MathEdu Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A

Research Article

The Mathematical Education 2024;63(3):393-409
https://doi.org/10.7468/mathedu.2024.63.3.393
pISSN 1225-1380, eISSN 2287-9633

Analyses of the precision and strategies for representing the magnitude of fractions and decimals on the number line among 6th graders

Jinyoung Heo[1], Soo-hyun Im[2]*

[1]Graduate Student, Hanyang University
[2]Assistant Professor, Hanyang University

ABSTRACT

The number line model, which intuitively marks numerical magnitudes in space, is widely utilized to help in understanding the magnitudes that fractions and decimals represent. The study analyzed 6th graders' understanding of fractions and decimals, their problem solving strategies, and whether individual differences in the flexibility of various strategy uses are associated with the accuracy of numerical representation, calculation fluency, and overall mathematical achievement. As a result of the study, students showed relatively lower accuracy in representing fractions and decimals on a number line compared to natural numbers, especially for fractions with odd denominators compared to even denominators, and for two-digit decimals compared to three-digit decimals. Regarding strategy use, students primarily used benchmark, segmentation, and approximation strategies for fractions, and benchmark, rounding, and transformation strategies for decimals sequentially. Lastly, as students used various representation strategies for fractions, their accuracy in representing fractions and their overall mathematical achievement scores showed significantly better outcomes. Taken together, we suggest the need for careful instruction on different interpretations of fractions, the place value of decimals, and the meaning of zero in decimal places. Moreover, we discuss instructional methods that integrate the number line model and its diverse representation strategies to enhance students' understanding of fractions and decimals.

Keywords Number line estimation task, Fractions, Decimals, Number line estimation strategies, Flexibility

서 론

분수와 소수는 자연수 다음으로 소개되는 수의 체계로 학생들은 자연수로 나타낼 수 없는 양을 표현하기 위해 초등학교 3-4학년 시기에 처음으로 개념을 접하게 된다(Ministry of Education, 2015). 우유 '반 컵(1/2)', '1.5 L'와 같이 분수와 소수는 일상 생활에서 자주 사용되며, 분수와 소수를 이해하는 것은 정확한 의사소통 및 일상적인 문제 해결뿐만 아니라 방정식, 함수, 미적분과 같은 고등 수학을 위한 토대로서도 중요하다(Kim & Nam, 2023; Kwon, 2003). 그러나 자연수와 달리 표기법, 크기 비교 방법, 사칙 연산 방법이 상이하고 복잡하여, 초기 학습 시 많은 학생들이 분수와 소수 이해에 어려움을 겪는다(Siegler

Received June 26, 2024; **Revised** July 16, 2024; **Accepted** August 5, 2024

***Corresponding author** Soo-hyun Im
E-mail edupsy@hanyang.ac.kr
2020 Mathematics Subject Classification 97-11, 97C30, 97D40, 97F40

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http: //creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

© The Korean Society of Mathematical Education

& Lortie-Forgues, 2017).

이러한 상황에서 자연수, 분수, 소수 및 모든 수의 크기를 공간상에 구체적으로 표상하게 할 수 있는 수직선(number line)은 시각적 모델로서, 학생들의 분수와 소수에 대한 이해를 돕기 위해 교과서, 교수학습활동, 평가에서 널리 활용된다(Kim, 2022a; Kim, 2022b). 특별히 빈 수직선에 주어진 분수와 소수의 크기를 나타내는 수직선 추정(NLE: Number Line Estimation) 과제는 분수와 소수의 크기에 대한 각 개인의 표상의 정확도뿐만 아니라, 수의 크기를 표상하기 위해 어떤 다양한 전략을 사용하는지 측정할 수 있게 한다(Siegler et al., 2011). 이러한 점에서 NLE 과제는 분수와 소수에 대한 학생들의 이해 및 문제 해결 전략을 살펴볼 수 있는 유용한 측정 도구로 활용될 수 있다.

본 연구에서는 NLE 과제를 활용하여 주어진 분수와 소수의 크기를 빈 수직선에 나타낼 때 사용하는 전략과 표상의 정확도를 분석하여, 초등학교 고학년의 분수와 소수에 대한 이해도, 전략 사용의 유연성이 연산 능력 및 수학 학업성취의 개인차와 연관성이 있는지를 탐색하고자 하였다. 이를 통해 학생들의 분수와 소수 학습을 돕기 위한 지도방안으로서, 수직선 모델 활용과 다양한 표상 전략의 유연한 사용의 중요성에 대한 교육적 시사점을 모색하고자 하였다.

구체적으로, 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다. 첫째, NLE 과제에서 초등학교 고학년의 분수와 소수의 표상의 정확성은 수의 종류와 특성에 따라 차이가 있는가? 둘째, 주어진 분수와 소수를 빈 수직선에 나타내기 위해 학생들이 사용하는 전략은 무엇인가? 셋째, 각 분수와 소수 NLE 과제에서, 다양한 전략의 유연한 사용 정도에 따라 표상의 정확성, 연산 능력, 학업성취의 유의한 개인차가 있는가?

이론적 배경

1. 분수와 소수의 크기에 대한 이해

분수와 소수는 자연수 이후에 배우게 되는 새로운 유형의 수라는 점에서 초기 학습과정의 학생들은 분수와 소수가 나타내는 수의 크기를 이해하는 데 어려움을 겪는다. 이러한 어려움의 주요 원인으로 다수의 연구에서 자연수에 대한 기존의 지식이 분수와 소수의 이해에 영향을 미치는 자연수 편향(whole number bias)을 언급하였다(Ni & Zhou, 2005). 예를 들어 초기 소수 학습 시 학생들은 자연수 개념을 바탕으로 0.25가 0.7보다 큰 수라고 잘못 이해하기도 한다. 또한 분수와 소수의 고유한 표기법은 수의 크기를 이해하는 데 어려움을 유발한다. 예를 들어, 분모, 분자, '—' 기호를 사용한 '$\frac{1}{2}$' 분수 표기법을 학생들은 1과 2라는 두 개의 숫자로 이해하거나, 12라는 숫자로 잘못 받아들이는 오류를 범하기도 한다(Stafylidou & Vosniadou, 2004).

또한 다수의 선행연구는 자연수 편향, 고유의 표기법 외에, 분수와 소수의 크기 이해에 어려움을 유발하는 요인들을 밝혀내기도 하였다. 먼저 분수의 크기 이해와 관련해서는 제시된 분수의 분모와 분자의 크기에 따른 이해의 어려움 정도를 밝혀낸 연구를 들 수 있다(Schneider & Siegler, 2010; Yuan & Chen, 2023). 일례로 분수 크기 비교 과제에서, 통분을 배우지 않은 4학년 학생은, 2/7와 2/11의 크기 비교에서 과반 이상이(57.1%) 2/11가 더 크다고 잘못 판단하였다(Yoon & Chang, 2023). 미국의 4・5학년 학생을 대상으로 한 연구에서도, 약 70%의 학생들은 4/5와 16/20이 동치 분수임에도 불구하고, 16/20을 더 큰 분수로 잘못 판단하였다(Braithwaite & Siegler, 2018). 또 다른 어려움의 유형으로는, 주어진 분수의 분모가 짝수일 때보다 홀수일 때 수의 크기를 이해하고 나타내는 데 어려움을 겪었다. 4세에서 9세 사이의 아동들은 원이나 직사각형과 같은 연속량을 분할할 때 2, 4, 6등분해야 하는 분모가 짝수인 분수보다 3, 5등분해야 하는 분모가 홀수인 분수를 더 복잡하고 어렵다고 인식하였다(Pothier & Sawada, 1983).

다음으로 소수의 크기를 이해하는 데 어려움을 유발하는 요인으로, 자릿값 개념에 대한 이해를 들 수 있다. 구체적으로, 한국의 선행 연구를 살펴보면 초등학교 5학년 학생들은 소수 세 자리 수에서 소수점 아래의 수들 간의 관계를 이해하는 문제에서 가장 높은 오답률(85.7%)을 보였는데, 특히 소수 셋째 자리의 값을 100배 하면 소수 첫째 자리의 값과 같다는 개념을 이해하는 데 어려움을 보였다(Kim & Nam, 2023). 또한 소수의 크기 비교에서 0의 역할을 이해하는 데 어려움을 보이며, 0.01과 0.010은 같은 소수임에도 불구하고 19%의 학생들은 0.010을 더 큰 소수로 잘못 판단하였다(Kim & Nam, 2023). 이외에 해외 선행 연구에서도 비슷한 사례를 찾을 수 있다. 미국의 4・5학년 학생들은 소수점의 존재로 인해 수의 크기를 잘못 이해하는 모습을 보였는데, 예를 들어 835가 87보다 큰 수이기 때문에 0.835를 0.87보다 큰 수로 응답하였으며, 0.51과 51을 같은 크기의 수라고 응답하기도 하였다(Durkin & Rittle-Johnson, 2015).

이상의 선행 연구 결과를 토대로 본 연구에서는 NLE 과제를 활용하여 분수의 경우 주어진 분모의 크기 및 홀짝 여부, 소수의 경우 소수의 길이(i.e., 소수점 이하의 자릿수의 길이)가 학생들의 분수와 소수의 표상 정확도에 영향을 미치는지를 분석하고자

하였다. 구체적으로 분수의 경우, 분모의 크기가 한 자리인 분수보다 두 자리인 분수를, 짝수인 분수보다 홀수인 분수를 수직선에 나타내는데 더 어려움을 겪는지 검증하고자 하였다. 소수의 경우, 소수의 길이(i.e., 소수 두 자리 수 vs. 소수 세 자리 수)에 따라 소수의 크기를 수직선에 표상하는 정확도가 달라지는지 여부를 검증하고자 하였다. 아울러 수직선상 주어진 수의 물리적 위치가 동일한 자연수, 분수, 소수 NLE 과제를 각각 실시하여, 수의 종류별 상대적 어려움 정도를 객관적으로 비교하고자 하였다.

2. 수직선 추정 전략

수직선상에 주어진 수의 위치를 나타내는 것은, 수의 크기에 대한 이해를 명시적으로 확인하게 한다는 점에서, 수의 이해 및 수 개념 발달 관련 연구에서 널리 활용되고 있다(Schneider et al., 2018). 학생들은 수직선에 수를 표상할 때 자신이 이해한 수에 대한 수학적, 공간적 지식을 바탕으로 다양한 전략을 사용하는 것으로 보고되고 있다(Peeters et al., 2016).

먼저 자연수 NLE 과제에서 사용되는 전략에 관한 선행 연구를 살펴보면, 학생들은 흔히 주어진 수의 물리적 위치에 따라서 수직선의 처음, 중간, 끝 지점을 기준점으로 삼는 기준점 참고 전략(benchmark strategy)을 사용하는 것으로 나타났다(Newman & Berger, 1984). 예를 들어 0부터 100까지의 수직선에서 10을 나타낼 때 처음 지점(0)을 기준으로 삼아 위치를 표상하는 방법을 사용한다. 국내에서 대학생을 대상으로 자연수 NLE 과제를 수행한 결과에서도 연구 참여자들은 특히 수직선의 중간 지점을 기준점 삼는 전략을 주로 사용하는 것으로 보인다고 제시된 바 있다(Park et al., 2016).

다음으로 분수 NLE 과제에서 사용되는 전략을 분석한 선행 연구를 살펴보면, 0–1사이의 분수를 빈 수직선에 나타내기 위해 미국의 6학년, 8학년 학생들은 두 가지 전략을 주로 사용하였다(Siegler et al., 2011). 첫 번째 전략은 변환 전략(transformation strategy)으로, 주어진 분수를 표상하기에 더 편리한 숫자로 바꾼 뒤 표상하는 전략을 의미한다. 예를 들어, 분수를 반올림 또는 단순화하거나(예: 5/9는 1/2보다 약간 크므로 1/2의 약간 오른쪽에 표상), 다른 형태로 바꿔서 표상한다(예: 12/13는 약 90%). 다른 전략은 수직선 분할 전략(segmentation strategy)으로, 수직선상에 가상의 랜드마크를 생성해 표상하는 전략이다. 예를 들어 수직선을 반으로 나누거나 분모에 해당하는 단위만큼 나누어 생각하여 표상한다(예: 4/7을 7등분하여 4번째에 표상). 이러한 두 가지 전략 중, 미국의 6학년과 8학년의 학생들은 분수의 분모에 대한 이해를 바탕으로 상대적으로 수직선 분할 전략을 수 변환 전략보다 많이 사용하는 것으로 나타났다(6학년: 83% vs. 50%; 8학년: 83% vs. 75%)(Siegler et al., 2011). 또한 0, 1/2, 1과 같이 0과 1 사이의 빈 수직선에서 처음, 중간 끝의 기준점을 참고하는 기준점 참고 전략을 흔히 사용하는 것으로 나타났다(Siegler & Thompson, 2014). 그 외에 수직선이 아닌 다른 시각적 표상을 사용하는 시각화 전략(예: 7조각의 파이 중 1조각), 수직선상 분자 또는 분모를 기반으로 하는 독립 구성 요소 전략(예: 5/12의 분자에 집중하여 0부터 5까지 세서 표상)과 같은 전략도 사용하는 것으로 나타났다(Fitzsimmons et al., 2020).

다음으로 소수 NLE 과제에서는 전략 사용에 대한 연구가 많지 않지만, 일부 연구에서 소수를 수직선에 표상할 때 사용할 수 있는 전략으로 두 가지 전략을 언급하였다(Rittle-Johnson et al., 2001). 그 중 하나는 십진법 자리수의 개념에 대한 이해를 토대로 수직선을 10등분하고 주어진 소수의 십의 자리에 있는 숫자를 기준으로 그와 비슷한 위치에 표상하는 합성 표현(composite representation)을 사용하는 전략이다. 예를 들어 0.745를 더 간단한 수인 0.7로 어림하고, 0.045를 추가로 고려하여 0.7보다 큰 위치에 표시한다. 다른 전략으로는 주어진 소수의 각 단위를 전체 단위와 비교하여 표시하는 공통 단위 표현(common unit representation)을 사용하는 전략으로, 예를 들어 0.745를 0부터 1,000까지의 범위 중 745번째의 위치에 표시한다. 미국의 초등학교 5학년 학생들의 경우 수직선에 소수를 표상할 때 합성 표현(36%)을 공통 단위 표현(17%)보다 상대적으로 더 많이 사용하는 것으로 나타났다(Rittle-Johnson et al., 2001).

이상의 선행 연구를 토대로 본 연구에서는, 주어진 분수와 소수를 수직선에 나타낼 때 이러한 다양한 전략 중 어떤 전략을 주로 선택하는지, 주어진 분수와 소수의 특징에 따라 전략 사용이 상이한지에 대해 살펴보고자 하였다. 이를 위해 본 연구에서는 ‘choice/no choice’ 연구 기법(Siegler & Lemaire, 1997)을 일부 차용하여, 분수와 소수 NLE 과제에서 제시된 세 가지 전략 중 한 가지를 사용해서 주어진 수의 크기를 표상하고 자신이 사용한 전략을 선택하도록 하였다.

3. 다양한 전략 사용의 유용성

수학 문제를 풀이할 때, 하나의 정답이 있더라도 답을 도출하기까지의 방법은 다양할 수 있다. 그리고 각 전략별 효율성에는 차이가 있을 수 있는데, 예를 들어 5+2+8의 경우 앞에서부터 계산하는 방법[(5+2)+8]을 사용하는 것보다 결합 법칙을 적용하여[5+(2+8)] 더하여 10이 되는 뒤의 두 수부터 계산하는 것이 더 효율적이다(Chang, 2017). 이처럼 문제의 특징에 따라 효과적인 전략을 사용하여 문제를 풀이하는 능력은 수학적 문제 해결에서 중요하다.

https://doi.org/10.7468/mathedu.2024.63.3.393

수학교육 연구에서는 문제의 특징에 따라 전략을 유연하게 사용하는 능력을 유연성(flexibility)으로 명명하고, 유연성이 문제 해결 능력에 중요한 요소임을 강조하였다(Verschaffel, 2024). 또한 인지심리 연구에서는 반복적 절차 수행으로 습득한 반복적 전문성(routine expertise)의 반대 개념으로 적응적 전문성(adaptive expertise)를 소개하며 절차의 배경과 원리를 이해하고 새로운 상황에도 유연하게 절차를 수정, 창안하여 대처할 수 있는 능력을 강조하였다(Hatano & Inagaki, 1986). 이러한 적응적 전문성은 개인의 산술 능력 및 수학 학업성취도와 밀접한 관련이 있는 것으로 확인되기도 하였다(Im & Varma, 2024). 실제로 미국 초등학교 5, 6학년을 대상으로 실시한 연구 결과, 0–1 수직선에 표시된 위치가 나타내는 수의 크기를 추정하는 과제(PN: position-to-number)에서 수학 성적이 높은 학생들이 낮은 학생들보다 비교적 다양한 전략 사용(High: 2–3가지 전략 사용; Medium & Low: 1–2가지 전략 사용)을 보였으며, 표상 정확성 또한 상대적으로 높았던 것으로 드러났다(Girit & Akyuz, 2016). 본 연구의 측정도구인 NLE에서도 다양한 전략을 사용하는 학생들이 표상의 정확도가 비교적 높은 것으로 보고된 바 있다(Sidney et al., 2019). 해당 연구에서는 0과 5사이의 분수를 수직선에 표상할 때 변환, 분할, 기준점 참고 전략 등 다양한 전략을 사용하는 학생들이 그렇지 않은 학생들보다 분수 자체의 크기를 기반으로 표상하는 빈도가 높으며, 높은 표상 정확도를 보인다는 결과를 보고하였다.

이에 본 연구에서는 수직선에 분수와 소수를 표상할 때 다양한 전략 사용의 유연성이 수학 학업성취도의 개인차와 어떤 관련성이 있는지 살펴보고자 하였다. 아울러 변환 전략과 같이 분수와 소수를 계산하기 쉬운 수로 변환하기 위해 두 자리 수 이상의 곱셈과 나눗셈 능력이 요구된다는 점(Foley & Cawley, 2014)에서 다양한 전략 사용의 유연성이 연산 능력의 개인차와도 어떤 관련성을 가지는지도 살펴보고자 하였다.

연구 방법

1. 연구대상

본 연구는 연구 수행 당시 시점(2학기)에서 자연수, 분수, 소수의 크기 이해와 관련된 내용을 모두 학습한 초등학교 4, 5, 6학년을 연구 참여 가능 집단으로 설정하였다. 이 중, 자연수, 분수, 소수 이해 및 변환에 대한 충분한 경험이 쌓였을 것으로 생각되는 6학년 학생을 연구대상으로 설정하였다. 연구 참여자 모집은 연구자가 소속된 기관의 인근 2개 초등학교에서 학교장의 허락을 받아 이루어졌으며, 각 학교별로 참여를 희망한 2개 학급의 6학년 78명(남학생 38명, 여학생 40명, 평균 만 12.37세; A학교 51명, B학교 27명)이 연구에 참여하였다. 연구에 참여한 학생은 모두 일반 학급의 아동으로, 특수 교육 대상자는 없었다. 모든 연구 수행은 연구자의 소속기관의 IRB 승인을 받은 후 이루어졌으며, 보호자의 서명 동의 및 연구 참여에 동의를 한 학생을 대상으로 연구가 수행되었다.

2. 연구 도구

(1) 수직선 추정 과제

연구 참여 학생들은 소속 학교의 컴퓨터(데스크탑=27명, 태블릿=51명)를 이용하여 NLE 과제를 수행하였다. 학생들은 연구자의 안내에 따라 화면 좌측 상단에 주어진 숫자가 나타내는 수의 크기를, 마우스 또는 태블릿 전용 펜을 이용하여 시작 지점(0으로 표시)과 끝 지점(자연수=1,000, 분수・소수=1)만 표시된 빈 수직선 위에 어림하여 표시하였다(see Figure 1). 한 화면에 한 개의 숫자만 제시되었으며, 자연수, 분수, 소수 각 과제별로 총 24개의 숫자(총 72개)가 사용되었다. 각 과제는 연습 문제 1개를 풀이한 후 실시되었다.

특별히 수의 종류에 따른 표상의 정확성 비교를 위해, 각 과제별로 제시된 자연수, 분수, 소수의 물리적 위치는 동일하도록 문제를 구성하였다. 예를 들어 실험 문제에 포함된, 0–1,000 사이의 빈 수직선상의 자연수 125의 물리적 위치와, 0–1사이의 빈 수직선 상의 분수 1/8과 소수 0.125의 물리적 위치는 동일하였다. 각 과제별로 제시된 숫자들은 순서 효과(order effect)를 방지하기 위해 학생별로 무작위의 순서로 제시되었다. 문제 풀이 중 별도의 피드백은 주어지지 않았으나 한 문제당 30초 이상의 시간을 사용하게 될 경우 답을 결정하라는 알림이 제시되었다.

자연수(Natural numbers). 0–1,000 사이의 빈 수직선 위에 주어진 두 자리 수 또는 세 자리 수의 자연수의 크기를 어림하여 표시하였다. 0–1,000 사이의 자연수가 고르게 포함될 수 있도록 고려하여 다음의 24개 자연수가 문제로 제시되었다(see Figure 2 Note). 해당 과제는 학생들의 수에 대한 기본적 이해를 확인하기 위한 측정 수단으로 제시하였으며, 이에 과제 수행 시 사용한 전략은 물어보지 않았다.

분수(Fractions). 자연수 NLE 과제와 달리, 학생들은 문제 풀이 전 해당 과제에서 사용할 수 있는 세 가지 전략을 예시와 함께 상세하게 소개한 3분 길이의 전략 설명 영상을 먼저 시청하였다. 분수의 크기를 수직선에 나타날 때 흔히 사용하는 전략으로 알려진 다음의 세 가지 전략이 학생들에게 소개되었다(Siegler & Thompson, 2014; Siegler et al., 2011). 첫째, 기준점 참고 전략으로 수직선의 처음, 중간, 끝 지점을 기준으로 삼아 주어진 수가 어느 지점에 가까운지를 기반으로 수의 위치를 표시하는 전략이다. 예를 들어, 7/12이라는 분수를 중간 지점을 기준으로 하여 그보다 오른쪽에 표시하는 방법이다. 둘째, 어림 전략(선행 연구에서는 변환 전략으로 명명하기도 하였으나 다른 수로 어림하는 것에 주목하여 본 연구에서는 어림이라는 전략으로 명명함)으로 주어진 분수를 다른 비슷한 분수로 어림해서 생각하여 수의 위치를 표시하는 전략이다. 예를 들어, 7/12이라는 분수를 해당 분수보다는 작지만 비슷한 분수인 2/3으로 생각하고, 2/3의 왼쪽에 표시하는 방법이다. 셋째, 분모의 수만큼 나누는 분할 전략으로, 마음 속으로 수직선을 분모의 수만큼 나누고 분자의 크기만큼 표시하는 전략이다. 예를 들어, 7/12이라는 분수가 주어졌을 때 마음 속으로 수직선을 12등분하고 7번째 분할 지점에 표시하는 전략이다.

전략 설명 영상을 시청한 후, 전략에 관한 학생들의 이해를 돕기 위해 추가적인 질문 여부를 확인하였다. 그 후 학생들은 "주어진 분수의 크기를 수직선에 표시하고 제시된 전략 중 자신이 사용한 전략을 체크하세요"라는 지시문에 따라, 수직선에 주어진 분수의 크기를 표시하고 자신이 사용한 전략을 선택하도록 안내받았다. 이때 혼란을 방지하기 위하여 영상에서 제시한, 전략의 특징을 나타낼 수 있는 전략명을 그대로 사용하였다. 앞서 제시한 자연수 문제와 수직선상의 물리적 위치가 동일한 다음의 24개 분수가 문제로 제시되었다: 1/13, 1/12, 1/8, 3/20, 1/6, 2/9, 3/11, 2/7, 4/11, 3/8, 5/12, 4/9, 5/9, 5/8, 7/11, 13/20, 5/7, 8/11, 5/6, 17/20, 7/8, 8/9, 10/11, 13/14. 이 중 절반의 문제를 분모가 한 자리인 분수를, 또 다른 절반은 분모가 두 자리인 분수가 되도록 문제를 구성하였다. 비슷한 맥락으로, 분모가 홀수인 경우와 분모가 짝수인 경우를 각각 절반이 되도록 문제를 구성하였다. 이러한 문제 구성을 통해 분모의 자릿수 및 홀짝 여부에 따른 표상의 정확성 및 사용 전략 차이 여부 검증을 실시하였다.

소수(Decimals). 소수 NLE 과제의 경우, 앞서 언급한 분수 NLE 과제와 동일한 방법으로 제시되었으며, 다음의 24개 소수가 제시되었다. 이 중 21개의 문제는 소수 세 자리 수를(0.077, 0.083, 0.125, 0.167, 0.222, 0.273, 0.286, 0.364, 0.375, 0.417, 0.444, 0.556, 0.625, 0.636, 0.714, 0.727, 0.833, 0.875, 0.889, 0.909, 0.929), 3개의 문제는 소수 두 자리 수(0.15, 0.65, 0.85)를 제시하였으며, 소수의 길이에 따른 표상의 정확성 및 사용전략 차이 여부를 검증하는 데 사용하였다. 그 외에, 분수 NLE 과제와 달리 소수 NLE 과제에서 사용이 가능한 다음의 세 가지 전략을 안내하고(Newman & Berger, 1984; Rittle-Johnson et al., 2001), 문제 풀이 시 선택하도록 하였다. 첫째, 분수 NLE 과제에서 소개된 동일한 기준점 참고 전략을 안내하였다. 둘째, 주어진 소수를 두 자리 수 소수 또는 한 자리 수 소수로 반올림해서 표시하는 반올림(rounding) 전략을 안내하였다. 셋째, 선행 연구에서는 합성 표현 전략으로 명명된 바 있는 자연수 변환 전략(transformation)으로, 본 연구에서는 0–1사이의 빈 수직선을 0–1,000 사이의 수직선으로 생각하고, 주어진 소수에 1,000을 곱하여 위치를 표시하는 전략을 안내하였다. 예를 들어, 소수 0.583을 자연수 583으로 생각하고 0–1,000 사이의 수직선에 표시하는 방법을 소개하였다. 수직선 표상 정확도 측정을 위해 NLE 과제에서 널리 사용되는 추정 오차(PAE: Percentage of absolute error) 값을 사용하였으며, 공식은 다음과 같다, $\frac{|\text{추정한 위치}-\text{실제 위치}|}{\text{주어진 수직선의 범위}}\times 100$. 예를 들어, 583이라는 숫자가 주어졌을 때 500의 위치에 표시하면 PAE 값은 $\frac{|500-583|}{1000}\times 100=8.3$이다. PAE 값이 낮을수록 수직선에 표상하는 정확도가 높다는 것을 나타낸다.

(2) 연산 능력

연산 능력에 따른 NLE 과제에서 사용하는 전략의 차이가 발생하는지 여부를 알아보기 위해 계산 유창성 검사(calculation fluency test)를 실시하였다. 분수를 소수로 변환 또는 다른 분모를 가진 크기가 같은 분수로 변환할 때 요구되는 계산 능력인 곱셈 능력과 나눗셈 능력에 초점을 두고 문항을 구성하였다. Sowinski 외 (2014)의 계산 유창성 검사 문항을 토대로 각각 곱셈 60문항, 나눗셈 60문항을 제작하였다. 곱셈의 경우 (두 자리 수)×(한 자리 수)의 세로 연산이 제시되었으며(예: 73×8), 나눗셈의 경우 (세 자리 수)÷(한 자리 수)의 세로 연산이 제시되었다(예: 584÷8). 학생들은 각 1분이라는 제한 시간 동안 종이에 제시된 곱셈, 나눗셈 문제들을 필기구를 사용하여 최대한 많이 풀었다. 제한된 시간 동안 기록된 정답 점수를(1문제당 1점) 연산 능력 지표로 분석하였다.

(3) 수학 학업성취도 평가

개인의 수학 학업성취 능력 정도를 측정하기 위해, 선다형 25문항으로 구성된 평가지를 제작하였다. 평가 문항은 교과서 단

원평가 문제 또는 과거 국가 수준 학업성취도 평가에 기출된 문항들로 구성하였으며, 4학년 1학기에서 6학년 2학기 초까지의 수학 교과 내용 중, 수와 연산(5문제), 도형(8문제), 측정(5문제), 규칙성(3문제), 자료와 가능성(4문제) 영역이 모두 포함되었다. 평가지의 신뢰도 계수(Cronbach's α)는 0.850으로 양호하였다. 학생들은 종이에 제시된 문항들을 필기구를 사용하여 풀이하였으며, 정답 한 문항당 1점이 부여되었다.

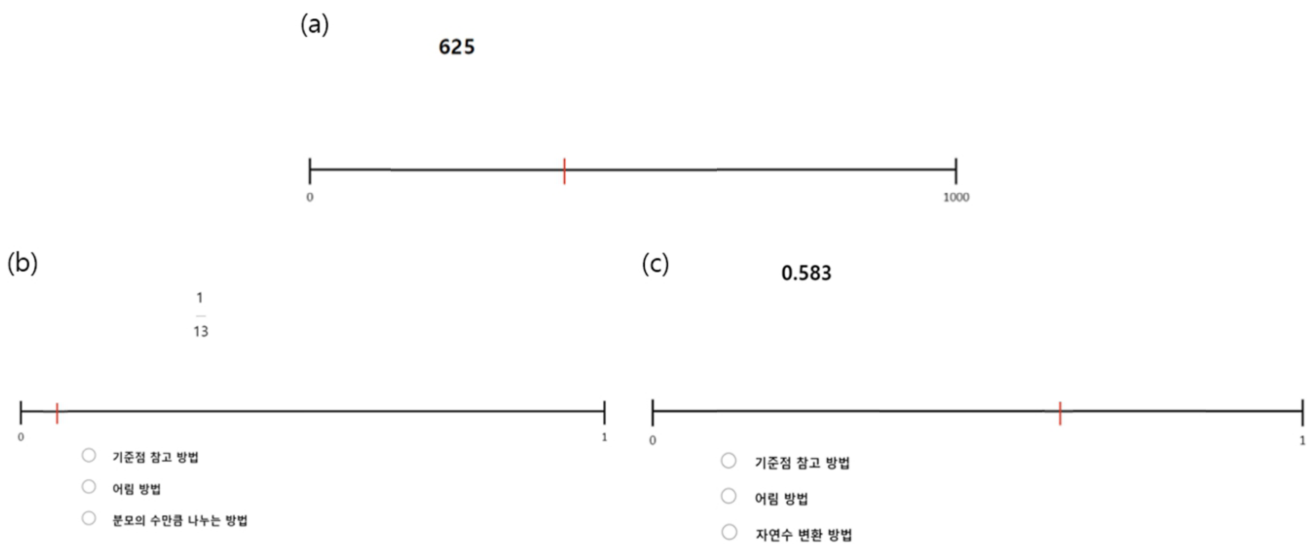

Figure 1. Screenshots of (a) natural, (b) fraction, and (c) decimal number line estimation tasks.

3. 연구 절차

본 연구는 연구 참여 학교의 허락을 받아 교사, 학부모, 학생의 동의를 받은 후, 수학 학습 활동으로 정규 수업 시간에 2차시(각 40분)에 걸쳐 학급 단위로 진행되었다. 1차시에서 학생들은 연구팀에서 제시한 URL에 접속하여 자연수, 분수, 소수 수직선에 나타내기 과제를 데스크탑 또는 태블릿을 활용하여 과제를 완성하였다. 모든 학생들은 첫 번째 과제로 자연수 NLE 과제를 해결하였으며, 이어서 절반의 학생들은 분수, 소수 NLE 과제 순으로, 또 다른 절반의 학생은 소수, 분수 NLE 과제 순으로 과제를 완성하였다. 기초 분석 결과 NLE 과제 순서에 따른 소수의 표상 정확도의 유의한 차이는 없었으나(*Ms*=7.23 vs. 7.50, *SDs*=2.8 vs. 3.1, p=0.673), 분수 PAE의 경우, 분수 NLE 과제를 먼저 한 학생들이 소수 NLE 과제를 먼저 한 학생들보다 표상의 정확도가 유의하게 높았다(*Ms*=5.63 vs. 8.17, *SDs*=3.6 vs. 6.5, *t*=2.10 p=0.040, *d*=0.489). 해당 결과가 분수에만 나타났다는 점, 학급 요인이 충분히 고려되지 않은 점(예: 담임교사, 실험 시작 시간 오전 vs. 오후) 등을 고려하여, 본 연구에서는 주요 분석에서 순서 효과는 고려하지 않았다.

구체적으로 학생들은 연구자의 안내에 따라 화면에 제시된 과제에 대한 설명과 지시문을 읽고, 차례로 연습 문제 1문항과 실전 문제 24문항을 풀었다. 2차시에서 학생들은 연산 측정 과제, 수학 학업성취도 과제를 필기구를 사용하여 완성하였다. 연구 수행이 종료된 후 학생들은 본 연구의 실제 수행 이유인, 전략 선택의 유연성과 수학 학습 능력의 관련성을 연구하는 내용을 연구자로부터 디브리핑받았다.

4. 분석 방법

본 연구에서는 연구문제 분석을 위하여 SPSS 27.0 통계 프로그램을 활용하였다. 구체적으로, 첫째, 수직선상 수 표상 정확성의 차이를 분석하기 위하여 일원반복측정분산 분석을 실시하였다. 둘째, 분수와 소수의 수직선상 표상 전략 선택 양상을 분석하기 위하여 빈도 분석 및 교차 분석을 시행하였다. 셋째, 분수와 소수의 수직선상 표상 전략의 유연성에 따른 표상의 정확성, 연산 능력, 학업성취 수준의 차이가 유의한지를 살펴보기 위하여 일원변량분석과 상관분석을 실시하였다.

연구 결과

주요 연구문제 분석에 앞서 먼저 수의 종류에 따라 수직선에 수를 표상하는 정확성에 유의한 차이가 있는지를 확인하였다. 일원반복측정분산 분석 결과 유의한 차이가 있었으며 ($F(1.6, 126.8)_{\text{Huynh-Feldt}}=10.31$, $p=0.002$, $\eta_p^2=0.010$), Bonferroni 사후 비교 검정 결과, 예상대로 학생들은 자연수의 크기를 수직선에 가장 정확하게 표시하였고($M=4.97$, $SD=2.34$) 이러한 정확성은 분수($p=0.013$) 또는 소수($p<0.001$)보다 유의하게 높게 나타났다.

1. 분수와 소수의 크기를 수직선에 나타내는 표상의 정확성

첫 번째 연구 문제와 관련하여, 분수와 소수 표상의 정확성 비교를 위해 일원반복측정분산 분석을 실시한 결과, 분수와 소수 간의 PAE값의 유의한 차이는 없었다($Ms=6.84$ vs. 7.36, $SDs=5.33$ vs. 2.91, $F(1,77)=0.77$, $p=0.384$, $\eta_p^2=0.010$).

다음으로 표상의 정확성에 영향을 미치는 요인을 탐색하기 위해, 분수의 경우 분모의 자릿수 • 홀짝 여부, 소수의 경우 자릿수의 길이에 따라 PAE 값의 유의한 차이가 있는지를 추가 분석하였다. Table 1에 제시된 바와 같이 분수는 홀짝 여부, 소수는 자릿수 길이에 따른 PAE에 유의한 차이가 있었다. 학생들은 분모가 짝수인 분수보다 분모가 홀수인 분수를 수직선에 표상하는 정확성이 낮았으며($Ms=6.35$ vs. 7.32, $SDs=5.91$ vs. 5.21, $F(1,77)=7.00$, $p=0.010$, $\eta_p^2=0.083$), 또한 소수 세 자리 수보다 소수 두 자리 수를 표상하는 정확성이 낮았다($Ms=5.67$ vs. 25.99, $SDs=2.35$ vs. 27.99, $F(1,77)=39.75$, $p<0.001$, $\eta_p^2=0.340$).

Table 1. The precision of representing fractions and decimals on the number line (measured by PAE) based on its feature

Feature	Type	M	SD	F	p	η_p^2
Length	One-digit denominators	6.97	5.29	0.77	0.383	0.010
	Two-digit denominators	6.70	5.68			
Oddness	Odd denominators	7.32	5.21	7.00	0.010	0.083
	Even denominators	6.35	5.91			
Length	Two-digit decimals	25.99	27.99	39.75	<0.001	0.340
	Three-digit decimals	5.67	2.35			

이상의 분석 결과를 토대로, 분수와 소수의 각 문항별 PAE평균 값을 살펴보면 Figure 2에 제시된 바와 같이 소수 두 자리 수인 0.65 (PAE=23.29)와 0.85 (PAE=28.68)는 추정 오차 값이 20 이상으로 다른 문항들과 달리 표상의 정확성이 낮게 나타났다.

정리하면, 학생들은 분수나 소수의 크기를 수직선에 표상하는 데 있어 자연수보다 정확성이 상대적으로 낮았으며, 특히 분수의 경우는 분모가 홀수인 분수에서, 소수의 경우는 소수 두 자리 수의 크기를 수직선에 나타내는 정확성이 낮게 나타났다.

2. 분수와 소수의 크기를 수직선에 나타내기 위해 사용하는 전략

두 번째 연구 문제와 관련하여 학생들이 분수와 소수의 크기를 수직선에 나타낼 때 주로 사용하는 전략을 살펴보기 위해 분수 NLE 과제와 소수 NLE 과제에서 보고된 전략 선택의 빈도를 분석하였다. 제시된 3가지의 전략 중 분수의 경우, 78명이 24개 문항에서 보고한 총 1,871 trials[1)]에서 기준점 참고 전략(38.5%), 분할 전략(34.5%), 어림 전략(26.9%) 순으로 가장 많이 사용하였으며, 소수의 경우, 총 1,872 trials에서 기준점 참고 전략(38.3%), 어림 전략(34.1%), 자연수 변환 전략(27.6%) 순으로 가장 많이 사용하였다(see Figure 3).

개인별 전략 선호도를 분석한 결과에서는, 분수의 경우 분할 전략을 가장 선호한 학생이 32명으로, 전체의 41.0%로 가장 많았으며, 기준점 참고 전략을 가장 선호한 학생은 24명(30.8%), 어림 전략을 가장 선호한 학생은 22명(28.2%) 순서로 나타났다. 소수의 경우 반올림 전략을 가장 선호한 학생이 29명, 전체의 37.2%로 가장 많았고, 기준점 참고 전략을 가장 선호한 학생은 24명(30.8%), 자연수 변환 전략을 가장 선호한 학생은 21명(26.9%) 순으로 나타났다. 이때 2명(2.6%)의 학생은 소수를 표상할 때 모든 전략을 같은 비율로 사용하였고, 다른 2명(2.6%)의 학생은 3개 중 2개의 전략을 같은 비율로 사용하였다. 전체 전략 선택 결과와 개인별 전략 선호도를 종합해 보면, 분수와 소수 NLE 과제에서 공통적으로 기준점 참고 전략의 활용 빈도가

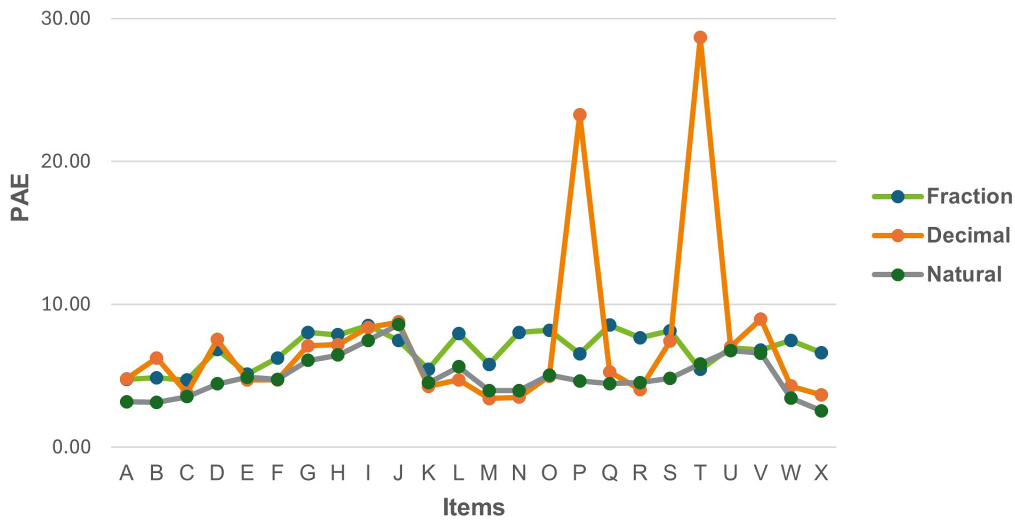

Figure 2. The precision of representing natural numbers, fractions, decimals on the number line by items (PAE).
Note. A:1/13=0.077=77 B:1/12=0.083=83 C:1/8=0.125=125 D:3/20=0.15=150 E:1/6=0.167=167 F:2/9=0.222=222 G:3/11=0.273=273 H:2/7=0.286=286 I:4/11=0.364=364 J:3/8=0.375=375 K:5/12=0.417=417 L:4/9=0.444=444 M:5/9=0.556=556 N:5/8=0.625=625 O:7/11=0.636=636 P:13/20=0.65=650 Q:5/7=0.714=714 R:8/11=0.727=727 S:5/6=0.833=833 T:17/20=0.85=850 U:7/8=0.875=875 V:8/9=0.889=889 W:10/11=0.909=909 X:13/14=0.929=929.

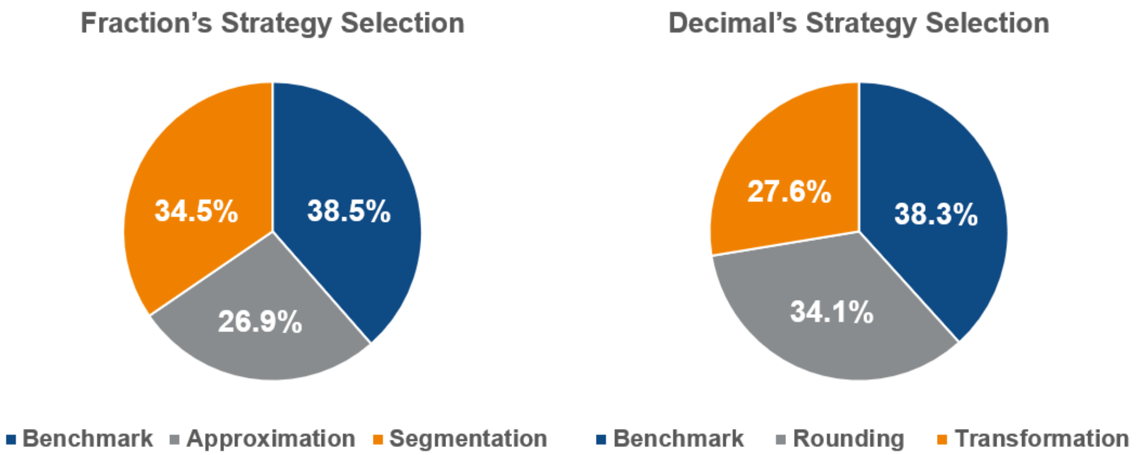

Figure 3. The percentage of strategy selection in fraction and decimal NLE tasks.

높았으며, 이와 병행하여 분수 NLE 과제에서는 분수의 수만큼 나누는 분할 전략, 소수 NLE 과제에서는 반올림 전략의 활용 빈도도 높았다.

다음으로 분수와 소수의 특징에 따른 전략 사용 양상의 빈도를 분석하였다(see Tables 2, 3). 분모의 자릿수에 따른 전략 선택 양상에 통계적으로 유의한 상관성이 나타났다(Cramer's V=0.063, p=0.026). 일부 주목할 만한 결과로는 주어진 분수의 분모가 한 자리인 경우는 분할 전략(37.6%)과 기준점 참고 전략(37.6%)의 사용 빈도가 높았으나, 분수의 분모가 두 자리인 경우는 기준점 참고 전략을 39.4%로 가장 많이 사용하였다. 분모의 홀짝 여부와 전략 사용 양상의 경우도 유의한 상관성이 있었으며(Cramer's V=0.070, p=0.011), 특별히 분모가 짝수일 때보다 홀수일 때 어림 전략을 더 많이 사용하였고(24.2% vs. 29.7%), 분모가 홀수일 때보다 짝수일 때 분할 전략을 더 많이 사용한 것으로 드러났다(33.0% vs. 36.0%) (see Table 2).

반면, 소수의 자릿수 길이에 따른 전략 사용 양상은 유의한 상관성이 없었다(Cramer's V=0.030, p=0.442). 소수 두 자리 수, 소수 세 자리 수 모두 기준점 참고 전략의 사용 빈도가 가장 높았다. 또한 소수 두 자리 수보다 소수 세 자리 수일 때 반올림 전략의 사용 빈도가 상대적으로 높게 나타났다(29.5% vs. 34.6%) (see Table 3).

종합하면, 학생들은 수직선에 분수와 소수를 표상할 때 전반적으로 기준점 참고 전략을 많이 사용하는 모습을 보였으며, 분수와 소수의 특징에 따라서 다른 전략을 선택해 표상하는 것으로 나타났다. 특히, 분수의 경우 분모가 두 자리일 때, 분모가 홀수일 때 어림 전략을 더 많이 사용하였으며 소수의 경우 소수점 이하 세 자리까지 제시되었을 때 반올림 전략을 더 많이 사용하였다.

Table 2. Frequency of fraction's representation strategy selection based on numeric features (%)

		Benchmark	Approximation	Segmentation	Cramer's *V*	p
Length	One-digit denominators	37.6	24.7	37.6	0.063	0.026
	Two-digit denominators	39.4	29.2	31.4		
Oddness	Odd denominators	37.3	29.7	33.0	0.070	0.011
	Even denominators	39.8	24.2	36.0		

Table 3. Frequency of decimal's representation strategy selection based on numeric features (%)

		Benchmark	Rounding	Transformation	Cramer's *V*	p
Length	Two-digit decimals	41.0	29.5	29.5	0.030	0.442
	Three-digit decimals	38.1	34.6	27.4		

이상의 결과를 토대로, 추가적으로 각 Item별 전략 선택의 양상 및 선택된 전략별 PAE 값에 유의한 차이가 있는지 살펴보았다. 분수의 경우, 전체 24문항 중 9개 문항에서 전략별 PAE 값의 유의한 차이가 있었다(see Appendix A). 소수의 경우 전체 24문항 중 2개 문항에서 전략별 PAE 값의 유의한 차이가 있었다(see Appendix B). 구체적으로, 분수의 경우 대체적으로 분할 전략을 사용했을 때 정확도가 높게 나오는 경향이 있었으며, 주어진 분수의 크기가 중간 지점에 가까운 경우 기준점 전략에서 가장 높은 정확도를 보이기도 하였다(예: 3/8, 4/9). 그 외에 분모의 크기가 두 자리 수인 17/20 문항에서는 어림 전략을 사용했을 때의 가장 높은 정확도를 보였다. 소수의 경우, 0.125에서 반올림 전략을 선택한 학생들이, 0.222에서 변환 전략을 선택한 학생들이 높은 정확도를 보였다.

3. 분수와 소수의 수직선 표상 정확성 및 전략 사용의 개인차

세 번째 연구 문제와 관련하여 분수 및 소수의 크기를 수직선상에 나타내기 위해 사용하는 전략의 유연성 정도에 따라 표상의 정확성, 연산 능력, 학업성취 수준의 개인차가 발생하는지 여부를 분석하였다. 먼저, 각각의 분수와 소수 NLE 과제에서 개인별 선택한 전략의 수를 기준으로 세 집단으로 분류하고, 집단별 표상의 정확성, 연산 능력, 수학 학업성취 점수의 유의한 차이가 있는지를 검증하기 위해 일원변량분석을 실시하였다.

분석 결과, 분수 NLE 과제에서 선택한 전략의 유연성 정도에 따라 표상의 정확성, 수학 학업성취 점수의 유의한 차이가 있었다, $Fs > 4.73$, $ps < 0.012$, $\eta_p^2 s > 0.112$ (see Table 4). Bonferroni 사후 검정 결과, 주어진 3가지 전략을 모두 골고루 사용한 것으로 보고한 학생들은 2가지 전략을 사용한 학생들보다 분수 NLE 과제의 PAE 값이 유의하게 낮았다(Ms=5.47 vs. 9.25, SDs=3.21 vs. 7.84, p=0.050). 아울러 3가지 전략을 모두 사용한 학생들은 1가지 또는 2가지 전략을 사용한 학생들보다 수학 학업성취 점수가 유의하게 높게 나타났다(Ms=20.80 vs. 17.47, 17.21, SDs=4.11 vs. 4.66, 4.94, ps=0.035, 0.25). 반면, 소수 NLE 과제에서 확인된 전략 사용의 유연성 정도에 따른 소수 수직선 나타내기 추정 오차, 곱셈, 나눗셈, 수학 학업성취 점수의 유의한 차이는 없었다, $Fs < 1.60$, $ps > 0.210$, $\eta_p^2 s < 0.041$. 이러한 결과의 패턴은 상관 분석에서도 나타났다(see Table 5). 분수 NLE 과제에서 다양한 전략을 사용한 학생일수록 분수의 크기를 수직선에 더 정확하게 표시하였으며(r=-0.304, p=0.007), 수학 학업성취 점수가 높게 나타나는 경향을 보였다(r=0.328, p=0.003).

Table 4. The fraction PAEs, calculation test scores, and mathematical achievement test scores based on the number of strategies chosen in the fraction NLE task

	Use one strategy (*N*=15)	Use two strategies (*N*=14)	Use three strategies (*N*=49)	*F*	p	η_p^2
Fraction PAE						
M	9.03	9.25	5.47	4.739	0.012	0.112
SD	6.78	5.92	4.70			
Calculation test						
Multiplication						
M	17.47	15.36	16.00	0.624	0.539	0.016
SD	6.03	3.57	5.56			
Division						
M	14.13	12.36	13.18	0.216	0.806	0.006
SD	11.67	5.09	6.02			
Math achievement test score						
M	17.47	17.21	20.80	5.686	0.005	0.132
SD	4.94	4.66	4.11			

Table 5. Pearson correlation matrix among five variables

	1	2	3	4	5
1. Number of strategies chosen	–				
2. Fraction PAE	-0.304**	–			
3. Multiplication score	-0.084**	-0.190**	–		
4. Division score	-0.035**	-0.255**	0.702**	–	
5. Math achievement test score	0.328**	-0.604**	0.263**	0.308**	–

**p<0.01.

논의 및 결론

본 연구는 빈 수직선상에서 물리적 위치가 동일한 자연수, 분수, 소수 NLE 과제를 실시함으로써, 초등학교 6학년의 분수와 소수의 크기에 대한 표상의 정확성을 객관적으로 분석하려고 시도하였다. 아울러, 분수와 소수 NLE 과제에서 주로 사용되는 전략으로 알려진 각각의 3가지 전략을 학생들에게 소개하여, 주어진 분수와 소수의 크기를 나타내기 위해 다양한 전략을 유연하게 사용할 수 있는지를 살펴보고, 이러한 유연성이 표상의 정확성, 연산 능력, 수학 학업성취도의 개인차와 관련성이 있는지를 검증하였다.

본 연구에서 드러난 주요 결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 초등학교 6학년 학생들은 여전히 자연수 대비 분수 및 소수를 표상하는 정확성이 상대적으로 낮았다. 교육과정에 비추어 볼 때 자연수, 분수, 소수에 대한 수의 개념이 확립되었을 것으로 기대되는 시기였지만, 특히 분수의 경우 분모가 홀수일 때, 소수의 경우 소수 두 자리 수일 때 수의 크기를 빈 수직선에 표상하는 정확성이 상대적으로 낮게 나타났다. 이러한 결과는 미국 8학년 학생들의 0–5사이의 분수를 표상하는 정확성이 2학년 학생들의 0–100 사이의 자연수를 표상하는 정확성보다 상대적으로 낮다는 결과와 유사하였다(Siegler & Braithwaite, 2017).

둘째, 학생들은 분수와 소수의 크기를 수직선에 표상하기 위해 기준점 참고 전략을 가장 빈번히 선택하였다. 기준점 참고 전략은 자연수 NLE 과제에서도 가장 많이 활용되는 전략으로(Newman & Berger, 1984; Park et al., 2016), 학생들은 자신에게 익숙한 전략을 선호함을 보여주었다. 이와 비슷한 맥락으로, 분수의 여러 의미 중 가장 많이 강조되는 등분할을 바탕으로 분모의 수만큼 수직선을 분할하는 전략을(Heo & Im, 2024), 어림을 통해 복잡한 수를 간단히 나타내는 것과 같이 길이가 긴 소수 세 자리 수를 반올림을 통해 소수 두 자리 수로 나타내는 반올림 전략도 빈번히 사용하였다.

셋째, 분수 NLE 과제에서 3가지 전략을 모두 사용한 학생들은 1가지 또는 2가지 전략만 사용한 학생들보다 표상의 정확성

과 수학 학업성취도 점수가 더 높게 나타났다. 이러한 결과는 수학 교육 및 인지 심리 분야에서 논의된 문제 풀이 유연성, 적응적 전문성의 중요성을 뒷받침해 주었다(Hatano & Inagaki, 1986; Verschaffel, 2024). 반면 소수 수직선 NLE 과제에서 확인된 전략 선택의 유연성과 표상의 정확성, 연산 능력, 수학 학업성취도 개인차의 관련성은 나타나지 않았다.

이상의 주요 결과를 바탕으로 분수와 소수 이해를 돕기 위한 지도방안으로서, 수직선 활용법 및 표상 전략 지도 접근법에 대한 교육적 시사점을 도출하면 다음과 같다. 첫째, 분수의 다양한 개념과 자연수 대비 소수의 자릿값 및 0의 개념에 대한 세심한 지도가 필요하겠다. 본 연구에서 초등학교 6학년 학생들은 분수의 경우 분모가 짝수일 때보다 홀수일 때 표상의 정확성이 상대적으로 낮았는데, 이는 분모가 홀수인 경우 짝수와 달리 수직선의 정중앙을 기준으로 분할 전략을 적용하는 데 있어 어려움이 발생하는 것과 관련이 있어 보인다. 만약 학생이 분수의 전체-부분의 개념에만 의존하지 않고 다른 개념인 몫, 비, 측정, 연산자 등도 활용한다면(Behr et al., 1983), 예를 들어 4/17의 크기를 추정하기 위해 4÷17의 값을 어림하거나 또는 24/102와 같이 분모가 다른 분수의 값을 통해, 다른 방법으로 분모가 홀수인 분수의 크기를 추정해 볼 수 있을 것이다.

다음으로 학생들은 소수 세 자리 수보다 소수 두 자리 수를 표상하는 데 있어 많은 오류를 범하였는데, 예를 들어 다수의 학생(24명, 31%)이 0.85의 크기를 실제보다 과소하게 표시하는 경향을 보였다. 이와 같은 오류를 막기 위해서는 0.85와 같은 소수 두 자리 수를 0.85=8/10+5/100과 같이 십진 분수(decimal fractions)로 표현해 보게 하거나(Kang, 2011), 0.85, 0.850, 0.8500이 서로 같은 소수임을 보여줌으로써 자릿수 길이에 따라 소수의 크기가 결정되지 않음을 학습시켜줄 필요가 있겠다(Schiller et al., 2024). 또한 소수 표현에서 주어진 소수의 오른쪽 끝에 0을 표시해도 크기가 변하지 않는 점을 지도함으로써, 0.85 vs. 0.636과 같이 길이가 다른 소수의 크기 비교에서 의도적으로 0을 추가하여, 0.850 vs. 0.636 소수의 크기 이해에 도움을 주는 방법도 고려할 수 있겠다(Varma & Karl, 2013).

둘째, 수 자체의 표기법에서는 실감하기 어려운 수의 크기에 대한 이해를 제고할 수 있도록 수의 크기를 직관적, 시각적으로 제공하는 수직선 모델을 적극적으로 활용하여 지도하는 것이 필요하겠다. 이 과정에서 학생들이 특별히 익숙하게 사용하는 전략, 즉 기준점 참고 전략을 교수 학습 초반에 스캐폴딩으로 사용하고, 그 후 학생들의 분수와 소수 개념 이해와 잘 호환되는 분할 전략, 반올림 전략을 추가적으로 소개함으로써 주어진 분수와 소수의 특성에 따라 적절한 전략을 선택하도록 지도할 수 있겠다. 다수의 선행 연구에서 이미 수직선을 활용한 교수 처치가 학생들의 분수와 소수 이해에 도움이 됨을 보여주었다(e.g., Barbieri et al., 2020). 다만 구체적인 표상 전략을 직접 교수했을 때, 수직선을 활용한 교수 처치의 효과가 증대되는지 여부는 아직 연구가 미흡한 실정이므로 후속 연구를 통해 검증해 볼 필요가 있겠다.

셋째, 주어지는 문제의 특징을 고려하여 적응적으로 전략을 사용할 수 있도록 관련 학습 경험을 제시함으로써 다양한 전략의 사용을 권장할 필요가 있겠다. 다양한 전략을 사용하는 것은 각 문제별로 적절한 전략을 선택해 문제 상황별로 유연하게 대처할 수 있게 만드는 이점이 있다(Verschaffel, 2024). Rittle-Johnson 외 (2019)가 제시한 바처럼 학습 과정에서 서로 다른 전략을 사용할 수 있는 예시 문항들을 제시하여 직접 전략들을 비교하고, 다른 학생들과 토론할 수 있는 시간을 제공하는 것은, 학생들이 다양한 전략을 배우고 이를 유연하게 사용하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다.

그 외에 본 연구의 주요 결과 중 연구자의 가설과 다소 일치하지 않는 결과들도 있었다. 이러한 결과는 추후 후속 연구를 통해서 검증이 필요할 것으로 보인다. 첫째, 소수의 경우 소수의 유연한 전략 사용과 표상 정확성 간의 연관성이 확인되지 않았다. 이러한 결과에 대한 설명을 찾고자 한다면 분수의 경우 Appendix A에 제시된 바와 같이 9개 문항이 사용된 전략에 따라 표상의 정확성이 상이하였으나, 소수의 경우 Appendix B에 제시된 바와 같이 2개 문항에 그쳤다. 즉 실험에서 주어진 소수 두 자리 수 또는 소수 세 자리 수의 경우, 특정 전략의 선택이 가져다주는 이점이 뚜렷하지 않았음을 알 수 있다. 둘째, 소수의 유연한 전략 사용과 연산 능력간의 연관성도 나타나지 않았다. 소수 NLE 과제에서 제시된 변환 전략의 경우, '×1,000'을 해야 하는 일부 곱셈 연산 능력이 요구되지만, 기준점 참고 전략과 반올림 전략의 경우, 연산 능력보다는 수의 크고 작음에 대한 어림 능력과 더 밀접한 관련성이 있다는 점에서 연산 능력과의 유의한 상관성이 나타나지 않은 것으로 보인다. 셋째, 소수의 유연한 전략 사용과 수학 학업성취도의 연관성도 나타나지 않았다. 앞서 언급한 것처럼 어떤 전략을 선택하느냐에 따른 표상의 정확성이 명확하게 달라지는 소수의 문항이 매우 적은 점에 비추어 볼 때, 소수 NLE 과제에서 측정된 전략 사용의 유연성은, 수학 교육 및 인지심리 연구에서 가정하는 유연성 및 적응적 전문성과는 상이함을 유추할 수 있다.

마지막으로 본 연구를 토대로 고려해 볼 수 있는 후속 연구에 대한 아이디어를 제시하면 다음과 같다. 첫째, 본 연구에서 학생들은 안내된 세 가지 전략 중 한 가지를 선택해서 주어진 수의 크기를 빈 수직선에 표시하고 자신이 사용한 전략을 자기 보고하도록 지시를 받았다. 하지만 실제 풀이 과정에서, 학생들이 이러한 지시를 준수하지 않았을 수도 있으며, 여러 전략을 동시에 사용하거나 또는 자신만의 다른 전략을 사용했을 가능성을 배제할 수는 없다. 이를 보완하기 위해서는 시선 추적(eye tracking) 기술을 활용하거나(e.g., Schneider et al., 2008), 학생에게 자신의 풀이전략을 소리내어 설명하게(think-aloud)

함으로써 학생들이 실제 사용한 전략에 대한 면밀한 측정을 시도할 수 있겠다. 둘째, 분수와 소수의 경우 제시한 수의 범위가 1 미만으로 한정되어 0-1 사이의 수직선만 사용하여 응답을 수집하였다는 점에서 수 크기 이해 정도를 제한적으로 확인할 수밖에 없었다. 실제로 Siegler 외 (2011)의 연구 결과, 분수 NLE 과제의 0-1 수직선보다 0-5 수직선에서 변환 전략이 유의하게 더 많이 사용하였음이 보고되었다는 점(44% vs. 14%)과, 0-5 범위의 지식은 0-1 범위의 지식보다 상대적으로 늦게 발달하며, 0-5 범위의 수직선에 수를 표상하는 것이 0-1 범위의 수직선보다 인지적으로 높은 수준을 요구한다는 점에서 후속 연구에서는 0-5 범위의 수직선 추정 과제를 사용하여 수직선 추정 전략 및 정확도를 분석하는 것을 고려해볼 수 있을 것이다. 이를 통해 개인차 및 다양한 전략 사용의 유연성의 차이를 더 명확하게 할 수 있을 것으로 보인다. 셋째, 본 연구에서 예상치 않은 순서 효과에 의한 분수 PAE 값의 유의한 차이가 있었다. 이러한 순서 효과의 진위여부를 면밀히 파악하기 위해서는 학급 요인과 같은 2차 수준의 변인 통제 및 실험 중 세션별 휴식을 통해 피로효과를 최소화하고, 학급별 실험시작 시간도 일치시키는 등의 실험 설계가 이루어져야 하겠다.

Endnote

1) 학생 한 명의 5/8의 PAE 값이 알 수 없는 오류로 기록되지 않음.

ORCID

Jinyoung Heo: https://orcid.org/0009-0009-8007-3472
Soo-hyun Im: https://orcid.org/0000-0002-4410-9396

Conflict of Interest

The authors declare that they have no competing interests.

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Korea and the National Research Foundation of Korea (NRF. 2021S1A5A8061509).

References

Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N., & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology, 112*(3), 628-648. https://doi.org/10.1037/edu0000384

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Braithwaite, D. W., & Siegler, R. S. (2018). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental Science, 21*(2), e12541. https://doi.org/10.1111/desc.12541

Chang, H. (2017). Research on teaching method for the properties of arithmetic based on analysis of elementary school mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 21*(1), 1-22.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21-29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Fitzsimmons, C. J., Thompson, C. A., & Sidney, P. G. (2020). Do adults treat equivalent fractions equally? Adults' strategies and errors during fraction reasoning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,*

46(11), 2049-2074. https://doi.org/10.1037/xlm0000839
Foley, T. E., & Cawley, J. F. (2014). About the mathematics of division: Implications for students with disabilities. In J. F. Cawley, & L. J. Cawley. (Eds.), *Mathematics instruction for students with disabilities* (pp. 131–149). Routledge.
Girit, D., & Akyuz, D. (2016). Pre-service middle school mathematics teachers' understanding of students' knowledge: Location of decimal numbers on a number line. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 4*(2), 84–100. https://doi.org/10.18404/ijemst.74290
Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. Stevenson, H. Azuma, & K. Hakuta (Eds.), *Child development and education in Japan* (pp. 262-272). Freeman.
Heo, J., & Im, S.-h. (2024). An analysis of learning experience opportunities presented in the 2015 revised elementary mathematics textbooks: Focused on visual models of fractions and decimals and their connection. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 28*(2), 225–246. https://doi.org/10.54340/kseme.2024.28.2.3
Im, S.-h., & Varma, S. (2024). The application of arithmetic principles predicts mathematical achievement in college students. *Learning and Instruction, 91*, 101889. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.101889
Kang, H. K. (2011). A Study on the learning-teaching plan about a essential concept of decimal fraction based on decimal positional notation. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 15*(1), 199–219.
Kim, J. W. (2022a). An analysis of elementary students' understanding of number line: Focused on concept of fractions and addition and subtraction of fractions. *Education of Primary School Mathematics, 25*(3), 213–232. https://doi.org/10.7468/jksmec.2022.25.3.213
Kim, J. W. (2022b). An analysis of understanding of prospective elementary teachers on students' strategies for fraction tasks with number lines. *The Mathematical Education, 61*(3), 375–396, https://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.3.375
Kim, Y. S., & Nam, J. (2023). The understanding of decimals by 5th-grade elementary school students. *The Journal of Education, 43*(2), 73–88. http://doi.org/10.25020/je.2023.43.2.73
Kwon, S. Y. (2003). A study on elementary school students' understanding of fractions. *School Mathematics, 5*(2), 259–273.
Ministry of Education. (2015). *Mathematics curriculum* (Ministry of Education Notice No. 2015-74 [Supplement 8]). https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=141&lev=0&statusYN=C&s=moe&m=0404&opType=N&boardSeq=60747
Newman, R. S., & Berger, C. F. (1984). Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. *Journal of Educational Psychology, 76*(1), 55–64. https://doi.org/10.1037/0022-0663.76.1.55
Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
Park, H., Li, H. C., & Kim, S. W. (2016). Verifying use of reference points in the number line estimation task. *Korean Journal of Cognitive and Biological Psychology, 28*(4), 653–673. http://doi.org/10.22172/cogbio.2016.28.4.003
Peeters, D., Degrande, T., Ebersbach, M., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2016). Children's use of number line estimation strategies. *European Journal of Psychology of Education, 31*, 117–134. https://doi.org/10.1007/s10212-015-0251-z
Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(5). 307–317. https://doi.org/10.2307/748675
Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346
Rittle-Johnson, B., Star, J. R., Durkin, K., & Loehr, A. (2019). Compare and discuss to promote deeper learning. In E. Malano (Ed.), *Deeper learning, dialogic learning, and critical thinking* (pp. 48–64). Routledge.
Schiller, L. K., Abreu-Mendoza, R. A., & Rosenberg-Lee, M. (2024). Adults systematically underestimate decimals and whole number exposure induces further magnitude-based underestimation. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 50*(3), 484-499. https://doi.org/10.1037/xlm0001235
Schneider, M., Heine, A., Thaler, V., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verschaffel, L., Jacobs, A. M., & Stern, E. (2008). A validation of eye movements as a measure of elementary school children's developing number sense. *Cognitive Development, 23*(3), 409–422. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2008.07.002
Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: A meta-analysis. *Child Development, 89*(5), 1467–1484. https://doi.org/10.1111/cdev.13068
Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 36*(5), 1227-1238. https://doi.org/10.1037/a0018170
Sidney, P. G., Thalluri, R., Buerke, M. L., & Thompson, C. A. (2019). Who uses more strategies? Linking mathematics anxiety to adults' strategy variability and performance on fraction magnitude tasks. *Thinking & Reasoning, 25*(1), 94–131. https://doi.org/10.1080/13546783.2018.1475303
Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology, 68*, 187–213. https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044101

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126*(1), 71-92. https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science, 26*(4), 346-351. https://doi.org/10.1177/ 0963721417700129

Siegler, R. S., & Thompson, C. A. (2014). Numerical landmarks are useful-except when they're not. *Journal of Experimental Child Psychology, 120*(1), 39-58. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.11.014

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Sowinski C., Dunbar K., & LeFevre J. (2014). *Calculation fluency test* [Unpublished technical report]. Math Lab, Carleton University. https://carleton.ca/cacr/?p=316

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Varma, S., & Karl, S. R. (2013). Understanding decimal proportions: Discrete representations, parallel access, and privileged processing of zero. *Cognitive Psychology, 66*(3), 283-301. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2013.01.002

Verschaffel, L. (2024). Strategy flexibility in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 56*, 115-126. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01491-6

Yoon, C., & Chang, H. (2023). An analysis on reasoning of 4th-grade elementary school students in comparing unlike fraction magnitudes. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 26*(3), 181-197. https://doi.org/10.7468/jksmec.2023.26.3.181

Yuan, Y., & Chen, K. (2023). Whole number bias of students in fraction number line tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(5), 1433-1449. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10315-0

Appendix A

Items	Benchmark (기준점)			Approximation (어림)			Segmentation (분할)				
	N	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*N*	*M*	*SD*	*F*	*p*
1/13	28	8.42	16.8	21	2.44	2.5	29	2.89	2.0	2.82	0.066
1/12	23	7.51	17.1	19	5.53	11.9	36	2.84	2.2	1.30	0.280
1/8	24	7.25	12.2	16	6.51	10.2	38	2.31	1.8	3.16	0.048
3/20	26	8.22	17.1	28	6.21	5.4	24	6.12	13.2	0.23	0.797
1/6	26	7.32	10.4	16	6.23	5.4	36	3.07	2.5	3.29	0.043
2/9	22	9.26	10.1	21	5.85	8.1	35	4.59	2.5	3.05	0.054
3/11	25	9.43	9.8	32	6.33	4.6	21	8.94	4.9	1.74	0.182
2/7	22	8.31	7.5	21	8.44	5.9	35	7.25	9.9	0.18	0.840
4/11	33	7.00	8.4	25	10.19	6.7	20	8.92	11.9	0.93	0.398
3/8	32	5.93	5.3	15	13.56	9.8	31	6.11	5.5	8.24	0.001
5/12	44	4.61	6.1	15	10.01	10.3	19	3.84	3.5	4.45	0.015
4/9	40	5.29	5.9	22	8.96	12.4	16	13.23	12.9	3.97	0.023
5/9	40	5.43	6.9	21	6.04	6.2	17	6.41	7.7	0.14	0.874
5/8	37	7.89	8.2	15	6.86	5.7	25	8.92	10.1	0.28	0.754
7/11	31	8.71	7.3	24	7.35	7.5	23	8.31	5.8	0.26	0.770
13/20	42	6.39	7.9	18	6.98	4.4	18	6.47	5.3	0.05	0.951
5/7	30	11.23	10.4	19	8.08	8.6	29	6.09	8.5	2.27	0.110
8/11	29	10.07	9.4	25	7.14	7.9	24	5.29	5.7	2.45	0.093
5/6	27	12.26	14.9	22	7.6	10.3	29	4.77	7.1	3.18	0.047
17/20	33	7.51	9.1	21	3.2	2.5	24	4.55	3.6	3.22	0.046
7/8	27	8.47	10.6	20	8.41	9.9	31	4.67	8.2	1.47	0.237
8/9	25	11.36	14.4	23	5.76	5.7	30	3.79	8.1	4.02	0.022
10/11	24	11.97	16.2	24	5.31	12.1	30	5.61	11.1	2.03	0.139
13/14	31	10.91	15.1	21	5.52	9.7	26	2.43	2.6	4.42	0.015

Appendix B

Items	Benchmark (기준점)			Rounding (반올림)			Transformation (변환)			F	p
	N	M	SD	N	M	SD	N	M	SD		
0.077	25	7.86	14.7	26	3.42	2.5	27	3.27	2.5	2.37	0.101
0.083	24	3.43	2.6	27	6.44	15.5	27	8.54	18.6	0.81	0.447
0.125	29	4.96	4.1	22	2.90	2.2	27	3.22	2.6	3.30	0.042
0.15	25	8.20	5.9	30	7.34	4.6	23	7.04	4.7	0.35	0.708
0.167	24	4.63	2.6	30	4.66	3.0	24	4.82	3.4	0.03	0.973
0.222	22	6.65	5.0	35	4.40	4.1	21	3.16	2.3	4.21	0.018
0.273	29	7.08	4.9	29	7.18	4.1	20	6.97	3.5	0.01	0.986
0.286	24	6.81	4.6	31	7.38	5.2	23	7.26	5.2	0.09	0.911
0.364	28	8.26	5.6	27	8.13	4.9	23	8.79	6.3	0.09	0.910
0.375	31	8.00	4.7	24	8.61	5.4	23	9.96	5.3	0.99	0.377
0.417	41	3.98	3.7	20	3.76	2.3	17	5.56	7.8	0.85	0.433
0.444	43	4.82	3.4	17	3.83	2.5	18	5.29	3.9	0.89	0.415
0.556	49	2.62	2.2	15	6.57	11.6	14	2.81	6.0	2.68	0.075
0.625	41	3.01	2.2	20	4.19	3.1	17	3.85	2.4	1.66	0.196
0.636	40	4.35	3.0	26	6.86	9.7	12	2.92	2.6	2.14	0.125
0.65	35	17.54	21.2	20	24.88	26.6	23	30.65	27.6	2.02	0.140
0.714	23	3.86	2.7	32	5.84	3.9	23	5.88	5.4	1.88	0.160
0.727	28	3.83	2.8	28	3.86	2.3	22	4.57	6.3	0.26	0.771
0.833	27	7.45	14.8	29	5.48	4.9	22	10.04	16.9	0.79	0.459
0.85	29	37.03	37.0	26	24.89	32.7	23	22.45	30.3	1.44	0.243
0.875	23	7.67	6.3	31	5.57	3.6	24	8.27	6.3	1.93	0.153
0.889	24	8.29	6.6	31	8.98	13.7	23	9.69	15.4	0.07	0.929
0.909	24	4.14	5.3	35	3.94	2.9	19	5.08	7.0	0.35	0.707
0.929	29	3.47	3.5	28	3.86	3.8	21	3.66	2.6	0.10	0.909

MathEdu Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A

Research Article

The Mathematical Education 2024;63(3):393-409
https://doi.org/10.7468/mathedu.2024.63.3.393
pISSN 1225-1380, eISSN 2287-9633

초등학교 6학년의 분수와 소수의 크기에 대한 수직선 표상의 정확성 및 사용 전략 분석

허진영[1], 임수현[2]*

[1]한양대학교, 대학원생
[2]한양대학교, 조교수

*교신저자: 임수현(edupsy@hanyang.ac.kr)

초 록

분수와 소수가 나타내는 크기에 대한 이해를 돕기 위해, 수의 크기를 공간상에 직관적으로 표시하는 수직선 모델이 널리 활용된다. 본 연구에서는 수직선 추정 과제를 활용하여 초등학교 6학년 학생들의 분수와 소수에 대한 이해도 및 문제 해결 전략을 살펴보고, 다양한 전략 사용의 유연성이 분수와 소수의 표상의 정확성, 연산 능력, 수학 학업성취도의 개인차와 연관성이 있는지를 분석하였다. 분석 결과, 학생들은 자연수에 비해 분수와 소수의 수직선 표상 정확성이 상대적으로 낮았으며, 특별히 분수의 경우 분모가 짝수인 분수보다 홀수인 분수에서, 소수의 경우 소수 세 자리 수 보다 소수 두 자리 수에서 수직선 표상의 정확성이 더 낮게 나타났다. 전략 사용의 측면에서 학생들은 분수를 수직선에 표상할 때 기준점 참고 전략, 분할 전략, 어림 전략 순으로 많이 사용하였으며, 소수를 표상할 때에는 기준점 참고 전략, 반올림 전략, 자연수 변환 전략 순으로 많이 사용하였다. 마지막으로 분수를 표상할 때 사용하는 전략이 다양할수록 분수의 표상 정확성과 수학 학업성취 점수가 높게 나타났다. 이러한 결과를 토대로 분수의 다양한 개념과 자연수 대비 소수의 자릿값 및 0의 개념에 대한 세심한 지도의 필요성을 제언하였다. 또한 분수와 소수에 대한 이해를 돕기 위한 방안으로, 수직선 모델 활용과 함께 표상 전략을 병행해서 지도하는 방법에 대해 논의하였다.

주요어 수직선 추정 과제, 분수, 소수, 수직선 추정 전략, 유연성

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http: //creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
© The Korean Society of Mathematical Education