韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.3.281
2024. 7. 제 27권, 제 3호, 281-301

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
July. 2024, Vol. 27, No. 3, 281-301

# 분수의 나눗셈에 대한 대수적 사고 기반 수업이 문제해결에 미치는 영향

박서연(서울거원초등학교, 교사) · 장혜원(서울교육대학교, 교수)†

대수는 방정식의 풀이로 해석되는 전통적인 관점에 따라 초등 현장에서 명시적으로 다루어지지 못하는 한계가 있지만, 초등 수준의 발달 단계에 맞춰 수의 체계와 원리, 산술적 사고의 확장인 대수적 사고로서 학습되어야 한다고 주장되어왔다. 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들에게 분수의 나눗셈에 대한 대수적 사고 기반 수업을 실시하고 문제해결력에 미치는 영향을 분석하였다. 학생들은 11차시의 수업에서 제수와 피제수의 관계 탐구를 통해 해결 방법을 일반화하고 특정한 분수의 나눗셈 문제에서 나아가 모든 경우에 적용할 수 있는 표현을 탐색하였다. 연구 결과 대수적 사고를 기반으로 한 수학 수업이 분수의 나눗셈 문제해결력에 긍정적인 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다. 학생들의 해결 과정에서는 기호화, 일반화, 추론, 정당화의 대수적 사고 요소가 나타났으며 다양한 수학적 아이디어와 구조를 발견하고 이를 활용해 문제를 해결하는 특징을 보였다. 연구 결과를 바탕으로 초등학생에게 초기 대수 지도를 위한 시사점을 도출하였다.

## I. 서론

대수 학습은 학교 수학에서 가장 중요한 내용 중 하나이며, 대수를 이해하는 것은 중등 수학 학습 전반에 영향을 미칠 정도로 결정적이다. 학생들은 대수적 사고를 통해 더 추상적인 개념에 대해 다루고 산술에서 한 차원 높은 고등 사고 능력을 신장시킬 수 있다. 대수적 사고가 초등학생의 발달 단계에서 학습이 가능한지에 대한 의문과 중등 학습 내용을 초등학교 때부터 지도하는 것은 선행학습이 아닌가 하는 시선도 존재한다. 그러나 이것은 기존의 전통적인 문자 기호 중심의 대수 도입 방식에 따라 해석하는 관점이며 대수는 관계, 규칙, 일반화로 해석해야 한다(김성준, 2003a).

이러한 관점에서 대두된 초기 대수(early algebra)는 산술과 대수를 인위적으로 구분하기보다 수의 체계와 연산 원리, 사고의 확장으로 재개념화하고 아동의 발달 수준에 맞는 대수적 사고를 학습할 수 있도록 하는 것을 의미한다(Kaput, 1998; Kaput & Blanton, 2001). 이미 국외에서는 많은 연구를 통해 초등학생 대상의 대수적 사고 지도 가능성을 확인된 바 있다. 예컨대, Carpenter et al.(2003)은 초등학교 3~5학년을 대상으로 수와 연산의 성질을 일반화하고 언어로 표현하며 정당화할 수 있다는 것을 증명하였고, Blanton et al.(2015)은 초등에서 등호와 방정식, 일반화된 산술 등을 포함한 대수적 사고를 강조한 수업을 받은 학생들이 그렇지 않은 학생들에 비해 대수적 전략을 사용해 문제를 해결하였고 정답률도 더 높았다고 역설한다.

최근 국내에서도 초등에서 대수적 사고의 중요성이 점점 커지고 있다. 2022 개정 교육과정의 3~4학년군에서 신설된 등호와 동치 관계 관련 성취기준도 대수적 사고를 강조하는 방향성을 보여준다(교육부, 2022). 등호는 대수적 사고에서 핵심적인 개념 중 하나로 두 양을 비교하고 추론하며 관계적 사고가 가능하게 한다. 이처럼 초등 수학부터 등호와 동치 관계를 명시적으로 제시한 것은 대수적 사고 함양을 위한 시도 중의 하나라고 할 수 있다(최지선, 나귀수, 2023).

그러나 실제 교과서에서는 학습 목표로서 직접적으로 언급된 몇몇 차시를 제외한다면 대수적 사고를 명시적으로 경험하게 하는 사례는 부족하다고 할 수 있다(방정숙, 김승민, 2018). 또한 학년이나 단위에 따라 수와 연산의 성질에 대해 다룬 사례 수의 차이가 있다. 도주원, 백석윤(2020)에서도 본격적인 대수 교육이 이루어지는 미국이나 싱가포르 교과서와는 달리 기호로만 미지수를 표현하는 약화된 미지수 표현 방식을 지적하며 초기 대수 교육의 필요성과 중등 수학의 대수 교육과의 연계성을 고려하여 미지수의 개념 지도와 문자 기호로의 표현 방법에 대해 논의할 필요를 제안하였다.

---

* 접수일(2024년 6월 18일), 심사(수정)일(2024년 7월 14일), 게재확정일(2024년 7월 18일)
* MSC2020분류 : 97C30, 97D40
* 주제어 : 대수적 사고, 분수의 나눗셈, 문제해결
† 교신저자 : hwchang@snue.ac.kr
* 이 논문은 제1저자의 석사학위논문(2024년 8월 예정)을 수정 보완하여 재구성한 것임.

초등에서 대수적 사고를 구현하기 적합한 영역으로 분수를 들 수 있다. 분수 지식은 중등에서 대수와도 관련이 있으며 자연수에서 유리수로 확장되는 과정을 통해 보다 넓은 수 체계를 이해할 수 있는 단초를 제공한다. 다수의 연구자는 분수에 대한 이해가 추후 대수학 성적을 좌우한다고 주장한다(Wu, 2001; Siegler et al., 2012; Booth et al., 2014; Silla et al., 2024). 이지영(2010)은 대수와 분수가 범자연수 연산만으로는 설명할 수 없다는 공통점을 가지며 분수 연산에 대한 다양한 경험은 대수에서 기호 및 변수 등을 조작하는 것과 직접적으로 연결된다고 하였다. 특히 6학년 2학기 분수의 나눗셈 단원은 그동안 학생들이 배운 분수 지식을 모두 활용하는 단원이다. 제수인 분수를 역수로 곱한다는 방법 자체는 어렵지 않으나 많은 학생이 도구적 이해를 통해 절차만 암기하기 쉽다. 따라서 알고리즘적으로만 접근하여 해결하지 않도록 주의해야 한다. 대수적 사고는 양의 관계를 파악하게 하여 분수의 나눗셈에서 제수와 피제수 사이의 관계 파악에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

한편 문장제는 수학 학습에서 문제해결 능력을 신장시키기 위한 대표적인 도구로, 문장제 해결을 위해서는 수학적 지식과 기능뿐만 아니라 수학적 사고력 등의 수학 능력이 종합적으로 요구된다(태순영, 2012). 그러나 많은 학생이 문장제를 해결하는 데 어려움을 느끼며 특히 나눗셈 문장제에서는 어느 것이 피제수이고 제수인지 혼란스러워하는 경우가 많다. 성공적으로 해결한 경우에도 문제의 나눗셈 상황을 이해하고 해결한 것이 아닌 단순히 문제에 먼저 제시된 수나 더 큰 수를 피제수로 놓고 해결하는 모습이 나타나기도 한다(정선아, 2014). 대수적 사고는 이러한 나눗셈 문장제 문제해결에 도움을 줄 수 있다. Usiskin(1988)은 대수의 다양한 측면을 종합하여 학교 대수를 산술의 일반화 학습, 문제해결 과정의 학습, 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습으로 구분하였다. 학생들은 대수적 사고를 경험하며 문제해결 방법을 일반화하고 그것을 다양한 수학적 상황과 비수학적인 상황에 적용할 수 있다(Blanton et al., 2011). 김성준(2003b)은 대수의 역사적인 기원이 문제해결로부터 시작됨을 밝히며 초등에서부터 기초적으로 지도해야 함을 강조하였다. 또한 다양한 전략을 비교하고 보다 효과적인 방법을 찾는 것은 산술과 대수를 연결하는 데 도움을 준다고 하였다. 초등에서 가장 빈번하게 사용되는 대수적 사고는 관계를 파악하는 능력으로, 문제 상황을 정리하고 양 사이의 관계를 파악해 식을 세울 때도 대수적 해석이 필요하다(우정호, 김성준, 2007). 이에 대수적 사고 기반의 수업을 적용할 때 학생들의 문제해결력 신장에 도움을 주는지, 학생들이 문제해결 과정에서 보이는 대수적 사고의 특징에 대해 연구할 필요가 있다.

따라서 본 연구는 나눗셈 문장제를 활용한 대수적 사고 기반 수업이 문제해결에 미치는 영향을 알아보는 것을 목적으로 한다. 6학년 2학기 분수의 나눗셈 단원에 대한 대수적 사고 기반의 수업을 설계하고 이를 실시한 뒤 비교집단과 사후검사 결과를 독립표본 t-검정하여 분수의 나눗셈 문장제 문제해결에 어떤 영향을 주는지 양적으로 분석하고자 한다. 더불어 문제해결 과정에서 나타난 대수적 사고와 해결 전략의 특징을 질적으로 분석하여 학생들의 대수적 사고 발달 과정을 탐구하고 초등에서 대수적 사고를 지도하는 방안에 대해 시사점을 도출하고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 초기 대수 및 대수적 사고

가. 초기 대수의 필요성

우리나라 교육과정에서 대수는 중등 교육과정부터 도입되어 초등학생 때는 대수적 개념이나 대수적 사고에 대한 명시적인 학습 없이 중학교에서 기호 조작과 방정식을 통해 해를 구하는 형식적인 알고리즘 위주의 대수 교육을 경험하게 된다. 사실상 문자나 방정식에서 사용되는 원리들은 초등 산술에서 학습했던 내용과 연속선상에 있는 것임에도 불구하고 갑작스러운 문자의 도입과 추상적인 대수의 학습은 학생들로 하여금 대수를 앞서 학습했던 산술과 전혀 다른 것으로 인식하게 만든다. 문자 기호 중심의 학교 대수학습은 학생들이 대수학습을 어려워하고 기피하게 만드는 근본적인 이유 가운데 하나이다(우정호, 김성준, 2007).

그러나 학생들이 대수를 어렵다고 느끼는 이유와 관련하여, 산술과 대수는 전혀 다른 체계가 아니고 산술적 사고와 대수적 사고가 단절된 것이 아니라 일정 부분 연계가 이루어진다(임미인, 장혜원, 2018). 대수 학습은 단순히 문자와 기호의 사용이 아닌 수의 체계

와 연산 원리, 그리고 사고의 확장으로 이해해야 한다.

초기 대수에 대한 논의는 1980년대 대수적 사고에 대한 언급으로부터 시작되었고, 그 이후 다수의 학자가 1990년대부터 유아 및 초등과정에서부터 대수에 대한 학습이 이루어져야 한다는 필요성을 제기했다. 대표적인 연구가 Kaput(1998)이다. 그는 산술을 깊게 이해하기 위해서는 본질적으로 대수적 사고가 필요함을 주장하였다. 산술과 대수를 인위적으로 구분하기보다 중등 대수에서 요구되는 대수적 사고를 초등 수준에서 학습할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

Kaput을 비롯한 초기 대수 연구자들은 중등 이전의 초기 학교 수학학습에서부터 학생들에게 대수적 추론을 할 수 있는 기회를 제공하되 산술적 맥락에서 구조 및 관계의 일반화를 통해 대수를 산술과 통합하여 지도하도록 제안하였다. 결국 초등학교에서의 대수 학습은 추상적인 대수 개념을 이끌어내기 위한 다양한 사고의 구조를 먼저 익히는 것을 의미한다.

### 나. 대수적 사고 요소

대수적 사고 기반 수학 수업을 위한 방향을 설정하기 위해 선행연구에서 분석한 대수적 사고를 바탕으로 대수적 사고 요소를 도출하였다. 선행연구에서 제시한 대수적 사고의 요소를 정리하면 [표 1]과 같다.

초기 대수적 관점에서 초등학교에서의 대수적 사고 발달을 연구한 Carpenter & Levi(2000)는 대수 학습의 두 가지 핵심 요소로 일반화하기와 문제해결 과정에서 수학적 아이디어를 표현하기 위한 기호의 사용을 제시하였다. 대수적 사고의 초기 단계에서 학생들은 '세 수를 더할 때 어떤 수를 먼저 더해도 상관이 없다'와 같은 수학적 사실을 일반화할 수 있으며 기호로 표현할 수 있다. 대수적 사고 학습에서 일반화는 문제해결과 심층적 이해에 있어 강력한 수학적 아이디어를 제공한다. 또한 수학적 관계를 명확히 표현하고 반영하는 일반화 과정은 개념 이해에 도움을 준다.

Kaput(2008)은 초등학교에서 접근 가능한 대수 학습과 대수적 추론을 정의하는 데 기여하였다. 대수적 사고를 크게 두 가지 핵심 양상으로 정의하였는데, 의미있는 일반화를 제공하는 기호화 활동과 기호화된 일반화를 가지고 추론하는 활동이다. 첫째 핵심 양상은 규칙성과 제약의 일반화를 체계적으로 기호화하는 것으로서의 점진적으로 기호를 사용함으로써 일반화를 표현하는 과정을 의미한다. 둘째 핵심 양상은 이미 기호로 표현된 일반화에 대하여 추론하거나 기호를 조작하는 과정을 의미하며, 이는 기호에 관한 규칙 기반 활동이기 때문에 첫째 양상보다 늦게 발달한다고 하였다.

김민정 외(2008)는 초등학교 5학년 수학영재들의 대수적 사고 특성을 연구하며 일반화 전략과 정당화 유형을 분석하고 이 과정에서 메타인지적 사고의 역할을 알아보았다. 이 연구에 따르면 대수적 사고의 핵심은 일반화라고 할 수 있으며 문제해결 과정에서 관계를 발견하고 일반화하는 경험을 통해 대수적 사고가 발현된다고 하였다. 또한 자신의 해결방법을 정당화하며 일반화의 조건과 문제 구조에 접근할 수 있다고 주장했다. 메타인지적 사고는 해결 과정을 점검하고 제어하는 문제해결 전반에 적용할 수 있는 사고로 해석할 수 있다.

이후 Blanton et al.(2015)은 Kaput(2008)의 프레임을 정교화함으로써 대수적 사고 측정 평가도구를 개발하였다. 그중 대수적 사고의 과정을 수학적 관계 일반화하기, 표현하기, 정당화하기, 수학적 구조와 관계를 추론하기의 네 가지로 분류하였다. 그들은 미국의 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 수학적 관계를 이용한 일반화, 표현, 정당화 및 추론에 참여하는 수업을 실시하고 학생들이 여러 영역에 걸쳐 수학적 일반화를 표현하고 추론할 수 있는 경험이 필요하다고 주장하였다.

이상에서 공통적으로 일반화가 대수적 사고 요소로

[표 1] 선행연구에서 제시한 대수적 사고의 요소

| Carpenter & Levi(2000) | Kaput(2008) | 김민정 외(2008) | Blanton et al.(2015) |
|---|---|---|---|
| 일반화하기 | (의미있는 일반화를 제공하는) | 일반화 | 일반화하기 |
| 기호의 사용 | 기호화 활동 | | 표현하기 |
| | 추론하는 활동 | | 추론하기 |
| | | 정당화 | 정당화하기 |
| | | 메타인지 | |

포함되고, 그 외에 2개 연구 이상에 포함된 요소로 기호화, 추론, 정당화를 추출할 수 있다.

첫째, 일반화는 대수적 사고의 핵심 개념 중 하나이다. 일반화는 학생들로 하여금 수학적 아이디어에 접근할 수 있게 한다(Carpenter & Levi, 2000). 학생들은 처음에는 문제를 직접 해결하지만 점점 확장되며 계산 절차를 일반화하고, 다양한 문제를 해결하기 위해 점점 더 추상화된 전략을 유연하게 사용한다.

둘째, 기호화는 산술과 구분되는 대수의 명확한 특징 중 하나로, 문제해결 과정에서 사고 도구로서 의미를 지닌다(김성준, 2002). 학생들은 기호를 사용할 때 수학적 구조를 더 분명하게 나타낼 수 있으며, 양의 관계나 문제해결 방법을 효과적으로 일반화하여 표현할 수 있다. 반드시 기호가 아니더라도 문제해결 과정을 일반화하여 수학적인 언어나 그림으로 표현하는 방법을 지도할 필요가 있다(이지영, 2010; 최지영, 2011; 조선미, 2021).

셋째, 추론은 알고 있는 수학적 아이디어를 바탕으로 논리적인 근거를 통해 관계를 추측하고 일반화하여 새로운 지식을 이끌어내는 과정이다. 초등에서는 대수식을 세워서 풀진 않지만 문제 구조를 파악하여 문제에 접근하는 전형식적 대수 추론(pre-formal algebraic reasoning)을 사용할 수 있다(이화영, 장경윤, 2012).

넷째, 어떤 명제가 참이라는 것을 밝히는 정당화는 대수적 사고를 기반으로 한 분수 수업에서 중요한 과정으로 제시된 대수적 사고 요소이다. Lee(2019)는 학생들이 식의 의미를 설명하게 하고 그것이 옳은지 정당화하는 과정을 거치게 하였다. 조선미(2021) 역시 학생들이 분수의 나눗셈 해결 방법을 일반화하고 변수를 사용한 식으로 나타낸 다음 왜 그렇게 표현할 수 있는지 논리적으로 설명하는 과정을 거쳤다.

본 연구에서는 이상의 네 가지 요소를 반영하여 다양한 분수의 나눗셈 상황에서 추론을 통해 문제를 해결하고 해결 방법을 일반화하고 기호로 표현하며 그것이 옳음을 정당화하는 대수적 사고 기반의 수학 수업을 설계하였다.

### 2. 일반화된 산술로서의 대수

가. 일반화된 산술로서의 대수적 추론

Mason(2008)은 산술의 성공을 위해서는 대수적 추론이 필요하며 산술과 대수는 서로 얽혀있다고 주장했다. 또한, 초기 대수 관련 교육자 및 연구자는 산술에 대한 기본 원리를 추측해보고 발견해가는 과정이 대수적 추론의 기회를 제공한다고 강조한다(Warren, 2004; Russell et al., 2011).

Blanton & Kaput(2005)은 대수적 추론의 유형을 분류하며 그중 초등 수학에서는 일반화된 산술로서의 대수적 추론을 강조하였다. 일반화된 산술로서의 대수적 추론은 일반화를 구성하고 표현하기 위해 산술이 사용되는 경우로, 이를 다섯 가지 범주로 구분하였다. 첫째, ‘범자연수의 성질과 관계 탐구하기’는 범자연수의 다양한 성질과 범자연수들 사이의 관련성을 탐구하는 과정에서 나타나는 대수적 추론을 포함한다. 둘째, ‘범자연수에서 이루어지는 연산의 성질 탐구하기’는 덧셈의 교환법칙, 결합법칙과 같은 연산의 성질이나 구조를 탐구하는 과정에서 나타나는 대수적 추론을 말한다. 셋째, ‘양 사이의 관계에 대한 표현으로서 동치관계 탐구하기’는 양 사이의 관계로서 등호 개념을 형성하는데 초점을 두고 탐구하는 과정에서 나타나는 대수적 추론이다. 넷째, ‘수의 대수적 처리하기’는 대수적인 의미로 수를 사용하는 경우이다. 다섯째, ‘미지수 해결하기’는 A+A=6일 때 A+A+3의 값을 구하는 문제와 같이 미지의 값을 갖는 한 개 또는 여러 개의 방정식을 해결하는 것을 포함한다. 이 요소들은 서로 분명하게 구분되는 이질적인 것이라기보다는 서로 긴밀하게 연결된 요소이다.

다른 연구들이 범자연수 수준에서의 수와 연산의 성질과 구조를 탐구하였다면, Empson et al.(2011)에서는 분수의 성질과 구조를 이해하여 연산 전략으로 활용할 수 있다는 것을 발견한 데에 의미가 있다. 학생들이 분수의 속성을 생각하며 연산을 수행하고 의미를 재구성한다면, 명시적인 법칙이 적용된 대수식을 일반화하고 변형하는 과정에서도 의미 있는 대수적 추론이 가능하다는 것이다.

최지영(2011)은 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 검사지를 개발하고 전국 2, 4, 6학년 학생들을 대상으로 조사연구를 실시하였다. 그 결과 상당수의 학생이 수와 연산의 성질을 적용하여 문제를 해결하지 못하였다. 또한 4학년을 대상으로 일반화된 산술로서의 대수적 추론을 강조한 수업을 실시하고 시사점으로서, 수와 연산의 성질을 도입하기 위한 과제로는 기호

식보다 문장제 사용의 적절성, 수학적 구조를 시각화해 드러내는 시각적 모델의 활용, 구체적인 수 상황에서 임의의 수 상황으로 확장 등을 도출하였다.

이현주(2016)는 2학년에게 덧셈과 뺄셈 단원을 재구성하여 실시하고 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 신장을 위한 구체적인 지도 방안을 제시하였다. 구체적으로는 등호의 관계적 이해에 대한 강조, 다양한 연산의 성질을 탐구하는 기회와 경험 제공, 임의의 수 상황에서 연산의 성질을 표현할 때 준 변수(quasi-variables)의 사용 등이 있다.

나. 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈

분수의 나눗셈은 일반화된 산술로서 수와 연산의 성질에 대해 다룸으로써 대수적 사고의 발달에 도움을 준다(Warren, 2004; Russell et al., 2011; 최지영, 2011). 선행연구에서 제시한 일반화된 산술 관점에서 내용 요소는 [표 2]와 같이 정리되며, 본 연구에서는 이 관점에서 분수의 나눗셈 단원의 대수적 사고 기반 수업을 설계하였다.

[표 2] 선행연구에서 제시한 일반화된 산술 관점에서 내용 요소

| 내용 요소 | Blanton & Kaput(2005) | Empson et al. (2011) | 최지영 (2011) |
|---|---|---|---|
| 수의 성질 | ○ | ○ | ○ |
| 연산의 성질 | ○ | ○ | ○ |
| 동치 관계 | ○ | ○ | |
| 수의 대수적 처리 | ○ | | ○ |
| 미지의 수식 해결 | ○ | | |

[표 2]에 근거할 때, 첫째로 수의 성질을 다룰 필요가 있다. 최지영(2011)은 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 범자연수의 성질을 탐구하는 수업을 설계하여 덧셈에서의 0의 성질과 곱셈의 1의 성질을 탐구하게 하였다. 그러나 범자연수의 성질을 탐구하는 수업임에도 불구하고 자연수의 성질, 홀수나 짝수의 성질 등에 대해서는 다루지 않았다. 국외에서는 Blanton & Kaput(2005)이 정수의 속성과 관계를 탐구하는 것의 중요성을 설명하며 학생들이 짝수와 홀수의 특성을 탐구하고 짝수와 홀수의 합과 곱을 일반화한 사례, 정수를 가능한 수로 분해하고 그 합들의 구조를 조사한 사례 등을 다룬 것과 대조적이다. Empson et al.(2011)은 분수의 기본 속성인 분할을 활용하여 양을 분해하고 재구성하며 부분과 전체의 관계를 이해하는 것이 분수 연산의 추론 능력에 절대적으로 중요한 영향을 미친다고 하였다. 이에 따라 분수의 나눗셈 단원에서는 먼저 분수의 성질과 관련한 지도가 이루어져야 하며, 동분모 분수의 나눗셈과 이분모 분수의 나눗셈 상황의 차이점을 인식하고 해결하며 일반화하기 위해서는 분모와 분자 개념에 대한 이해가 필수적이다.

둘째, 연산의 성질을 중요하게 지도할 필요가 있다. 연산의 성질을 통해 연산 법칙이나 연산의 구조 등을 탐구하고 사고할 수 있다. Blanton & Kaput(2005)에서 학생들은 수 배열표에서 규칙성을 찾고 덧셈과 뺄셈의 교환성에 대해 일반화할 수 있었다. 연산의 성질에는 연산의 일반성을 찾는 것뿐만 아니라 분배법칙과 같은 연산 간의 관계를 탐색하는 것도 포함된다. Empson et al.(2011)은 1학년 학생들이 덧셈의 결합법칙을 암묵적으로 사용하여 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$을 계산하였다고 주장하며 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 적용하여 분수의 덧셈을 지도할 수 있음을 강조하였다. 최지영(2011)은 덧셈의 교환법칙과 결합법칙 등 연산 법칙에 대해 명시적으로 지도하는 수업을 실시하였다. 본 연구에서는 이를 분수의 나눗셈에 적용하여 제수와 피제수의 관계를 탐구하며 나타나는 나눗셈의 성질, 분수의 나눗셈 표준 알고리즘에서 사용되는 곱셈의 교환법칙, 그리고 분수의 곱셈과 나눗셈의 관계를 지도하였다.

마지막은 동치 관계, 즉 등호 및 등식에 대한 이해이다. 최지영(2011)은 양 사이의 관계 표현으로서의 등호를 이해하는지 조사 연구하였고, 등식의 참/거짓 판단하기 문제에 대한 6학년의 정답률이 80%에도 미치지 못했다는 점에서 등호의 의미를 지도할 필요가 있다는 시사점을 도출하였다. 또한 등식의 기본 속성은 정수와 분수에서 일관적으로 성립하므로, 등식을 관계적으로 이해하고 있는 학생은 방정식에서와 유사한 방식으로 등식을 사용하고 변형하며 분수의 나눗셈을 해결할 수 있었다(Empson et al., 2011). 이처럼 등호를 '답을 구한다'는 단편적 의미가 아닌 다양한 의미로 받아들인다면 학생들은 문제를 더욱 효율적으로 해결할 수 있으며, 등식의 자유로운 변형 등을 통해 자신의 풀이 과정을 논리적으로 표현하고 정당화할 수 있을

것이다. 이에 본 연구에서도 등식의 성질을 활용하여 분수의 나눗셈 문제를 해결할 수 있도록 지도하였다.

이에 본 연구에서는 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈 내용 요소로 수의 성질, 연산의 성질, 동치 관계를 선정하였다. 수의 성질에서는 분수의 의미, 분모와 분자의 의미, 곱셈에서의 역원 등을 인식할 수 있도록 하였다. 그리고 다양한 맥락의 문제에서 나눗셈의 의미, 곱셈에서의 결합법칙, 곱셈과 나눗셈의 관계 탐구 등을 통해 연산의 성질 요소를 반영하였다. 동치관계 요소에서는 등호 및 등식의 성질을 적용하여 분수의 나눗셈 문제를 해결하고, 등식을 변형시켜 분수의 나눗셈 알고리즘 정당화하는 활동 등을 본 연구의 수업 지도안에서 구현하고자 하였다.

## Ⅲ. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 대상

본 연구에서 실험수업 적용은 서울특별시 송파구 G 초등학교 6학년 1개 학급 19명을 대상으로 하였다. 연구자 중 1인이 담임을 맡고 있는 학급 학생 수는 20명이나 경계선 지능으로 인한 학습부진아 1인을 제외한 나머지 19명(남10명, 여9명)을 실험집단으로 선정하고 질적 분석을 위해 이들을 S1~S19로 지칭하였다. 실험집단을 이와 같이 선정한 이유는 중등 수학을 접하기 직전 수준의 학생들에게 대수적 사고 기반의 수업을 실시하여 6학년 학습자의 수준에서 이해하고 학습할 수 있는지에 대해 분석하기 위함이다. 연구자 학급의 학업성취도는 중상 수준으로, 1학기 분수의 나눗셈 내용에 대해 실시한 단원평가의 평균은 약 85점이었다. 그러나 평소 수학 익힘책에서 서술형 문제를 푼 것을 보았을 때 관계적 이해가 이루어지기보다는 도구적 이해에 의한 알고리즘 적용을 통해 기계적으로 접근하는 학생들이 많았다. 한편 동학년의 5개 학급을 대상으로 사전 검사를 실시하여 통계적으로 동질성이 확보된 1개 학급을 비교집단으로 선정하였다. 비교집단의 학생 수는 20명(남11명, 여9명)이다.

### 2. 연구 설계

본 연구의 실험 설계는 [표 3]과 같이 사전-사후 통제 집단 설계(Pretest-Post test Control Group Design)를 따랐다.

[표 3] 실험 설계

| 분류 | 사전 검사 | 실험 처치 | 사후 검사 |
|---|---|---|---|
| 실험집단 | $O_1$ | $X_1$ | $O_1'$ |
| 비교집단 | | $X_2$ | |

$O_1$ : 사전 검사 $O_1'$ : 사후 검사
$X_1$ : 대수적 사고 기반 수업
$X_2$ : 교과서 기반 수업

사전 검사를 통해 비교집단을 선정한 뒤 6학년 2학기 1단원 분수의 나눗셈 단원의 내용을 바탕으로 실험집단과 비교집단에 각각 다른 수업을 적용하였다. 실험집단에게는 연구자인 담임 교사가 11차시에 걸친 대수적 사고 기반 수학 수업을 실시하였으며 비교집단에게는 해당 학급의 담임 교사가 마찬가지로 11차시의 교과서 기반 수업을 실시하였다. 수업을 모두 마친 후 실험집단과 비교집단을 대상으로 사후 검사를 실시하였으며 대수적 사고 기반 수업이 문제해결력에 미치는 영향을 검증하기 위해 두 집단의 사후 검사 결과에 대해 t-검정을 실시하였다. 통계 처리는 i-STATistics 통계 프로그램을 이용하였다.

### 3. 대수적 사고 기반 수업 설계

대수적 사고 기반 수업을 위해 6학년 2학기 분수의 나눗셈 단원을 선정하여 교과서 기반 수업과 동일한 11차시로 재구성하였다. 본 연구에서는 대수 자체가 아닌 대수적 사고를 학습한다는 점에 중점을 두어 활동을 고안하였으며, 수업 설계 개요는 [표 4]와 같다.

수업 주제는 분수의 나눗셈을 피제수와 제수의 관계가 유사한 맥락끼리 요목화하여 두 양의 관계에 대해 탐색하게 한 조선미(2021)의 맥락 분류에 따라 피제수가 제수의 몇 배인지를 구하는 분수 나눗셈, 제수 1에 대응하는 피제수를 구하는 분수 나눗셈, 직사각형의 한 변의 길이를 구하는 분수 나눗셈의 세 가지로 선정하고, 각 주제별로 3차시에 걸쳐 연차시로 구성하였다. 각 주제의 수업에서 학생들은 분수의 나눗셈 상황 맥락을 이해하고 제수와 피제수의 관계를 다양한 시각적 모델을 통해 탐구하며, 이를 바탕으로 문제를 해결하고 나아가 제시된 문제와 해결 방법의 공통점을

발견하도록 도왔다. 마지막 활동에서는 기호 또는 언어를 사용하여 문제해결 방법을 일반화하고, 다른 문제에도 이를 적용할 수 있는지 확인하였다.

[표 4] 대수적 사고 기반 수업 설계 개요

| 차시 | 수업주제 | 수업 내용 및 활동 |
|---|---|---|
| 1 ~ 3 차시 | 피제수가 제수의 몇 배인지 구하기 | - 문제 상황 이해하기<br>- 제수와 피제수 관계 파악하기<br>- 문제 해결하기<br>- 제수와 피제수 관계를 생각하며 문제 상황의 공통점 파악하기<br>- 문제해결 방법의 공통점 찾기<br>- 해결 방법을 그림, 글, 또는 기호 사용하여 일반화하고 설명하기<br>- 같은 나눗셈 상황의 다른 문제 만들고 자신의 해결방법 적용해 확인하기 |
| 4 ~ 6 차시 | 제수 1에 대응하는 피제수의 양 구하기 | |
| 7 ~ 9 차시 | 직사각형 넓이를 알 때 한 변의 길이 구하기 | |
| 10~11 차시 | 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화하기 | - 분수 나눗셈 상황에 맞는 문장제 만들기<br>- 세 가지 분수 나눗셈의 상황 비교<br>- 세 가지 분수 나눗셈 상황에서 제수와 피제수 관계의 공통점, 차이점 찾기<br>- 분수 나눗셈 알고리즘 정당화하기 |

대수적 사고 기반 수업 지도안을 개발하기 위해 각 차시에 적용할 대수적 사고 요소와 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈 내용 요소를 선정하였다([표 5]).

[표 5] 차시별 대수적 사고 요소와 일반화된 산술 관점에서 내용 요소

| 차시 | 수업주제 | 대수적 사고 요소 | 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈 내용 요소 |
|---|---|---|---|
| 1 ~ 3 차시 | 피제수가 제수의 몇 배인지 구하기 | - 일반화<br>- 기호화<br>- 추론<br>- 정당화 | - 수의 성질<br>- 연산의 성질 |
| 4 ~ 6 차시 | 제수 1에 대응하는 피제수의 양 구하기 | | - 수의 성질<br>- 연산의 성질 |
| 7 ~ 9 차시 | 직사각형 넓이를 알 때 한 변의 길이 구하기 | | - 연산의 성질<br>- 동치관계 |
| 10~11 차시 | 분수 나눗셈의 알고리즘 정당화하기 | - 일반화<br>- 기호화<br>- 정당화 | - 연산의 성질 |

선정 요소를 바탕으로 교사의 발문이나 활동에 적용하여 지도안을 개발하였다. 1~3차시 지도안 일부는 [그림 1]과 같다.

1학기에 배운 자연수의 나눗셈을 분수로 나타내는 방법을 떠올리고 이를 기호로 표현하는 방법으로 연결할 수 있도록 하였다. 그 후 분수의 나눗셈 문장제를 제수와 피제수의 관계를 탐구하며 해결하였다. 이 과정에서 분모가 달라진다면 답이 달라질지 생각해보는 활동은 교과서 기반 수업 해당 차시에서는 없는 활동으로 분수에서 분자와 분모의 의미를 이해하고 연산에 적용해야 하며, 분수의 성질 즉 수의 성질을 통해 추론해보는 활동이다. 나아가 분수의 나눗셈 방법을 일반화하는 데 도움이 된다. 문제를 해결한 뒤에는 문제 상황과 해결 방법의 공통점을 찾아 일반화하고 기호로 나타내는 방법을 논의하였다.

◉ 자연수÷자연수 기호로 나타내기
· 1학기에 배운 분수의 나눗셈에서 3÷4를 분수로 어떻게 나타냈나요?
- $\frac{3}{4}$으로 나타냈습니다.
· 앞의 자연수를 △, 뒤의 자연수를 □라고 할 때, △÷□를 분수로 어떻게 표현할 수 있을까요?
- $\frac{\triangle}{\square}$라고 나타낼 수 있습니다.

**◉곱셈적 비교 맥락 분수의 나눗셈 문제 해결하기(나누어떨어지지 않는 진분수÷진분수)**

<문제2> 은우와 준석이가 텃밭에서 토마토를 수확했습니다. 은우가 $\frac{5}{6}$kg, 준석이가 $\frac{2}{6}$kg 수확했다면, 은우가 수확한 토마토는 준석이가 수확한 방울토마토의 몇 배입니까?

·나누어지는 수와 나누는 수는 무엇인가요?
·나머지는 나누는 수를 기준으로 했을 때(1이라고 했을 때) 얼마라고 할 수 있을까요?
· 만약 은우가 $\frac{5}{9}$kg, 준석이가 $\frac{2}{9}$kg 수확했다면, 답은 달라질까요?
· 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?
-달라지지 않습니다. 분자끼리만 나누기 때문입니다.

**<활동2> 문제 상황의 공통점 찾기**
· 오늘 해결한 문제의 공통점은 무엇인가요?
- 나누어지는 수 안에 나누는 수가 몇 번 들어가는지 물어보는 문제입니다.
· 문제 해결 방법의 공통점은 무엇인가요?
-나누어지는 수와 나누는 수의 분모를 같게 만든 뒤 나누어지는 수의 분자에서 나누는 수의 분자를 덜어냈습니다.

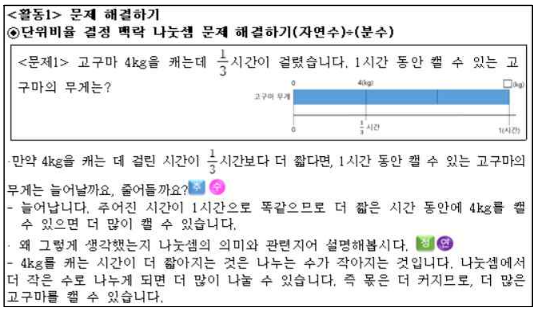
**<활동3> 문제 해결 방법 일반화하기**
·<문제 2>에서 은우가 수확한 토마토를 $\frac{\bigcirc}{\square}$kg, 준석이가 수확한 토마토를 $\frac{\triangle}{\square}$kg이라고 할 때, 해결방법을 나타내 봅시다.
- $\frac{\bigcirc}{\square}\div\frac{\triangle}{\square}=\bigcirc\div\triangle$이므로 $\frac{\bigcirc}{\triangle}$라고 나타낼 수 있습니다.

[그림 1] 1~3차시 지도안(예시)

4~6차시에서는 제수 1에 대응하는 피제수의 양을 구하는 나눗셈을 주제로 대수적 사고 요소 네 가지와 수의 성질, 연산의 성질 요소를 적용하여 [그림 2]와 같이 지도안을 설계하였다. 단위비율 결정 맥락 나눗셈 문제로 (자연수)÷(단위분수) 상황을 먼저 도입하여 추후 제수가 단위분수가 아닐 때에도 분자로 나누고 분모를 곱하는 방법과 연결할 수 있도록 설계하였으며, 이중 척도 모델을 사용하여 제수와 피제수의 관계 탐구를 용이하게 하였다.

만약 고구마를 캐는 데 걸린 시간이 $\frac{1}{3}$시간보다 더 짧다면 캘 수 있는 고구마의 양은 어떻게 될지 예상해보는 활동을 통해 분자가 같다면 분모가 커질수록 작아지는 분수의 성질을 활용하여 나눗셈 결과를 추론할 수 있도록 하였으며, 이를 나눗셈의 의미와 관련지어

정당화함으로써 제수의 크기와 몫의 크기 간의 관계를 일반화하고 나눗셈의 성질을 이해할 수 있도록 하였다.


<활동1> 문제 해결하기

◉단위비율 결정 맥락 나눗셈 문제 해결하기(자연수)÷(분수)

<문제1> 고구마 4kg을 캐는데 $\frac{1}{3}$시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는?



·만약 4kg을 캐는 데 걸린 시간이 $\frac{1}{3}$시간보다 더 짧다면, 1시간 동안 캘 수 있는 고구마의 무게는 늘어날까요, 줄어들까요?

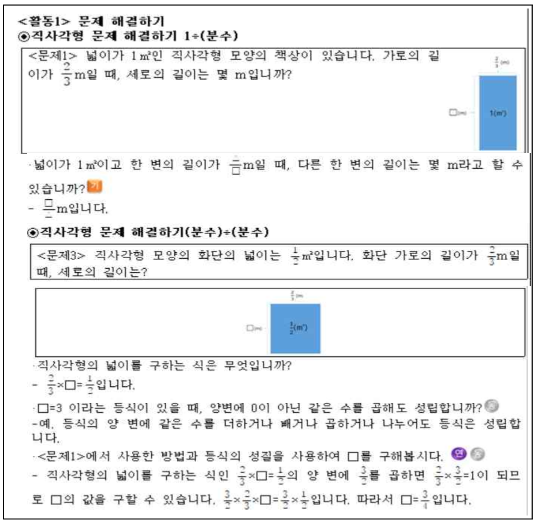
- 늘어납니다. 주어진 시간이 1시간으로 똑같으므로 더 짧은 시간 동안에 4kg를 캘 수 있으면 더 많이 캘 수 있습니다.

· 왜 그렇게 생각했는지 나눗셈의 의미와 관련지어 설명해봅시다.

- 4kg를 캐는 시간이 더 짧아지는 것은 나누는 수가 작아지는 것입니다. 나눗셈에서 더 작은 수로 나누게 되면 더 많이 나눌 수 있습니다. 즉 몫은 더 커지므로, 더 많은 고구마를 캘 수 있습니다.

[그림 2] 4~6차시 지도안(예시)

[그림 3]은 7~9차시 수업 지도안에서 등식의 성질과 역수를 활용하여 직사각형의 넓이와 한 변의 길이가 주어졌을 때 다른 한 변의 길이를 구하는 과정이다.


<활동1> 문제 해결하기

◉직사각형 문제 해결하기 1÷(분수)

<문제1> 넓이가 1㎡인 직사각형 모양의 책상이 있습니다. 가로의 길이가 $\frac{2}{3}$m일 때, 세로의 길이는 몇 m입니까?



·넓이가 1㎡이고 한 변의 길이가 $\frac{\square}{\square}$m일 때, 다른 한 변의 길이는 몇 m라고 할 수 있습니까?

- $\frac{\square}{\square}$m입니다.

◉직사각형 문제 해결하기(분수)÷(분수)

<문제3> 직사각형 모양의 화단의 넓이는 $\frac{1}{2}$㎡입니다. 화단 가로의 길이가 $\frac{2}{3}$m일 때, 세로의 길이는?



·직사각형의 넓이를 구하는 식은 무엇입니까?

- $\frac{2}{3}\times\square=\frac{1}{2}$입니다.

·□=3 이라는 등식이 있을 때, 양변에 0이 아닌 같은 수를 곱해도 성립합니까?

-예, 등식의 양 변에 같은 수를 더하거나 빼거나 곱하거나 나누어도 등식은 성립합니다.

·<문제1>에서 사용한 방법과 등식의 성질을 사용하여 □를 구해봅시다.

- 직사각형의 넓이를 구하는 식인 $\frac{2}{3}\times\square=\frac{1}{2}$의 양 변에 $\frac{3}{2}$를 곱하면 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$이 되므로 □의 값을 구할 수 있습니다. $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\square=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$입니다. 따라서 $\square=\frac{3}{4}$입니다.

[그림 3] 7~9차시 지도안(예시)

직사각형의 넓이를 1㎡로 설정하여 분자와 분모를 바꾸어 곱하는 상황을 명확하게 인식할 수 있도록 하였고, 등식의 성질을 활용하여 양변에 같은 분수를 곱하여 (분수)÷(분수) 문제를 해결할 수 있게 하였다.

10~11차시에서는 앞서 학습한 분수의 나눗셈 해결 방법을 비교해 공통점과 차이점을 찾고 모든 분수의 나눗셈 문제에 적용되는 알고리즘을 기호로 표현하고 정당화해보게 하였다.

## 4. 검사 도구

사전·사후 문제해결력 검사지는 나눗셈 문장제 해결에 대해 연구한 정선아(2014)의 검사지를 모두 분수의 나눗셈으로 수정하여 사용하였다. 해당 검사지는 대수적 사고와 연관이 없는 수학 교과서와 익힘의 문장제를 바탕으로 사용하여 일반적인 문제해결력을 측정하는 데 적합하다고 판단하였다. 해당 검사지에서는 사용된 어휘를 기준으로 크게 나누다/A는 B의 몇 배/비례 개념의 세 가지로 분류하였다. 사전 검사는 6학년 1학기 분수의 나눗셈 단원을 바탕으로 실시하므로 피제수는 진분수, 대분수로 하되, 제수는 자연수로 한정하여 구성하였다. 사후 검사는 6학년 2학기 분수의 나눗셈 단원을 학습한 후 실시하므로 제수와 피제수를 모두 분수로 구성하였다. 각 어휘에 따른 검사 문항의 예시는 [표 6]과 같다.

[표 6] 사용 어휘에 따른 사후 검사 문항 예시

| 사용 어휘 | 검사 문항 예시 |
|---|---|
| 나누다 | 주스 $\frac{8}{11}$L를 한 컵에 $\frac{2}{11}$L씩 나누어 담으려고 합니다. 몇 개의 컵에 나누어 담을 수 있는지 구하시오. |
| A는 B의 몇 배 | 민주가 나무의 그림자 길이를 재어 보니 $\frac{5}{8}$ m였습니다. 이 나무의 높이가 $1\frac{3}{4}$ m라면, 나무의 높이는 그림자 길이의 몇 배인지 구하시오. |
| 비례 개념 | $\frac{1}{5}$시간 충전하면 $3\frac{1}{10}$km를 가는 전기자동차가 있습니다. 이 자동차가 1시간 동안 충전했을 때 갈 수 있는 거리를 구하시오. |

검사 도구의 난이도의 적절성과 타당도를 확보하기 위해 6학년 지도 경험이 있는 교사 3인과 수학교육 전문가의 검토를 받아 대분수에서 자연수를 십의 자리에서 일의 자리 수로 변경하고, 계산 도중에 약분이 될 수 있도록 분자와 분모를 설정하는 등 계산의 부담을 낮추고 난이도를 조정하는 수정·보완 과정을 거쳤다.

또한 문장제 난이도에 영향을 줄 수 있는 구문론적 요소를 통해 문제해결력을 측정하고자 하였다. 피제수가 제수보다 크거나 피제수-제수 순서로 연속하여 제시될 때 관성적으로 해결할 가능성이 있으며(정선아,

2014) 반대의 경우에는 오류를 겪기도 한다. 따라서 본 연구에서는 제수와 피제수의 제시 순서, 제수와 피제수의 크기를 선정하고 문제해결력에 미칠 수 있는 영향을 최소화하기 위해 문항별로 해당 요소를 교차 배치하였다. 요소별로 문항을 1개씩 배치하여 사전 검사는 18문항, 사후 검사는 피제수가 제수보다 작은 상황에서는 '똑같이 나누다'라는 어휘가 포함되는 문제가 성립되지 않으므로 그에 해당하는 4문제를 제외한 20문항으로 제작하였다.

### 5. 자료 수집 및 분석

수업 적용 대상의 문제해결 과정에 나타난 대수적 사고 요소의 특징에 대한 질적 분석을 위해 수업 녹음 자료, 면담, 학습지와 검사지 활동 결과를 수집하여 분석하였다.

첫째, 수업 중 나타난 학생들의 이해와 대수적 사고 요소를 상세하게 분석하기 위해 학생 동의를 받아 교실 앞에 USB로 된 녹음기를 설치하고 학생들의 반응과 발표 내용을 수집하였다. 녹음된 음성자료를 통해 연구자의 발문, 학생들의 대화 등을 부분 전사하여 이해 과정 파악에 필요한 정보를 보충하였다.

둘째, 연구자는 추가적인 분석이 필요한 말이나 행동, 기록을 보인 일부 학생들을 대상으로 비구조화된 면담을 진행하였다. 주로 관찰 과정에서 학생의 사고 과정이나 의도를 파악하기 어려운 경우에 이해를 정확히 확인해 질적 분석 자료로 활용하기 위함이었다. 일련의 질문들은 대부분 학생의 사고에 대한 풍부한 정보를 얻기 위해 개방형 질문으로 이루어졌다. 면담은 녹음하여 각 면담이 끝난 후 학생의 활동지를 활용하여 함께 분석하였다.

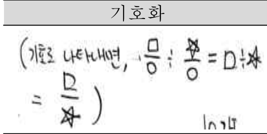
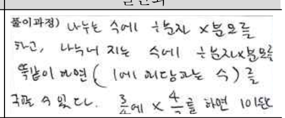
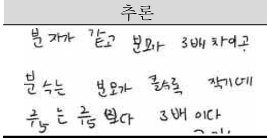
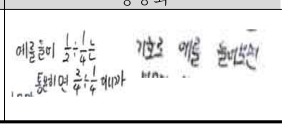
셋째, 학생들의 학습지 및 검사지 결과물을 수집하여 분석 자료로 이용하였다. 대수적 사고 기반 수학 수업과 사후 검사를 진행하는 동안 충분한 공간과 기록지를 제공하고 그림이나 글, 기호 등 다양한 방법을 통해 사고 과정을 표현하도록 하였다. 본 연구에서는 사후 검사 결과를 중심으로 분석하였으나, [그림 6]처럼 시도하다 중단한 경우나 오류를 보인 경우 등 추가 분석이 필요한 경우 수업 결과물과 활동지를 추가로 분석하였다. 결과물을 모두 거두어 문제해결 과정에서 나타난 대수적 사고를 분석하기 위해, 선행연구 분석 결과인 [표 1]과 [표 2]를 토대로 대수적 사고 요소와 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈 내용 요소를 [표 7]과 같이 정리하여 분석틀로 이용하였다.

[표 7] 풀이 과정 분석틀

| 대수적 사고 요소 | 일반화된 산술 관점에서 분수의 나눗셈 내용 요소 |
|---|---|
| 일반화 [일]<br>기호화 [기]<br>추론 [추]<br>정당화 [정] | 수의 성질 [수]<br>연산의 성질 [연]<br>동치관계 [동] |

각 요소별 학생들의 사고 특성을 진술하기 위해 사후 검사 문항별로 각 요소가 출현할 때마다 용어의 앞 글자로 코딩(예컨대, 일반화는 [일])하였다. 또한 풀이 과정에서 보이는 대수적 사고 요소를 분석하는 것이 목적이었으므로 오류나 정답의 여부와는 관계없이 대수적 사고 요소가 출현했는지만을 고려하였다. 대수적 사고 요소 코딩 예시는 [표 8]과 같다.

[표 8] 대수적 사고 요소 코딩 예시

| 기호화 | 일반화 |
|---|---|
|  |  |
| **추론** | **정당화** |
|  |  |

기호를 사용하여 분수의 형태와 연산 과정을 표현한 경우는 기호화로 분류하였다. 일반화는 해당 문제뿐만이 아니라 일반적인 분수의 나눗셈 방법 또는 분수의 나눗셈 맥락에 따라 적용할 수 있는 해결방법을 설명했을 때 일반화로 코딩하였다. 추론은 일반적인 분수의 나눗셈 알고리즘을 사용한 계산식이 아닌 연산이나 수의 성질, 동치관계를 이용하여 답을 이끌어내었을 때 추론으로 분류하였다. 정당화는 초등 수준에서 자신의 풀이 과정을 기호나 다른 분수 연산을 사용한 예시로 한 귀납적 방법, 분수의 성질 등 일반적인 사실을 통한 설명, 시각적 모델을 사용하여 논리적 설명 등을 했을 때 정당화 요소가 나타난다고 보았다. 대수적 사고는 한 가지 이상이 나타날 수 있으므로, 그 경우에는 나타난 요소를 중복 코딩하였다.

대수적 사고 요소를 분석한 뒤에는 분수의 나눗셈 내용 요소 중 어떤 요소와 관련되어 있는지 분류하였다. 예를 들어 [그림 4]와 같이 분모가 같으므로 분자끼리만 나눌 수 있다고 일반화하고 기호로 표현한 경우 일반화, 기호화, 연산의 성질이 드러나므로 [일], [기]/[연]과 같이 코딩하여 분석 및 결과 도출의 근거로 제시하였다.

## Ⅳ. 연구 결과

### 1. 대수적 사고 기반 수업이 분수의 나눗셈 문제해결력에 미치는 영향

본 실험을 위해 실험집단과 비교집단의 사전 동질성을 확보하기 위해 사전 검사 결과에 대해 독립표본 t-검정을 실시한 결과는 [표 9]와 같다.

[표 9] 사전 검사 결과

| 집단 | 학생 수 | 평균 | 표준 편차 | $t$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 실험집단 | 19 | 15.842 | 1.642 | -0.070 | 0.945 |
| 비교집단 | 20 | 15.800 | 2.093 | | |

실험집단의 평균은 15.842, 비교집단의 평균은 15.800이었고 p값은 0.945로, 실험집단과 비교집단은 문제해결력에 있어 통계적으로 차이가 없는 동질 집단이라고 볼 수 있다. 이후 대수적 사고 기반의 수학 수업의 효과를 검증하기 위해 실시한 사후 문제해결력 검사 결과는 [표 10]과 같다.

[표 10] 사후 검사 결과

| 집단 | 학생 수 | 평균 | 표준 편차 | $t$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 실험집단 | 19 | 17.789 | 2.551 | -2.635* | 0.012 |
| 비교집단 | 20 | 15.500 | 2.856 | | |

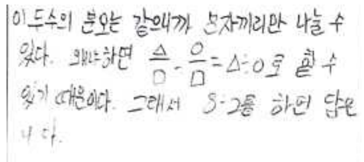
*$p<0.05$

사후 문제해결력 검사에서 실험집단의 평균은 17.789, 비교집단의 평균은 15.5로 평균 차이가 크게 나타났다. 이에 대해 독립표본 t-검정을 실시한 결과 t값은 -2.635였고 유의확률은 0.012로 유의수준 $p<0.05$에서 통계적으로 유의미한 차이가 나타났다. 즉, 대수적 사고 기반의 수업이 실험집단의 문제해결력을 길러주는 데 긍정적인 영향을 주었다고 해석할 수 있다.

### 2. 분수의 나눗셈 문제해결 과정에 나타난 대수적 사고 요소

가. 기호화

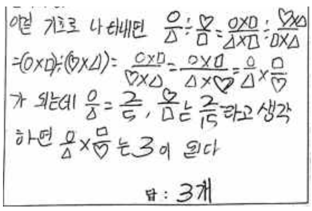
많은 학생이 [그림 4]와 같이 기호를 사용하여 자신의 풀이 과정을 설명하였다.



[그림 4] 동분모 분수 나눗셈의 기호화(S8)

S8은 동분모 분수인 피제수와 제수의 분모를 □라는 동일한 기호로 나타내고 피제수의 분자를 △, 제수의 분자를 ○이라는 기호로 각각 나타내었다. 이는 S8이 어떤 것은 같은 기호로, 어떤 것은 다른 기호를 사용해야 하는지 판단한 결과이다. 문제마다 각각의 숫자는 바뀌더라도 분자, 분모와 같은 수의 성질에 대해서 동일한 기호를 사용할 수 있다는 것을 알고 분수의 나눗셈 상황을 기호화할 수 있다는 것이다. 또한 두 수의 분모는 같으니까 분자끼리만 나눌 수 있다고 하며 $\frac{\triangle}{\square} \div \frac{\bigcirc}{\square}$라는 식을 $\triangle \div \bigcirc$로 나타낸 것은 기호로 식을 표현하고 나아가 상황에 맞게 변형할 수 있음을 의미한다. S8은 문제의 구조를 파악해 기호를 사용해 형식화하고 조작하여 해결하는 대수적 사고의 특징을 보인다고 해석 가능하다. 이어 기호를 사용해 일반화한 식에 문제에서 제시된 숫자인 8과 2를 대입하여 8÷2를 하여 답인 4를 구하였다. 이미 기호화된 형식에서 각각의 기호가 의미하는 바를 알고 다시 특수화하여 수를 대입하였으므로 대수적 사고가 가능하다면 역으로 대수적 사고에서 산술적 사고로의 유연한 이동이 가능하다는 임미인, 장혜원(2018)의 주장과도 일치한다.

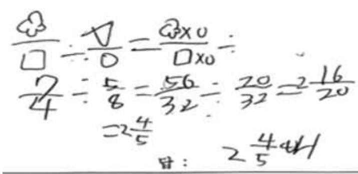
또한 S8은 [그림 5]에서 이분모 분수의 나눗셈 과정을 기호로 일반화하였다.



[그림 5] 이분모 분수 나눗셈의 기호화(S8)

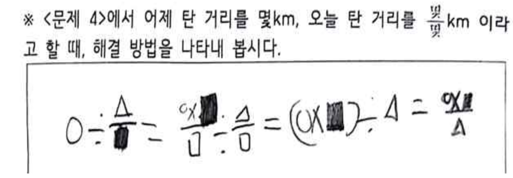
[그림 4]에서는 분모를 모두 □로 나타낸 반면 [그림 5]에서는 피제수의 분모를 △, 제수의 분모를 □로 나타내어 서로 다른 분모를 표현하였고, 분자 또한 ○와 ♡를 이용하여 각각 다르게 나타내었다. 동분모 분수의 나눗셈과 이분모 분수의 나눗셈을 명확히 구분하고 기호화할 수 있음을 보여준다. S8은 분수의 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 과정을 기호로 표현하였는데 이 과정에서 분모를 ♡×△에서 △×♡로 순서를 바꾸어 나타냈으며 이는 자연수의 곱셈에서 성립하는 교환법칙을 기호로 된 식에서도 적용한 것이다. 대수적 기반 수업에서 분수의 나눗셈 과정을 기호로 표현하는 활동을 통해 단순히 식을 기호로 바꾸어 표현하는 방식뿐만이 아니라 연산 법칙을 이해하고 기호로 된 식에 적용하는 방법을 이해하는 데 긍정적인 영향을 미쳤다고 해석할 수 있다.

한편 [그림 6]과 같이 기호로 풀이 과정을 정당화하려 했으나 도중에 그만둔 사례도 있었다.



[그림 6] 기호화의 시도(S12)

S12는 $\frac{7}{4} \div \frac{5}{8}$라는 문제를 해결하기 위해 $\frac{\clubsuit}{\square} \div \frac{\Delta}{\bigcirc}$라는 기호로 일반화하였다. 통분의 필요성을 느껴 $\frac{\clubsuit}{\square}$에 다른 분모인 ○를 곱해 □×○로 통분하고, 분자에도 ○를 곱하여 ♧×○로 나타내었으나 더 이상 진행하지 않았다. 반면 기호를 사용하지 않고 식을 세워 문제를 해결하였다. 이러한 반응이 나타난 이유를 분석하기 위해 수업 중 S12가 [그림 7]과 같이 자연수÷분수를 기호로 나타내려고 시도한 활동지를 검토하였다.

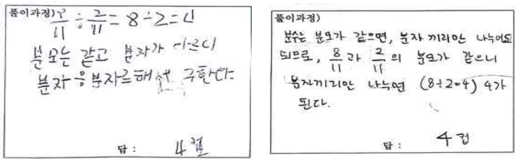



[그림 7] 수업 중 기호화 시도(S12)

S12는 자연수를 ○라는 기호로, 분수를 $\frac{\Delta}{\blacksquare}$라는 기호로 나타내었다. 자연수와 분수의 일반적인 형태에 따라 기호화에 성공하였다고 볼 수 있다. 이후 자연수 ○에 ■를 곱해 나름대로 자연수와 분수를 통분하려고 시도했으나, 그 과정에서 분모를 □라는 새로운 기호로 나타내는 오류를 보였다. 이는 통분 과정에서 나타나는 공통분모를 전혀 다른 새로운 기호로 표현하려 했다고 해석할 수 있는데, 조선미(2021)에서 통분 과정에서 변수를 사용하여 표현한 식을 조작하지 않고 다시 새로운 변수를 사용하여 표현하는 오류와 동일하다. 이는 변수를 사용해 표현하고 조작하는 경험이 거의 없는 초등에서 당연히 나타날 수 있는 결과라고 보았다. 산술과 대수의 불연속적인 측면에도 불구하고 산술에서 새로운 수가 등장하듯이 대수에서도 이를 그대로 적용한 오류라고도 볼 수 있다(송영무, 양두레, 1997). 따라서 기호화 과정에서 나타나는 어려움이나 오류에 대해 교사가 새로운 기호로 바꾸기보다 처음 기호로 표현하는 방법 등을 알려줌으로써 도움을 줄 수 있을 것이다. 그러나 지나치게 형식화에 집중하거나 선행학습 요소를 지도하지 않도록 함으로써 대수적 사고의 본질인 체계적이고 효율적인 표현 방법에 다가갈 수 있도록 주의해야 한다.

나. 일반화

학생들은 분수의 나눗셈 해결 방법의 공통점을 찾고 그것을 분모, 분자와 같은 수학적 용어를 사용하여 일반화하였다. [그림 8]은 S5와 S3이 동분모 분수의 나눗셈을 일반화한 사례이다.




[그림 8] 동분모 분수의 나눗셈 일반화(S5, S3)

S5는 분모가 같은 분수의 나눗셈을 해결하기 위해 먼저 $\frac{8}{11} \div \frac{2}{11} = 8 \div 2 = 4$로 계산하였고, 분모는 같고 분자는 다르기 때문에 분자끼리만 나누어도 된다고 설명하며 분자÷분자라는 일반화된 형식으로 제시하였다. 이처럼 분수 나눗셈 문제에서 수학적 사실과 구조를 탐구하고 언어로 일반화하여 표현하는 것은 대수적 사고의 중요한 특징이라고 할 수 있다.

S3 또한 분수는 분모가 같으면 분자끼리만 나누어도 되므로, $\frac{8}{11}$과 $\frac{2}{11}$를 8÷2로 하여 4를 구할 수 있다고 자신의 풀이를 정당화하였다. 연구자는 S3가 분수의 나눗셈 과정에서 분수의 특성과 분모가 같다는 것의 의미를 이해하고 있는지 알아보기 위해 면담을 실시하였다. <에피소드 1>은 S3이 연구자에게 자신의 풀이를 설명하는 과정이다.

<에피소드 1>

연구자: 분수의 나눗셈에서 분모가 같으면 분자끼리만 나누어도 된다고 했는데, 왜 그런가요?

S3: 분모가 같으면 $\frac{8}{11} \div \frac{2}{11}$를 해도 어차피 분모는 11÷11을 하면 1이 되니까, 나눌 필요가 없어서 분자끼리만 나누면 더 편해서요.

연구자: 분모는 11÷11을 하면 1이 된다는 것은 무슨 뜻이죠?

S3: 어...분모가 같으면...

연구자: 분모의 의미를 말해줄 수 있나요?

S3: 어... 전체를

연구자: 전체를?

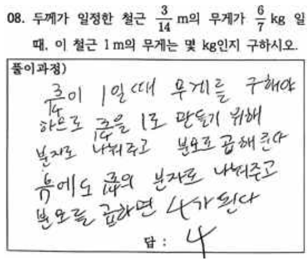
S3: 어... 전체

연구자: 분모는 전체인가요?

S3: 네.

<에피소드 1>에서 동분모 분수의 나눗셈에서 분자끼리만 나누어도 되는 이유를 묻자 S3은 분모가 같다면 11÷11과 같이 같은 수끼리 나누면 1이 되기 때문에 나눌 필요가 없어서라고 설명하였다. 같은 분모끼리 나누어 1이 나온다는 것과 분모의 의미를 질문하자, 분모의 의미를 전체라고 답하였다. 이를 통해 S3이 분수에서 분모가 전체를 나타낸다는 것을 알고 있음을 파악할 수 있다. 또한 나눗셈에서 자기 자신을 나누면 항상 1이 된다는 것도 인식하고 있으므로 수와 연산에 대한 이해를 바탕으로 분모가 같다면 부분에 해당하는 분자끼리만 나누면 된다는 결론을 내렸다고 보인다.

한편 문제의 맥락을 이해하고 그에 따른 해결 방법을 일반화한 학생들도 있었다. [그림 9]는 S15가 단위비율 결정 맥락 문제의 해법을 일반화한 것을 보여준다.



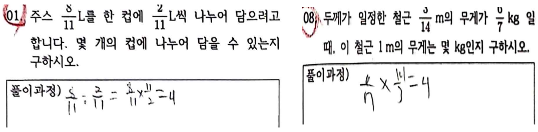

[그림 9] 단위비율 결정 맥락의 일반화(S15)

S15는 맥락을 고려하여 철근의 길이 $\frac{3}{14}$를 1로 만들기 위해 분자로 나누고 분모를 곱해준다고 설명하였다. 이는 S15가 단위비율 결정 맥락 문제의 해결방법의 공통점을 찾고 풀이방법을 내면화하여 다른 문제에도 적용 가능한 일반화된 표현을 사용하였다고 볼 수 있다. 대수적 사고를 기반으로 한 수학 수업에서 문제의 맥락에 따라 해결 방법의 공통점과 차이점을 찾고 맥락별로 적용할 수 있는 문제를 탐색하는 과정을 통해 초등 수준에서의 귀납적 일반화가 이루어진 것이다.

반면 [그림 10]은 비교 집단의 학생이 [그림 8], [그림 9]와 동일한 문제를 해결한 과정이다.

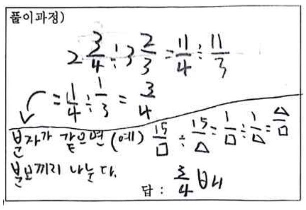
왼쪽은 포함제 맥락, 오른쪽은 단위비율 결정 맥락 문제로 대수적 사고 기반 수업에서는 이러한 문제의 공통점과 차이점을 탐구하고 한 맥락의 해결방법을 다른 맥락에도 적용할 수 있는지 생각해보게 하였다. 그 결과 [그림 8]에서 S5, S3은 동분모 분수의 나눗셈이기 때문에 분자끼리의 나눗셈으로 구한다고 설명하였

고 [그림 9]에서 S15는 단위비율 결정 맥락을 고려하였다. 이와 달리 비교집단 학생의 풀이에서는 두 맥락의 차이점이나 정당화 과정이 잘 드러나지 않았고 두 문제 모두 분수의 표준 알고리즘을 적용하여 풀었다.



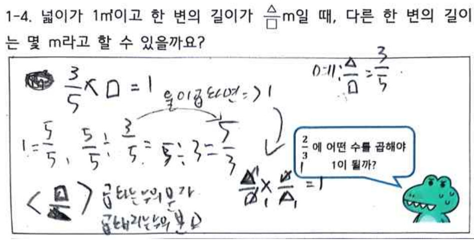

[그림 10] 비교집단 학생의 포함제 맥락과 단위비율 결정 맥락 풀이

마지막으로 계산 과정에서 연산의 성질을 발견하고 일반화하였다. [그림 11]에서 S17은 $\frac{11}{4} \div \frac{11}{3}$인 이분모 분수의 나눗셈을 계산하며 두 분수의 분자가 11로 같은 연산의 구조를 이용하여 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3}$로 나타내었고 최종적으로 $\frac{3}{4}$을 얻었다.




[그림 11] 연산의 성질 일반화(S17)

주목할 부분은 S17이 이 과정을 화살표로 표시한 다음 '분자가 같으면 분모끼리 나눈다'고 일반화하고, $\frac{15}{\square} \div \frac{15}{\triangle}$라는 기호를 사용한 예시를 들어 설명하였다는 점이다. 여기서 분모를 □와 △라는 기호를 사용한 것은 문제에서 주어진 상황의 분수를 기호화할 때 이 분모라는 문제 상황을 이해하고 있다는 것으로 볼 수 있을 것이다. 또한 예시를 들 때 문제 상황의 11이라는 분자가 아닌 15라는 가상의 분자를 사용하였는데, 이는 일반화를 할 때 각각 다른 수이더라도 항상 적용될 수 있어야 하는 일반화의 법칙을 이해하고 나타내었다고 해석할 수 있다. 초등에서 자연수 상황뿐만 아니라 분수의 나눗셈에서도 수와 연산의 성질을 탐구하고 일반화하는 대수적 사고가 가능하며, 기호를 사용한 형식화까지 나아간 데에서 의미가 있다. 이러한 사고의 심층분석을 위해 S17의 수업 중 활동지를 추가로 분석하였다. 넓이가 1㎡인 직사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{\Delta}{\square}$m일 때 다른 한 변의 길이를 탐구한 과정은 [그림 12]와 같다.




[그림 12] 수업 중 연산의 성질 일반화(S17)

이 문제에서 S17은 먼저 자연수의 상황을 대입하여 $\frac{3}{5}\times\square=1$로 바꾸어 동분모 분수의 나눗셈으로 해결하였다. 그 후 $\frac{\square}{\Delta}$라는 기호로 나타낸 수를 탐색하며 '곱하는 수의 분자'가 '곱해지는 수의 분모'임을 발견하였다고 추정할 수 있다. 그 후 실제로 $\frac{\Delta}{\square}\times\frac{\square}{\Delta}=1$이라고 확인 과정을 거쳐 정당화하였다. 이와 같이 수업 중 자연수에서의 상황을 거쳐 기호화로 넘어가고 이 과정에서 분수의 나눗셈 과정에 대한 깊은 이해가 일어난 학생은 사후 검사에서도 동일한 상황은 아니었지만 분수의 나눗셈에서 연산의 성질에 대해 일반화하는 것이 가능했을 것이라는 추론이 가능하다.

위의 사례에서 볼 수 있듯이 대수적 사고를 기반으로 한 수학 수업을 경험한 학생들은 분모의 종류에 따른 해결 방법 일반화, 문제의 맥락에 따른 해결 방법의 일반화, 연산의 성질 일반화 등 분수의 나눗셈에서 발생하는 관계와 수학적 과정을 탐구하고 자신의 언어로 일반화하는 모습을 보였다.

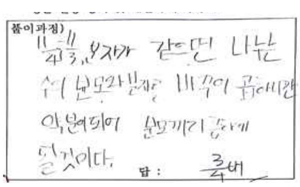
### 다. 추론

학생들은 분수의 성질, 나눗셈의 성질, 등식의 성질

등 다양한 수학적 성질과 관계를 추론하여 계산하지 않고도 문제를 해결하거나 자신의 풀이 과정을 설명하였다.

1) 연산의 과정에 대한 추론

[그림 13]은 S14가 분자가 같은 이분모 분수의 나눗셈에서 약분이 되는 과정을 추론하여 설명한 것이다.



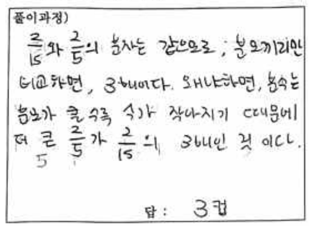

[그림 13] 약분 과정 추론(S14)

S14는 $\frac{11}{4}$과 $\frac{11}{3}$의 분자가 같다는 것을 발견하고 나누는 과정에서 $\frac{11}{4}\times\frac{3}{11}$과 같이 바뀌므로 피제수의 분자인 11과 제수의 분자인 11이 약분이 된다고 예상하고 분모끼리 곱하게 될 것이라고 추론하였다. 이와 같이 S14는 직접 식을 세워 계산하지 않고도 연산의 과정과 수학적 구조를 이해하고 분수의 나눗셈 과정에서 약분이 된다는 것을 예상하여 어떻게 답을 구해야 하는지를 추론해 낼 수 있었다.

2) 분수의 성질과 관계를 이용한 추론

$\frac{2}{5}\div\frac{2}{15}$와 같이 피제수와 제수의 분자가 같고 분모가 배수인 분수의 나눗셈에서 분수의 성질과 분수 사이의 관계를 이용해 답을 추론한 학생들도 있었다. 그 중 [그림 14]는 피제수와 제수의 분자가 같으므로, 분모끼리만 비교한다고 설명한 S3의 사례이다.

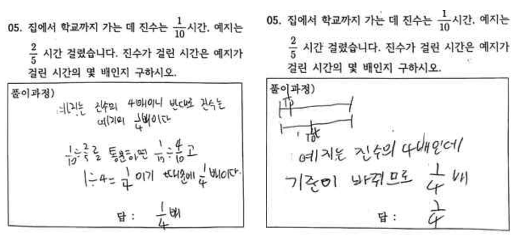
S3은 분수는 분모가 클수록 수가 작아지기 때문에 분자가 같다면 더 큰 $\frac{2}{5}$가 $\frac{2}{15}$의 3배라고 하였다. 이는 결국 분수는 전체를 동일하게 나눈 것 중의 일부분이라는 정의와 분모가 클수록 일부분은 작아진다는 분수의 성질을 이해한 후 대수적 사고를 적용하여 직접 계산하지 않고도 추론하였다는 것을 의미한다. 그리고 등분할 상황에서 전체를 5로 나눈 것 중 하나는 15로 나눈 것 중 하나의 3배가 된다는 것을 파악하였다고 해석할 수 있다. 분자가 똑같이 2라면, 분모가 5인 분수가 15인 분수의 3배가 된다. 분수의 정의와 분수의 성질, 분모와 분자의 관계, 분수 사이의 관계를 알고 내면에서 연결지어야 가능한 추론이다. 이와 같이 분수의 성질과 관계를 이용한 풀이는 산술을 일반화시켜 추론하는 대수적 사고가 작동하였음을 의미한다.




[그림 14] 분수의 성질과 관계를 이용한 추론(S3)

3) 제수와 피제수의 관계를 이용한 추론

제수와 피제수의 관계를 파악한 추론은 제수와 피제수의 분모의 배수 관계가 아니라 제수와 피제수 그 자체로 A가 B의 몇 배라면 반대로 B는 A의 몇분의 1배라는 관계를 이용했다는 점에서 차이가 있다. [그림 15]의 진수가 걸린 시간은 예지가 걸린 시간의 몇 배인지 묻는 문제에 대해 S19는 예지는 진수의 4배이기 때문에 반대로 진수가 걸린 시간은 예지의 $\frac{1}{4}$배라고 설명하였다.




[그림 15] 제수와 피제수의 관계 추론(S19, S1)

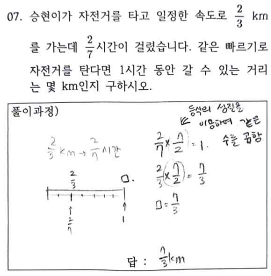
'몇 배'는 제수와 피제수 사이에 성립되는 관계이며 이를 구하기 위해서는 제수와 피제수가 무엇인지 확실히 알고 있어야 한다. 이는 대수적 사고를 기반으로 한 수업에서 제수와 피제수의 의미와 관계를 충분히 탐구한 결과가 반영되었다고 할 수 있다. 학생들은 다

양한 문제 맥락에서 제수와 피제수를 파악하고 제수의 크기에 따른 몫의 크기 등을 탐색하고 일반화하였으며, 연구자는 시각적 모델을 사용해 학생들의 이해를 도왔다. 일반화된 산술 관점에서도 나눗셈의 의미와 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계 등 수의 성질과 연산의 성질을 다루었다.

S1도 제수와 피제수의 관계를 추론하여 문제를 해결하였다. 마찬가지로 진수가 걸린 시간은 몇 배인지 구하기보다는 직관적으로 파악할 수 있는 예지가 진수의 4배라는 사실에 집중하였고 그 후 기준이 바뀌므로 진수는 예지의 $\frac{1}{4}$배라는 답을 도출하였다. 기준이 바뀌었다는 표현에서 S1이 문제를 해결하는 관점을 바꾸었다는 것을 추측할 수 있으며 이는 피제수와 제수의 양을 대상으로 보고 관점의 전환을 통해 문제를 해결하였음을 의미한다. 문제의 맥락에 따라 제시된 조건을 분석하여 관점을 바꾸고 관계를 통해 양을 파악하는 능력은 방정식 해결에도 중요하게 작용하는 능력으로, 대수적 사고의 핵심 요소라고 할 수 있다.

4) 등호에 대한 관계적 이해를 통한 추론

앞선 사례들이 수와 연산의 성질을 이용한 추론인 반면 [그림 16]은 등호를 이용하여 양 사이의 관계를 탐구한 사례이다.



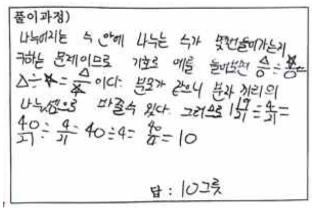

[그림 16] 등호에 대한 관계적 이해를 통한 추론(S7)

S7은 문제를 해결하며 직접적으로 등식의 성질을 언급하였다. 문제 상황은 길이가 같은 이중수직선을 사용하여 나타내었으며 위의 수직선에는 $\frac{2}{3}$, 아래 수직선에는 $\frac{2}{7}$라고 쓴 것으로 보아 위는 거리를, 아래는 시간을 나타낸 것임을 알 수 있다. 먼저 1시간에 해당하는 거리를 구해야 하므로 $\frac{2}{7}$에 $\frac{7}{2}$을 곱해 1로 만들어, 어떤 분수를 1로 만들기 위해서는 분모와 분자를 바꾼 수를 곱해야 한다는 것, 즉 분수의 곱셈에서 항등원과 역수를 암묵적으로 알고 있음을 뜻한다. 그리고 답을 구하기 위해 $\frac{2}{3}$에 $\frac{7}{2}$를 곱하였다. 이 과정을 S7은 등식의 성질을 이용하여 같은 수를 곱하였다고 표현하였다. 분수의 나눗셈 문제를 단순히 알고리즘적으로만 접근하여 해결하는 것이 아닌, 제수와 피제수의 관계를 파악하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는 모습은 초등학교 6학년 학생들에게 충분히 관계적 사고를 활용한 일반화된 산술로서의 대수적 추론이 가능함을 보여주는 것이라고 할 수 있다.

라. 정당화

1) 기호를 사용한 정당화

일부 학생들은 [그림 17]처럼 □, △, ○, ☆ 등 다양한 기호를 변수로 사용하여 나타낸 식으로 자신의 풀이를 정당화하였다.




[그림 17] 기호를 사용한 정당화(S18)

S18은 문제를 기호를 사용한 식으로 예를 들어 표현하였는데 동분모 분수의 나눗셈이므로 분모에 같은 기호를 사용하여 $\frac{\triangle}{\bigcirc} \div \frac{☆}{\bigcirc}$로 제시하였다. <에피소드 2>는 S18이 기호로 나타낸 식의 의미를 설명한 것이다.

<에피소드 2>

연구자: 분수의 나눗셈식을 $\frac{\triangle}{\bigcirc} \div \frac{☆}{\bigcirc}$라고 표현하였는데, 그 이유가 무엇인가요?

S18: 분모는 똑같으니까 똑같은 기호로 했어요.

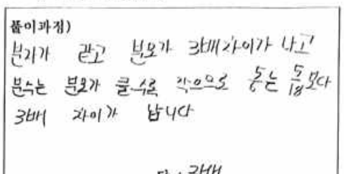
연구자: 그러면 ○안에 들어가는 수는 항상 같고, △와

☆에 들어가는 수는 항상 다른가요?
S18: 어… 다를 수도 있고, 똑같을 수도 있어요.
연구자: 무슨 뜻인가요?
S18: 예를 들어서, 그냥 우연히 똑같을 수도 있는데, 맨 날 똑같진 않으니까.
연구자: 좀 더 자세히 설명해 줄 수 있나요?
S18: 어… 문제에서 우연히 애랑 애랑 똑같이 5일 수도 있잖아요, 근데 그건 어쩌다 그런거고, 항상 똑같이 나오진 않는데 똑같이 쓰면 안되잖아요.
연구자: 그러면 ○는 항상 같은 수인가요?
S18: 네.
연구자: 왜죠? 이건 우연히 똑같은게 아닌가요?
S18: 이건… 문제에서 말한 거잖아요.
연구자: 문제에서 말한 것?
S18: 문제에서 정해준 거니까… 우연히 똑같은 게 아니에요.

<에피소드2>에서 S18은 $\frac{\triangle}{\bigcirc} \div \frac{☆}{\bigcirc}$와 같이 나타낸 이유에 대하여 분모는 문제에서 정해준 것, 즉 고정된 수이기 때문에 ○와 같이 똑같은 기호로 나타낼 수 있는 반면, 분자는 우연히 같을 수는 있지만 항상 같지는 않다고 하였다. 더 자세한 설명을 요구하자, S18은 기호로 나타낸 △와 ☆을 가리키며 똑같이 5일 수도 있지만 항상 똑같지는 않다고 예를 들어 정당화하였다. 이와 같이 자신의 해결 과정을 기호로 알맞게 나타내고 정당화한 학생들은 문제의 맥락과 기호의 의미를 이해하고 있다고 볼 수 있다.

2) 수학적 성질을 이용한 정당화

학생들은 [그림 18]에서 S6처럼 분수가 가진 일반적인 성질을 들어 자신의 풀이를 정당화하였다.

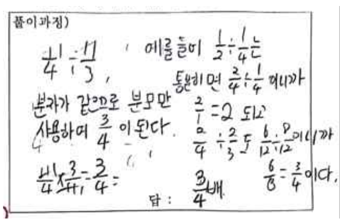



[그림 18] 분수의 성질을 통한 정당화(S6)

S6은 분수는 분모가 클수록 단위분수의 크기는 작아진다는 성질을 이용하여 해결 방법을 정당화하였다. 한 분수의 분모가 다른 분수의 A배라면 단위 분수의 크기는 반대로 $\frac{1}{A}$배가 성립한다는 것을 암묵적으로 알고 있다고 해석할 수 있다. 따라서 분자가 같을 때, 분모가 3배 차이 난다면 분모가 더 작은 분수가 더 큰 분수의 3배라고 할 수 있다는 것이다. 이는 항상 성립하는 것은 아니며, 3번과 같이 분자가 같고 분모가 배수 관계인 특정 상황에서만 적용할 수 있는 정당화 방법이다. 따라서 이러한 정당화 방법을 사용했다는 것은 문제를 풀 때 구하는 것이 무엇인지, 제수의 분모와 피제수의 분모와 분자는 무엇인지, 어떠한 관계가 있으며 그것을 어떻게 이용할 수 있는지 깊이 탐구했다고 볼 수 있다.

3) 예시적 정당화

이는 다른 분수의 나눗셈 등으로 예를 들어 정당화한 경우이다. [그림 19]에서 볼 수 있듯이 S2는 $\frac{11}{4} \div \frac{11}{3}$를 해결하는 과정에서 분자가 같으므로 분모만 사용하여 $\frac{3}{4}$이 된다고 하며 이에 대한 정당화로 두 가지 예를 들었다.



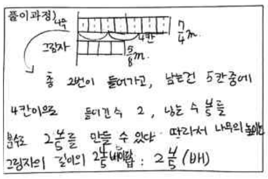

[그림 19] 예를 이용한 정당화(S2)

첫째는 $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$로 단위분수의 나눗셈이다. 답을 구하면 $\frac{2}{1}$가 되는데 S2가 의도한 풀이 방법인 분모인 2와 4를 이용해 $\frac{4}{2}$를 만들고 약분한 결과이다. S2는 두 번째 예시로 단위분수가 아닌 $\frac{2}{4} \div \frac{2}{3}$를 설정하였다. 이는 문제 상황과 분모가 동일하며 분자는 간소화한 수

이다. 이 경우도 답을 구하면 $\frac{3}{4}$으로 역시 (제수의 분모)÷(피제수의 분모)가 된다. 따라서 문제 상황의 $\frac{11}{4} \div \frac{11}{3}$도 (제수의 분모)÷(피제수의 분모)인 $\frac{3}{4}$이 나온다고 정당화하였다. 이러한 예시를 통한 정당화는 아직 연역적 증명을 학습하지 않은 초등학생들이 흔히 사용하는 정당화 중 하나이다. S2가 사용한 예시는 2가지로, 첫 번째는 단위분수 상황이었고 두 번째는 문제 상황과 동일한 분모와 분자만 더 작은 수였다는 점에서 의미가 있다. 첫 번째 예시로 정당화를 시도했으나 결과가 자연수로 나와 S2의 입장에서는 정당화로 충분치 않다고 느꼈을 수 있으며, 분모가 같은 분수로 한번 더 정당화를 시도하였다고 추측할 수 있다. 자신의 풀이에 대해 논리적인지 판단하고, 정당화하기 위해 사용한 예시가 적절한지 생각하는 능력은 정당화에서 매우 중요한 능력 중 하나이다. 이는 다양한 분수의 나눗셈에서 제수와 피제수의 관계 탐색을 통해 분수의 나눗셈 맥락 간 공통점과 차이점을 비교하고 풀이 방법을 일반화하며 길러질 수 있다.

4) 시각적 모델을 이용한 정당화

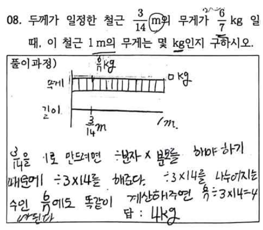
이중테이프 모델과 이중척도 모델을 사용하여 정당화한 사례이다. [그림 20]에서 S16은 나무의 높이가 그림자 길이의 몇 배인지 구하는 과정을 이중테이프 모델로 정당화하였다.



[그림 20] 이중테이프 모델을 이용한 정당화(S16)

주목할 점은 각 칸의 중간에 점선을 그려 한 칸이 두 칸으로 나누어지게 만든 것인데, 이는 통분의 필요성을 느껴 $\frac{7}{4}$을 $\frac{14}{8}$로 만들기 위한 시도라고 생각된다. 나무에 그린 7칸을 14칸으로 나눈 뒤 5칸씩 2번 뛰어 세고 4칸이 남는다고 표시하였다. S16은 이를 통해 나무의 높이는 그림자 길이의 $2\frac{4}{5}$배라고 하였다.

한편 단위비율 결정 맥락 문제에서는 [그림 21]과 같이 이중척도 모델을 사용하였다.



[그림 21] 이중척도 모델을 이용한 정당화(S16)

S16은 위쪽에 철근의 무게를 띠 모양으로 나타내고, 아래쪽에는 길이를 수직선으로 나타냈다. 철근의 길이를 1m로 만들기 위해서는 먼저 분자인 3으로 나누고 분모인 14를 곱해야 한다. 그 후 주어진 양 간의 관계를 탐구하여 답을 구하였는데, 피제수인 $\frac{6}{7}$에도 똑같이 계산하였다. 즉 철근의 길이 $\frac{1}{14}$m에 해당하는 무게 한 칸의 크기는 $\frac{6}{7} \div 3$인 $\frac{2}{7}$kg이고, 여기에 14를 곱한 철근 1m에 해당하는 무게는 $\frac{2}{7} \times 14$인 4kg가 된다.

대수적 사고 기반 수업에서는 피제수가 제수의 몇 배인지 구하는 문제와 제수 1에 대응하는 피제수의 양을 구하는 문제 사이의 공통점과 차이점을 찾고 양 사이의 관계에 대해 탐구하며 전자는 주어진 양의 단위가 동일한 상황에서 비교하였다면 후자는 단위가 다르며, 따라서 비교해야 하는 것과 해결 방법도 다르다고 수업 중에 논의를 통해 탐구하였다.

## Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 6학년 학생을 대상으로 대수적 사고 기반의 수학 수업을 설계하고 적용한 뒤 문제해결력에 미치는 영향과 문제해결 과정에서 보이는 대수적 사고를 분석하여 초등학생들의 대수적 사고가 어떻게 발현되는지 탐구하고 대수적 사고 기반의 분수 지도와 관련한 시사점을 도출하는 데 목적이 있다. 연구 결과를 바탕으로 한 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 대수적 사고 기반 수업은 학생들의 문제해결

력 향상에 긍정적 효과가 있다. 연구 결과 비교집단에 비해 실험집단 학생들의 사후 문제해결력 검사의 평균 점수가 높았으며 통계적으로도 유의미한 차이가 있었다($p=0.012<0.05$). 현재까지 분수와 관련한 초등학생들의 대수적 사고 수준에 대한 조사 연구와 수업 사례 분석 연구들이 이루어졌다. 이혜민(2011)은 초등학생 5학년 두명을 대상으로 방정식을 해결할 때 사용하는 분수 스킴과 전략에 대해 분석하고 분수의 개념 및 연산을 지도할 때 단위분수를 활용하여 관계를 파악할 수 있도록 하는 산술과 대수적 사고의 연결을 강조하였다. 조선미(2021)는 초등에서의 대수적 사고를 강조한 분수의 나눗셈 수업 구현이 가능함을 증명하였다. 본 연구는 대수적 사고 기반 수업을 실시한 뒤 직접적으로 문제해결력에 긍정적인 영향을 주었다는 사실을 확인할 수 있었다는 측면에서 의의가 있다. 대수적 사고 기반 수업은 절차적인 계산 알고리즘 중심의 수업이 아닌 관계를 탐색하고 해결 방법을 일반화하는 활동으로 구성하였으며 학생들은 다양한 문제해결 방법을 고민하고 논의하였다. 이를 통해 스스로 문제해결 전략을 구상하고 적용하는 능력에 도움을 줄 수 있었다. 또한 검사지와 면담에서도 실험집단 학생들은 분모의 배수 관계, 제수와 피제수의 관계, 등호에 대한 관계적 이해 등 여러 가지 방법으로 답을 추론해 내었다. 대수적 사고를 경험한 학생들은 연산을 과정이 아닌 대상으로 다룰 줄 알았으며 수학적 구조와 성질을 활용해 문제를 해결하는 특징을 확인할 수 있었다.

둘째, 초등학교 6학년 학생들에게 대수적 사고 기반 수업 적용 시 학생들의 문제해결과정에서 기호화, 일반화, 추론, 정당화와 같은 대수적 사고 요소를 관찰할 수 있었다. 특히 기호화의 특징이 뚜렷하였다. 학생들은 동분모 분수의 나눗셈과 이분모 분수의 나눗셈을 구분하고 상황에 맞게 기호를 사용하여 나타내고 변형하였다. 뿐만 아니라 기호를 사용한 식에 수를 대입하여 답을 구하기도 하였으며, 자연수의 곱셈에서 성립하는 교환법칙을 기호로 된 식에서도 사용할 수 있었다. 반면 분수의 나눗셈을 기호로 표현하는 과정에서 어려움을 겪은 학생도 있었는데, 이분모 분수의 나눗셈에서 분모가 통분되는 과정을 새로운 기호로 나타내었다. 이는 산술과 대수의 불연속성에도 불구하고 산술에서의 표현 방식을 그대로 대수에 적용하는 데에서 오는 오류이다. 기호화에 어려움을 겪는 학생들에게 교사는 기호의 의미와 특성을 알려주고 이러한 불연속성을 극복할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 또한 6학년임에도 불구하고 기호로 표현하는 방법을 전혀 경험하지 않은 학생이 중등 수학에서 문자 기호 중심의 대수 교육을 접했을 때 어려움을 겪을 가능성이 있다. 대수적 사고 기반 수업을 통해 기호화에 익숙해진다면 대수적 사고로의 전이가 보다 수월하게 진행될 수 있을 것이다.

셋째, 대수적 사고 기반 수업을 경험한 학생들은 직접적으로 지도받지 않은 연산의 성질이나 구조를 발견하고 이를 이용하여 답을 추론할 수 있었다. 대수적 사고 기반 수업에서는 (자연수)÷(단위분수) 상황일 때 계산하지 않고도 답을 구할 수 있는 방법을 생각해보면서 분수의 의미와 성질에 대해 탐구하고 추론해 답을 구하게 하였다. 또한 직사각형의 넓이가 1㎡이고 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$m일 때 다른 한 변의 길이는 몇 m일지 계산하기 전에 먼저 추측해보게 하였다. 이러한 활동을 통해 분수 개념과 연산의 구조를 이해한 학생들은 사후 검사의 풀이과정에서도 분수의 성질, 제수와 피제수의 관계, 등식의 성질 등 다양한 수학적 아이디어와 개념을 사용하여 문제를 해결하거나 자신의 풀이를 설명하는 모습을 보였다. 한 학생은 분수의 성질과 분수 사이의 관계를 이용해 '분자가 같다면 더 큰 $\frac{2}{5}$가 $\frac{2}{15}$의 3배'라고 추론하였다. 초등학생들이 이처럼 수업 중 지도하지 않은 것을 활용하여 추론했다는 점을 볼 때, 이 학생이 연산의 구조를 완전히 파악하고 있으며 연산을 계산해야 할 절차가 아닌 대상으로 다루고 있다고 짐작할 수 있다. 이는 초등학생들이 다양한 전형식적 대수 추론을 사용할 수 있다는 이화영, 장경윤(2012)의 연구결과와도 일치하는 것이다. 그러나 이 연구에서 주어진 문제는 연립방정식과 관련된 문장제 문제였던 반면, 본 연구에서는 방정식이 아닌 일반적인 분수의 나눗셈 산술 문장제 문제였다는 점에서 의미가 있다. 학생들은 산술 상황에서도 대수적 사고를 기반으로 한 추론 전략을 구사하였다. 연산의 구조와 관계를 통해 추론하는 활동은 단순히 계산 알고리즘을 통해 답을 구하는 활동보다 한 단계 상위의 해결 방법이며, 나아가 수학적으로 사고할 수 있는 디딤돌이 될 것이다.

따라서 분수의 나눗셈 표준 알고리즘을 도입하기 전 연산의 의미, 구조와 관계 등을 탐구할 기회를 제공해야 한다. 선우진, 방정숙(2019)은 3학년 학생들을 대상으로 곱셈과 관련한 연산의 성질을 강조하여 수업을 실시한 뒤 연산의 성질을 특정 단원이나 학년 중심으로 지도하기보다 수의 범위가 확장될 때마다 지속적으로 지도되어야 할 필요가 있다고 주장하였다. 본 연구에서는 분수의 나눗셈 단원을 재구성하여 지도하였으나 그 과정에서 학생들에게 나눗셈의 의미, 나눗셈에서 제수와 피제수의 관계, 분수에서 분모와 분자의 관계, 분수의 곱셈의 의미, 등식에서 양변의 관계 등을 의미있게 지도하였다. 분수는 연속량으로 자연수와 다른 특성을 지니며, 특히 분수의 나눗셈은 연산의 의미에 대한 이해가 부족하다면 표준 알고리즘의 도구적 이해에서만 그칠 가능성이 있다. 학생들은 연산의 구조와 관계를 이용해 분수의 나눗셈 문제를 해결하고 표준 알고리즘이 도출되는 과정과 연결할 수 있었으며 이는 분수의 나눗셈 문장제 문제를 해결하는 데 효과적이었다. 알고리즘과 같은 일련의 계산 절차를 수행하기 전 수 사이의 관계를 인식하고 다양한 접근을 통한 해결을 할 때 문제를 더욱 효율적으로 해결할 수 있으며 나아가 대수로의 자연스러운 전이를 위한 토대가 마련될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌


교육부(2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호 [별책8].

김민정, 이경화, 송상헌(2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. 학교수학, 10(1), 23-42.

김성준(2002). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰. 수학교육학연구, 12(2), 229-246.

김성준(2003a). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. 학교수학, 5(3), 343-360.

김성준(2003b). '초기대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. 수학교육학연구, 13(3), 309-327.

도주원, 백석윤(2020). 초등 수학에서의 미지수 표현 방식에 대한 다차원 교육과정적 관점에서의 논의. 학교수학, 22(2), 355-372.

방정숙, 김승민(2018). 수와 연산 성질의 일반화에 대한 초등 수학 교과서 분석. 학교수학, 20(1), 251-267.

선우진, 방정숙(2019). 곱셈의 연산 성질을 강조한 초등 수학 수업에 따른 3학년 학생들의 이해 분석. 한국초등수학교육학회지, 23(1), 143-168.

송영무, 양두레(1997). 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애에 관한 연구. 수학교육논문집, 5, 423-442.

우정호, 김성준(2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. 수학교육학연구, 17(4), 453-475.

이지영(2010). 초기 대수(Early Algebra)적 관점에 따른 초등학교 6학년 학생들의 분수 연산 감각 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이현주(2016). 초등학교 2학년 학생들의 일반화된 산술로서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

이화영, 장경윤(2012). 초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도(1). 학교수학, 14(4), 445-468.

이혜민(2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구. 한국수학교육학회, 14(3), 261-275.

임미인, 장혜원(2018). 수와 연산 영역에서 부진을 경험한 중학생의 산술적 사고 수준 변화 및 대수적 사고로의 이행에 관한 사례 연구. 수학교육학연구, 28(3), 345-365.

정선아(2014). 나눗셈 문장제 해결 과정에 영향을 미치는 문장제 구성요인 및 오류의 심리적 배경 분석. 서울교육대학교 교육전문대학원 석사학위논문.

조선미(2021). 대수적 사고를 강조한 분수 나눗셈 수업 및 학생들의 이해 분석. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

최지선, 나귀수(2023). 한국의 수학과 교육과정에서 초기대수 내용의 변화. 수학교육학연구, 33(2), 447-477.

최지영(2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 향상을 위한 교수-학습 방향 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

태순영(2012). 시선 추적 기법을 활용한 초등 수학 문장제 읽기 과정 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Blanton, M. L., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Blanton, M. L., Stephens, A., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2015). Development of children's algebraic thinking: The impact of comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39-87.

Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology, 118*, 110-118.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Heinemann.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing conception of algebraic reasoning in the primary grades*(Research Report No. 00-2). National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Springer.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (pp. 25-26). National Academies Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton(Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of 3rd graders' performance on a 4th grade assessment. In R. Speiser, C. A. Maher, & C. N. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education: Vol.1* (pp.99–108). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Lee, M. Y. (2019). A case study examining links between fractional knowledge and linear equation writing of seventh-grade students and whether to introduce linear equations in an earlier grade. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 109-122.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers t produce algebraic thinking, In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). Lawrence Erlbaum.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43-69). Springer.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*(10), 691-697.

Silla, E. M., Barbieri, C. A., & Newton, K. J. (2024). Procedural flexibility on fraction arithmetic and word problems predicts middle-schoolers' differential algebra skills. *Journal of Educational Psychology, 116*(2), 195–211.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford, & A, Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). NCTM.

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: Supporting the process in the early years. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 4, pp.* 417-424). Bergen University College.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator, 25*(2), 10 - 17.

# The effect of algebraic thinking-based instruction on problem solving in fraction division

**Park, Seo Yeon**
Seoul Guhwon Elementary School
E-mail : lisianthus@sen.go.kr

**Chang, Hyewon†**
Seoul National University of Education
E-mail : hwchang@snue.ac.kr

Many students have experienced difficulties due to the discontinuity in instruction between arithmetic and algebra, and in the field of elementary education, algebra is often treated somewhat implicitly. However, algebra must be learned as algebraic thinking in accordance with the developmental stage at the elementary level through the expansion of numerical systems, principles, and thinking. In this study, algebraic thinking-based classes were developed and conducted for 6th graders in elementary school, and the effect on the ability to solve word-problems in fraction division was analyzed. During the 11 instructional sessions, the students generalized the solution by exploring the relationship between the dividend and the divisor, and further explored generalized representations applicable to all cases. The results of the study confirmed that algebraic thinking-based classes have positive effects on their ability to solve fractional division word-problems. In the problem-solving process, algebraic thinking elements such as symbolization, generalization, reasoning, and justification appeared, with students discovering various mathematical ideas and structures, and using them to solve problems Based on the research results, we induced some implications for early algebraic guidance in elementary school mathematics.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97C30, 97D40
* Key Words : algebraic thinking, division of fractions, problem-solving
† Corresponding Author