

합동과 대칭의 교수학습에서 오목다각형의 활용에 대한 교과서 분석

강 윤 지 (서울홍연초등학교, 교사)

합동과 대칭은 일상생활에서 접할 수 있는 친숙한 개념으로, 이러한 개념을 효과적으로 이해하고 습득하기 위하여 적절한 시각적 예시의 역할이 중요하다. 본 연구에서는 초등 수학 교과서에서 합동과 대칭 개념을 학습하는 과정에서 제시되는 시각적 예시를 살펴보았으며 오목다각형의 활용에 초점을 맞추어 분석하였다. 분석 결과, 교과서에서 다양한 형태의 다각형이 합동과 대칭의 교수학습을 위한 시각적 예시로 활용되고 있었고 합동, 선대칭도형, 점대칭도형의 순서로 오목다각형의 활용 빈도가 높게 나타났다. 또한, 개념의 도입보다 성질 탐구에서 오목다각형이 더 자주 활용되는 것을 확인하였다. 이러한 분석 결과를 바탕으로 합동과 대칭의 교수학적 시사점을 모색하였다.

I. 서론

도형은 수학의 핵심 개념 중 하나이며 도형과 그 성질을 학습하는 것은 초등수학 교육과정 전반에 걸쳐 매우 중요하다(신준식, 2018). 도형에 대한 학습은 공간 인식 능력, 논리적 사고력, 수학적 개념 이해, 그리고 일상생활과의 연결을 통한 실생활 문제해결 능력 등을 향상하는 중요한 과정이다. 도형은 우리가 살고 있는 공간을 묘사하고 이 공간상의 대상들 사이의 이동과 관계를 묘사하는데 도움을 준다(Reys et al., 2009).

그중 합동과 대칭은 2022 개정 교육과정의 도형과 측정 영역에서 지식 이해 범주의 내용요소로 제시하는 개념이다. 합동과 대칭은 입체도형 위주로 구성된 5~6학년군에서 학습하는 평면도형의 내용과 긴밀하게 관련되어 있으며 학생들에게 인지적으로 혼동을 일으킬 수 있는 개념이다(방정숙, 김유경, 2017). 더욱이 이들은 학생들이 일상생활에서 접하는 친숙한 개념이면서 수학 교과뿐 아니라 일상생활에서 쉽게 접할 수 있고 다양한 활용이 기대된다. 도형의 성질을 이해하고 도형을 그리는 데 필요하며 각기둥과 각뿔, 원기둥과 원뿔, 구 등의 입체도형의 학습과 밀접한 관련이 있어 선행 학습과 후속 학습을 연결하는 가교 역할을 할 수 있기 때문이다.

초등 수학 교과서에서는 수학적 개념의 학습을 돕기 위하여 여러 가지 시각적 예시를 제시하고 있다. 합동과 대칭 내 활용되는 시각적 예시 또한 수학적 개념의 학습을 위하여 다양한 형태로 나타나고 있다. 삼각형, 사각형, 다각형 등의 단원은 주요 학습 내용이 해당 도형의 개념을 이해하고 탐구하는 것으로 구성되어 있으며 이를 위하여 전형적인 형태인 다각형을 주로 제시하여 다양한 형태인 다각형의 활용이 상대적으로 제한될 것이 예상된다. 반면 합동과 대칭 단원에서는 도형 간 관계에 집중하여 다루고 있어 더욱 다양한 시각적 예시의 활용이 기대된다. 게다가, 오목다각형은 그 특성상 학생들이 도형의 변과 꼭짓점의 수를 의식적으로 세어볼 수 있는 등의 효과가 있고(강완, 2013) 시각적 차이를 쉽게 인식할 수 있어 합동과 대칭 개념을 명확히 이해하는 데 도움이 된다. 오목다각형을 활용한 시각적 예시는 학생들이 비전형적인 도형에서도 합동과 대칭의 개념을 적용할 수 있도록 도와주며, 이를 통해 도형 개념의 확장과 심화 학습이 가능하기 때문이다.

이러한 수학적 개념의 학습을 위하여 학교 현장에서 사용하는 주 교재는 교과서이다. 교사들은 수학을 가르칠 때 대부분 교과서를 활용한다(Reys et al., 2009). 교과서는 교육과정이 교수학적 실제로 향하는 중간 단계로

* 접수일(2024년 5월 13일), 심사(수정)일(2024년 6월 1일), 게재확정일(2024년 6월 8일)

* MSC2020분류 : 97U20

* 주제어 : 대칭, 오목다각형, 볼록다각형, 교과서 분석

수업과의 관계에 교육과정보다 더 밀접한 연계성을 지니며, 수업을 계획하고 실행하는데 파급력이 높기에 교과서의 비교·분석을 통하여 수학 교육의 단면을 살펴볼 수 있다(방정숙, 김유경, 2017). 더욱이 현재 2015 개정 교육과정부터 검정 교과서가 도입되면서 이러한 교과서 분석의 중요성이 더욱 확대된다. 동일한 교육과정을 기반으로 하고 심의를 통과한 교과서라 할지라도 합동과 대칭의 개념 지도를 위해 활용된 시각적 예시, 정의 내용, 조작자료 등이 다양하게 제시되기 때문이다. 따라서 교사들이 교과서에 의지하여 수업하는 현 상황에서 교과서의 시각적 예시가 어떻게 구성되어 있는지 살펴볼 필요가 있다.

본 연구는 합동과 대칭 단원 내 활용된 시각적 예시의 종류를 살펴보고 어떠한 목적으로 어떠한 다각형을 제시하였는지를 블록다각형과 오목다각형을 중심으로 분석함으로써 이에 대한 교수학적 시사점을 모색하고자 하였다. 이를 위하여 현재 사용중인 2015 개정 교육과정이 반영된 국정 1종 및 검정 10종 초등 수학 교과서 내 합동과 대칭 단원의 시각적 예시를 분석하였다. 이러한 분석을 통하여 합동과 대칭의 학습 과정 중 활용되는 시각적 예시에 대한 교수학적 시사점을 모색하고 실제 교육 현장에서의 적용 가능성을 탐색하고자 하였다.

II. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 초등 수학과 교육과정에서의 합동과 대칭

합동은 두 도형 사이의 관계를 말하며 두 도형이 모양과 크기가 같으면 합동이라고 한다(신준식, 2018). 학생들은 한 도형이 다른 도형 위에 정확히 포개어지는 것을 볼 때 합동에 대한 개념을 이해하게 된다(Reys et al., 2009). 선대칭과 점대칭은 도형 자체가 가지고 있는 특성이며(신준식, 2018), 대칭은 학생들이 수학 학습을 즐길 수 있는 다양한 기회를 제공하며, 학생들이 다양한 기하학적 개념을 시각화하고 학습한 기하학을 그들의 실제 경험과 연결하도록 돕는다(Leikin, Berman, & Zaslavsky, 2000). 학생들은 합동과 대칭의 학습을 통하여 도형에 대한 기초 지식을 쌓고, 공간 감각과 추론 능력을 기를 수 있다.

7차 교육과정 이후 현재까지 초등 수학 교과서에서 합동과 대칭에 대하여 다룬 시기는 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> 초등 수학 교과서에서 합동과 대칭에 대하여 다룬 시기 분석 (7차 교육과정 이후)

교육과정 시기	내용	시기
7차	도형의 합동, 도형의 대칭	5학년 2학기
2007 개정	도형의 합동	5학년 1학기
	도형의 대칭	5학년 2학기
2009 개정	합동과 대칭	5학년 2학기
2015 개정 국정	합동과 대칭	5학년 2학기
2015 개정 검정	합동과 대칭	5학년 2학기

2009 개정 교육과정부터 학습량 경감의 교과서 개편 방향에 따라 ‘도형의 합동’과 ‘도형의 대칭’이 ‘합동과 대칭’이라는 하나의 단원으로 통합되었으며 이후 이러한 방향이 유지되고 있다. 2022 개정 교육과정에서 언급하는 합동과 대칭과 관련된 성취기준은 다음과 같다(교육부, 2022).

[6수03-01] 도형의 합동을 이해하고, 합동인 도형의 성질을 탐구하고 설명할 수 있다.

[6수03-02] 실생활과 연결하여 선대칭도형과 점대칭도형을 이해하고 그릴 수 있다.

학생들은 성취기준을 달성하기 위하여 합동인 두 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 각각 찾고 대응변의 길이와 대응각의 크기를 비교하는 활동을 통해 합동인 도형의 성질을 탐구하고 설명해야 한다. 또한, 무늬 찾기, 종이 겹쳐 오리기, 도장 찍기, 테칼코마니 등 구체적인 조작 활동을 통하여 합동의 의미를 알게 된다. 이외에도 실생활이나 자연환경 등에서 도형의 합동, 선대칭도형, 점대칭도형의 예를 찾고 수학의 아름다움을 느낄 수 있어야 하기에 이러한 활동 중심으로 추후 초등 수학 교과서가 집필될 것이라는 예상이 가능하다.

현재 2022 개정 교육과정에서 반영된 교과서는 출간되기 전이기에 본 연구에서는 현재 사용중인 2015 개정 교육과정이 반영된 초등 수학 국정 교과서 1종과 검정 교과서 10종을 분석하였다. 2015 개정 교육과정에서 제시한 합동과 대칭 관련 성취기준은 다음과 같다(교육부, 2015).

[6수02-01] 구체적인 조작 활동을 통하여 도형의 합동의 의미를 알고, 합동인 도형을 찾을 수 있다.

[6수02-02] 합동인 두 도형에서 대응점, 대응변, 대응각을 각각 찾고, 그 성질을 이해한다.

[6수02-03] 선대칭도형과 점대칭도형을 이해하고 그릴 수 있다.

합동과 대칭을 중심으로 초등 수학 교과서를 분석한 국내 선행연구는 다음과 같다.

방진숙, 김유경(2017)의 연구는 도형 영역의 주제와 관련하여 우리나라와 다른 나라의 수학 교과서를 비교·분석하였다. 분석 결과를 바탕으로 우리나라의 교과서에 합동의 활용 등을 추가할 것을 제안하였으며 합동, 선대칭도형, 점대칭도형은 서로 관련이 있어 연결하여 지도하는 것이 효율적일 수 있다고 하였다. 또한 오류를 줄이기 위하여 동일한 상황에서 합동인 도형과 대칭인 도형을 찾고 개념 간 차이를 인식하도록 지도하는 것이 필요하다고 주장하였다.

박진형(2021)의 연구는 합동과 대칭 단원의 수학 과제에 다이어그램의 접목 방법과 다이어그램이 수학적 추측 생성을 지원하는데 적절한지 확인하고자 하였다. 연구 결과, 다이어그램 생성 과제는 주로 대칭을 다루는 차시에서 확인되었으며 선대칭도형과 점대칭도형의 성취 기준과 관련되어 있었다. 합동을 주제로 한 과제에서는 주로 다이어그램을 활용해 두 다른 도형의 변 길이와 각도를 비교하는 데 집중했으며, 선대칭도형과 점대칭도형을 다루는 과제에서는 변의 길이와 각의 크기를 비교하는 데 주로 다이어그램을 사용하였다.

선행 연구 분석 결과, 합동과 대칭을 다루는 교과서 분석 연구가 많지 않았으며 시각적 예시와 관련된 연구가 부족하다는 것을 확인할 수 있었다. 이에 본 연구는 합동과 대칭의 학습에 큰 영향을 미치는 교과서의 시각적 예시를 중심으로 교과서를 분석함으로써 교수학적 시사점을 모색하고자 하였다.

나. 오목다각형의 도입

도형 내부에 있는 임의의 두 점을 이었을 때 도형 외부로 지나지 않는 다각형을 볼록다각형이라고 한다(신준식, 2018). 정다각형의 종류 중 볼록하지 않은 오목한 정다각형도 존재한다. Reys 외 연구진(2009)은 오목, 볼록이라는 용어를 설명하고 오목 도형이 다양한 방법으로 흥미를 북돋을 수 있을 것이라 소개하였으며 오목과 볼록의 기준으로 모든 각이 180° 보다 작은 다각형인지 여부를 제시하였다. 또한 다각형의 분류는 어렵지 않지만, 학생들에게 정다각형만 보여주는 경우가 많음을 지적하면서 오목다각형의 사례를 제시하였다.

2015 개정 교육과정과 2022 개정 교육과정에서는 중학교 교육과정의 도형과 측정 영역에서 다각형과 다면체는 그 모양이 볼록인 경우만 다룬다고 언급하고 있다(교육부, 2015; 교육부, 2022). 볼록다각형이 학습 대상이고, 오목다각형은 특수한 경우에만 다룬다(신준식, 2018). 초등수학에서 오목다각형을 취급하는 것과 관련한 선행 연구로 강완(2013), 도주원, 백석운(2020)과 최종현, 최경아, 박교식(2014)의 연구가 있다. 이러한 선행연구 대부분은 다각형의 개념과 관련하여 오목다각형의 활용을 살피고 있다.

강완(2013)의 연구는 2009 개정 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서를 분석하였다. 분석 결과, 오목다각형을

다루는 경우 통해 도형의 변화 꼭짓점의 수를 의식적으로 세어볼 수 있고, 도형에 대하여 단순한 안목에서 벗어나게 해 주며, 변의 수가 많은 볼록다각형을 그리는 데 있어서의 어려움을 해결할 수 있다고 하였다. 이를 바탕으로 하여 오목다각형을 다각형의 다양한 범례로 취급할 것을 주장하였다. 도주원, 백석윤(2020)의 연구에서는 오목다각형 도입 여부 및 방식에 대하여 고찰하였다. 2015 개정 초등학교 교과서와 수학 익힘을 1차부터 2009 개정 교육과정까지 시기별로 비교 분석한 결과, 다각형 개념을 가르칠 때 오목다각형의 도입에 있어서 내용적, 방식적 한계를 명확히 설정해야 하며, 교사들이 다각형 개념을 정확하게 가르칠 수 있도록 교사 교육 및 연수가 필요하다는 결론을 내렸다. 또한, 교과서에 오목다각형을 포함시키는 것이 학생들이 다각형 개념을 올바르게 이해하고 오해를 줄일 수 있는 방법이라고 제안하였다.

반면, 최중현, 최경아, 박교식(2014)의 연구에서는 2009 초등학교 교육과정에 따른 교과서 분석을 통하여 오목다각형의 취급과 관련하여 논의를 전개하였다. 그 결과, 오목다각형의 취급에 관한 공론화 과정이 없었고, 2009 초등학교 교육과정에서 오목다각형의 취급을 정당화해 주는 근거를 찾을 수 없으며, 오목다각형의 취급에 논리적 비약이 있고 넷째, 오목다각형의 취급에서 일관성이 없기에 재고할 필요가 있다고 하였다.

이러한 선행연구는 연구의 대상과 결과, 결론에서 연구자 고유의 시각을 다루고 있으며 초등학교 교육과정에서 오목다각형의 도입에 대한 견해 또한 일치하지 않으나 오목다각형의 교수학적 활용에 대한 중요성에 동의하고 있다는 공통점이 있다.

다. 도형 학습에서 시각적 예시의 중요성

개념 형성은 다양한 대상들 사이의 차이점을 넘어서 그들이 공유하는 공통적인 특성을 추출하는 사고 활동을 통해 이루어진다. 이 과정에서 중요한 것은 다양한 경험을 통해 변하지 않는 본질을 찾아내는 추상화 능력이다. 즉, 여러 상황과 대상들을 경험하면서 그 안에서 일관된 본질을 발견하고 개념을 형성하는 것이 필요하다(김수미, 정은숙, 2005). 도형 개념(Figural concepts)은 개념적이며 비유적인 특성을 지니고 있다(Zodik & Zaslavsky, 2007). 그러나 이러한 개념은 일상에서 쉽게 접하기 어려워, 학생들의 어휘 이해도가 낮아질 수 있다. 수학 학습에 사용되는 어휘에 대한 학생들의 이해도가 낮으면 수학 학습 자체에도 부정적인 영향을 미칠 수 있다(권미선, 2023). 따라서 학생들의 이해도를 높이기 위하여 이러한 어휘는 교과서와 교실에서 언어적으로 정의되거나 시각적 예시와 함께 제시되고 있다.

예시는 수학적 활동에서 수학적 개념을 추상화하거나 일반화하는 데 필수적이며, 유추적 사고를 위한 토대가 된다(조윤희, 조정기, 고은성, 2013). 더욱이 이러한 예시를 통하여 수학에서 많이 사용하는 어휘의 효과적인 학습을 이끌 수 있다는 장점이 있다. 그러나 수학 학습에서 예시의 선택과 사용은 교사에게 과제를 제시하며 특히 예시의 구체적인 선택이 학생들의 학습을 촉진하거나 방해할 수 있기에 여러 가지를 고려해야 한다(Zodik & Zaslavsky, 2007).

김수미, 정은숙(2003)의 연구는 예와 반례를 통한 학습이 효과적이라는 영국의 수학 교육자 Skemp의 이론을 바탕으로 도형 개념 지도 방안을 구안하고자 하였다. 이를 위하여 개념 학습을 위한 원형 모형 이론을 고찰하고 우리나라 7차 수학 교과서의 도형 단원을 분석하여 예와 반례를 통한 6단계 수업 모형을 고안하였다. 수업 결과, 예와 반례를 통한 수업에서 아동의 성취 수준과 관계없이 도형 개념을 형성하고 개념 간 위계 관계를 이해하기 적합하였으며 의사소통을 촉진하는 등의 효과가 나타났다. 이러한 연구는 시각적 예시의 역할을 긍정적으로 평가하면서 중요성을 인정하고 있다.

이러한 관점에서 시각적 예시의 활용이 합동과 도형 영역의 학습에 다양한 방면으로 긍정적인 효과를 가져올 것이라는 예상이 가능하다. 예를 들어, 시각적 예시를 통해 직접 도형이 어떻게 합동이거나 대칭인지를 관찰하며 이해할 수 있다. 이는 단순히 개념을 설명하는 것보다 명확하고 직관적인 이해를 가능하게 한다. 또한, 시각적 예시를 통해 실제 문제 상황에서 합동과 대칭의 원리를 어떻게 적용해야 하는지를 학습할 수 있다. 이는 이론을

실제로 적용하는 능력을 향상할 수 있다. 이외에도 시각적 예시를 통해 학생들은 공간적인 상황에서 합동과 대칭의 원칙을 적용하는 방법을 배울 수 있으며 이는 공간적 사고력을 향상하는 데 도움이 된다. 본 연구는 이러한 시각적 예시의 역할과 중요성에 주목하여 교과서를 분석함으로써 교수학적 시사점을 모색하고자 한다.

2. 연구 방법 및 절차

가. 분석 대상

합동과 대칭 단원 내 제시된 시각적 예시를 분석하기 위하여 2015 개정 교육과정이 반영된 국정 1종 및 검정 10종 초등 수학 교과서를 분석하였다. 2022 개정 교육과정에 따른 5학년 교과서가 발간되기 전이기에 2015 개정 교육과정이 반영된 현행 교과서를 기준으로 분석하였다. 현재 초등 수학 검정 교과서 10종이 사용되고 있으며 본 연구의 분석 대상은 2015 개정 교육과정이 반영된 국정 교과서 및 현재 사용되고 있는 모든 종류의 초등 수학 교과서를 포함한다.

해당 단원에서 다루는 주요 수학 용어는 합동, 선대칭도형, 점대칭도형이다. 해당 단원의 내용을 수학 용어의 학습 내용을 중심으로 각각 살펴보았으며 수학 용어의 정의 및 교과서의 주요 활동 위주로 분석하였다. 교과서의 구성에 따라 차시 활동 중 ‘확인’, ‘키우기’ 등 학습 내용을 확인하기 위한 문제가 제시된 경우가 있었으나 각 교과서의 차시 활동 구성에 따라 활동과 확인 문제의 구분이 모호한 경우가 있어 이 또한 대상에 포함하였다.

나. 분석 방법

초등 수학 교과서는 교육과정에서 제시하는 합동과 대칭의 성취기준 및 교과서의 주요 활동을 반영하여 집필되었다. 검정 교과서의 차시 활동 구성을 살펴보면 합동과 대칭의 개념 지도를 위해 사용된 활동, 설명 방식, 정의 등 유사한 측면이 있으나 집필진의 의도에 따라 구현 방향 및 내용이 각각 다르게 나타났다. 이는 국정 교과서와 유사하기도 상이하기도 하다.

이처럼 초등 수학 교과서마다 매 차시의 구성 및 내용이 다르게 나타났기에 합동과 대칭 단원 내 각 수학 용어의 교수 학습 활동을 구분하기 위하여 다음과 같은 기준을 마련하였다. <표 II-2>에 제시된 기준은 국정 1종 및 검정 10종 교과서에서 공통으로 제시되는 활동의 주제를 중심으로 구분한 것으로 초등 수학 전문가 2인의 검토를 거쳤다.

<표 II-2> 합동과 대칭 단원의 학습 내용 구분 기준

합동	합동의 정의
	합동인 도형의 의미 알기
	합동인 도형의 성질 알기
선대칭도형	선대칭 도형의 정의
	선대칭 도형의 의미 알기
	선대칭 도형의 성질 알기
점대칭도형	점대칭도형의 정의
	점대칭도형의 의미 알기
	점대칭도형의 성질 알기

용어의 정의는 각각 교과서에서 별도의 공간을 할애하여 수학 용어의 정의를 서술한 부분을 의미한다. 용어의 의미 알기는 해당 개념에 해당하는 도형 찾기, 본뜨기, 해당하는 도형 찾아 색칠하기 등의 활동을 포함한다. 용어의 성질 알기는 대응하는 구성 요소 찾기, 대응하는 구성요소의 크기나 길이 비교하기, 대칭축 및 대칭점 사

이의 관계 알기, 해당 개념을 그리거나 완성하는 활동 등을 포함한다. 각 차시 내 활동에 제시된 시각적 예시를 분석하였으며 오목다각형 여부, 활용된 다각형의 종류 등을 분석하여 교수학적 시사점을 모색하고자 하였다. 각 교과서의 구성에 따라 단일활동에 제시되는 시각적 예시의 종류와 개수가 다르게 나타났기에 1회 이상 오목다각형을 제시하는 경우 오목다각형을 활용하였다고 구분하였다.

III. 연구 결과 및 논의

1. 합동과 대칭의 정의에 나타나는 시각적 예시의 활용 분석

합동과 대칭 단원에서는 합동, 선대칭도형 점대칭도형의 정의가 각각 제시된다. 이러한 수학 용어의 정의에 나타나는 시각적 예시의 활용을 분석하였다. 국정 1종 및 검정 10종 교과서 내 수학 용어의 정의에 활용되는 시각적 예시의 오목다각형의 여부를 분석한 결과는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 수학 용어의 정의를 위하여 활용된 시각적 예시의 오목다각형 여부 분석 결과

	국정	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
합동의 정의	×	×	×	×	×	×	×	-	×	×	×
선대칭도형의 정의	×	×	×	×	×	×	×	×	○	×	×
점대칭도형의 정의	○	○	×	×	×	○	○	×	×	○	×

총 11개 교과서의 분석 결과 교과서에서 합동을 정의하기 위하여 오목다각형을 제시한 사례는 발견되지 않았다. 선대칭도형을 정의하기 위하여 오목다각형의 예시를 제시한 경우는 1건(9.1%)이었으며 오목다각형을 제시한 경우는 5건(45.5%)으로 나타났다. 대부분의 경우 수학 용어를 정의하기 위하여 볼록다각형을 제시하고 있었으나 그 중 1개 교과서에서는 합동의 정의에서 시각적 예시 없이 언어적 표현으로만 설명하였다. 예를 들어, [그림 III-1], [그림 III-2]는 교과서에서 제시하고 있는 합동의 정의이다. 문장 구성에 차이가 있으나 ‘포개었을 때 완전히 겹치는 두 도형’이라는 설명이 일치한다. 이때 [그림 III-1]은 이해를 돕기 위하여 삼각형을 제시하여 나타내고 있으며 [그림 III-2]는 시각적 예시 없이 언어적 표현으로만 나타내고 있다.



[그림 III-1] 초등 수학 검정 교과서 내 합동의 정의
(장혜원 외, 2023, p.62)

[그림 III-2] 초등 수학 검정 교과서 내 합동의 정의
(신향균 외, 2023, p.55)

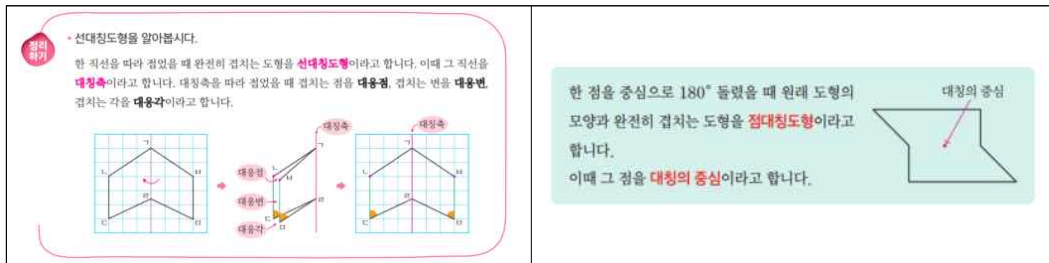
수학 용어의 정의에 활용된 시각적 예시의 다각형 종류를 구체적으로 살펴보면 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 수학 용어의 정의를 위하여 활용된 시각적 예시의 다각형 종류 분석

	국정	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
합동의 정의	삼각형	사각형	삼각형	삼각형	삼각형	삼각형	삼각형	-	삼각형	오각형	삼각형
선대칭도형의 정의	육각형	육각형	삼각형	오각형	육각형	육각형	오각형	사각형	오목 육각형	오각형	사각형
점대칭도형의 정의	오목 육각형	오목 팔각형	사각형	사각형	사각형	오목 육각형	오목 육각형	사각형	육각형	오목 육각형	육각형

분석 결과 총 11개 교과서 중 합동을 나타내기 위하여 삼각형을 제시하는 경우는 8건(72.7%), 사각형과 오각형을 제시하는 경우는 각각 1건(9.1%)이었으며 도형을 제시하지 않는 경우 1건(9.1%)로 나타났다. 선대칭도형을 정의하기 위하여 삼각형을 제시하는 경우는 1건(9.1%), 사각형을 제시하는 경우 2건(18.18%), 오각형을 제시하는 경우 3건(27.3%), 육각형을 제시하는 경우는 5건(45.5%)로 나타났다. 점대칭도형을 나타내기 위하여 삼각형을 제시하는 경우는 나타나지 않았으며 사각형을 제시하는 경우 4건(36.4%), 오각형을 제시하는 경우는 나타나지 않았고 육각형을 제시하는 경우 6건(54.5%), 팔각형을 나타내는 경우 1건(9.1%)로 나타났다.

[그림 III-3]과 [그림 III-4]는 수학 용어의 정의를 위하여 오목다각형을 제시한 경우이다. 각각 선대칭도형과 점대칭도형을 정의하기 위하여 시각적 예시를 보조 수단으로 활용하였으며 [그림 III-3], [그림 III-4]에서도 육각형을 제시하였다. 시각적 예시로 제시된 육각형의 모습은 일치하지 않으나 오목다각형을 활용하였다는 점이 확실하게 드러난다.



[그림 III-3] 초등 수학 검정 교과서 내 선대칭도형의 정의 (류희찬 외, 2023, p.67)

[그림 III-4] 초등 수학 검정 교과서 내 점대칭도형의 정의 (장혜원 외, 2023, p.75)

이때 합동의 정의에서 오목다각형을 활용하여 정의한 경우가 나타나지 않은 것은 해당 수학 용어의 특성과도 관련이 있다. 합동의 경우 완전히 겹치는 도형을 나타내기 위하여 삼각형 또는 사각형을 주로 제시하고 있으며 이러한 경우 볼록다각형으로 나타내는 것이 더 일반적이고 익숙하다. 더욱이 삼각형은 볼록다각형으로 나타낼 수 없는 다각형이다. 반면, 선대칭도형이나 점대칭도형은 도형 내에 대칭축이나 대칭점이 명확하게 드러나야 한다는 차이가 있다. 따라서 학생들이 직관적으로 선대칭 또는 점대칭의 관계를 파악할 수 있도록 구성하기 위하여 오목다각형을 활용하였다는 해석이 가능하다. 오목다각형의 경우 볼록다각형과 달리 특정 부분이 안쪽으로 들어가 있어 대칭 관계를 시각적으로 더 또렷하게 보여줄 수 있기 때문이다.

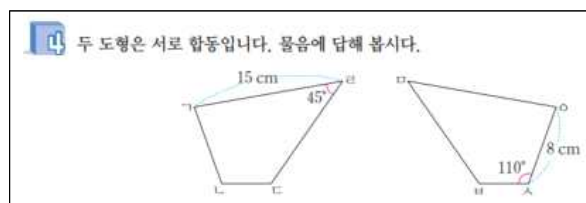
이때 도형을 제시하더라도 [그림 III-5], [그림 III-6]과 같이 수학 용어의 정의 과정에서 해당 개념의 용어를 밀거나 뒤집거나 돌리는 상황으로 나타난 경우가 있었다. 이는 단순히 특정 수학 용어를 대표할 수 있는 시각적 예시를 제시하는 것보다 더욱 역동적으로 구현한 것으로 수학 용어의 특징에 따라 다양하게 나타났다. 경우에 따라 0°, 90°, 180° 등으로 회전의 중간 단계까지 자세하게 나타낸 교과서도 있었다.

분석 결과, 국정 1종 및 검정 10종 교과서 중 합동의 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 1건(9.09%)이었으며 합동의 성질을 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 나타나지 않았다. 합동의 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 [그림 III-9]와 같다. [그림 III-9]에서는 합동의 의미를 알아보는 과정에서 오목다각형을 제시한 경우를 보여준다. 합동인 도형을 만드는 활동 중 사다리꼴에 이어 오목 팔각형을 제시한 것이다. 학생들은 이 활동에서 도형을 본떠 자른 것을 포개어 놓음으로써 합동의 개념을 확인할 수 있다.



[그림 III-9] 초등 수학 검정 교과서 내 활동 2번 (한대희, 2023, p.59)

이처럼 시각적 예시로 제시된 도형이 합동이라면 돌리기, 밀기, 뒤집기와 같은 변환을 통해 도형을 겹쳐놓을 수 있게 된다. [그림 III-10]은 볼록다각형을 제시하였으나 학생들에게 익숙한 형태의 사각형이 아닌 경우이다. 기존의 학생들은 정사각형, 직사각형, 마름모, 평행사변형, 사다리꼴 등의 도형을 학습하였고 익숙하였으나 그림 속 도형은 앞서 언급한 사각형에 해당하지 않는다. 이는 학생들에게 다양한 형태의 도형을 제시하여 합동에 대한 개념 이해를 도우려고 의도한 것으로 보인다. 이때 합동인 도형의 관계를 보여주기 위하여 시각적 예시에 각의 크기와 변의 크기를 나타내고 있다.



[그림 III-10] 초등 수학 국정 교과서 내 활동 4번 (교육부, 2020, p.57)

3. 선대칭도형의 학습 내 시각적 예시의 활용 분석

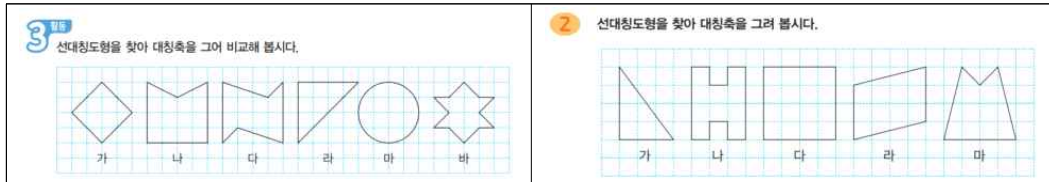
선대칭 도형은 교과서마다 나뭇의 차시 구성 및 활동으로 학습이 진행된다. 국정 1종 및 검정 10종 교과서 내 선대칭도형의 학습에 활용되는 시각적 예시의 오목다각형의 여부를 분석한 결과는 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4> 선대칭도형의 정의를 위하여 활용된 시각적 예시의 오목다각형 여부 분석 결과

	국정	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
선대칭도형의 의미	○	×	×	×	×	○	○	×	○	○	○
선대칭도형의 성질	○	○	×	○	○	○	○	○	○	○	○

분석 결과, 국정 1종 및 검정 10종 교과서 중 선대칭도형의 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 6건(54.55%)이었으며 선대칭도형의 성질을 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 10건(90.91%)으로 나타났다. 이는 선대칭도형의 성질을 학습하기 위하여 더 다양한 사례를 제시하고 있음을 보여준다. 아울러, 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 사용하였다가 성질을 탐구하기 위하여 오목다각형을 사용하지 않는 경우는 나타나지 않았다.

예를 들어 [그림 III-11]은 선대칭도형을 찾는 활동에서 여섯 가지 도형을 제시하고 있다. 여러 도형 중 나, 다, 바에 해당하는 도형은 오목다각형으로 구성되어 있다. [그림 III-12]도 마찬가지로 선대칭도형을 찾는 활동이며 다섯 가지 도형을 제시하고 있다. 이러한 경우 나와 마에 각각 오목다각형을 배치하였다. 이러한 경우 시각적 예시의 특징이 보다 명확하게 드러나 해당 도형의 특성 파악이 용이하다.



[그림 III-11] 초등 수학 검정 교과서 내 합동의 정의 (박성선 외, 2023, p.61)

[그림 III-12] 초등 수학 검정 교과서 내 활동 2번 (박성선 외, 2023, p.65)

[그림 III-13]과 [그림 III-14]는 선대칭도형의 성질을 알아보는 과정에서 오목다각형을 활용하는 예시를 보여 준다. [그림 III-13]은 선대칭도형의 성질을 알아보기 위하여 제시하는 예시로 대칭축을 중심으로 하되 오목한 형태를 하고 있는 육각형을 나타내고 있다. 이는 학생들에게 익숙한 정육각형과 다른 생김새이다. 다만 이러한 경우 [그림 14]와 같이 대응점끼리 이은 선분과 대칭축 사이의 관계를 알아보는 과정에서 그린 보조선이 도형 밖에 그려지게 된다. [그림 III-14]는 선대칭도형을 완성하는 과정에서 4개의 예시를 제시하고 있으며 그 중 3개를 오목다각형의 형태로 나타내고 있다. 이처럼 대칭축을 중심으로 하는 오목다각형을 제시하면 학생들에게 익숙하지 않은 형태의 도형보다 각과 변이 여러 개인 도형을 제시할 수 있어 보다 다양하고 복잡한 형태의 선대칭도형을 그릴 수 있으나 학생들에게 제시된 도형이 낯설고 보조선이 도형 밖에 그려지는 등의 상황이 발생할 수 있어 지도하는 교사의 유의가 필요하다.

분석 결과, 국정 1종 및 검정 10종 교과서 중 점대칭도형의 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 4건(36.36%)이었으며 점대칭도형의 성질을 학습하기 위하여 오목다각형을 활용한 경우는 10건(90.91%)로 나타났다. 이는 점대칭도형의 성질을 학습하기 위하여 더 다양한 사례를 제시하고 있음을 보여준다. 아울러, 선대칭도형의 경우와 마찬가지로 점대칭도형의 의미를 학습하기 위하여 오목다각형을 사용하였다가 성질을 탐구하기 위하여 오목다각형을 사용하지 않는 경우는 나타나지 않았다.

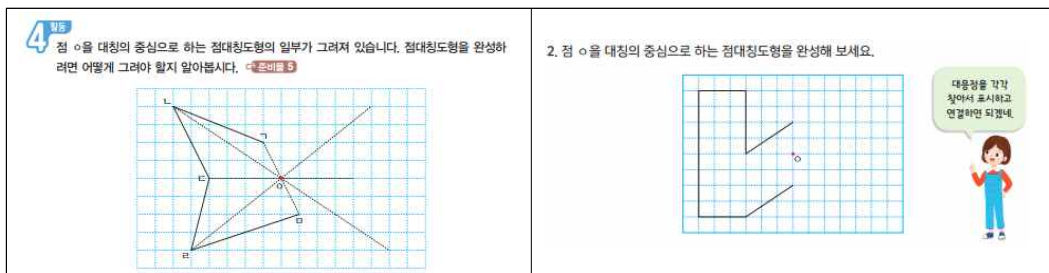
[그림 III-17]은 점대칭도형을 찾는 활동에서 여섯 가지 도형을 제시하고 있다. 여러 도형 중 마에 해당하는 도형은 오목삼각형으로 구성되어 있다. 반면, [그림 III-18]에서는 동일하게 점대칭도형을 찾는 활동이지만 모두 볼록다각형을 제시하고 있다. 오목다각형을 제시할 경우 학생들에게 다양한 형태의 도형 예시를 제시할 수 있으나 새로운 개념을 익숙하지 않은 형태의 도형에서 찾아야 하기 때문에 활동의 난도가 상승할 수 있다.



[그림 III-17] 초등 수학 검정 교과서 내 활동 2번 (안병곤 외, 2023, p.71)

[그림 III-18] 초등 수학 검정 교과서 내 활동 3번 (강완 외, 2023, p.73)

점대칭도형의 성질을 알아보는 차시에서는 11종 교과서 중 10종의 교과서에서 오목다각형을 제시하고 있다. 이는 점대칭도형의 성질을 확인하기 위한 도형 예시로 오목다각형이 여러 가지 장점을 가지고 있다는 것을 보여준다. 시각적 예시로 오목다각형을 활용할 경우 점대칭도형의 더욱 다양한 사례를 경험할 수 있으나 볼록다각형보다 익숙하지 않으며 육각형, 팔각형 등 더 복잡한 형태로 그려진다. 이에 여러 교과서에서는 보조도구를 사용하여 난이도를 조절하고 있다. 예를 들어 [그림 III-19]에서는 점대칭도형의 성질을 알아보기 위한 활동 중 난이도 조절을 위하여 보조선을 제시하고 있다. 오목팔각형을 제시하고 있으며 이는 학생들이 평소에 접하는 다각형과 형태가 다르다. 이에 난이도 조절을 위하여 보조선을 3개 제시하여 난이도를 조절한 것이다. [그림 III-20]에서는 점대칭도형을 그리는 과정에서 말풍선을 이용하여 학생들이 더욱 쉽게 점대칭도형을 완성할 수 있도록 비계를 설정하고 있다. 이외에도 초등 수학 교과서에 단계별 발문 등을 활용하여 학생들에게 익숙하지 않은 시각적 예시의 학습을 보완하기 위한 여러 가지 장치가 구현되어 있다.



[그림 III-19] 초등 수학 검정 교과서 내 활동 4번 (김성여 외, 2023, p.76)

[그림 III-20] 초등 수학 검정 교과서 내 확인하기 2번 (류희찬 외, 2023, p.77)

IV. 결론 및 제언

시각적 예시로 제시되는 도형의 형태는 학습자의 개념 이해에 중요하게 작용한다. 그렇기에 본 연구는 현재 사용되고 있는 국정 1종 및 검정 10종 초등 수학 교과서의 합동과 대칭 단원 내 시각적 예시를 오목다각형 여부를 중심으로 분석하였으며 이를 바탕으로 교수학적 시사점을 모색하고자 하였다. 연구 결과를 바탕으로 도출한 결론 및 교수학적 시사점은 다음과 같다.

첫째, 초등 수학 교과서에서 합동과 대칭 단원의 학습목표를 달성하기 위하여 블록다각형과 오목다각형을 비롯한 다양한 형태의 다각형을 제시하였다. 분석 결과, 초등 수학 교과서의 합동과 대칭 단원 내에 오목다각형과 블록다각형을 포함하는 다양한 형태의 시각적 예시가 제시되었다. 그중에는 제시되는 모든 다각형의 시각적 예시를 블록다각형으로만 구성된 교과서도 있었다. 이는 교과서 내 제시되는 시각적 예시의 종류와 형태에 집필진의 의도가 반영되어 있음을 보여준다. 초등학교에서 도형 학습은 가능한 한 다양한 형태의 도형을 경험하게 하는 것이 좋으며(신준식, 2018). 오목다각형의 다양성은 학생들이 합동과 대칭의 개념을 다양한 상황에서 적용해 보는 기회를 제공할 수 있다. 학생들은 다양한 시각적 예시의 탐구를 통해 수학적 개념을 깊게 이해하고 적용하는 능력을 향상할 수 있을 것이다.

둘째, 오목다각형은 합동보다 선대칭도형, 선대칭도형보다 점대칭도형을 위한 정의에서 활용 빈도가 높게 나타났다. 이는 해당 개념의 학습을 위하여 제시된 다각형의 종류와 관련이 있다. 합동의 정의에서는 상대적으로 변의 수가 적은 삼각형이 8건(72.7%)로 가장 많이 제시되었으며 선대칭도형의 정의에서는 육각형이 5건(45.5%), 점대칭도형의 정의에서도 육각형이 6건(54.5%)으로 가장 많이 나타났다. 이는 해당 개념이 의미하는 관계를 더욱 명료하게 표현하기 위한 형태를 선정하려는 목적이 반영된 것으로 짐작된다. 예를 들어, 합동의 경우 모양과 크기가 같아 포개어 겹쳐지는 관계를 보여주는 과정에서 직관적인 이해를 돕기 위하여 가장 단순한 형태의 다각형인 삼각형이 가장 많이 제시된 것으로 보인다. 반면 선대칭도형과 점대칭도형의 경우 상대적으로 변의 수가 더 많은 다각형을 활용하였으며 이러한 등장 빈도의 차이는 대칭 관계를 뚜렷하게 보여주기 위하여 오목다각형을 선정하였다는 의도가 반영된 것이라 예상할 수 있다. 오목다각형은 도형의 대칭 관계를 더 분명하게 보여줄 수 있는 복잡한 형태의 도형으로 학생들이 처음 접하는 대칭의 개념을 더 깊이 이해하는 데 도움이 될 수 있기 때문이다.

셋째, 오목다각형은 수학적 개념의 정의, 의미보다 성질을 탐구하는 차원에서 빈번하게 활용되었다. 시각적 예시는 기하에서 개념을 처음 도입하면서 개념의 특징을 포착하고 성질을 관찰할 때 상당히 기여한다(조윤희, 조정기, 고은성, 2013). 분석 결과, 합동의 의미를 알기 위하여 오목다각형을 도입한 1건의 경우를 제외하고는 학습이 진행될수록 보다 복잡한 형태의 시각적 예시를 제시하는 경향이 나타났음을 확인할 수 있다. 합동보다 선대칭도형, 선대칭도형보다 점대칭도형에서 더 다양한 형태의 시각적 예시가 활용되었다. 또한, 개념의 정의보다는 의미를 학습하는 경우, 의미를 학습하는 경우보다 성질을 탐구하기 위하여 오목다각형이 더 많이 제시되었다. 이를 통하여 오목다각형을 활용하면 일반적인 다각형보다 더 많은 변화 꼭짓점을 가지고 있고 제시되는 도형의 형태를 다양하게 구성할 수 있어 복잡한 개념의 탐구 및 성질 탐구를 위하여 활용되었으리라 짐작할 수 있다.

넷째, 오목다각형을 활용하여 다양한 난이도의 활동을 고안할 수 있다. 오목다각형은 합동과 대칭의 개념을 이해하고 복잡한 도형을 다루는 능력을 기르며, 추상적인 사고력의 향상에 기여할 수 있다. 더욱이, 오목다각형은 일반적인 다각형보다 도전적인 문제를 제공할 수 있으며, 이러한 문제는 학생들이 합동과 대칭의 개념을 더 깊이 이해하고 이를 실제 문제에 적용하는 능력을 키우는 데 도움이 될 수 있다. 분석 결과, 국정 1종 및 검정 9종 교과서에서 오목다각형을 다양하게 활용하고 있으며 이는 오목다각형의 활용 가능성과 효과성을 보여준다. 시각적 예시를 효과적으로 활용한다면 같은 활동이라도 보다 다양한 난이도로 구성할 수 있어 교육적으로 유연

한 접근이 가능하다. 난도 조절의 어려움 등의 이유로 본 차시에서 오목다각형을 활용한 활동을 구성하기 부담스럽다면 수학 익힘, 특화 차시 등을 활용하여 다양한 종류의 시각적 예시를 경험하도록 안내할 수 있다.

다섯째, 시각적 예시의 효과적인 활용에서 더 나아가 공학 도구를 통한 역량 함양까지 의도할 수 있다. 학생들에게 익숙하지 않은 형태로 시각적 예시를 제시할 경우 다양한 형태의 다각형을 학습하는 과정에서 사고력과 이해력의 향상이 가능하지만 활동의 난이도가 상승할 수 있다. 이러한 난도의 상승은 더 다양한 방향의 해결을 가능하게 하며 특히 공학도구의 활용과 연계하여 디지털 소양의 함양까지 이끌 수 있다. 2022 개정 교육과정에서는 수학 내용 특성에 적합한 교구나 공학 도구를 선택하여 학생들의 디지털 소양 함양을 도모해야 한다는 방향을 제시하고 있으며 교구나 공학 도구를 활용하여 추상적인 수학 내용을 시각화하고 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적 이해와 논리적 사고를 돕는 과정을 통한 정보처리 역량의 함양을 권장하고 있다(교육부, 2022). 오목다각형의 활용은 복잡한 형태로 인하여 관찰 및 변형 과정의 난도가 높으나 GeoGebra, 알지오메스 등의 공학 도구 등을 활용하는 역량 함양을 모색하기 적절한 대상일 수 있다. 공학 도구를 활용하여 복잡한 형태의 도형을 손쉽게 작도하고 위치를 옮기거나 다양한 종류의 다각형을 분류하고 특성을 분석하는 등 다양한 측면에서 공학 도구를 활용한 실습이 가능하며 이러한 과정에서 수학적 개념의 이해에서 더 나아가 여러 역량의 함양까지 달성할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 강완 (2013). 2009 개정 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서 분석: 개선을 위한 네 가지 문제점. 학교수학, **15(3)**, 569-583.
- Kang, W. (2013). An analysis on elementary mathematics curricula and textbooks of 2009 revised version in Korea-Four issues to be improved. *School Mathematics*, **15(3)**, 569-583.
- 강완 · 백석윤 · 전인호 · 이경화 · 김연 · 이미연 외 (2023). 수학 5-2. 대교출판.
- Kang, W., Baek, S., Jeon, I., Lee, K., Kim, Y., ..., Lee, M. et al. (2023). *Mathematics 5-2* Daekyo.
- 교육부 (2020). 수학 5-2. (주)비상교육.
- Ministry of Education (2020). *Elementary mathematics textbook 5-2* Visang.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].
- Ministry of Education (2015). Mathematics curriculum. notification of the Ministry of Education No. 2015-74 [vol. 8].
- 교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8].
- Ministry of Education (2022). Mathematics curriculum. notification of the Ministry of Education No. 2022-33 [vol. 8].
- 권미선 (2023). 교과서 분석 기반 수학교육용 어휘 선정 연구: 초등학교 1~2학년년을 중심으로. 수학교육논문집, **37(4)**, 675-695.
- Kwon, M. S. (2023). Textbooks analysis to select vocabulary for mathematics education: Focusing on 1st and 2nd graders in the elementary school. *Communications of Mathematical Education*, **37(4)**, 675-695.
- 김수미 · 정은숙 (2005). 범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안. 수학교육학연구, **15(4)**, 401-417.
- Kim, S., & Jung, E. (2005). Building geometrical concepts by using both examples and nonexamples. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **15(4)**, 401-417.
- 김성여 · 강연진 · 강요한 · 고창수 · 김보현 · 김아롱 외 (2023). 수학 5-2. 아이스크림.

- Kim, S., Kang, E., Kang, Y., Go, C., Kim, B., ..., Kim, A. et al. (2023). *Mathematics 5-2 I-Scream*.
- 도주원 · 백석윤 (2020). 다각형 개념 지도 시 오목다각형 도입에 대한 다차원 교육과정적 관점에서의 고찰. 수학 교육학연구, **30(1)**, 19-37.
- Do, J., & Paik, S. (2020). A study from a multi-dimensional curriculum perspective on including concave polygons in teaching polygon concepts. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **30(1)**, 19-37.
- 류희찬 · 유현주 · 이종영 · 조영미 · 탁병주 · 최인숙 외 (2023). 수학 5-2. 금성출판사.
- Lew, H., Yu, H., Lee, C., Cho, Y., Tak, B., ..., Choi, I. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Kumsung*.
- 박만구 · 강경은 · 김대진 · 김도경 · 김수정 · 김원석 외 (2023). 수학 5-2. 천재교육.
- Park, M., Kang, K., Kim, D., Kim, D., Kim, S., ..., Kim W. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Chunjae*.
- 박성선 · 류성립 · 김상미 · 권성룡 · 김남균 · 강호진 외 (2023). 수학 5-2. YBM.
- Park, S., Ryu, S., Kim, S., Kwon, S., Kim, N., ..., Kang, H. et al. (2023) *Mathematics 5-2 YBM*.
- 방정숙 · 김유경 (2017). 한국, 일본, 홍콩, 핀란드, 싱가포르 초등 수학 교과서의 합동과 대칭에 대한 비교· 분석. 수학교육, **56(3)**, 235-255.
- Pang, J., & Kim, Y. (2017). A comparative study on congruence and symmetry in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, Hong Kong, Finland, and Singapore. *The Mathematical Education*, **56(3)**, 235-255.
- 박진형 (2021). 초등 수학 교과서에서 다이어그램의 접목 방식에 대한 연구: 합동과 대칭 단원을 중심으로. 한국 초등수학교육학회지, **25(3)**, 203-232.
- Park, J. (2021). An analysis on diagrammatic reasoning tasks in elementary school mathematics textbook: Focusing on congruence and symmetry. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*. **25(3)**, 203-232.
- 신준식(2018). Co-Learning을 통한 초등수학교육의 실제. 하우출판사.
- Shin, J. (2018). The realities of elementary mathematics education through Co-Learning. Hawoo.
- 신환근 · 김태환 · 김리나 · 정나영 · 최혜령 · 황혜진 외 (2023). 수학 5-2. 비상교육.
- Shin, H., Kim, T., Kim, L., Jeong, N., Choi, H., ..., Hwang, H. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Visang*.
- 안병곤 · 나귀수 · 김민경 · 이광호 · 류현아 · 최지선 외 (2023). 수학 5-2. 두산동아.
- Ahn, B., Na, G., Kim, M., Lee, K., Ryu, H., ..., Choi, J. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Bookdonga*.
- 장혜원 · 서동엽 · 김민희 · 김선 · 김예림 · 김차명 외 (2023). 수학 5-2. 미래엔.
- Chang, H., Seo, D., Kim, M., Kim, S., Kim, Y., ..., Kim, C. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Mirae-n*.
- 조윤희 · 조정기 · 고은성 (2013). 중학교 학생들의 시각적 예가 없는 기하문제해결과정 분석. 학교수학, **15(2)**, 389-404.
- Cho, Y., Cho, C., & Ko, E. (2013). Analysis on geometric problem solving without diagrams of middle school students. *School Mathematics*, **15(2)**, 389-404.
- 최종현 · 최경아 · 박교식 (2014). 2009 개정 교육과정에 따른 초등학교 4 학년 수학 교과서에서의 오목다각형 취급에 대한 비판적 검토. 한국학교수학회논문집, **17(4)**, 613-627.
- Choi, J., Choi, K. & Park, K. (2014). A critical review of handling the concave polygons in elementary 4th grade mathematics textbooks according to 2009 revised curriculum. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **17(4)**, 613-627.
- 한대희 · 고은성 · 조형미 · 한상희 · 이희석 · 신희영 외 (2023). 수학 5-2. 천재교육.
- Han, D., Ko, E., Cho, H., Han, S., Lee, H., ..., Shin, H. et al. (2023). *Mathematics 5-2 Chunjae*.
- Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics* (9th ed.). John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역 (2012). 초등교사를 위한 수학과 교수법. 경문사.
- Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, O. (2000). Learning through teaching: The case of symmetry.

Mathematics Education Research Journal, **12**, 18-36.

Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 265-272). Seoul, South Korea: PME.

Textbook analysis on the application of concave polygons in congruence and symmetrical teaching and learning

Kang, Yunji

Seoul Hongyeon Elementary School

E-mail : angie0718@sen.go.kr

Congruences and symmetry are familiar concepts that can be encountered in everyday life. In order to effectively understand and acquire these concepts, the role of appropriate visual examples is important. This analysis examined various visual examples used in the process of learning the concepts of congruence and symmetry in elementary mathematics textbooks and focused on the use of convex polygons and concave polygons. As a result of the analysis, various types of polygons were used as visual examples for teaching and learning of congruence and symmetry in textbooks. The frequency of use of concave polygons was higher in the order of congruence, line symmetry, and point symmetry, and it was confirmed that it was used more frequently in the process of exploring properties than in the introduction of the concept. Based on these results, a plan to utilize concave polygons in teaching and learning of congruence and symmetry was sought.

* 2020 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key words : congruence, symmetry, concave polygon, convex polygon, textbook analysis