 시각적 표상뿐만 아니라 개념에 대한 경험, 인상 등을 포함하는 비언어적이고 복합적인 집합체를 지칭한다. 개념 이미지는 개인의 다양한 경험에 영향을 받아 장기간에 걸쳐 변화하며 특정 개념과 관련된 개인의 인지 구조를 형성하게 된다. 이렇게 형성된 개념 이미지는 개념의 정의와 일치하지 않을 수 있으며, 이러한 불일치는 개념 학습과 문제 해결에 어려움을 초래할 수 있다(Tall & Vinner, 1981).

선은 다른 교과 및 일상생활에서 널리 사용되는 용어이며 학습 과정에서 선의 표상에 대한 작도 경험이 수반된다는 점에서 선분, 직선, 반직선 개념의 정의와 개념 이미지 간에 차이가 존재할 가능성이 크다. 특히 직선과 반직선이 지니는 무한성은 기하 영역뿐만 아니라 수학 전반에 걸쳐 중요한 개념이지만, 물리적 한계를 초월하는 특성이기에 초등학생들이 이를 올바르게 인식하고 이해하는 데에 상당한 어려움이 따른다(Fischbein et al., 1979; Hannula et al., 2006).

한편, 무한을 바라보는 관점 중에는 무한을 실제로 간주하는 실무한(實無限)적 관점과 무한을 가능성으로만 이해하는 가무한(假無限)적 관점이 있다(홍진곤, 2008). 실무한은 무한을 완성된 상태의 한 개체로 인식

하는 반면, 가무한은 무한을 실재하는 모든 단계에서 유한이지만 그것이 끝없이 계속 이어지는 과정으로 이해한다. 이러한 무한의 두 가지 측면은 이미 확립된 연구 분야로 자리 잡고 있으며(Monaghan, 2001), 무한을 과정으로 인식하는 것이 완성된 실체로 인식하는 것보다 더욱 직관적인 사고방식으로 간주된다(Fischbein, 2001; Tall, 2001). 따라서 초등학생에게 더욱 자연스러운 것은 가무한적 관점이라고 할 수 있다(Singer & Voica, 2008).

무한에 대한 학생들의 이해를 다룬 여러 연구에서는 실무한적 관점과 가무한적 관점을 포함하고 있다. 예를 들어 Hannula et al. (2006)은 수 개념과 관련된 무한성에 대한 학생들의 이해 수준을 세 가지 단계로 분류하였다. 첫째, 유한한 수만을 사용하고 무한성을 이해하지 못하는 단계, 둘째, 가무한을 이해하고 끝이 없는 과정들을 사용하는 단계, 셋째, 실무한을 개념화하고 지속적인 과정의 최종 결과를 인식하는 단계이다. 또한 Krátká et al. (2022)는 산술과 기하 맥락에서 무한성의 이해를 논의하며 가무한과 실무한적 관점에 대해 자연적 무한(natural infinity)에 대해 언급하였다. 자연적 무한이란 인식 주체가 대상을 인식할 때 그 규모가 대단히 커서 무한으로 인식하는 경우를 의미한다. 그러나 결국 이는 고정된 값이거나 끝이 있는 무한에 대한 이미지를 포함한다. 예를 들어 1조를 무한이라고 생각하거나 매우 길게 그려진 선을 무한이라고 여기는 것이다.

직선에 대한 인식 연구에서도 무한성에 대한 여러 표현과 개념 이미지가 드러난다. Jirotková(1998)는 예비 교사들의 직선의 무한성에 대한 표현을 언어적으로 분류하는 가운데, 직선에 대해 지속적인 생성 과정을 강조하는 표현과 직선을 완성된 하나의 개체로 표현하는 경우가 존재함을 논의하였다. 예를 들어 전자의 경우에는 ‘양쪽 방향으로 무한하게 이어진다’가 해당되며 후자의 경우에는 ‘시작점과 끝점이 없다’는 표현이 해당된다. Youkap(2021)의 연구에서도 학생들이 직선에 대해 가지는 이미지가 다양하게 나타났다. 예를 들어 ‘직선은 끝이 없는 선이다’, ‘직선은 선이다’, ‘직선은 끝은 선이다’와 같은 표현이 있었으며, ‘직선은 양쪽 끝이 있는 선이다’와 같은 표현을 통해 직선의 무한성에 대한 인지적 갈등을 불러일으킬 수 있는 개념 이미지도 확인되었다.

III. 연구 방법

1. 연구 참여자

본 연구의 참여자는 경기도 D 초등학교 3학년 10개 학급의 학생 220명으로 구성되었다. 한국교육과정평가원이 주관하여 2024년 3월에 실시한 맞춤형 학업성취도 자율평가¹⁾를 통해 학생들의 평균적인 학력 수준을 살펴볼 수 있다. 이 평가 결과에 따르면 수리력에 대한 성취수준이 ‘상’인 학생은 전체의 69.3%, ‘중’인 학생은 전체의 25.9%, ‘하’인 학생은 전체의 4.8%로 나타났다. 이를 통해 본 연구에 참여한 학생들의 평균 학력 수준은 ‘중상’에서 ‘상’ 정도로 평가된다.

본 연구를 수행할 당시, 학생들은 2015 개정 교육과정에 따른 3학년 1학기의 <2. 평면도형> 단원을 학습하고 단원평가 및 수행평가를 완료한 상태였다. 해당 단원의 교수학습은 각기 다른 교사에 의해 진행되었다는 점과 평균적인 학력 수준으로 인해 본 연구의 결과를 일반화하는 데에는 제한점이 존재한다.

2. 자료 수집

선분, 직선, 반직선 개념에 대한 조사 문항 및 분석 기준을 개발하기 위해 두 차례의 사전 조사를 실시하였다. 1차 사전 조사는 연구 참여자 중 일부인 D초등학교 3학년 1개 학급(28명)을 대상으로 진행되었고 2차 사전 조사는 인천시 소재의 I초등학교 3학년 1개 학급(26명)을 대상으로 실시되었다. 각 사전 조사의 전후에 초등교사 3인(연구자 포함)이 조사 문항에 대해 논의하여 수정을 거쳤으며 그 과정은 [표 4]와 같다.

[표 4] 조사 문항의 수정 과정

1차 사전 조사 문항	선분, 직선, 반직선의 뜻을 적어 보세요.
2차 사전 조사 문항	선분, 직선, 반직선에 대해 자유롭게 설명해 보세요.
확정된 조사 문항	선분, 직선, 반직선은 각각 어떤 선인가? 설명을 글로 적어 보세요.

1) 맞춤형 학업성취도 자율평가에서 수리력 영역의 평가 내용은 초등학교 2학년 수학 전반이다.

1차 사전 조사 결과, 많은 학생들이 교과서에서 약속된 의미를 그대로 기재하는 문제로 인식하였고 암기를 하지 못한 일부 학생들이 응답을 포기하는 경우가 많았다. 이에 따라 2차 사전 조사 문항을 ‘자유롭게 설명해 보세요’라는 문구로 수정하였으나 그 결과, 그럼만으로 답변하는 경우가 빈번하게 발생하였다. 따라서 선분, 직선, 반직선이 각각 어떤 선인지 묻는 문항에 대해 설명을 글로 작성하도록 요구하는 내용을 포함하여 조사 문항을 확정하였다.

조사 문항이 확정된 후, 각 학급 담임 교사들에 의해 자료 수집이 진행되었다. 10개 학급 학생들의 응답 자료가 모두 수집되는 데에 약 3주간의 시간이 소요되었다. 분석의 신뢰도를 높이기 위해 총 220명의 응답 자료 중 무응답, 의미가 불분명한 응답, 다른 선과 착각한 것이 명백한 응답은 분석 대상에서 제외되었다. 분석 자료를 충분히 확보하기 위해 한 학생의 세 선에 대한 응답 중 일부가 제외되더라도 나머지 응답은 분석 대상에 포함하였다. 이로 인해 선분, 직선, 반직선에 대한 분석 자료의 수에 차이가 발생하였다. 최종적으로 선분과 직선에 대해서는 200명, 반직선에 대해서는 192명의 응답이 분석 대상으로 집계되었다.

[표 5] 응답 자료의 수

		(단위: 명)		
		선분	직선	반직선
분석 대상		200	200	192
분석 제외	무응답	8	7	12
	의미 불분명	7	5	6
	착각	5	8	10
계		220		

3. 자료 분석 방법

이론적 배경에서 살펴본 바와 같이, 국내 교과서에서 선분, 직선, 반직선 개념은 비교적 일관되게 정의되었다. 세 선은 공통적으로 끝은 선이라는 특성을 가지므로 첫 번째 분석 기준을 ‘직선성을 적절히 표현하였는가?’로 설정하였다. 두 번째 분석 기준으로는 선분에 대해서는 ‘유한성을 적절히 표현하였는가?’, 직선과 반직선에 대해서는 ‘무한성을 적절히 표현하였는가?’로 설정하였다.

두 분석 기준과 관련하여 적절히 표현하였는지에 대한 판단 기준이 필요하다. 판단 기준을 마련하기 위해 본 연구자는 1차 및 2차 사전 조사 결과와 국내 및 외국 교과서의 표현, 관련 선행 연구를 분석하여 적절하다고 판단되는 표현과 적절하지 않다고 판단되는 표현을 수집한 후 범주화하고 대표 예시를 선정하였다. 또한 객관성과 타당성을 확보하기 위해 2인의 초등학교사와 함께 논의 및 검토 과정을 거쳤다. 그 결과, 분석 기준 1, 2에 대해 다음 [표 6], [표 7]과 같은 판단 기준을 마련하였다.

따라서 학생의 응답이 [표 6]의 범주에 해당하는 경우 적절한 표현으로 판단하고 [표 7]의 범주에 해당하는 경우 적절하지 않은 표현으로 판단한다. 모든 표현들은 모두 ‘~다’의 종결어미를 갖는 표준형으로 나타내었으며 제시된 예는 일부에 불과하다는 점에 유의해야 한다. 따라서 제시된 예와 표현이 다를지라도 같은 범주에 포함된다는 판단될 경우 적절하다고 평가하였다. 판단이 어려울 때에는 2인의 초등학교사와 함께 교차 검토 및 논의를 거쳐 범주의 경계를 명확히 하거나 필요한 경우 범주의 영역을 새로 정하거나 수정하였다.

[표 6] 분석 기준 1, 2에 대한 적절한 표현

	범주	설명과 예
직선성	‘곧다’와 그 유의어	‘곧다’ 혹은 ‘곧다’와 유사한 의미를 지닌 표현 (반듯하다, 일자이다)
	‘곧다’의 반의어에 대한 부정	‘굽다’, ‘휘다’ 등에 대한 부정 표현 (구부러지지 않다, 휘지 않다)
	최단 경로	두 점을 이은 최단 경로라는 표현 (두 점을 가장 짧게 잇다)
유한성	작도/연결	두 점에 대한 작도 행위나 두 점의 연결 상태에 대한 표현 (두 점을 잇다, 점에서 점까지 가다)
	끝	선의 끝마침이나 끝점의 존재에 대한 표현 (양쪽에 끝점이 있다)
	무한성에 대한 부정	끝없이 이어지거나 점에서 더 이어지는 것에 대한 부정 표현 (점에서 더 늘어나지 않다)
	두 점 사이의 유한	점과 점의 사이에 존재하는 선의 위치에 대한 표현 (두 점 사이에 있다)
무한성	가무한적 표현	선이 무한히 이어지는 과정에 대한 표현 (양쪽으로 끝없이 이어지다)
	실무한적 표현	무한한 선을 완성된 개체로 보는 표현 (한쪽 끝이 없다)

[표 7] 분석 기준 1, 2에 대한 부적절한 표현

	범주	설명과 예
직선성	모호한 표현	직선성을 의미한다고 보기 어려운 모호한 표현 (모양과 크기가 일정하다, 쪽 늘어지다)
	무응답	직선성을 의도한 것으로 보이는 표현이 없는 경우
유한성	기준(두 점, 양쪽 등)의 부재	두 점, 시작점과 끝점, 양쪽, 양방향과 같은 기준이 없는 표현 (점을 잇다, 점을 연결하다, 끝나다, 끝이 있다)
	무응답	유한성을 의도한 것으로 보이는 표현이 없는 경우
무한성	불충분한 가무한적 표현	가무한적 표현에서 방향(양쪽, 한쪽) 혹은 무한에 대한 명시적 언급이 없는 경우 (끝없이 이어지다, 양쪽으로 이어지다)
	불충분한 실무한적 표현	실무한적 표현에서 방향(양쪽, 한쪽)에 대한 명시적 언급이 없는 경우 (끝이 없다, 끝점이 없다)
	점을 넘은 선의 일부	선이 점을 넘는다는 것이나 넘어서 이어지는 선의 일부에만 초점을 두고 서술하는 경우 (선이 양쪽 점을 넘다, 양쪽 점에서 튀어나오다)
	점의 위치	선 위에 있는 점의 위치에 대해 서술하는 경우 (점이 선의 중간에 있다)
	무응답	무한성을 의도한 것으로 보이는 표현이 없는 경우

분석 기준에 따라 직선성, 유한성, 무한성을 적절히 표현하였는지 판단하고 그 여부에 따라 유형 1부터 유형 4까지 분류하였다([표 8]). 선분, 직선, 반직선의 유형별 빈도 분석을 실시하고 직선성과 유한성, 무한성에 대한 표현을 분석하였다. 그리고 세 선의 각 유형에 대한 세부 사례를 살펴보았으며, 마지막으로는 학생들이 선에 대해 갖고 있는 개념 이미지에 대해 논의하였다.

[표 8] 분석 기준과 유형 분류

분석 기준 1 \ 분석 기준 2		유한성/무한성을 적절히 표현하였는가?	
		○	×
직선성을 적절히 표현하였는가?	○	유형 1	유형 2
	×	유형 3	유형 4

IV. 연구 결과

1. 빈도 분석

가. 선분, 직선, 반직선의 유형별 빈도

선분의 유형별 빈도를 분석한 결과, 비율이 가장 높은 순서로 유형 3, 유형 1, 유형 2, 유형 4가 나타났다. 선분에 대해 적절히 설명한 유형 1에 비해 유한성을 적절히 표현하면서도 직선성을 충분히 반영하지 못한 유형 3의 비율이 더 높았다. 또한 전체 200명의 응답 중 선분의 직선성을 적절히 표현한 응답자는 93명으로 46.5%에 해당하며, 선분의 유한성을 적절히 표현한 응답자는 148명으로 74%에 달하였다([표 9]).

[표 9] 선분의 유형별 빈도 분석

(단위: 명)

선분 (n=200)	유한성을 적절히 표현하였는가?	유한성을 적절히 표현하였는가?		계
		○	×	
직선성을 적절히 표현하였는가?	○	64 (32%)	29 (14.5%)	93 (46.5%)
	×	84 (42%)	23 (11.5%)	107 (53.5%)
계		148 (74%)	52 (26%)	200

직선의 유형별 빈도를 분석한 결과, 비율이 가장 높은 순서로 유형 4, 유형 3, 유형 2, 유형 1이 나타났다. 직선에 대해 적절히 설명한 유형 1의 비율은 네 가지 유형 중에서 가장 낮았다. 또한 전체 200명의 응답 중 직선의 직선성을 적절히 표현한 응답자는 49명으로 24.5%를 차지하며, 직선의 무한성을 적절히 표현한 응답자는 67명으로 33.5%에 해당하였다([표 10]).

[표 10] 직선의 유형별 빈도 분석

(단위: 명)

직선 (n=200)	무한성을 적절히 표현하였는가?	무한성을 적절히 표현하였는가?		계
		○	×	
직선성을 적절히 표현하였는가?	○	14 (7%)	35 (17.5%)	49 (24.5%)
	×	53 (26.5%)	98 (49%)	151 (75.5%)
계		67 (33.5%)	133 (66.5%)	200

반직선의 유형별 빈도를 분석한 결과, 비율이 가장 높은 순서로 유형 4, 유형 3, 유형 1, 유형 2가 나타났다. 반직선에 대해 적절히 설명한 유형 1의 비율은 네 가지 유형 중에서 두 번째로 낮았다. 또한 전체 192명의 응답 중 반직선의 직선성을 적절히 표현한 응답자는 34명으로 17.7%에 해당하며, 반직선의 무한성을 적절히 표현한 응답자는 84명으로 43.8%에서 해당하였다([표 11]).

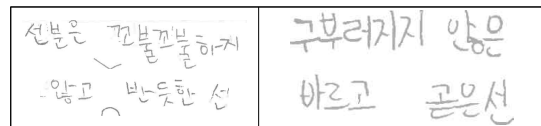
[표 11] 반직선의 유형별 빈도 분석

(단위: 명)

반직선 (n=192)	무한성을 적절히 표현하였는가?	무한성을 적절히 표현하였는가?		계
		○	×	
직선성을 적절히 표현하였는가?	○	19 (9.9%)	15 (7.8%)	34 (17.7%)
	×	65 (33.9%)	93 (48.4%)	158 (82.3%)
계		84 (43.8%)	108 (56.2%)	192

나. 직선성에 대한 표현 분석

직선성에 대한 적절한 표현은 선분에서 가장 많은 비율인 46.5%가 나타났으며, 그 다음으로 직선이 24.5%, 반직선이 17.7%의 비율을 기록하였다. 구체적으로 살펴보면, 선분의 직선성을 표현한 93명의 응답에서 총 102회의 표현이 나타났다. 93명 중 7명은 직선성에 대해 2개의 표현을 사용하였으며, 1명은 3개의 표현을 사용하였고([그림 7]) 나머지 85명은 모두 1개의 표현을 사용하였다. 직선과 반직선의 경우, 각각 49명과 34명의 응답에서 직선성이 드러났으며 이들 모두의 응답에서 직선성은 1번씩만 표현되었다. 직선성에 대한 적절한 표현과 그 빈도는 다음 [표 12]와 같다.



[그림 7] 선분의 직선성을 중복하여 표현한 경우

2) 한 응답에서 여러 개의 표현이 나타나는 경우, 각 표현에 대해 1회씩 포함된 것으로 간주하였다. 예를 들어 '선분은 꼬불꼬불하지 않고 반듯한 선'에서는 '꼬불꼬불하지 않다'와 '반듯하다'가 각 1회로 계산된다. 이 방식은 유한성과 무한성에 대한 표현의 분석에도 일관되게 적용된다.

[표 12] 직선성에 대한 적절한 표현과 빈도
(단위: 회)

범주	선분	직선	반직선	계	
'곧다'와 그 유의어	곧다	59	37	26	122
	반듯하다	17	4	2	23
	일자이다	10	4	3	17
	똑바르다	3	2	1	6
	바르다	4	0	1	5
	일직선이다	2	0	0	2
'곧다'의 반의어에 대한 부정	구부러지지 않다	4	2	1	7
	휘지 않다	1	0	0	1
	꼬불꼬불하지 않다	1	0	0	1
최단 경로	두 점을 가장 짧게 잇다	1	0	0	1
계	102	49	34	185	

세 선 모두에서 가장 많이 사용된 표현은 교과서의 표현인 '곧다'로, 선분, 직선, 반직선의 직선성에 대한 적절한 표현 중에서 각각 57.8%, 75.5%, 76.5%라는 높은 비율을 차지하였다. 선분의 직선성에 대한 표현 종류는 10개로 나타났으며, 직선의 경우 5개, 반직선의 경우 6개로 집계되었다. 한편, 선분의 경우에는 직선성을 의도한 것으로 보이는 모호한 표현이 존재하였다. 이러한 모호한 표현으로는 '쭉 늘어지다', '일정하다', '길쭉하다', '모양과 크기가 일정하다'가 각각 한 번씩 나타났다. 여기서 '쭉 늘어지다'라는 표현은 '쭉 늘어진 직선'과 같이 직선의 무한성을 의미하기 위해 사용되는 경우가 존재하는 것으로 보아, 사용하는 맥락에 따라 해석이 달라질 수 있는 모호한 표현으로 판단되었다. 반면, 직선과 반직선의 경우에는 직선성에 대한 모호한 표현은 존재하지 않았으며, 모두 직선성에 대한 무응답으로 나타났다. 그러나 직선성에 대한 무응답으로 판단된 설명 중에는 '반직선은 반만 직선이다'와 같이 한 선을 이용해 다른 선을 설명한 표현이 포함되어 있었다. 이러한 경우는 다른 선의 직선성을 암묵적으로 활용한 것으로 해석될 여지가 있다. 이에 대해서는 선에 대한 개념 이미지 중 하나로 정하여 추후 논의하도록 한다.

종합적으로 볼 때, 직선성에 대한 표현은 선분, 직선, 반직선 순서로 높은 비율로 나타났다. 또한 직선성에 대한 표현의 종류에서도 선분이 가장 많았으며 상

대적으로 '곧다' 이외의 다양한 표현이 나타남을 확인하였다.

다. 선분의 유한성에 대한 표현 분석

선분의 유한성에 대해 적절히 표현한 148명의 응답에서 중복을 포함하여 156회의 표현이 나타났으며 각 표현의 범주와 빈도는 다음 [표 13]과 같다.

[표 13] 선분의 유한성에 대한 적절한 표현
(단위: 회)

범주	표현	빈도 (비율)
작도/연결	두 점을 잇다/그리다/긋다/연결하다. 두 점이 선과 만나다. 점에서 점까지 가다/늘이다/뻗다.	97 (62.2%)
끝	시작(점)과 끝(점)이 있다. 끝과 끝이 있다. 양 끝에 점이 있다. 한 점에서 시작하여 한 점에서 끝난다. 양쪽 끝에서 멈춘다.	35 (22.4%)
무한성에 대한 부정	점과 점을 넘지 않다/뛰어나오지 않다/나가지 않다/지나지 않다. 두 점보다 길지 않다	16 (10.3%)
두 점 사이의 유한	두 점의 안에 있다. 점과 점의 사이에 있다. 점에서 점까지에 있다.	8 (5.1%)
계		156

가장 빈번하게 나타난 표현 범주는 '작도/연결'로, 총 97회 나타나 전체의 62.2%에 해당하였다. '끝' 범주는 35회 나타났으며 이는 전체의 22.4%에 해당한다. '무한성에 대한 부정' 범주는 16회로 전체의 10.3%에 해당한다. 마지막으로 '두 점 사이의 유한' 범주는 8회 나타났으며, 5.1%를 차지하였다.

한편, 선분의 유한성에 대해 적절하지 않은 표현은 52명에게서 관찰되었다. 이 중 24명은 '양쪽' 또는 '두 점'이라는 표현이 결여된 '기준의 부재' 범주에 해당하였다. 예를 들어, '끝이 있는 선', '점에 맞게 선이 이어진 것', '선분은 안 튀어나온다'와 같은 표현이 포함되었다. 나머지 28명은 '무응답'으로 분류되었는데 이 중에는 '선분은 딱 그은 다음 맨 오른쪽, 왼쪽에 점을 그리는 것'과 같이 작도의 순서를 역으로 서술하거나 '어떤 점이랑 어떤 점이랑 붙어 있는 선'과 같이 모호한 표현을 사용해 유한성을 나타낸다고 보기 어려운 경우가 있었다.

라. 직선의 무한성에 대한 표현 분석

직선의 무한성에 대해 적절히 표현한 67명의 응답을 분석한 결과, ‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 응답은 50회로 전체의 74.6%를 차지하였고 ‘실무한적 표현’ 범주에 속하는 응답은 17회로 25.4%를 차지하였다. ‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 응답은 ‘양쪽이 끝없이 늘어난다’, ‘양옆으로 끊임없이 쪽 가다’와 같이 직선을 완성된 형태가 아니라 지속적으로 생성되는 과정으로 서술하고 있다. 반면, ‘실무한적 표현’ 범주에 속하는 응답들은 ‘시작과 끝이 없다’, ‘양쪽 끝이 무한대로 있다’와 같이 직선을 완성된 형태로 서술하고 있다([표 14]).

[표 14] 직선의 무한성에 대한 적절한 표현

(단위: 회)		
범주	표현	빈도 (비율)
가무한적 표현	양쪽으로(두 점을 지나) 끝없이(무한히, 끊임없이) 이어지다/늘어나다/늘이다/뻗어나가다/가다/연장하다/그어지다.	50 (74.6%)
실무한적 표현	시작(점)과 끝(점)이 없다. 양쪽 다 끝이 없다. 양쪽 끝이 제한이 없다. 점에서 시작하지 않고 점에서 끝나지 않는다. 양쪽 끝이 무한대로 있다.	17 (25.4%)
계		67

한편, 직선의 무한성에 대한 부적절한 표현으로는 ‘불충분한 가무한적 표현’, ‘불충분한 실무한적 표현’, ‘점을 넘은 선의 일부’, ‘점의 위치’, ‘무응답’ 범주가 확인되었다. 가장 많은 비율을 차지한 것은 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주로 60회의 응답이 해당되어 45.1%를 차지하였다. 그 다음으로는 ‘불충분한 가무한적 표현’ 범주에 44회의 응답이 포함되어 전체의 33.1%를 차지하였다. 이 범주에는 양쪽 방향에 대한 언급이 없는 경우가 23회로 가장 많았고 무한에 대한 언급이 없는 경우가 14회, 양쪽과 무한에 대한 언급이 모두 없는 경우가 7회 있었다. 그 다음으로 ‘무응답’ 범주는 8회의 응답이 해당되어 전체의 6%를 차지하였고, ‘선 안에 점과 점이 있다’와 같이 ‘점의 위치’ 범주에 해당하는 응답은 4회로 전체의 3%에 해당하였다. 구체적인 표현과 빈도는 [표 15]와 같다.

[표 15] 직선의 무한성에 대한 부적절한 표현

(단위: 회)		
범주	표현	빈도 (비율)
불충분한 가무한적 표현	(양쪽에 대한 언급 없이) 끝없이 이어지다/뻗다/놓이다.	23
	(무한에 대한 언급 없이) 양쪽으로 이어지다/뻗다/늘리다	14
	(양쪽과 무한에 대한 언급 없이) 쪽 이어지다/뻗다/늘리다	7
불충분한 실무한적 표현	(양쪽에 대한 언급 없이) 끝이 없다.	17 (12.8%)
점을 넘은 선의 일부	두 점을 넘다/뛰어나오다/뿔기다/지나다/뚫다/통과하다. 두 점 보다 길다.	60 (45.1%)
점의 위치	선 안에 점과 점이 있다. 양쪽 점이 중간에(조금 앞에) 있다.	4 (3%)
무응답	-	8 (6%)
계		133

마. 반직선의 무한성에 대한 표현 분석

반직선의 무한성에 대해 적절히 표현한 84명의 응답을 분석한 결과, ‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 응답은 57회로 전체의 67.9%를 차지하였고 ‘실무한적 표현’ 범주에 속하는 응답은 27회로 32.1%를 차지하였다. 구체적인 표현과 빈도는 [표 16]과 같다.

[표 16] 반직선의 무한성에 대한 적절한 표현

(단위: 회)		
범주	표현	빈도 (비율)
가무한적 표현	(한 점에서 시작해) 한쪽으로(만) 끝없이(무한히) 늘이다/이어지다/나아가다/뻗다/가다/놓이다.	57 (67.9%)
실무한적 표현	시작(점)은 있고 끝(점)이 없다. 시작해서 끝이 없다. 한쪽만 끝이 없다. 한쪽만 끝이 있다.	27 (32.1%)
계		84

‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 표현은 ‘한 점에서 시작해 한쪽으로 끝없이 늘이다’, ‘한쪽만으로 무한히 나아가다’와 같이 반직선을 완성된 형태가 아니라 지속적으로 생성되는 과정으로 서술하고 있다. 반면, ‘실무한적 표현’ 범주에 속하는 표현으로는 ‘시작은 있고 끝이 없다’, ‘한쪽만 끝이 없다’와 같이 반직선을 완성된 형태로 서술하고 있다.

한편, 반직선의 무한성에 대한 부적절한 표현으로는 ‘불충분한 가무한적 표현’, ‘점을 넘은 선의 일부’, ‘점의 위치’, ‘다른 선 이용’, ‘무응답’ 범주가 확인되었다. 가장 많은 비율을 차지한 것은 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주로 53.7%였으며, 그 다음으로 ‘불충분한 가무한적 표현’ 범주가 28.7%를 차지하였다. 이 범주에는 무한에 대한 언급이 없이 ‘한쪽으로 늘이다’나 ‘한쪽만 쪽 뻗다’와 같은 표현이 가장 많이 포함되었다. 또한 반직선의 경우, 다른 선을 이용하여 반직선을 표현하는 과정에서 오류가 있는 경우가 많아 이를 ‘다른 선 이용’ 범주로 새롭게 범주화하였다. 이 범주에는 ‘반만 직선이다’, ‘직선과 선분을 같이 합친 선이다’와 같은 표현이 포함되며 12%가 해당되었다. 마지막으로 ‘점의 위치’와 ‘무응답’ 범주는 각각 4.6%와 0.9%가 해당되었다.

[표 17] 반직선의 무한성에 대한 부적절한 표현 (단위: 회)

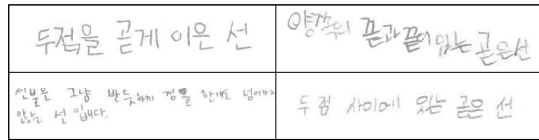
범주	표현	빈도	비율
불충분한 가무한적 표현	(무한에 대한 언급 없이) 한쪽으로(한쪽만) 늘이다/이어지다/뻗다/가다.	29	31 (28.7%)
	(한쪽에 대한 언급 없이) 끝없이 놓이다. 점에서 계속 늘어나다.	2	
점을 넘은 선의 부분	선이 한 점을(한쪽을) 넘다/뺀다/지나다/빠져나가다/나오다/뚫다. 반만 뚫다/나오다/튀어나오다. 한쪽만 더 길다.	58	(53.7%)
점의 위치	한 점은 끝에 있고 한 점은 조금 앞에(가운데에) 있다. 점이 선의 가운데와 오른쪽 아니면 왼쪽에 있다.	5	(4.6%)
다른 선 이용	반만 직선이다. 직선과 선분을 같이 합친 선이다. 직선에서 한쪽만 무한으로 이어지는 선이다. 왼쪽 끝에는 점을 그리고 오른쪽은 직선처럼 그린다.	13	(12%)
무응답	-	1	(0.9%)
계		108	

2. 유형별 사례 분석

선분, 직선, 반직선에 대한 유형별 빈도 분석 결과는 각각 [표 9], [표 10], [표 11]과 같으며 이를 바탕으로 유형별 응답 내용을 분석한 결과는 다음과 같다.

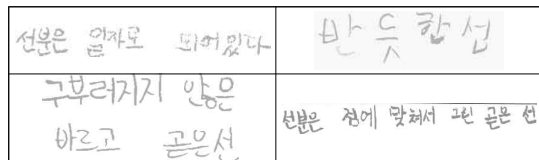
가. 선분

[표 9]에서 분석한 바에 따르면, 선분의 직선성과 유한성을 모두 적절히 표현한 유형 1에 해당하는 응답은 64명으로 선분에 대한 전체 응답의 32%에 해당하였다. 64명의 학생들에게서 유한성에 대한 85회의 표현이 나타났다. 이 중에서 ‘작도/연결’ 범주는 52회 나타났으며 특히 2015 개정 교육과정의 정의인 ‘두 점을 끈게 이은 선’과 동일한 응답은 17회였다. 또한 ‘양쪽의 끝과 끝이 있는 끈은 선’과 같은 ‘끝’ 범주는 8회, ‘선분은 그냥 반듯하게 점을 한 개도 넘어가지 않는 선입니다’와 같은 ‘무한성에 대한 부정’ 범주는 6회가 해당하였다. 마지막으로 ‘두 점 사이의 유한’ 범주는 2회 나타났으며, 이들은 ‘두 점 사이에 있는 끈은 선’과 ‘선분은 점과 점 사이 반듯한 선’이라고 응답하였다([그림 8]).



[그림 8] 선분 유형 1(직선성과 유한성을 모두 적절히 표현한 경우)

선분의 직선성만을 적절히 표현한 유형 2에 해당하는 응답은 29명으로 선분에 대한 전체 응답의 14.5%에 해당하였다. 이 중 23명의 학생은 ‘선분은 일자로 되어 있다’, ‘반듯한 선’, ‘구부러지지 않은 바르고 끈은 선’과 같이 유한성에 대한 언급을 전혀 하지 않았다. 반면, 6명의 학생은 두 점이나 양쪽에 대한 언급이 없는 ‘기준의 부재’ 범주에 해당하였다. 이 학생들은 ‘점에 맞춰서 그린 끈은 선’, ‘일자로 점에 튀어나오지 않는다’, ‘일자가 막혀있다’, ‘일자로 쪽 이어져 있는 선이 점을 만나면 멈춘다’, ‘어떤 기준 안에 맞게 들어간 끈은 선’, ‘정해진 점으로 조금 더 늘려지지 않고 딱 일자인 것’이라고 응답하였다([그림9]).



[그림 9] 선분 유형 2(직선성만을 적절히 표현한 경우)

선분의 유한성만을 적절히 표현한 유형 3에 해당하는 응답은 84명으로, 선분에 대한 전체 응답의 42%를 차지하였다. 84명의 응답에서 중복을 포함하여 유한성에 대한 88회의 표현이 있었다. ‘두 개의 점이 만나는 선’과 같이 ‘작도/연결’ 범주의 표현은 45회 나타났으며, ‘시작하는 점과 끝나는 점이 있는 선’과 같이 ‘끝’ 범주의 표현은 27회 나타났다. ‘점과 점 사이를 벗어나지 않는다’와 같이 ‘무한성에 대한 부정’ 범주는 10회가 포함되었다. 마지막으로 ‘선이 점과 점 안에 있는 걸 선분이라고 합니다.’, ‘끝의 점과 점을 넘어가지 않고 완벽하게 들어간 선’과 같이 ‘두 점 사이의 유한’ 범주는 6회 해당하였다(그림 10).

두 개의 점이 만나는 선	시작하는 점과 끝나는 점이 있는 선
점과 점 사이를 벗어나지 않는다.	선이 점과 점 안에 있는 걸 선분이라고 합니다.

[그림 10] 선분 유형 3(유한성만을 적절히 표현한 경우)

선분의 직선성과 유한성을 모두 적절히 표현하지 않은 유형 4에 해당하는 응답은 23명으로, 선분에 대한 전체 응답의 11.5%에 해당하였다. 이 중 15명은 ‘끝이 있는 선’, ‘선이 점을 만나는 것’, ‘점에 맞게 선이 이어진 것’과 같이 두 점이나 양쪽에 대한 언급이 없는 ‘기준의 부재’ 범주에 속하였다. 23명 중 8명은 ‘쭙늘어진 선’, ‘모양과 크기가 일정한 선’, ‘길쭉한 선’, ‘선분은 딱 그은 다음 맨 오른쪽과 왼쪽에 점을 그리는 것입니다’와 같은 다양한 응답을 보였다(그림 11).

끝이 있는 선	선이 점을 만나는 것
쭙 늘어진 선	모양과 크기가 일정한 선

[그림 11] 선분 유형 4(직선성과 유한성을 모두 적절히 표현하지 않은 경우)

나. 직선

[표 10]에서 분석한 바에 따르면, 직선의 직선성과 무한성을 모두 적절히 표현한 유형 1에 해당하는 응답

은 14명으로 직선에 대한 전체 응답의 7%에 해당하였다. 이 중 ‘가무한적 표현’ 범주는 12명이었으며 특히 2015 개정 교육과정의 정의와 동일하게 ‘양쪽으로 끝없이 늘린 끈은 선’이라고 응답한 학생은 5명이었다. 또한 ‘실무한적 표현’ 범주는 2명이 해당되었으며 이들은 ‘끝이 없고 시작도 없는 끈은 선’, ‘처음부터 끝까지 끝이 없는 끈은 선’이라고 응답하였다(그림 12).

양쪽으로 끝없이 늘린 끈은 선	끝까지 않고 끝없이 늘린 선
끝이 없고, 시작도 없는 끈은 선	처음부터 끝까지 끝이 없는 끈은 선

[그림 12] 직선 유형 1(직선성과 무한성을 모두 적절히 표현한 경우)

직선의 직선성만을 적절히 표현한 유형 2에 해당하는 응답은 35명으로, 직선에 대한 전체 응답의 17.5%에 해당하였다. 이 중 ‘불충분한 가무한적 표현’ 범주는 14명으로 ‘끝없이 이은 끈은 선’과 같이 양쪽 방향에 대해 언급하지 않은 경우가 9명, ‘곧고 양옆으로 늘린 선’과 같이 무한 표현의 부재가 5명이었다. ‘불충분한 실무한적 표현’ 범주는 7명으로 ‘끝이 없는 끈은 선’과 같은 응답이 포함되고 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주 또한 7명으로 ‘점과 점을 넘은 끈은 선’이 해당된다. ‘점의 위치’ 범주는 2명으로 ‘반듯하게 되어 있고 양쪽에 점이 있다’와 같이 응답하였다. ‘무응답’ 범주는 5명이었다(그림 13).

끝없이 이은 끈은 선	곧고 양옆으로 늘린 선
끝이 없는 끈은 선	점과 점을 넘은 끈은 선

[그림 13] 직선 유형 2(직선성만을 적절히 표현한 경우)

직선의 무한성만을 적절히 표현한 유형 3에 해당하는 응답은 53명으로, 직선에 대한 전체 응답의 26.5%에 해당하였다. 53명의 응답에서 직선성에 대한 표현은 전혀 등장하지 않았다. 한편, ‘양쪽으로 끝없이 길게 늘린 선’, ‘양쪽 끝이 무한으로 늘어나는 선’과 같이

무한성에 대해 ‘가무한적 표현’ 범주에 해당하는 학생은 38명이었다. ‘시작과 끝이 없는 선’, ‘시작점과 끝점이 없음’과 같이 ‘실무한적 표현’ 범주로 표현한 학생은 15명이었다(그림 14).

양쪽으로 끝없이 길게 늘어난 선	양쪽 끝이 무한으로 늘어나는 선
시작과 끝이 없는 선	시작점과 끝점이 없음

[그림 14] 직선 유형 3(무한성만을 적절히 표현한 경우)

직선의 직선성과 무한성을 모두 적절히 표현하지 않은 유형 4에 해당하는 응답은 98명으로, 직선에 대한 전체 응답의 49%에 해당하였다. 가장 많은 응답이 속한 범주는 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주로, 53회의 응답이 해당되었으며 ‘직선은 점과 점의 칸을 좀 넘는 것’, ‘직선은 두 점을 지나치는 선’ 등이 있었다. ‘불충분한 가무한적 표현’ 범주는 30회의 응답이 포함되었으며 이 중에 양쪽 방향에 대한 언급이 없는 경우는 14명으로 ‘끝없이 이어지는 선’, ‘계속 길게 늘어나는 것’과 같은 표현이 포함되었다. 또한 무한성에 대해 표현하지 않은 경우는 9회로 ‘직선은 양쪽 끝을 늘린 것’, ‘양쪽으로 쭉 늘어뜨린 선’과 같은 표현이 있었다. 마지막으로 양쪽 방향과 무한에 대해 모두 표현하지 않은 응답은 7명으로 ‘쭉쭉 늘어남’, ‘점 없이 쭉 이어진 선’과 같은 표현이 있었다. ‘점의 위치’ 범주에 속하는 응답은 2명으로 ‘양쪽 점이 조금 앞에 있는 선’, ‘선 안에 점과 점이 있다’라고 응답하였고 ‘무응답’ 범주에는 3명이 포함되었다(그림 15).

직선은 '와'의 칸을 넘은 것	직선은 양쪽 끝을 늘린 것.
쭉쭉 늘어남	선안에 점과 점이 있어

[그림 15] 직선 유형 4(직선성과 무한성을 모두 적절히 표현하지 않은 경우)

다. 반직선

[표 11]에서 분석한 바에 따르면, 반직선의 직선성과

무한성을 모두 적절히 표현한 유형 1에 해당하는 응답은 19명으로 반직선에 대한 전체 응답의 9.9%를 차지하였다. 19명의 응답 중 16명은 직선성을 ‘곧다’로 표현하였으며, 나머지 세 명은 각각 ‘반듯하다’, ‘구부러지지 않다’, ‘바르다’라는 표현을 사용하였다. 무한성에 대해 ‘가무한적 표현’와 ‘실무한적 표현’ 범주에 해당하는 응답은 각각 14명과 5명이었다. ‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 응답 중 2015 개정 교육과정의 정의인 ‘한 점에서 시작하여 한쪽으로 끝없이 늘린 곧은 선’과 동일하게 정의한 학생은 3명이었으며 그 외에도 ‘한 점에서 시작하여 한 점으로 끝없이 이어지는 곧은 선’, ‘선이 한쪽으로만 곧게 끝도 없이 뻗어져 있는 것’과 같은 응답이 포함되었다. 반면, ‘실무한적 표현’ 범주에 해당하는 5명의 응답에는 ‘한쪽만 끝이 없는 곧은 선’, ‘시작이 있고 끝이 없는 곧은 선’ 등이 포함되었다(그림 16).

한 점에서 시작하여 한 점으로 끝없이 이어지는 곧은 선	선이 한쪽으로만 곧게 끝도없이 뻗어져 있어
한쪽만 끝이 없는 곧은 선	시작이 있고 끝이 없는 곧은 선

[그림 16] 반직선 유형 1(직선성과 무한성을 모두 적절히 표현한 경우)

반직선의 직선성만을 적절히 표현한 유형 2에 해당하는 응답은 15명으로, 반직선에 대한 전체 응답의 7.8%를 차지하였다. 직선성에 대해 ‘곧다’는 표현은 10명, ‘일자이다’가 3명, ‘반듯하다’와 ‘똑바르다’가 각각 1명이었다. ‘불충분한 가무한적 표현’으로는 ‘한쪽 끝을 길게 늘린 곧은 선’, ‘한쪽만 곧게 뻗은 선’와 같이 무한에 대한 언급이 없는 경우가 7명이었다. ‘불충분한 실무한적 표현’에 해당하는 응답은 존재하지 않았다. ‘곧고 한쪽 끝이 점을 넘었다’와 같이 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주에는 5명이 포함되었고, ‘점이 옆으로 가져 있고 두 번째 점은 끝에 있다’와 같이 ‘점의 위치’ 범주에는 2명이 포함되었다. 반직선의 무한성에 대해 무응답인 학생은 1명으로 ‘반듯하게 되어 있는 것이 반직선’이라고 하였다(그림 17).

한쪽 끝을 길게 늘린 끝은 선	한 쪽 끝 한 끝이 점에 닿는 선
끝과 끝을 길게 늘린 선은 점에 닿는다	반대편하게 되어있는 것이 반대편

[그림 17] 반직선 유형 2(직선성만을 적절히 표현한 경우)

반직선의 무한성만을 적절히 표현한 유형 3에 해당하는 응답은 65명으로, 반직선에 대한 전체 응답의 33.9%를 차지하였다. 이 중 ‘가무한적 표현’ 범주에 속하는 응답자는 43명, ‘실무한적 표현’ 범주에는 22명이 포함되었다. ‘가무한적 표현’ 범주에 해당하는 응답으로는 ‘한쪽으로만 끝없이 늘린 선’, ‘한 점에서 시작해 끝없이 늘어난 선’ 등이 있었으며, ‘실무한적 표현’ 범주에 속하는 응답으로는 ‘한쪽만 끝이 있는 선’, ‘시작 점은 있고 끝이 없다’, ‘한쪽만 끝이 없고 한쪽은 끝이 있습니다’ 등이 관찰되었다([그림 18]).

한쪽으로만 끝없이 늘린 선	한 점에서 시작해 끝없이 늘어난 선
한 쪽만 끝이 있는 선	시작점은 있고 끝이 없다

[그림 18] 반직선 유형 3(무한성만을 적절히 표현한 경우)

반직선의 직선성과 무한성을 모두 적절히 표현하지 않은 유형 4에 해당하는 응답은 93명으로, 반직선에 대한 전체 응답의 48.4%를 차지하였다. 유형 4에 속하는 응답들은 공통적으로 직선성을 명시적으로 표현하지 않았다. ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주는 53명이 포함되었으며 이 범주에 해당하는 응답으로는 ‘점과 점이 한쪽으로 나가는 선’, ‘반직선은 한 점만 선이 점을 넘는 선입니다’, ‘두 점 중 하나의 점만 지난 선’ 등이 있었다. ‘불충분한 가무한적 표현’ 범주에는 무한에 대한 언급이 없는 응답이 22명 있었고, 예를 들어 ‘한쪽으로 쪽 이은 선’, ‘한쪽만 길게 이어진 선’과 같은 표현이 포함되었다. 또한 한쪽 방향에 대한 언급이 없는 경우는 2명으로 ‘한 선이 끝없이 놓인 것’, ‘점에서 계속 늘어나는 것’이라는 응답이 있었다. ‘점의 위치’ 범주에는

3명이 포함되었으며, 이들은 ‘한 점은 끝에 있고 한 점은 조금 앞에 있는 선’, ‘점이 선의 가운데와 오른쪽 아니면 왼쪽에 있다’, ‘반직선은 한쪽이 점 안에 있고 한 쪽은 점 밖에 있습니다’라고 응답하였다. 마지막으로, ‘다른 선 이용’ 범주에는 10명이 포함되었으며, 이들의 응답에는 ‘반대 직선인 선’, ‘시작이나 끝은 있지만 직선이랑 선분을 합쳐놓은 것 같다’, ‘직선에서 한쪽만 무한으로 이어지는 선’ 등이 있었다. 무응답 범주에는 3명이 포함되었다([그림 19]).

점과 점이 한쪽으로 나가는 선	반직선은 한 쪽만 선이 점을 넘는 선
한 쪽으로 곱이 있는 선	한 점은 끝에 있고 한 선은 삼각에 입은 것

[그림 19] 반직선 유형 4(직선성과 무한성을 모두 적절히 표현하지 않은 경우)

3. 개념 이미지 분석

지금까지의 분석을 토대로 하여 학생들이 선에 대해 가지고 있는 개념 이미지를 유형화하였다. 이 과정은 선행 연구를 기반으로 하되, 사례의 수가 적거나 선행 연구에 없는 유형일지라도 교수학습 과정에 시사점을 제공할 수 있다고 판단한 경우에는 포함하였다.

가. 개념 이미지가 선의 표상에 국한되는 유형

이 유형은 Moravcová & Hromadová(2020)와 Youkap(2021)의 연구에서 지적한 바와 같이, 직선과 반직선에 대한 개념 이미지가 유한한 길이의 선에 머물러 있는 경우이다. 직선과 반직선의 무한성에 대한 잘못된 표현 중 ‘점을 넘은 선의 일부’와 ‘점의 위치’ 범주가 이 유형에 속하며 직선과 반직선에 대한 응답 중 각각 32%와 32.8%를 차지한다.

특히 ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주에 해당하는 학생들이 많았는데, 직선은 200명 중 60명(30%), 반직선은 전체 192명 중 58명(30.2%)이 해당되었다. 이 학생들은 선이 점을 넘어서 계속 이어진다는 상상을 하기보다는 점을 넘어간 유한한 길이의 선에 주목하였다. 예를 들어, 직선과 반직선을 각각 ‘두 점을 넘는 선’과 ‘한 점

을 넘은 선'으로 설명하였다. '넘다' 외에도 두 점(한 점을)을 '뛰어나오다', '튀기다', '나오다', '통과하다', '뚫다', '지나다', '벗어나다' 등으로 표현하였다.

'점의 위치' 범주는 직선에 대해 4명, 반직선에 5명이 해당되었다. 이 학생들은 선이 점을 넘어서 계속 이어진다는 상상을 하기보다는 선에 있는 점의 위치에 주목하였다. 예를 들어, 직선에 대해 '양쪽 점이 조금 앞에 있는 선', '선 안에 점과 점이 있다'고 표현하거나 반직선에 대해 '한 점은 끝에 있고 한 점은 조금 앞에 있는 선'이라고 설명하였다.

이러한 개념 이미지를 갖고 있는 학생들은 직선과 반직선을 구분할 때 선이 양쪽이나 한쪽으로 무한히 뻗어있는지보다는 다른 요소에 주목할 가능성이 크다. 다시 말해, 점을 넘어간 선이 몇 군데인지 혹은 선의 안쪽에 위치한 점의 수를 통해 직선과 반직선을 구분할 것이다. 이러한 방식으로 직선과 반직선을 올바르게 구분한다고 하더라도 각 개념에 대해 올바르게 이해한다고 보기는 어렵다.

나. 한 선을 다른 선을 이용하여 모호하게 표현하거나 오류가 있는 유형

선들 사이의 관계는 선에 대한 개념 형성에 영향을 줄 수 있기에(김상미, 2023) 한 선을 다른 선을 이용하여 표현하는 방식에 주목할 필요가 있다. 국내 교과서에서는 다른 선을 활용하여 한 선을 정의할 때, 선분을 늘려 직선과 반직선을 정의하는 방식만 존재하였다. 하지만 일부 외국 교과서에서는 선분이나 반직선을 '~한 직선의 일부분'으로 정의하기도 한다. 학생들의 응답에서도 선분, 직선, 반직선을 각각 설명할 때 다른 선을 이용하는 경우가 적지 않았는데, 이들 중 일부는 그 표현이 모호하거나 오류가 존재하였다.

표현이 모호하거나 오류가 존재하는 경우는 반직선이 가장 많았으며 20명의 응답이 이에 해당하였다. 예를 들어, 반직선을 '반만 직선이다', '직선과 선분을 합한 것'이라고 설명하였다. '반만 직선이다'라는 표현은 국내 교과서와 외국 교과서에서는 찾을 수 없는 표현으로 직선성과 무한성을 적절히 나타낸다고 볼 수 없다. 이러한 표현은 반직선이라는 용어에서 비롯된 것으로 추측할 수 있는데, 직선을 한 점을 기준으로 두 부분으로 나누었을 때, 한 부분을 반직선이라고 설명하는 것이 적절하다. 또한 '직선과 선분을 합한 것'이

라는 표현에서는 직선이 양옆으로 무한히 이어지기 때문에 직선에 무엇을 합하더라도 한쪽만 무한히 이어지는 반직선이 될 수는 없다. 이것은 양쪽으로 유한한 선인 선분과 양쪽으로 무한한 선인 직선을 학습한 후에 한쪽에 대해서는 선분처럼 유한하고 다른 한쪽에 대해서는 직선처럼 무한한 선을 반직선으로 인식하는 것으로 추측할 수 있다.

이와 더불어 선분과 직선의 경우에는 언뜻 보기에는 그럴듯하지만 자칫 혼동을 일으킬 수 있어 명료화할 필요가 있는 응답이 존재하였다. 예를 들어, 선분을 '점 두 개가 있으면 그 점을 넘지 않고 직선인 것'으로 설명한 바 있는데, 직선 앞에 있는 수식어가 직선의 무한성과 위배되어 적절하지 않으므로 혼동을 유발할 수 있다. 두 점을 넘지 않는 선은 무한한 직선의 유한한 부분이기 때문에 '두 점을 넘지 않는 직선의 일부분'과 같이 표현하고 인식하는 것이 더 명확하다. 직선의 경우에도 '양쪽으로 끝없이 가는 선분'이라고 설명한 응답이 있었는데, 선분 앞에 있는 수식어가 선분의 유한성과 위배되므로 '선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 선'이 보다 명확하다고 할 수 있다.

다. 개념 이미지가 가로 방향의 선에 국한되는 유형
이 유형에 속하는 학생은 16명으로 선분, 직선, 반직선을 설명할 때 '눅혀있다', '가로', '왼쪽', '오른쪽'이라는 표현을 사용하였다. 이것은 교과서에서 제시하는 선에 대한 대부분의 예시가 가로 방향인 것에 기인하여 형성된 개념 이미지라 볼 수 있다.

선분은 2명의 학생이 '일자로 반듯하게 눅혀있다', '선분은 가로로 점을 맞춰서 있는 것입니다'라고 응답하였다. 직선은 5명의 학생들이 이 유형에 속하였으며 '왼쪽, 오른쪽으로 끝없이 뻗어나가는 선', '직선은 가로로 쪽 늘려져 있는 것입니다', '직선은 딱 그 다음 맨 끝부분 말고 오른쪽과 왼쪽을 그립니다' 등과 같이 응답하였다. 마지막으로 반직선은 9명의 학생들이 이 유형에 속하였으며 '점이 선의 가운데와 오른쪽 아니면 왼쪽에 있다', '반직선은 선분같이 점부터 점까지인데 오른쪽이나 왼쪽이 튀어나온다', '왼쪽, 오른쪽 중 어느 한 곳으로만 뻗어나가는 선'이라고 설명하였다.

라. 선을 '줄'로 표현하는 유형

이규희(2021)는 선의 두께가 없음을 명시하지 않는

국내 교과서의 내용이 두께가 있는 선에 대한 개념 이미지를 유발할 수 있다고 하였다. 이 연구는 중등 교과서에 관한 것이지만 초등 수학 교과서에서도 선이 두께가 없음을 명시하지 않는 것은 동일하다. 특히 초등학생들은 교과서에서 일상에서의 사물이 등장하거나 구체물을 직접 다루는 경우가 많다. 교과서에서 선을 학습할 때에도 미술 작품의 선, 노끈, 실과 같은 예시가 활용되곤 한다. 또한 학생들의 선분, 직선, 반직선에 대한 응답에서도 ‘줄’이라는 용어를 사용하는 경우가 있는 것으로 보아, 두께가 있는 선에 대한 개념 이미지를 가질 위험성이 존재한다.

이 유형에는 10명 정도의 학생들이 포함되었다. 선분에 대해 5명의 학생들이 ‘...만든 다음 줄을 그으면 그게 선분입니다’, ‘점에서 딱 선을 점까지 줄을 긋는 것’, ‘선분은 점이 있는 곳까지만 줄이 연결되어 있다’ 등과 같이 표현하였다. 직선은 3명의 학생들이 이 유형에 속하였으며 ‘직선은 점까지는 가지 않고 갈 수 있는 곳까지 줄을 이을 수 있다’, ‘점과 점 사이를 꼭 곧게 끝없이 늘어나는 줄’이 포함되었다. 마지막으로 반직선은 2명의 학생이 ‘...한쪽만 끝없이 이어주는 곧은 줄’, ‘...한 개만 줄이 넘습니다’라고 표현하였다.

V. 결론 및 제언

선분, 직선, 반직선은 여러 기하학적 개념을 정의하는 데 중요한 역할을 하며 직선성과 유한성, 무한성이라는 직관적인 특성을 내포하고 있다. 그러나 선분, 직선, 반직선 개념에 대한 학생들의 이해를 다룬 연구는 상대적으로 미비한 상황이다. 이에 본 연구에서는 초등학교 3학년 학생들의 선분, 직선, 반직선에 대한 설명을 바탕으로 이들 개념에 대한 학생들의 이해를 분석하였다. 분석 결과, 도출된 연구의 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 직선성에 대한 학생들의 적절한 표현은 선분(46.5%), 직선(24.5%), 반직선(17.7%) 순으로 많이 나타났다. 물론 이러한 결과는 선이 갖는 다른 특성에 의해 영향을 받을 수 있다. 예를 들어 반직선에 대해, 학생들이 무한성에 집중하여 설명하다 보니 직선성에 대한 표현이 누락되었을 가능성이 있다. 따라서 직선성을 적절하게 표현한 학생들만 직선성 개념을 올바르게

이해한다고 해석하는 것은 위험하다. 그것보다는 직선성을 적절하게 표현한 학생들은 직선성 개념을 올바르게 이해한 학생 중에 다른 특성에 치우쳐 누락시키지 않을 정도로 직선성을 인식하고 있으며 정확한 표현 방법을 숙지하고 있는 학생 정도로 해석하는 것이 더 적절하다. 이러한 관점에서 살펴보면, 선분은 유한성을 적절하게 표현한 비율(74%)이 직선성을 적절하게 표현한 비율보다 높고, 직선과 반직선도 무한성을 적절하게 표현한 비율(각각 33.5%, 43.8%)이 직선성을 적절하게 표현한 비율보다 높다. 이는 학생들이 선을 설명할 때 직선성보다는 다른 특성을 더 강조하여 서술한다는 것을 의미한다. 도종훈(2008)이 언급한 바와 같이, 직선성은 중등 수학에서 직선의 기울기를 정의 가능케 하는 선의 특성이기에 결코 간과할 수 없는 요소이다. 따라서 선분, 직선, 반직선의 직선성에 대한 인식을 높일 수 있는 교수학습 활동이 필요하다. 예를 들어, 곧은 선과 굽은 선을 비교하는 활동을 보충 및 심화하거나 선분, 직선, 반직선의 공통점을 찾는 활동을 통해 세 선의 직선성을 더욱 명확히 드러낼 수 있을 것이다.

둘째, 선분의 유한성에 대해서는 전체 학생의 74%가 적절하게 표현한 반면, 직선과 반직선의 무한성에 대해서는 각각 33.5%와 43.8%의 학생들이 적절한 표현을 사용하였다. 이는 초등학생들의 무한성에 대한 인식이 어렵다는 선행 연구들의 견해와 일치하는 것이다(Fischbein et al., 1979; Hannula et al., 2006). 구체적으로 선분의 유한성에 대한 적절한 표현 중에는 ‘두 점을 이은 선’과 같은 ‘작도/연결’ 범주의 표현이 61.8%로 가장 많았다. 그 다음으로는 순서대로 ‘시작점과 끝점이 있는 선’, ‘점과 점을 넘지 않는 선’, ‘두 점의 안에 있는 선’과 같은 표현이 많았는데 각각은 ‘끝’, ‘무한성에 대한 부정’, ‘두 점 사이의 유한’ 범주로 분류되었다. 직선의 무한성에 대한 적절한 표현 중에는 ‘양쪽으로 끝없이 이어지는 선’과 같은 ‘가무한적 표현’ 범주가 74.6%를 차지하였고, ‘시작점과 끝점이 없는 선’과 같은 ‘실무한적 표현’ 범주가 25.4%를 차지하였다. 반직선의 무한성에 대한 적절한 표현 또한 ‘한 점에서 시작해 한쪽으로 끝없이 이어지는 선’과 같은 가무한적 표현이 67.9%였으며, ‘시작점은 있고 끝점은 없는 선’과 같은 실무한적 표현이 32.1%를 차지하였다. 이를 통해 학생들이 유한성과 무한성에 대해 교과서에서 제

시되는 정의의 표현을 많이 사용하지만, 그 외의 표현도 적지 않음을 알 수 있다.

셋째, 직선과 반직선의 무한성을 적절하게 표현하지 못한 경우는 공통적으로 ‘점을 넘은 선의 일부’, ‘불충분한 가무한적 표현’, ‘점의 위치’, ‘무응답’ 범주가 나타났다. 직선에만 나타난 범주에는 ‘불충분한 실무한적 표현’ 범주가 있고 반직선에만 나타난 범주에는 ‘다른 선 이용’ 범주가 있다. ‘점을 넘은 선의 일부’ 범주는 직선과 반직선을 ‘두 점을 넘은 선’, ‘한 점을 넘은 선’과 같이 표현하는 경우로, 직선과 반직선의 무한성에 대한 잘못된 표현 중에서 각각 45.1%와 53.7%를 차지하였다. ‘불충분한 가무한적 표현’은 가무한적 표현에서 방향(양쪽, 한쪽)이나 무한에 대한 언급이 없는 경우로, 직선과 반직선의 무한성에 대한 잘못된 표현 중에서 33.1%와 28.7%를 차지하였다. ‘점의 위치’ 범주는 직선을 ‘선 안에 점과 점이 있다’, 반직선을 ‘한 점은 끝에, 한 점은 선 안에 있다’와 같이 설명하는 것으로 각각 3%, 4.6%의 학생이 응답하였다. 직선을 단순히 ‘끝이 없다’와 같이 표현하는 ‘불충분한 실무한적 표현’ 범주는 직선의 무한성에 대한 잘못된 표현 중 12.8%를 차지하였다. 마지막으로 반직선을 ‘직선과 선분을 합친 선’과 같이 표현하는 ‘다른 선 이용’ 범주는 반직선의 무한성에 대한 잘못된 표현 중 12%를 차지하였다.

본 연구자는 직선과 반직선에 대한 개념 이미지가 선의 표상에 국한되는 ‘점을 넘은 선의 일부’와 ‘점의 위치’ 범주를 통합하여 잘못된 개념 이미지의 한 유형으로 분류하였다. 이와 관련하여 학생들이 선의 표상에만 주목하는 것이 아니라 무한한 선을 상상하고 인식할 수 있도록 하는 교수학습 활동에 대한 연구가 필요하다. 예를 들어, 유한한 선의 표상을 통해 무엇을 상상해야 하는지 논의하는 활동이나 AI 디지털 교과서의 도입(교육부, 2023)과 관련하여 테크놀로지를 이용해 선의 무한성을 구현하는 활동이 있을 것이다.

넷째, 개념 이미지가 선의 표상에 국한되는 유형 외에도 일부 학생들에게 공통적으로 나타나는 잘못된 개념 이미지가 존재하였다. 예를 들어, 한 선을 다른 선과의 관계를 통해 설명하는 과정에서 모호하거나 오류가 발생하는 경우가 있으며, 반직선을 ‘반만 직선이다’, ‘직선과 선분을 합한 것이다’라고 표현하는 사례가 대표적이다. 또한 학생들이 선분, 직선, 반직선을 설명할 때 ‘놓혀 있다’, ‘가로’, ‘왼쪽’, ‘오른쪽’이라는 용어를 사

용하는 것이 관찰되었는데 이는 학생들의 선에 대한 개념 이미지가 가로 방향의 선에 국한된 것으로 분류될 수 있다. 마지막으로 일부 학생들이 선을 설명할 때 ‘~하게 그은 줄’과 같이 표현함으로써 선에 대해 두께가 있는 줄의 개념 이미지를 가지고 있음을 확인할 수 있었다. 이러한 개념 이미지의 존재를 교사가 인식하고 있다면 선의 교수학습 과정에서 학생들이 잘못된 개념 이미지를 갖지 않도록 유의할 것이다. 더 나아가 적절한 개념 이미지를 형성할 수 있는 구체적인 교수학습 방법에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

본 연구는 평균적인 학력 수준이 중상 이상인 학생들을 대상으로 하였기에 성급하게 일반화할 수 없다는 한계를 갖는다. 또한 초등학교 3학년 학생들의 어휘력이나 문장 구사 능력에 따라 선에 대한 설명이 학생들의 이해를 정확히 반영하지 못할 수 있다. 따라서 선분, 직선, 반직선 개념의 이해를 파악할 수 있는 기하학적 맥락의 문제를 활용한 연구가 필요하며 본 연구에서 유형화한 오류가 있는 개념 이미지들을 고려하여 적절한 교수학습 방법에 대한 연구도 필요할 것이다. 본 연구가 선분, 직선, 반직선 개념에 대한 후속 연구에 기반이 될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 고진아(2009). 초등수학 도형영역에 제시된 정의에 관한 학생의 인식. 제주대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 교육부(2018). 초등학교 수학 3-1. 천재교육.
- 교육부(2023. 06. 08.). AI 디지털교과서 추진방안[보도자료]. Retrieved from <https://ieic.kdi.re.kr/policy/materialView.do?num=239513&pg=&pp=20&topic=0>
- 김상미(2018). 초등학교 수학 교과서에 제시된 각의 개념과 도입 방법 분석. 초등수학교육, 21(2), 209-221.
- 김상미(2023). 선분, 직선, 반직선의 학습 내용과 학습 계열 분석. 수학교육 논문집, 37(4), 635-652.
- 김지영(2020). 2009 개정 및 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서의 정의 비교·분석: 초등학교 도형 관련 주제 중심으로. 진주교육대학교 대학원 석사

- 학위논문.
- 도종훈(2008). 직선의 대수적 표현과 직선성(直線性)으로서의 기울기. *수학교육 논문집*, 22(3), 337-347.
- 도종훈(2011). 교수요목기 초급중학교 수학교과서의 내용 구성과 전개 방식 분석-‘직선’관련 내용을 중심으로. *한국수학사학회지*, 24(3), 95-108.
- 박성선 외 16인(2022). *초등학교 수학 3-1*. 와이비엠.
- 백대현(2010). 초등학교 수학 교과서에 제시된 용어 사용과 표현의 적절성 고찰. *학교수학*, 12(1), 61-77.
- 신향균 외 13인(2022). *초등학교 수학 3-1*. 비상교육.
- 이규희(2021). ‘점’과 ‘선’에 관한 수학적 분석과 교과서 분석. *한국학교수학회논문집*, 24(1), 39-57.
- 장혜원 외 13인(2022). *초등학교 수학 3-1*. 미래엔.
- 정순원(2023). 직선, 선분, 반직선에 대한 두 관점과 점의 특성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 한대희 외 16인(2022). *초등학교 수학 3-1*. 천재교과서.
- 홍진근(2008). 무한 개념의 이해에 관하여. *수학교육학연구*, 18(4), 469-482.
- Altieri, M. B., Balka, D. S., Day, R., Gonsalves, P. D., Grace, E. C., Krulik, S., Malloy, C. E., Molix-Bailey, R. J., Moseley, L. G., & Mowry, B. (2008). *California mathematics: Concepts, skills, and problem solving 4*. McGraw-Hill. Retrieved from <https://fliphtml5.com/otndx/flrz/California-Mathematics-Grade-4/>
- Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 309-329.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.
- Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 4(2), 317-337.
- Harcourt, H. M. (2015). *Go math! Florida grade 3*. Houghton Mifflin Harcourt. Retrieved from https://fliphtml5.com/xhxttd/mftn/Florida_Go_Math_Grade_3/
- Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements (Vol. 1)*. Dover Publications.
- Jírotková, D. (1998). Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky PedF UK. *Pokroky Matematiky, Fyziky a Astronomie*, 43(4), 326-335.
- Krátká, M., Eisenmann, P., & Cihlár, J. (2022). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(10), 2661-2685.
- LeTourneau, C. D., Posamentier, A. S., & Ford, E. R. (2009). *Progress in mathematics: Grade 4*. William H. Sadlier. Retrieved from https://fliphtml5.com/gzgvn/xhfi/Progress_in_Mathematics_Grade_4/
- Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-257.
- Moravcová, V., & Hromadová, J. (2020). Straight line or line segment? Students' concepts and their thought processes. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(4), 327-336.
- Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 188-205.
- Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2), 199-238.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Youkap, P. T. (2021). Student comprehension of the concept of a geometrical figure: The case of straight lines and parallel line. *Journal of Mathematics Education*, 6(2), 149-158.

Analysis of third graders' understanding of line segments, straight lines, and rays

Jung, Soonwon

Dongtan Mokdong Elementary School

E-mail : jswon2013@naver.com

The objective of this study is to examine the comprehension of third-grade students regarding the concepts of line segments, straight lines, and rays. To accomplish this, 220 students were asked to describe what each of these lines is, and the responses were subsequently analyzed. The findings of the analysis are presented as follows. Firstly, the proportion of students who accurately described the straightness of a line was 46.5% for line segments, 24.5% for straight lines, and 17.7% for rays. Secondly, 74% of all students correctly described the finiteness of line segments, whereas 33.5% and 43.8% of students accurately described the concept of infinity for straight lines and rays, respectively. Thirdly, concept images that were limited to representations of lines, such as 'straight line is a line that passes through two points' or 'straight line is a line that contains both points,' accounted for 32% of responses regarding both straight lines and rays. Additionally, other observed concept images included ambiguous representations of one line in relation to another, representations that were limited to horizontal lines, and perceptions of lines as strings. In light of these findings, I discuss the implications for the teaching and learning of line segments, straight lines, and rays.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97G40

* Key Words : line segment, straight line, ray, straightness, finiteness, infinity