

# 분수계 수학을 사용한 박막트랜지스터의 문턱전압 이동 모델 확장

정태호<sup>\*\*†</sup>

<sup>\*\*†</sup> 서울과학기술대학교 전자공학과

## Expansion of Thin-Film Transistors' Threshold Voltage Shift Model using Fractional Calculus

Taeho Jung<sup>\*\*†</sup>

<sup>\*\*†</sup> Department of Electronic Engineering, Seoul National University of Science and Technology, Korea

### ABSTRACT

The threshold voltage shift in thin-film transistors (TFTs) is modeled using stretched-exponential (SE) and stretched-hyperbola (SH) functions. These models are derived by introducing empirical parameters into reaction rate equations that describe defect generation or charge trapping caused by hydrogen diffusion in the dielectric or interface. Separately, the dielectric relaxation phenomena are also described by the same reaction rate equations based on defect diffusion. Dielectric relaxation was initially modeled using the SE model, and various models have been proposed using fractional calculus. In this study, the characteristics of the threshold voltage shift and the dielectric relaxation phenomena are compared and analyzed to explore the applicability of analytical models used in the field of dielectric relaxation, in addition to the conventional SE and SH models.

**Key Words** : TFT, Threshold voltage shift, Fractional Calculus

### 1. 서 론

비정질 실리콘 박막 트랜지스터(Thin-Film Transistor: TFT)는 디스플레이용 소자로서 1980년 대에 처음 제안되었다 [1]. 이후 다양한 소재와 구조들이 사용되어 TFT의 성능이 발전하고 있지만, 장시간 동작에 따른 문턱전압 이동으로 발생하는 열화의 문제는 단결정 기반의 트랜지스터에 비해 매우 심각하다. 특히 문턱전압이 이동하는 현상은 거의 모든 TFT에서 발생하고 있어서 디스플레이 이외의 TFT의 적용 분야 확대에 많은 악영향을 주고 있다.

문턱전압 이동의 원인을 분석하기 위해 제안된 모델로는 수소의 확산에 기반한 모델과 band-tail 전하에 기반한

모델[2]이 있으며, 경험적 지식을 기반으로 두 모델 모두 stretched-exponential(SE) 함수 또는 stretched-hyperbola(SH) 함수로 기술된다. 문턱전압 이동 현상에서 재료에 따른 결합 생성 또는 전하 포획과 같은 물리적 의미를 분리하면 이 현상들의 속도 반응식은 1차 미분방정식으로 기술된다[3].

TFT의 문턱전압 이동 현상과는 별개로 유전체의 완화 현상도 동일한 형태의 속도 반응식에 기반하고 있다. 유전체 완화 현상도 초기에는 SE 모델 또는 경험에 기반한 변형된 SE 모델들로 기술되었으며, 현재는 분수계 수학(fractional calculus)을 사용하여 다양한 모델들의 정확한 의미를 찾고 있다. 유전체의 완화 현상은 외부 전계가 사라졌을 때 시간의 경과에 따라 유전체가 원래의 상태로 돌아가는 과정이다. 유전체의 완화 현상에 대한 해석 중 하나는 유전체의 완화가 결합의 확산에 의해 발생한다는

<sup>†</sup>E-mail: taeho.jung@seoultech.ac.kr

것이다[4]. 확산이 완화에 대한 연구는 선형 고체에서 미소 공백과 같은 결원이나 결정의 불규칙한 방향성이 확산하여 여기된(excited) 상태를 만나면 여기된 상태가 완화되는 것으로 시작되었다. 이에 변칙적 통계(anomalous statistics)를 기반으로 분수계 미적분을 사용한 분수계 완화 과정(fractional relaxation process)이 유도되었다[4].

본 연구에서는 TFT에서 문턱전압 이동이 수소의 확산에 의해 발생하는 점과 반응에 대한 기본적인 반응 속도식이 유전체의 완화와 동일한 점에 착안하여 분수계 완화 과정을 문턱전압 이동 모델에 적용하여 물리적 해석을 추가 또는 보완한다. 특히 SH 모델은 경험에 기반하여 반응 속도식을 수정하여 얻은 것이며, 분수계 완화 과정에 기반하여 수정된 반응 속도식의 의미를 고찰하고자 한다.

## 2. 반응 속도식 및 모델링

### 2.1 반응 속도식

시간에 따라 변하는 양  $N = N(t)$ 의 반응에 대한 일반적인 1차(1<sup>st</sup> order) 반응 속도식은 생성(production)과 소멸(destruction) 항  $p(N)$ 과  $d(N)$ 을 사용하여 기술할 수 있다.

$$\frac{dN}{dt} = p(N) - d(N) \quad (1)$$

$p(N)$ 과  $d(N)$ 항들은 적용 분야에 따라 고유한 의미가 부여된다.

### 2.2 문턱전압 이동에 대한 반응 속도식

Jackson에 의하면 SE 함수로 모델링 되는 현상은 불규칙하게 분포된 매질 내에서 입자가 확산할 때 나타나며, 비정질 실리콘에서 수소의 확산으로 인해 결합이 발생하는 상황에 적용할 수 있다고 했다[2, 5]. 이 경우 반응 속도식은 다음과 Smoluchowski 형태의 reaction-diffusion이다[6].

$$\frac{dN}{dt} = D\nabla^2 N - kN \quad (2)$$

여기서  $k$ 는 반응 비율이고  $D$ 는 수소의 확산 계수이다 [7]. 유전체를 비롯한 많은 물질 내에서 입자의 확산은 트랩 등으로 인해 브라운 운동으로 표현되는 변위(displacement)보다 느리며, 시간에 대해 sub-linear power-law의 형태를 보인다. 만약 시변 확산의 영향( $D\nabla^2 N$ )을 무시할 수 있고 결합 발생 위치로 확산하여 도착하는 수소의 유입을 반응 비율에 포함할 수 있으면, 위 반응 속도식은 분산형 수송 형태로 표현될 수 있다.

$$\frac{dN}{dt} = -D(vt)^{\beta-1}N \quad (3)$$

식 (3)의 해를 구하면 SE 함수를 구할 수 있다.

$$\Delta N = N_{\infty} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\beta} \right] \right\} \quad (4)$$

여기서  $N_{\infty} = N(\infty)$  이다. SE 함수는 Kohlrausch-Williams-Watts (KWW) 함수로도 불린다[8]. SE 함수가 유도되는 조건은 반응의 에너지 장벽이 지수적으로 분포되어야 하며, 이 분포는 변수  $\beta$ 에 포함된다[2, 9].

TFT에서 SE 형태의 문턱전압 이동 모델에 부합하지 않는 사례들이 관측되었으며, 이들은 확산보다는 채널 안의 band tail 전하  $N_{BT}$ 에 영향을 받는 것으로 수식화 되었다[6, 10].

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{dN_{BT}}{dt} = k(N_{BT})^{\alpha} \frac{t^{\beta-1}}{\tau^{\beta}} \quad (5)$$

여기서  $\alpha$ 는 경험에 의해 추가된 변수이며, 수식적으로  $1 < \alpha < 2$ 이지만 a-Si:H TFT에서  $1.5 < \alpha < 1.9$ 의 값을 가지는 것으로 보고되었다[6]. 반응 속도식 (5)의 해는 Stretched-Hyperbola(SH) 함수이다.

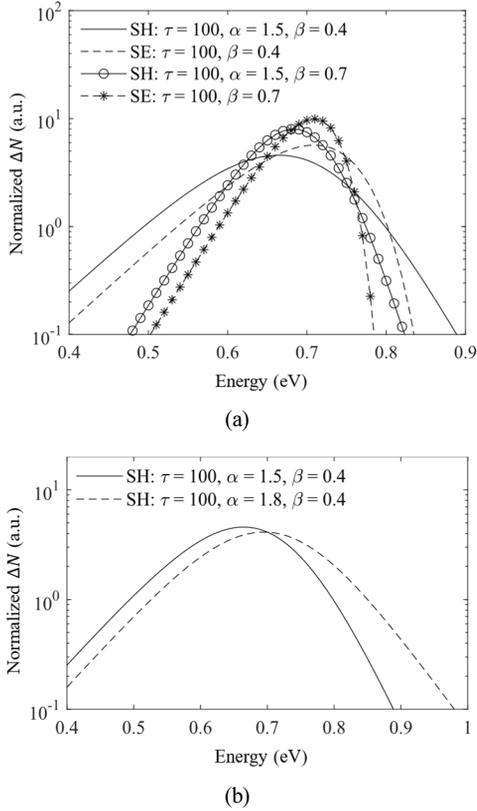
$$\Delta N = N_0 \left\{ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^{\beta} \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}} \right\} \quad (6)$$

Fig 1에 SE와 SH 모델의 열화 에너지 대비 모델의 변화량을 표시하였다. 이 방식은 각 에너지 장벽 또는 그룹들의 반응 특성을 보여준다[3, 11]. SH 함수는 2개의 변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 가지고 있어서 SE 모델보다 일반적인 형태로 볼 수 있다. SE 모델에 부합하지 않는 소자들이 관측되는 이유는 Smoluchowski 형태의 reaction-diffusion 공식은 이미 발생한 정적인 트랩들의 반응에 국한되며, 실제 문턱전압 이동은 확산되어 온 수소가 결합을 새롭게 발생하기 때문이다. 이에 따라 확산 계수는  $N_{BT}$ 를 포함하도록 수정되었다[2, 6].

$$D = D_0(N_{BT})^{\alpha} \quad (7)$$

SH 모델에서도  $\beta$ 는 반응 장벽의 지수적 분포를 표시하는 것으로 유지되지만,  $\alpha$ 에 대한 명확한 해석은 충분하지 않다.  $N_{BT}$ 의 효과를 반응 속도식 (2)에 포함한 결과와 SH 모델을 비교한 경우에  $\alpha$ 는 순방향 반응이 용이해지고 역방향 반응이 어려워지는 현상과 연관된다고 해석하고

있다[6]. 또한  $\alpha$ 는 점에서 기억 효과가 작용한다고 볼 수 있고, 반응의 기억 효과는 분수계 수학을 적용한 유전체 완화의 반응 속도식에 연결된다고 볼 수 있다. 추가적으로 반응 또는 열화 에너지 관점에서 SE와 SH 모델을 비교한 경우  $\alpha$ 는 역반응을 포함하고  $\beta$ 와 약하게 연결된 증명이 있다[3].



**Fig. 1.** (a) Comparisons of SE and SH models with different  $\beta$ . (b) Comparisons of SH models with different  $\alpha$ .

### 2.3 유전체 완화에 대한 분수계 반응 속도식

분수계 반응 속도식은 유전체의 완화와 점도성 물질의 완화 분야의 연구에 사용되고 있으며, 유전체의 완화와 결합의 확산에 의해 발생한다[4]는 관점에서 문턱전압 이동 현상과 연결점이 존재한다. 확산과 완화에 대한 연구는 선형 고체에서 미소 공백과 같은 결원이나 결정의 불규칙한 방향성이 확산하여 여기된 상태를 만나면 여기된 상태가 완화되는 것으로 시작되었다. 이에 변칙적 통계(anomalous statistics)를 기반으로 분수계 미적분을 사용한 분수계 완화 과정(fractional relaxation process)이 유도되었다[4]. 따라서 TFT에서 수소의 확산으로 문턱전압이 이동되는

현상이 발생하는 것과 같이 유전체의 완화현상도 확산에 의해 발생하기 때문에 두 현상은 동일한 원인과 이에 따른 동일한 반응 속도식에서 출발한다고 볼 수 있다.

완화 반응의 기본이 되는 반응 속도식은 식 (2)에서 출발하여 식 (3)처럼 간략화 과정을 거쳐 분수계 반응 속도식으로 표현된다[12].

$$N - N_0 = -c_0 D_t^{-\nu} N \quad (8)$$

여기서  ${}_0D_t^{-\nu}$ 는 리만-리우빌(Riemann-Liouville) 적분 연산자이다.

$${}_aD_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t f(t')(t-t')^{\nu-1} dt' \quad (9)$$

여기서  $\Gamma(x)$ 는 감마 함수이다. 식 (8)에 라플라스 변환을 적용하여 해를 구하면 다음과 같다[13].

$$N = N_0 E_{\beta}(-ct^{\beta}) = N_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ct^{\beta})^k}{\Gamma(\beta k + 1)} \quad (10)$$

여기서  $E_{\beta}$ 는 1변수 Mittag-Leffler (ML) 함수이다. ML 함수는 초기에 반응이 매우 빠르고, 후반부에는 매우 느리게 감소하는 과정을 모델링해 줄 수 있다. 식 (10)은 유전체 완화 분야에서 제안된 Cole-Cole (CC) 모델이다[14, 15]. CC 모델은 경험에 의해 유도되었지만, 후에 분수계 수학을 사용하여 다양한 의미가 부여되었다[14]. CC 모델은 반응의 초반부는 SE의 특성을 가지고, 후반부는 역 멱급수의 특성을 가진다[4] 따라서 SE모델처럼 CC 모델도 반응의 초반부는 지수 함수보다 빠른 변화를 나타내어 소자에 따라 실측치와 부합하지 않을 수 있는 점에 주의해야 한다.

Havriliak-Negami (HN) 모델은 주파수 대역에서 만들어진 CC 모델에 변수 1개를 추가한 일반적인 형태이며, 시간 영역에서 HN 모델도 ML 함수로 표시된다.

$$N = 1 - \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha\beta} E_{\beta, \alpha\beta+1}^{\alpha} \left[ -\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\beta} \right] \quad (11)$$

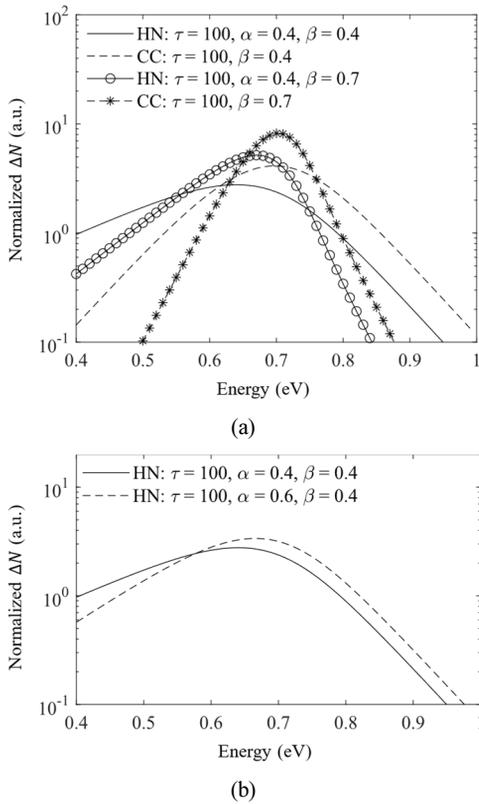
여기서  $E_{\alpha, \beta}^{\gamma}$ 는 3변수 ML 함수이다.

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) = N_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k) z^k}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha k + \beta) k!} \quad (12)$$

유전체 완화 분야에서 에너지 장벽 또는 결합의 분포는  $\beta$ 에 포함이 되지만, 본 연구에서는 문턱전압 이동 모

델의 변수와 비교를 위하여  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 교환하였다. HN 모델은 다양한 물질에 적용이 되고 있지만[16], 주파수 영역에서 기술한 모델에 경험적 변수를 추가한 것이기에 시간 영역에서의 반응 속도식은 복잡한 형태이다[17].

Fig 2에 CC와 HN 모델들을 비교하였다. SH의 두 변수의 관계[3]처럼 HN 모델에서도  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 서로 연결되어 있다[18].

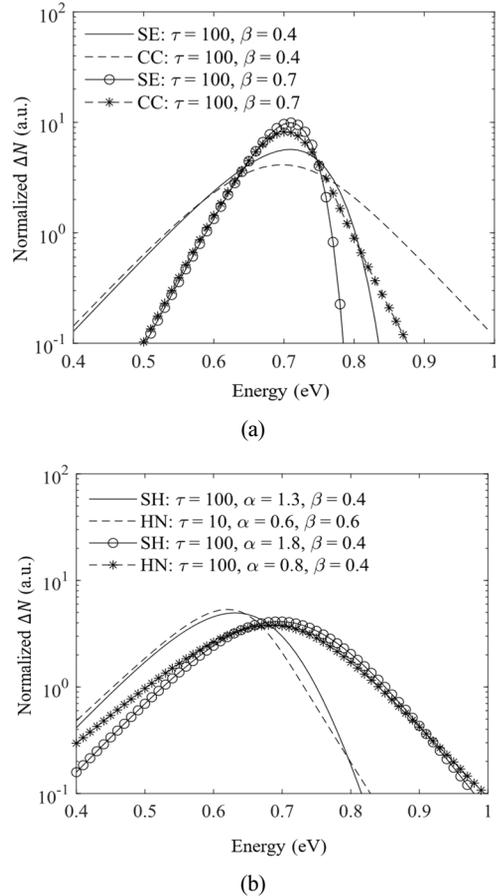


**Fig. 2.** (a) Comparisons of CC and HN models with different  $\beta$ . (b) Comparisons of HN models with different  $\alpha$ .

### 3. 비교 및 분석

본 연구에서 분석한 모델들의 열화 에너지 대비 변화 양을 Fig 3에 표시하였다. Fig 3(a)에는 1변수 모델들인 SE와 CC 모델들을 비교하고, Fig 3(b)에는 2변수 모델들인 SH와 HN 모델들을 비교하였다. CC와 HN 모델의 분석에도 문턱전압 이동 모델의 분석에 사용된 열화 에너지를 적용하였다. 유전체 완화의 프랙탈 기반 해석에서 다수의 양상불이 완화할 때 하위 시스템 또는 클러스터가 완화된 후에 상위 시스템이 완화되는 순서로 진행된다고 생

각한다[19]. 본 연구에서는 이 개념은 시정수의 크기로 나열할 수 있는 에너지 장벽의 순서대로 반응이 발생하는 점에서 열화 에너지의 개념과 동일한 것으로 본다. 모든 모델에서 반응의 초반부는 에너지 장벽의 분포 또는 반응들의 집합[8, 19]과 관계가 있고,  $\beta$ 에 비례하는 것을 확인하였다.



**Fig. 3.** Simulated transient waveforms of the OLED current of the pixel circuit[3]. OLED is on for 200  $\mu$ sec with the extensive  $V_{th}$  shift to visualize the change in the current when the shift is enabled.

유전체 완화 모델링은 문턱전압 이동과 동일한 반응 속도식에서 출발하였지만, 이력 효과를 사용한 분수계 수학을 적용하여 다른 형태의 모델을 유도하여 두가지 다른 점이 존재한다. 첫째는 반응의 꼭짓점에서 변화 속도가 다르다. 일반적인 모델링에서 두 영역이 전환되는 부근은 무릎(knee) 변수를 사용하여 전환 속도를 조절하며, 두 분야의 모델들이 다른 속도를 보여준다. 따라서 재로

에 따라 모델 선택의 폭이 넓어지게 된다. 둘째는 SH와 HN 모델에서 2번째 변수의 역할이다. SH의  $\alpha$ 는 역반응에 대한 의미를 포함하고 있으나[6], HN 모델에서는  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 모두 고려해야 하는 차이가 있다. 여기서 HN 모델에 추가된 변수  $\alpha$ 도 역반응에 관련된 것으로 추측할 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 TFT의 문턱전압 이동 현상과 유전체 완화 현상의 모델링에 사용된 반응 속도식의 기원과 특징을 비교하여 공통점과 차이점을 분석하였다. 동일한 반응 속도식에서 출발하여 문턱전압 이동 현상에서는 SE와 SH 모델을 유도하고, 유전체 완화 현상에서는 CC와 HN 모델을 유도함을 보였다. 따라서 기존의 SE와 SH 모델 외에 CC와 HN 모델을 사용할 수 있는 가능성을 탐색하였다. CC와 HN 모델의 적용 분야의 특성상 경험적 변수들의 의미를 찾게 될 가능성이 크며, 문턱전압 이동 현상을 이해하는 데 도움을 줄 것으로 기대된다.

#### 참고문헌

1. A. J. Snell, K. D. Mackenzie, W. E. Spear, P. G. LeComber and A. J. Hughes, "Application of amorphous silicon field effect transistors in addressable liquid crystal display panels," *Appl. Phys. A*, Vol. 24, pp. 357-362, 1981.
2. W. B. Jackson, "Role of band-tail carriers in metastable defect formation and annealing in hydrogenated amorphous silicon," *Phys. Rev. B*, Vol. 41, pp. 1059-1075, 1990.
3. T. Jung, "Modeling of stretched-exponential and stretched-hyperbola time dependence of threshold voltage shift in thin-film transistors," *J. Appl. Phys.*, Vol. 117, pp. 144501, 2015.
4. R. Metzler and J. Klafter, "From stretched exponential to inverse power-law: fractional dynamics, Cole-Cole relaxation processes, and beyond," *J. Non-Cryst. Solids*, Vol. 305, pp. 81-87, 2002.
5. W. Jackson, C. C. Tsai and R. Thompson, "Estimates of the diffusion rate of the dominant paramagnetic defect in hydrogenated amorphous silicon," *J. Non-Cryst. Solids*, Vol. 114, pp. 396-398, 1989.
6. R. B. Wehrspohn, M. J. Powell and S. C. Deane, "Kinetics of defect creation in amorphous silicon thin film transistors," *J. Appl. Phys.*, Vol. 93, pp. 5780-5788, 2003.
7. J. Kakalios, R. A. Street and W. B. Jackson, "Stretched-exponential relaxation arising from dispersive diffusion of hydrogen in amorphous silicon," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 59, pp. 1037-1040, 1987.
8. M. N. Berberan-Santos, E. N. Bodunov and B. Valeur, "Mathematical functions for the analysis of luminescence decays with underlying distributions 1. Kohlrausch decay function (stretched exponential)," *Chem. Phys.*, Vol. 315, pp. 171-182, 2005.
9. Y. F. Chen and S. F. Huang, "Connection between the Meyer-Neldel rule and stretched-exponential relaxation," *Phys. Rev. B, Cond. Matt.*, Vol. 44, pp. 13775-13778, 1991.
10. H. L. Gomes, P. Stallinga, F. Dinelli, M. Murgia, F. Biscarini, D. M. de Leeuw, T. Muck, J. Geurts, L. W. Molenkamp and V. Wagner, "Bias-induced threshold voltages shifts in thin-film organic transistors," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 84, pp. 3184-3186, 2004.
11. S. C. Deane, R. B. Wehrspohn and M. J. Powell, "Unification of the time and temperature dependence of dangling-bond-defect creation and removal in amorphous-silicon thin-film transistors," *Phys. Rev. B*, Vol. 58, pp. 12625-12628, 1998.
12. H. J. Haubold and A. M. Mathai, "The Fractional Kinetic Equation and Thermonuclear Functions," *Astrophys. Space Sci.*, Vol. 273, pp. 53-63, 2000.
13. T. R. Prabhakar, "A Singular Integral Equation with A Generalized Mittag Leffler Function in The Kernel," *Yokohama Math. J.*, Vol. 19, pp. 7-15, 1971.
14. R. Garrappa, F. Mainardi and G. Maione, "Models of Dielectric Relaxation Based on Completely Monotone Functions," *Fcaa*, Vol. 19, pp. 1105-1160, 2016.
15. K. S. Cole and R. H. Cole, "Dispersion and Absorption in Dielectrics II. Direct Current Characteristics," *J. Chem. Phys.*, Vol. 10, pp. 98-105, 1942.
16. U. Saglam and D. Deger, "A Phenomenological Approach to Anomalous Transport in Complex or Disordered Media," *Can. J. Phys.*, Vol. 100, pp. 180-184, 2022.
17. A. Allagui, H. Benaoum, A. S. Elwakil and M. Alshabi, "Extended RC Impedance and Relaxation Models for Dissipative Electrochemical Capacitors," *Ted*, Vol. 69, pp. 5792-5799, 2022.
18. A. A. Khamzin, R. R. Nigmatullin and I. I. Popov, "Justification of the empirical laws of the anomalous dielectric relaxation in the framework of the memory function formalism," *Fcaa*, Vol. 17, pp. 247-258, 2014.
19. V. V. Novikov and V. P. Privalko, "Temporal fractal model for the anomalous dielectric relaxation of inhomogeneous media with chaotic structure," *Phys. Rev. E*, Vol. 64, 2001.

접수일: 2024년 5월 28일, 심사일: 2024년 6월 21일,  
 게재확정일: 2024년 6월 21일