

# 타원판에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식

임형래<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>부산대학교 지구과학교육과

<sup>2</sup>부산대학교 미래지구환경연구소

## Expressions of Magnetic Field and Magnetic Gradient Tensor due to an Elliptical Disk

Hyoungrea Rim<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Earth Science Education, Pusan National University

<sup>2</sup>Institute for Future Earth, Pusan National University

### 요약

이 논문에서는 타원판의 자력과 자력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 화성암 관입이나 킴벌라이트 구조 등은 축 대칭성을 가지면서 단면이 타원인 경우가 많다. 타원 단면의 넓이가 변하는 타원 기둥은 타원판의 조합으로 모사할 수 있다. 타원판의 자력 반응은 이전 논문(Rim, 2024)에서 유도한 중력 변화율 텐서에 자화 방향에 대한 정보를 포함시킨 포아송 관계식을 이용하여 유도하였다. 타원판의 자력 변화율 텐서는 벡터 자력을 미분하여 유도하는데 타원판의 인력 퍼텐셜을 각 축방향으로 3회 미분한 총 10개의 삼중 미분 함수를 구하는 것과 동일하다. 미분의 순서는 바꾸는 것이 가능하므로 결과적으로 자력 변화율 텐서는 타원판의 인력 퍼텐셜을 3회 미분한 후, 복소 평면에서 타원판의 경계를 폐곡선으로 하는 경로를 따라 선적분으로 변환하여 유도된다. 이 논문에서 복소 평면에서 선적분으로 유도한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식은 립슈츠-한켈 적분으로 유도한 원판의 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식과 완벽하게 일치함을 보였다.

**주요어:** 자력, 자력 변화율 텐서, 타원판 이상체, 포아송 관계식

### ABSTRACT

In this study, expressions for the magnetic field and magnetic gradient tensor due to an elliptical disk were derived. Igneous intrusions and kimberlite structures often have elliptical cylinders with axial symmetry and elliptical cross sections. An elliptical cylinder with varying cross-sectional areas was approximated using stacks of elliptical disks. The magnetic fields of elliptical disks were derived using the Poisson relation, which includes the direction of magnetization in the gravity gradient tensor, as described in a previous study (Rim, 2024). The magnetic gradient tensor due to an elliptical disk is derived by differentiating the magnetic fields, which is equivalent to obtaining ten triple-derivative functions acquired by differentiating the gravitational potential of the elliptical disk three times in each axis direction. Because it is possible to exchange the order of differentiation, the magnetic gradient tensor is derived by differentiating the gravitational potential of the elliptical disk three times, which is then converted into a complex line integral along the closed boundary curve of the elliptical disk in the complex plane. The expressions for the magnetic field and magnetic gradient tensor derived from a complex line integral in complex plane are perfectly consistent with those of the circular disk derived from the Lipschitz-Hankel integral.

**KEYWORDS:** magnetic, magnetic gradient tensor, elliptic disk, complex variable

### 서론

최근 벡터 자력 및 자력 변화율 텐서 탐사 자료를 이용하여 지하구조를 해석하려는 시도가 널리 적용되고 있다(Saribudak, 2023; Beiki *et al.*, 2012; Heath *et al.*, 2005). 자력 이상으로 확연히 구분되는 화성암 관입이나 독립된 자력 이상 반응을 보이는 킴벌라이트 구조 등에 특히 자력 및 자력 변화율 탐사 방법들이 활용되고 있다(Matende and Mickus, 2021; Menezes and Garcia, 2007; Kamm *et al.*, 2015). 자연적으로 형성되는 화성암의 관입이나 킴벌라이트 구조 등은 지하의 비균질성으로 인해 한쪽 방향이 다른 방향에 비해 길게 연장되어서 단

#### \*Corresponding author

E-mail: [brim2017@pusan.ac.kr](mailto:brim2017@pusan.ac.kr)

Address: Department of Earth Science Education, Pusan National University, 2 Busandaehak-ro, 63 beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 46241, Republic of Korea

Received: 29 April 2024; Revised: 12 May 2024; Accepted: 27 May 2024

©2024, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

면이 타원 형태를 가지는 경우가 많고(Vasanthi and Mallick, 2005) 그 타원 단면은 넓이가 일정하지 않고 깊이에 따라 변하는 경우가 일반적이다. 이런 이상체의 경우 깊이 방향으로 타원판을 쌓는 형태로 이상체를 모사하는 것이 정밀한 지구물리 반응을 계산하는데 유리하다. 지금까지는 원판에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식만이 알려져 있어서(Rim, 2022) 타원판의 조합으로 지하구조를 모사하는데 어려움이 있었다. 따라서 이 연구에서는 단면의 넓이가 변하는 타원 기둥을 타원판으로 조합으로 해석하기 위하여 타원판에 의한 벡터 자력 및 자력 변화율 텐서의 해석해를 유도하고자 한다. 타원판에 의한 벡터 자력은 포아송 관계식을 이용하여 이전 연구(Rim, 2024)에서 이미 유도한 타원판의 중력 변화율 텐서로부터 유도하였고, 자력 변화율 텐서는 벡터 자력을 각 축으로 미분하여 유도하였다.

### 타원판에 의한 자력

측정점  $(x, y, z)$ 에서 면밀도  $\rho$ , 단면  $S$ 가 두 반지름  $a$ 와  $b$ 를 갖는 타원판에 의한 인력 퍼텐셜은 식 (1)과 같이 측정점과 타원판 내의 미소 적분소까지의 거리 역수를 이중 적분하는 식으로 표현된다(Lowrie and Fichtner, 2020; Blakely, 1996). 식 (1)에서  $\gamma$ 는 만유인력 상수이고,  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta_0 - z)^2}$ 은 측정점과 타원판을 구성하는 임의의 미소 적분소까지의 거리이다. 측정점에 해당하는 좌표계  $(x, y, z)$ 는 북쪽을  $x$ 축, 동쪽을  $y$ 축, 깊이 방향을  $z$ 축으로 설정한 오른손 직교 좌표계를 이용한다. 타원판을 표현하는 직교 좌표계  $(\xi, \eta, \zeta)$ 도 동일한 좌표계를 적용한다. Fig. 1은 타원판의 모식도와 여기에 적용된 좌표계를 보여준다. 타원판은 수평면과 평행하고, 두 반지름을 기준 좌표축으로 2차원 평면 좌표계  $(\xi', \eta')$ 로 정의할 수 있다. 타원판의 한 축이 북쪽과 이루는 방위각은  $\alpha$ 이고 타원판 중심의 좌표는  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ 이다.

$$U(x, y, z) = \gamma \rho \iint_S \frac{1}{r} d\xi d\eta \tag{1}$$

식 (1)의 이중 적분은 타원판의 경계면인 폐곡선을 따라 복소 평면에서 선적분한다. 복소 평면에서 선적분하기 위하여 타원판 경계를 폐곡선으로 표현하는 복소 변수  $w$ 를 식 (2~4)와 같이 도입한다.

$$w = u(t) + iv(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \tag{2}$$

$$u(t) = a \cos t \cos \alpha - b \sin t \sin \alpha + \xi_0 - x \tag{3}$$

$$v(t) = a \cos t \sin \alpha + b \sin t \cos \alpha + \eta_0 - y \tag{4}$$

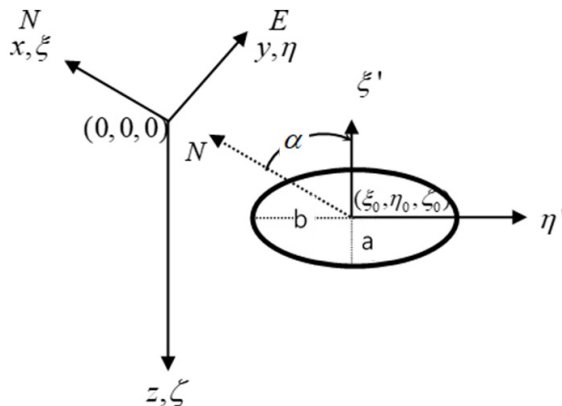


Fig. 1. The schematic geometry of an elliptical disk. The center of the elliptical disk is located at  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ .  $a$  and  $b$  are the two radii of the elliptical disk respectively. The heading  $\alpha$  is the angle between the north and one axis of the elliptical disk. Identical Cartesian coordinates are used for both observations and the elliptical disk.

복소 변수  $w$ 의 미분은 식 (5-6)과 같이 주어진다.

$$u'(t) = -a \sin t \cos \alpha - b \cos t \sin \alpha \tag{5}$$

$$v'(t) = -a \sin t \sin \alpha + b \cos t \cos \alpha \tag{6}$$

결과적으로 모든 적분을 수행하고 나면 타원판과 관측점 사이의 거리인  $r$ 만 남게 된다.

타원판에 의한 자력 벡터 반응식은 이전 연구(Rim, 2024)에서 이미 유도한 타원판에 의한 중력 변화율 텐서에 포아송 관계식(식 7-9)을 적용하여 유도한다. 포아송 관계식은 일정한 밀도와 일정한 방향의 자화를 갖는 임의의 이상체에 대한 중력 퍼텐셜과 자력 퍼텐셜이 식 (1)과 같은 동일한 적분식을 포함하고 있는 특성을 이용한 관계식이다(Ren *et al.*, 2017; Ren *et al.*, 2019).

$$b_x = \frac{1}{\gamma\rho} (g_{xx}m_x + g_{xy}m_y + g_{xz}m_z) \tag{7}$$

$$b_y = \frac{1}{\gamma\rho} (g_{yx}m_x + g_{yy}m_y + g_{yz}m_z) \tag{8}$$

$$b_z = \frac{1}{\gamma\rho} (g_{zx}m_x + g_{zy}m_y + g_{zz}m_z) \tag{9}$$

여기서 타원판이 일정한 방향으로 자화되었다고 가정하고, 자기 모멘트 벡터는 식 (10)과 같이 복각( $I$ ), 편각( $D$ ) 및 자화강도( $\kappa$ )로 표현한다.

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} \cos I \cos D \\ \cos I \sin D \\ \sin I \end{pmatrix} \tag{10}$$

따라서 타원판에 의한 중력 변화율 텐서를 포아송 관계식으로 변환하여 유도한 타원판의 벡터 자력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{m_x}{4} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^3} \theta_0(t) + \left[ -\frac{2}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_1(t) + \left[ 3r + \frac{6(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^3} \right] \theta_{x3}(t) dt \\ &+ \frac{m_y}{2} \int_0^{2\pi} \left[ 3r + \frac{6(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^3} \right] \theta_{y3}(t) dt \\ &+ \frac{m_z}{2} (\zeta_0 - z) \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^3} v'(t) + \left[ -\frac{3}{r} + \frac{(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_{x2}(t) dt \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} b_y &= \frac{m_x}{2} \int_0^{2\pi} \left[ 3r + \frac{6(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^3} \right] \theta_{y3}(t) dt \\ &+ \frac{m_y}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \theta_0(t) + \left[ -\frac{2}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_1(t) - \left[ 3r + \frac{6(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^3} \right] \theta_{x3}(t) dt \\ &+ \frac{m_z}{2} (\zeta_0 - z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} u'(t) + \left[ -\frac{3}{r} + \frac{(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_{y2}(t) dt \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 b_z &= \frac{m_x}{2} (\zeta_0 - z) \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r^3} v'(t) - \left[ -\frac{3}{r} + \frac{(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_{x2}(t) dt \\
 &+ \frac{m_y}{2} (\zeta_0 - z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} u'(t) + \left[ -\frac{3}{r} + \frac{(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_{y2}(t) dt \\
 &+ m_z \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{(\zeta_0 - z)^2}{r^3} \right] \theta_1(t) dt
 \end{aligned} \tag{13}$$

자력 벡터(식 11~13)에서 수평 좌표와 수직 좌표를 분리하여 수평 좌표만을 포함한 함수  $\theta_0(t)$ ,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_{x2}(t)$ ,  $\theta_{y2}(t)$ ,  $\theta_{x3}(t)$  및  $\theta_{y3}(t)$ 는 식 (31~40)과 같이 주어진다.

## 타원판에 의한 자력 변화율 텐서

타원판에 의한 자력 변화율 텐서는 식 (14~19)과 같이 벡터 자력을 각 축 방향으로 미분하여 정의된다.

$$b_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} b_x = J_{xx} m_x + J_{xy} m_y + J_{xz} m_z \tag{14}$$

$$b_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} b_y = J_{yy} m_x + J_{yy} m_y + J_{yz} m_z \tag{15}$$

$$b_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} b_z = J_{zz} m_x + J_{yz} m_y + J_{zz} m_z \tag{16}$$

$$b_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} b_y = J_{xy} m_x + J_{xy} m_y + J_{yz} m_z \tag{17}$$

$$b_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} b_z = J_{yz} m_x + J_{yz} m_y + J_{yz} m_z \tag{18}$$

$$b_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} b_z = J_{xz} m_x + J_{yz} m_y + J_{xz} m_z \tag{19}$$

여기서 삼중 미분 함수  $J_{pqt}$ 와 중력 변화율 텐서  $g_{pq}$ 은 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$J_{pqt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} g_{pq} \quad p, q, t = x, y, z \tag{20}$$

삼중 미분 함수(식 20)는 미분 순서는 바꿀 수 있으므로 총 10 종류의 삼중 미분 함수가 필요하다. 삼중 미분 함수 중 식 (21~26)과 같이  $z$  방향 미분이 적어도 1회 이상 포함된 경우는 중심 축 방향의 미분이 타원 단면의 폐곡선을 경로를 따르는 선적분과는 무관하므로 적절한 중력 변화율 텐서 성분을  $z$ 로 미분하여 바로 구할 수 있다. 예를 들어 삼중 미분 함수  $J_{zzz}$ 는 중력 변화율 텐서의  $g_{zz}$  성분을  $z$ 로 미분하여 유도할 수 있다. 중심 축 방향의 미분이 전혀 포함되지 않은 삼중 미분 함수(식 27~30)은 먼저 중력 퍼텐셜을 3회 미분한 후 이중 적분을 복소 평면에서 타원판 경계의 폐곡선을 따라 선적분으로 변형시켜서 유도한다. 이에 대한 자세한 유도 과정은 부록에 정리하였다.

$$J_{zzz} = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3(\zeta_0 - z)}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^3}{r^5} \right] \theta_1(t) dt \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xxz} &= -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r^5} \theta_0(t) dt \\
 &\quad + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{(\zeta_0 - z)}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^3}{r^5} \right] \theta_1(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{15(\zeta_0 - z)}{r} + \frac{10(\zeta_0 - z)^3}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^5}{r^5} \right] \theta_{x3}(t) dt
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yyz} &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(\zeta_0 - z)}{r^5} \theta_0(t) dt \\
 &\quad + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{(\zeta_0 - z)}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^3}{r^5} \right] \theta_1(t) dt \\
 &\quad - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{15(\zeta_0 - z)}{r} + \frac{10(\zeta_0 - z)^3}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^5}{r^5} \right] \theta_{x3}(t) dt
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xzz} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] v'(t) dt \\
 &\quad + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{x2}(t) dt
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yzz} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] u'(t) dt \\
 &\quad + \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{y2}(t) dt
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$J_{xyz} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{15(\zeta_0 - z)}{r} + \frac{10(\zeta_0 - z)^3}{r^3} - \frac{3(\zeta_0 - z)^5}{r^5} \right] \theta_{y3}(t) dt \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xxx} &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] v'(t) dt \\
 &\quad - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^5} \theta_{x0}(t) dt \\
 &\quad + \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{x2}(t) dt \\
 &\quad + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 5r + \frac{15(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{5(\zeta_0 - z)^4}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^6}{r^5} \right] \theta_{x4}(t) dt
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 J_{yyy} &= -\frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] u'(t) dt \\
 &\quad - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^5} \theta_{y0}(t) dt \\
 &\quad + \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{y2}(t) dt \\
 &\quad - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 5r + \frac{15(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{5(\zeta_0 - z)^4}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^6}{r^5} \right] \theta_{y4}(t) dt
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xyy} = & -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] u'(t) dt \\
 & + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^5} \theta_{y_0}(t) dt \\
 & + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{y_2}(t) dt \\
 & + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 5r + \frac{15(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{5(\zeta_0 - z)^4}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^6}{r^5} \right] \theta_{y_4}(t) dt
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xyx} = & \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta_0 - z)^2}{r^5} \right] v'(t) dt \\
 & + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^5} \theta_{x_0}(t) dt \\
 & + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2(\zeta_0 - z)^2}{r^3} - \frac{(\zeta_0 - z)^4}{r^5} \right] \theta_{x_2}(t) dt \\
 & - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 5r + \frac{15(\zeta_0 - z)^2}{r} - \frac{5(\zeta_0 - z)^4}{r^3} + \frac{(\zeta_0 - z)^6}{r^5} \right] \theta_{x_4}(t) dt
 \end{aligned} \tag{30}$$

여기서 타원판 경계로 정의되는  $u(t)$ 와  $v(t)$  및 이들의 미분이 포함된  $\theta(t)$  함수는 다음과 같이 주어진다.  $\theta(t)$  함수의 특징은 수평 방향인 변수인  $(x, y)$ 만 가지고 있고 수직 변수  $z$ 가 전혀 포함되지 않은 점이다.

$$\theta_0(t) = u(t)v'(t) + v(t)u'(t) \tag{31}$$

$$\theta_{x_0} = (u^2(t) - v^2(t))v'(t) + 2u(t)v(t)u'(t) \tag{32}$$

$$\theta_{y_0} = (u^2(t) - v^2(t))u'(t) + 2u(t)v(t)v'(t) \tag{33}$$

$$\theta_1(t) = \frac{u(t)v'(t) - v(t)u'(t)}{u^2(t) + v^2(t)} \tag{34}$$

$$\theta_{x_2}(t) = \frac{(u^2(t) - v^2(t))v'(t) - 2u(t)v(t)u'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^2} \tag{35}$$

$$\theta_{y_2}(t) = \frac{(u^2(t) - v^2(t))u'(t) + 2u(t)v(t)v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^2} \tag{36}$$

$$\theta_{x_3}(t) = \frac{(u^3(t) - 3u(t)v^2(t))v'(t) - (3u^2(t)v(t) - v^3(t))u'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \tag{37}$$

$$\theta_{y_3}(t) = \frac{(u^3(t) - 3u(t)v^2(t))u'(t) + (3u^2(t)v(t) - v^3(t))v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \tag{38}$$

$$\theta_{x_4}(t) = \frac{(u^4(t) - 6u^2(t)v^2(t) + v^4(t))v'(t) - (4u^3(t)v(t) - 4u(t)v^3(t))u'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^4} \tag{39}$$

$$\theta_{y^4}(t) = \frac{(u^4(t) - 6u^2(t)v^2(t) + v^4(t))u'(t) + (4u^3(t)v(t) - 4u(t)v^3(t))v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^4} \quad (40)$$

퍼텐셜 이론에 따르면(Blakely, 1996; Lowrie and Fichtner, 2020) 자력 변화율 텐서의 대각 성분의 합( $b_{xx} + b_{yy} + b_{zz} = 0$ )은 0이고 비대각 성분은 대칭성을 가지고 있는 특징이 타원판에 의한 자력 변화율 텐서 반응식에서도 확인된다. 또한 중력 변화율 텐서의 대각 성분 합을 한 방향으로 미분한 것과 동일한 결과인 3개의 삼중 미분 함수의 합( $J_{xxx} + J_{yyy} + J_{zzz} = 0, J_{xxy} + J_{yyx} + J_{zzz} = 0, J_{xxz} + J_{yyz} + J_{zzz} = 0$ )도 모두 '0'임을 확인할 수 있다.

### 자력 및 자력 변화율 텐서 모델링

Fig. 2는 타원판의 중심이 (0, 0, -500 m), 단반경 400 m, 장반경 800 m, 타원 단면의 장축의 방위각 N60W, 자화 방향은 국내 편북각과 비슷한 북각 52°, 편각 -8°로 가정하였고 자화 강도는 단순 비교를 위하여 1 A/m로 설정하고 타원판에 대한 자력 벡터를 계산하였다. 타원 기둥에 의한 자력 벡터(Rim and Eom, 2023)와 비슷한 패턴을 보이고 타원판의 주향 방향으로 연장된 자력 이상 반응을 보여준다. 장반경과 단반경을 같게 설정하면 원판과 같으므로 원판에 의한 자력 벡터와 비교하면 Fig. 3과 같이 완벽하게 일치한다. 원판에 의한 자력 벡터는 Rim (2022)의 반응식으로 계산하였는데, 원형의 방사상 대칭성을 고려한 리쉬츠-한켈 적분(Eason *et al.*, 1955)을 이용하여 유도한 식으로서 이 연구에서 적용한 복소 적분을 이용한 방식과 전혀 다른 방식으로 유도하였지만 두 벡터 자력 반응식의 결과는  $10^{-7}$  nT 이하의 오차로 완벽하게 일치함을 알 수 있다.

같은 타원판에 대한 자력 변화율 텐서 반응(Fig. 4)은 전형적인 타원 기둥의 자력 변화율 텐서(Rim and Eom, 2023)과 비슷한 양상이다 자력 벡터에서 원판 반응과 비교한 것과 동일한 방식으로 원판의 자력 변화율 텐서(Rim, 2022)와 비교한 경우 비교하면 Fig. 5와 같이 완벽한 일치를 보여준다.

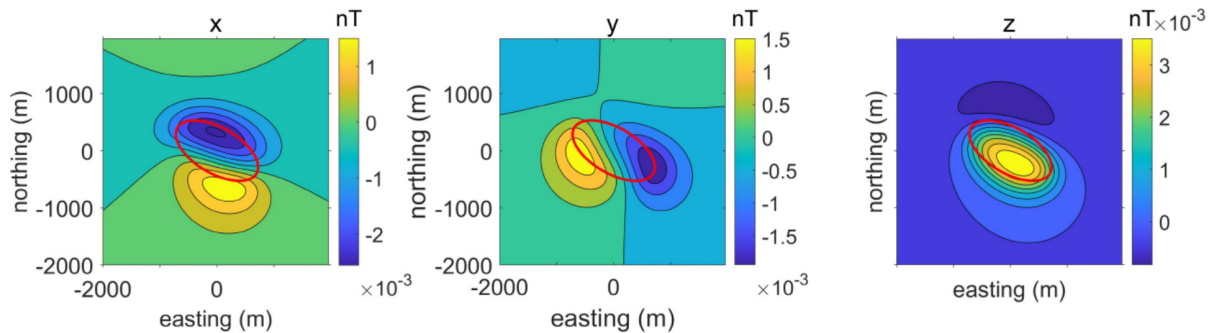


Fig. 2. Magnetic fields due to an elliptic disk. The origin of the elliptic disk is located at (0, 0, -500 m). The short and long radii are 400 m and 800 m, respectively. The magnetization vector has 52° inclination, -8° declination, and 1 A/m the magnitude of magnetization. The observation points located at the sea level. The red line represents the elliptical disk.

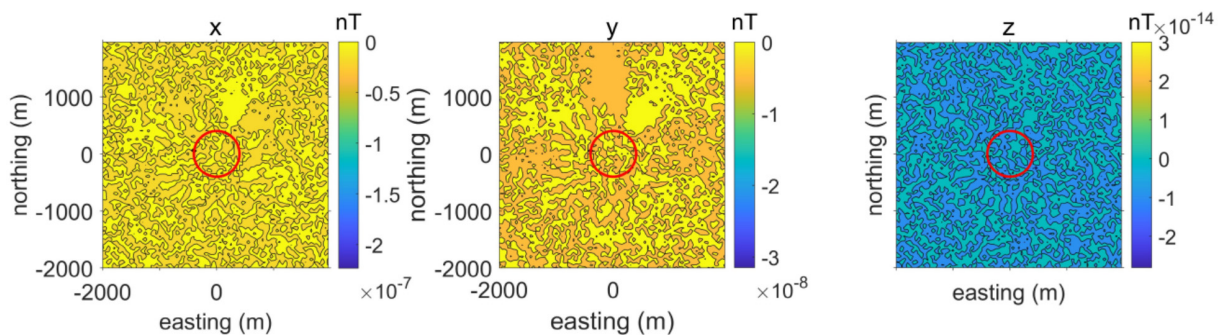


Fig. 3. Differences in the magnetic fields of circular and elliptical disks.

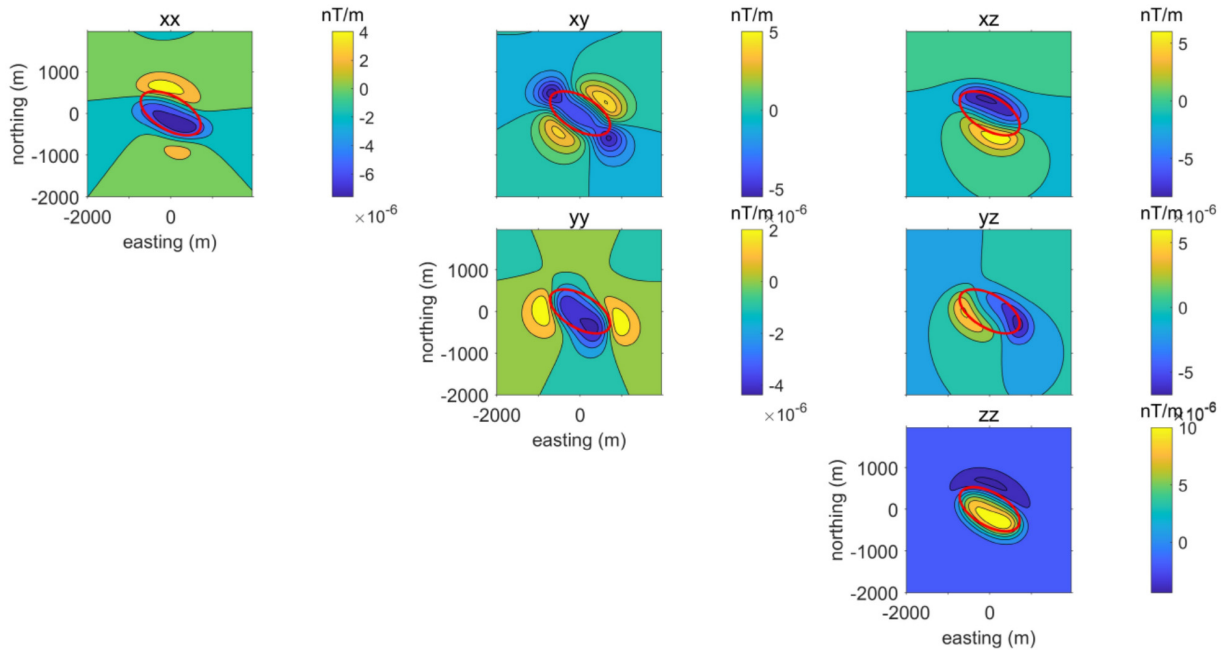


Fig. 4. Magnetic gradient tensor due to the elliptical disk used in Fig. 2.

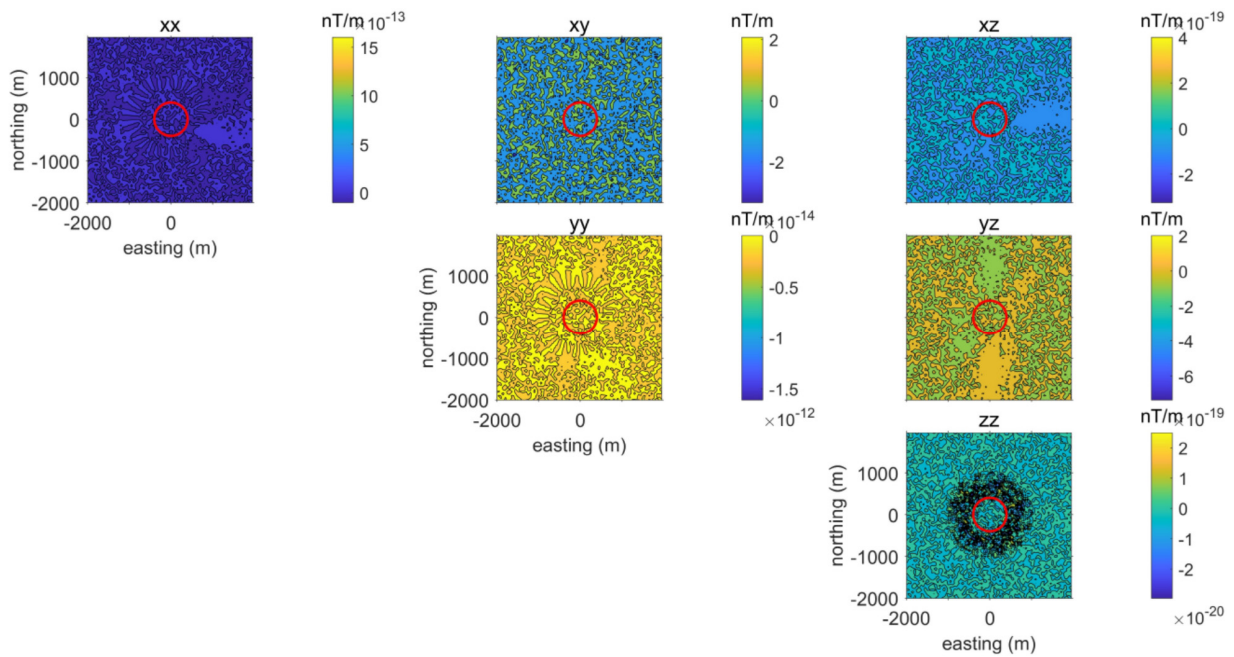


Fig. 5. Differences in magnetic gradient tensor between circular and elliptical disks.

## 결론

포아송 관계식을 타원판에 의한 중력 변화율 텐서에 적용하여 타원판에 의한 벡터 자력 반응식을 유도하였다. 타원판에 의한 자력 변화율 텐서는 자력 벡터를 직교 좌표계에서 각 축 방향으로 미분하여 유도하였다. 리슈치-한켈 적분을 이용한 원판에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식과 이 논문에서 적용한 복소 평면에서 선적분을 적용한 방법과 완벽하게 일치함을 보여주었다.

단면의 넓이가 일정하지 않은 타원 기둥 모양의 이상체는 깊이 방향으로 타원판의 조합으로 표현하면 타원판의 자력 및 자력 변화율 텐서 반응의 합으로 계산할 수 있다. 이 연구에서 유도한 타원판에 의한 벡터 자력과 자력 변화율 텐서의 해석해를 활용하여 단면의 넓이가 변하는 타원 기둥 모양의 이상체의 정밀한 모양을 추정할 수 있다. 이 연구에서 유도한 타원판에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서의 해석해



를 이용하면 3차원 역산 해석에서도 복잡한 모양의 타원 기둥의 구조도 소수의 변수만을 추정하는 역산 해석을 가능하다.

## 감사의 글

논문의 완성도를 높이기 위해 상세한 검토 의견을 제시해 주신 익명의 심사위원께 감사드립니다. 이 논문은 부산대학교 기본연구지원 사업의 지원으로 수행되었습니다.

## References

- Beiki, M., Clark, D. A., Austin, J. R., and Foss, C. A., 2012, Estimating source location using normalized magnetic source strength calculated from magnetic gradient tensor data, *Geophysics*, **77(6)**, J23-J37, doi: 10.1190/geo2011-0437.1.
- Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, doi: 10.1017/CBO9780511549816.
- Eason, G., Noble, B., and Sneddon, I. N., 1955, On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Philos. Trans. R. Soc. A, Math. Phys. Sci.*, **247(935)**, 529-551, doi: 10.1098/rsta.1955.0005.
- Heath, P. J., Greenhalgh, S., and Direen, N. G., 2005, Modelling gravity and magnetic gradient tensor responses for exploration within the regolith, *Explor. Geophys.*, **36(4)**, 357-364, doi: 10.1071/EG05357.
- Kamm, J., Lundin, I. A., Bastani, M., Sadeghi, M., and Pedersen, L. B., 2015, Joint inversion of gravity, magnetic, and petrophysical data — A case study from a gabbro intrusion in Boden, Sweden, *Geophysics*, **80(5)**, B131-B152, doi: 10.1190/geo2014-0122.1.
- Kwok, Y. K., 1989, Conjugate complex variables method for the computation of gravity anomalies, *Geophysics*, **54(12)**, 1629-1637, doi: 10.1190/1.1442631.
- Kwok, Y.-K., 1991a, Singularities in gravity computation for vertical cylinders and prisms, *Geophysical Journal International*, **104(1)**, 1-10, doi: 10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x.
- Kwok, Y. K., 1991b, Gravity gradient tensors due to a polyhedron with polygonal facets, *Geophysical Prospecting*, **39(3)**, 435-443, doi: 10.1111/j.1365-2478.1991.tb00320.x.
- Kwok, Y. K., and Beyer, L. A., 1993, Gravity due to a body with rotational symmetry about a vertical axis, *Geophysics*, **58(2)**, 298-306, doi: 10.1190/1.1443414.
- Lowrie, W., and Fichtner, A. 2020, *Fundamentals of Geophysics 3rd ed.*, Cambridge University Press, doi: 10.1017/9781108685917.
- Matende, K., and Mickus, K., 2021, Magnetic and gravity investigation of kimberlites in north-central Botswana, *Geophysics*, **86(2)**, B67-B78, doi:10.1190/geo2020-0450.1.
- Menezes, P. T. L., and García, M. D. M., 2007, Kimberlite exploration at Serra da Canastra province, Brazil, *Geophysics*, **72(3)**, M1-M5, doi: 10.1190/1.2710352.
- Ren, Z., Chen, C., Tang, J., Chen, H., Hu, S., Zhou, C., and Xiao, X., 2017, Closed-form formula of magnetic gradient tensor for a homogeneous polyhedral magnetic target: A tetrahedral grid example, *Geophysics*, **82(6)**, WB21-WB28, doi: 10.1190/geo2016-0470.1.
- Ren, Z., Chen, H., Chen, C., Zhong, Y., and Tang, J., 2019, New analytical expression of the magnetic gradient tensor for homogeneous polyhedrons, *Geophysics*, **84(3)**, A31-A35, doi: 10.1190/geo2018-0741.1.
- Rim, H., 2022, Closed-form expressions of magnetic field and magnetic gradient tensor due to a circular disk, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **25(1)**, 38-43, doi: 10.7582/GGE.2022.25.1.38. (in Korean with English abstract)
- Rim, H., 2024, The expressions of vector gravity and gravity gradient tensor due to an elliptical disk, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **27(1)**, 51-56, doi: 10.7582/GGE.2024.27.1.051. (in Korean with English abstract)
- Rim, H., and Eom, J., 2023, Expressions of magnetic vector and magnetic gradient tensor due to an elliptical cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **26(2)**, 77-83, doi: 10.7582/GGE.2023.26.2.077. (in Korean with English abstract)
- Saribudak, M., 2023, Inner structure of monogenetic Pilot Knob submarine volcano (Austin, Texas) revealed by electrical resistivity tomography and magnetic surveys, *Geophysics*, **88(5)**, B207-B220, doi: 10.1190/geo2022-0658.1.
- Vasanthi, V., and Mallick, K., 2005, Bouguer gravity anomalies and occurrence patterns of kimberlite pipes in Narayanpet-Maddur Regions, Andhra Pradesh, India, *Geophysics*, **70(1)**, J13-J24, doi: 10.1190/1.1852778.

## 부 록

여기서는 삼중 미분 함수 중에서  $z$  방향의 미분이 전혀 포함되지 않은 경우 중 하나인  $J_{xxx}$ 의 유도 과정을 기술한다.  $J_{xxx}$ 는 중력 변화율 텐서의  $g_{\alpha\alpha}$ 를  $x$  방향으로 미분하여 정의된다.

$$J_{xxx} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial g_{xx}}{\partial x} = \iint_S -\frac{9(\xi-x)}{r^5} + \frac{15(\xi-x)^3}{r^7} d\xi d\eta \quad (A1)$$

식 (A1)에 본문에서 정의한 복소 변수(식 2~4)를 도입하면 식 (A2)으로 변환된다.

$$J_{xxx} = \iint_S -\frac{9(w+\bar{w})}{2\{w\bar{w}+(\zeta_0-z)^2\}^{\frac{5}{2}}} + \frac{15(w^3+3w^2\bar{w}+3w\bar{w}^2+\bar{w}^3)}{8\{w\bar{w}+(\zeta_0-z)^2\}^{\frac{7}{2}}} d\xi d\eta \quad (A2)$$

식 (A2)에는 복소 변수  $w$ 가 포함된 적분의 총 6 종류가 있는데 이 중에서 예를 들어 마지막 6번째 적분 항에서 선적분으로 변환될 함수  $F_6(w, \bar{w})$ 는 식 (A3)의 관계로부터 구해진다(Kwok, 1989; Kwok, 1991a; Kwok, 1991b; Kwok and Beyer, 1993).

$$2i \frac{\partial F_6}{\partial \bar{w}} = \frac{15}{8} \frac{\bar{w}^3}{\{w\bar{w}+(\zeta_0-z)^2\}^{\frac{7}{2}}} \quad (A3)$$

식 (A3)의 양변을  $\bar{w}$ 로 적분하여  $F_6(w, \bar{w})$ 를 구한다.

$$F_6 = -i \frac{1}{8} \left[ 15r + \frac{45(\zeta_0-z)^2}{r} - \frac{15(\zeta_0-z)^4}{r^3} + \frac{3(\zeta_0-z)^6}{r^5} \right] \frac{\bar{w}^4}{w^4 \bar{w}^4} \quad (A4)$$

식 (A4)를 이용하여 본문에서 정의한 타원판 경계인 타원 경로에 대하여 선적분하고 실수부만을 선택하면 (A5)을 얻을 수 있다.

$$J_6 = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 15r + \frac{45(\zeta_0-z)^2}{r} - \frac{15(\zeta_0-z)^4}{r^3} + \frac{3(\zeta_0-z)^6}{r^5} \right] \theta_{x4}(t) dt \quad (A5)$$

식 (A2)에서 복소 변수  $w$ 가 포함된 나머지 5개 적분 항에 대해서도 같은 방법을 적용하고 정리하면 최종적으로 삼중 미분 함수  $J_{xxx}$ 가 식 (A6)와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} J_{xxx} &= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\zeta_0-z)^2}{r^5} \right] v'(t) dt \\ &\quad - \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^5} \theta_{x0}(t) dt \\ &\quad + \frac{9}{8} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2(\zeta_0-z)^2}{r^3} - \frac{(\zeta_0-z)^4}{r^5} \right] \theta_{x2}(t) dt \\ &\quad + \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \left[ 5r + \frac{15(\zeta_0-z)^2}{r} - \frac{5(\zeta_0-z)^4}{r^3} + \frac{(\zeta_0-z)^6}{r^5} \right] \theta_{x4}(t) dt \end{aligned} \quad (A6)$$



---

**임 형 래**

1996년 서울대학교 지구과학교육과 이학사  
1998년 서울대학교 지구과학교육과 교육학 석사  
2005년 서울대학교 지구과학교육과 교육학 박사  
2002년~2017년 한국지질자원연구원 선임연구원  
2017년~현재 부산대학교 지구과학교육과 부교수  
E-mail: brim2017@pusan.ac.kr

---