Journal for History of Mathematics http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2024.37.2.021
Vol. 37 No. 2 (Apr. 2024), 21–38

A Study on the Historical Development of Linear Algebra Unifying Mathematical Concept

統合的 概念으로서의 線型代數에 관한 歷史 發生的 研究

Yu ChungHyun 유충현 Oh Jumi* 오주미

In this article, we study the historical development of how the main concepts of linear algebra - matrices, vectors, and transformations - arise, are connected then integrated into a category. Also we study how linearity is recognized and integrated into algebraic and geometric viewpoint. Furthermore, we discuss, based on this, the role of linear algebra as a unifying concept in a school mathematics.

Keywords: linear algebra, linearity, matrices, vectors, linear transformations, unifying concept; 선형대수, 선형성, 행렬 벡터, 선형변환, 통합적 개념.

MSC: 15A03-06, 97H60

1 서론

현대수학의 기초가 되는 선형대수학(線型代數學, linear algebra)은 행렬, 벡터, 일차변환 내용을 중심으로 서로 연결 통합되어 하나의 카테고리(category)를 이루면서 미적분학과 함께 고등학교와 대학 수학의 기초가 되는 영역이다. 고대에서부터 실생활 문제 해결을 위해 등장하였던 연립일차방정식은 처음에는 그 해를 구하는 것에 초점이 맞추어져 있었다. 하지만 연립일차방정식을 구성하고 있는 계수들(coefficients)을 각 성분으로 써서 행렬을 정의하게 되면서 행렬의 연산과 행렬식(determinant)에 대한 연구를 중심으로 선형대수의 역사가 시작되었다. 이후 연립일차방정식들 간의 관계에 주목하면서 선형성이란 개념을 인식하게 되고, 여기에서 우리가 현재 알고 있는 rank, 선형종속, 선형독립과 같은 개념들이 탄생하게 된다.

한편 수학 외적 영역인 물리학에서 힘의 합성을 나타내고자 처음 등장한 벡터(vector)란 개념은 수학의 영역으로 들어오면서 유향선분이란 본질로써 정의되었고, 해석기하학과

*Corresponding Author.
Yu ChungHyun: Dept. of Math. Edu., Hannam Univ. E-mail: profyu@hnu.kr
Oh Jumi: Graduate school of Math. Edu., Hannam Univ. E-mail: ohjumi30@gmail.com
Received on Mar. 10, 2024, revised on Apr. 9, 2024, accepted on Apr. 17, 2024.

결합하면서 성분으로 대수적 표현이 가능해지면서 개별 대상이던 벡터는 전체적 대상으로서의 벡터들의 모임, 즉 벡터공간으로 확장되며 형식화되었다. 또한 일차변환은 벡터 및 행렬로 표현되므로 선형대수학을 이루는 주요 개념인 벡터와 행렬을 연결하고 통합하는 중요한 개념이다.

학교수학에서 선형대수의 지도와 관련하여 현재 심화과목인 《고급수학I》에서 벡터와 행렬, 일차변환의 내용이 다루어지고 있으며, 고등학교 《기하》 과목에서 이차곡선 및 평면벡터를 다루고 있다. 그리고 2022년 개정 교육과정으로 인해 2024년 고등학교 1학년 기본·공통 수학에서 행렬 개념의 지도가 이루어진다. 즉, 학교수학에서 선형대수는 행렬, 벡터, 변환 개념 간의 연결성이 다소 결여되어 있으며, 독립적으로 다루어지는 경향이 있다.

일반적인 기하학에서 다루는 유클리드 공간은 현실과는 동떨어진, 추상화된 공간이지만 가장 연역적이고 논리적으로 정제된 기하학의 모습을 보여준다. 유클리드 공간은 해석기하학의 출현으로 인해 유한차원 좌표계로써, 기하를 직관적으로 가장 잘 보여주는 공간인 벡터공간으로 형식화되었다. 이와 같이 벡터공간을 다루는 선형대수학은 기하학과 대수학의 모습을 잘 나타내고, 서로 연결 및 통합을 가능하게 하므로, 그 지도는 반드시 필요하다.

행렬과 벡터는 그것을 이해하는 데 필요한 선수학습 요소가 많지 않아 어렵지 않게 접근할 수 있으면서, 다양한 문제를 통합적으로 보고 조직하는 강력한 수학적 도구로서 여러 분야에 발전적으로 이용되고 있어 고등학교와 대학 수학에서 중요한 위치를 차지한다 [15]. 또한 벡터와 행렬은 이미 중고등학교에서 학습한 좌표계에서의 기하와 대수 영역인 연립일차방정식에 대한 형식적인 취급과 해법을 제공한다. 이미 좌표평면에서 배운 성분에 의한 좌표 표현은 벡터 개념에 대하여 직관적 이해를 가능하게 하며, 일차변환과 연립일차방정식의 행렬에 의한 표현은 대수적인 기호 언어의 강력한 힘과 중요성을 보여준다.

본 논문에서는 선형대수학을 이루는 주요 개념인 행렬, 벡터, 일차변환이 어떻게 발생하고 연결되어가며 하나의 영역으로 통합되어 가는지에 대한 역사 발생적 과정을 살펴보고, 이 과정에서 대수적·기하학적 관점에 대한 선형성이 어떻게 인식되고 통합되어 가는지에 대해 논의하고자 한다. 나아가 이와 같은 역사 발생적 과정을 바탕으로 학교수학에서 통합적 개념으로서의 선형대수의 역할에 대해 고찰하고자 한다.

2 선형대수의 역사적 발생

수학은 처음부터 완전체로 등장한 것이 아니라, 오랜 역사를 통해 수많은 수학자들에 의해 개발되어 왔으며, 지금도 그렇게 계속 발달하고 있다. "수학을 어떻게 지도할 것인가"에 대한 주요 쟁점은 이러한 수학을 현재의 최종 산물로서 보고 논리적인 전개 순서에 따른 연역적 방식으로 지도할 것이냐, 아니면 발달 과정에 중점을 두고 직관적이면서 경험적으로 지도할 것이냐로 귀결될 수 있다. 역사 발생적 수학 학습-지도 원리는 수학을 과정으

로 보고 수학의 발생 과정을 학습-지도에 반영하고자 하는 것으로, 연역적인 전개 방식에 대한 대안으로 Clairaut 이후 Cajori, Smith, Klein, Poincaré 등 여러 학자들에 의하여 지속적으로 주장되어 왔다 [14]. 허은숙에 따르면 어떤 하나의 수학 부류의 역사적 발생 과정은 개념이 갖는 본질적인 아이디어와 관련 제 개념이 어떻게 연결되어 하나의 주제로 통합되어 가는지를 가장 잘 보여 줄 수 있다 [4].

선형대수 이론 역시 그 역사 발생적 과정을 살펴봄으로써, 현재 학교수학 및 대학수학에서 다루고 있는 선형대수 학습 개념의 사고 관점 및 수준을 보다 더 명확히 파악할 수 있다. 따라서 벡터, 행렬, 일차변환과 같은 개념의 역사 발생적 과정을 통해 각 개념들이 서로 어떻게 연결되어 선형대수로 통합되었는가에 대해 알아보고자 한다.

2.1 대수적 사고 : 연립일차방정식과 행렬의 발달

고대 실생활의 여러 상황 속에서 문제해결을 위해 등장한 연립일차방정식은 그 해를 구하는 것에 초점이 맞추어져 있었다. 당시에는 연립일차방정식의 해를 구하기 위한 여러 가지 도구적 방법에 대한 탐구가 이루어졌고 그 중심에는 '행렬' 이 있었다. 즉, 방정식에 기원을 두고 출발한 선형대수학 [13]은 행렬과 연계된 해법이 초기 이론을 구축하였다[2].

고대 바빌로니아의 기하학은 거의 실제 측량과 관계된 것으로, 그 주요한 특징은 대수적 성질에 있었으며 기하학 용어로 설명된 복잡한 문제들은 본질적으로 까다로운 대수 문제였다. 고대 중국의 책 《구장산술(九章算術)》은 한(漢)대에 쓰여진 것으로서 그 이전 시대의 내용도 담고 있다. 《구장산술》은 농업, 상업, 공업, 측량, 직각삼각형의 성질 등에 관한 246개의 문제 및 연립일차방정식 문제들을 포함하고 있으며, 이것은 오늘날 행렬법으로 불리는 방식에 의해 풀었다 [3]. 기원은 명확하지 않으나 마방진의 최초의 기록은 중국에서 나타났으며, Boyer와 Merzbach [1]에 의하면 《구장산술》의 저자는 방정(方程)장(章)에 나오는 연립일차방정식을 행렬로 나열하고 그것의 열끼리 연산하여 또다시 행렬로 변환하여 풀었다.

오늘날 행렬이론의 핵심에 해당하는 '행렬식(determinant)' 개념은 유럽보다 일본에서 먼저 등장했다(1683년) [9]. 세키(Seki Kowa, 1642–1708)는 중국 《구장산술》에서 언급한 방법과 같은 방식의 표로 작성된 행렬 방법을 포함하는 이산문제의 풀이 방법으로 사용했다. 이와 같이 현대수학에 근접한 행렬식 개념이 일본에서 먼저 등장한 것은 기존의 서양 선형대수 이론보다 앞섰다는 것을 의미하며, 동서양을 막론하고 연립방정식의 등장과 그 해법에 대한 도구로서 행렬 개념이 탄생한 것은 수학의 보편성을 보여주는 것이다.

라이프니츠(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716)는 연립방정식[1)]으로부터 행렬식

1) $\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$

에 대한 개념을 생각하였고, 로피탈(Guillaume de l'Hôspital, 1661–1704)에게 쓴 편지(1693년)에서 연립방정식의 각 항이 있는 위치를 나타내기 위해 행과 열을 나타내는 수를 사용했다 [1]. 이것은 1850년에 행렬식의 전신이라고 할 수 있는 식[2]으로 뒤늦게 알려졌다.

크래머(Cramer Gabriel, 1704–1752)는 논문 〈Introduction to the analysis of algebraic curves〉(1750년)에서 주어진 여러 점을 통과하는 평면곡선의 방정식으로부터 연립방정식 시스템에 대한 해법의 일반 규칙을 제시하였다 [2]. 또한 크래머는 주어진 5개의 점을 이차곡선에 차례로 대입하여 다섯 개의 일차방정식으로 바꾸면, 이 연립일차방정식의 해가 이차곡선의 미지의 계수를 결정할 수 있다고 생각하였다. 즉, 방정식의 형태를 변화시키면 해를 찾을 수 있고, 반대로 연립일차방정식의 해를 가지고 계수를 결정할 수 있음을 의미하는 것이었다. 이것은 연립방정식의 계수의 함수로서 행렬식의 개념을 제시한 것으로 볼 수 있다 [8].

이와 같이 대수적 사고인 산술 절차적 관점에 의한 연립일차방정식과 행렬에 대한 연구로부터 선형대수의 역사가 시작되었다.

2.2 해석기하적 사고 : 벡터의 좌표계로의 도입

선형대수학을 이루는 주요 개념인 행렬, 벡터 및 일차변환과 관련하여 벡터는 수학의 영역에서 시작된 개념은 아니었다. 벡터 개념이 수학적 개념인, 좌표계에서 벡터공간의 하나의 원소로 인식되는 과정에 대해 구체적으로 살펴보자.

처음의 '벡터' 개념은 물리 영역에서 힘의 합을 계산하기 위해 등장하였다. 길이, 거리, 에너지, 질량, 온도, 밀도 등과 같이 그 크기만으로 결정되는 양들을 스칼라(scalar)라 하고 힘, 속도, 가속도와 같이 크기와 방향을 갖는 양을 벡터(vector)라 한다.

16세기 이후 대항해 시대가 도래하면서 바다에서 배의 위치나 기항지의 위치, 기항지의 밀물썰물의 시간 등을 예측하기 위해 달이나 행성의 위치를 아는 것이 필수적이었다. 또한 행성의 운동을 예측하기 위해 행성의 운동 곡선 방향에서의 접선을 계산하고, 이들 간의 합성에 의한 새로운 방향 예측이 필요했다. 이때 활용된 게 벡터(힘)의 '합성의 법칙' 이다. 즉 나란하지 않은 두 방향으로 진행하는 힘 또는 운동의 합성을 표현한 법칙으로 네덜란드의 수학자인 스테빈(Simon Stevin, 1548–1620)이 발견했다. 여기에서 서로 다른 두 개의 방향의 힘을 합하면 이 두 개의 힘과 방향을 변으로 하는 평행사변형의 대각선이 된다는 '힘의 평행사변형 법칙' 이 나왔다.

수학적 개념으로서의 벡터의 연구는 근대해석학을 정립한 데카르트와 페르마에 의해 시작되었다. 데카르트(René Descartes, 1596–1650)는 평면에 있는 점과 실수의 순서쌍 사이의

2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

대응 관계를 만듦으로써 평면 위의 곡선은 방정식 $f(x,y) = 0$으로 대응되고, 역으로 방정식은 평면 위의 곡선 또는 점들의 집합으로 대응됨을 알았다(1637년) [3]. 즉 방정식 $f(x,y) = 0$의 대수적·해석적 성질과 그에 대응된 곡선의 기하학적 성질 사이에서도 비슷한 대응관계가 성립한다는 사실을 함의하고 있는 것이다. 따라서 기하학의 정리를 증명하는 작업은 대수학과 해석학에서 그에 대응하는 정리를 증명하는 작업으로 바뀐다.

페르마(Pierre de Fermat, 1601–1665)는 파푸스의《수학집성》에 인용된 내용에서 아폴로니우스의 '평면의 자취' 를 복원하는 일을 맡게 되면서 해석기하학에 관한 기본 원리 "마지막으로 나오는 방정식에 미지량이 두 개인 경우 우리는 직선이나 곡선인 자취를 얻는다." 를 발견했다(1643년) [1]. 그리고 새로운 방법으로 발견했던 문제 "평면 위에 고정된 직선 몇 개가 주어질 때 한 점에서 주어진 선들에 각각 주어진 각도로 그어진 선분을 몇 배 한 것의 합이 일정하게 되는 점의 자취는 직선이다." 를 발표했다. 이 명제는 선분이 그 좌표계에서 일차함수라는 사실과 모든 일차방정식이 직선을 나타낸다는 페르마의 명제에 관한 간단한 따름정리이다.

Dorier [2]에 따르면, 좌표 방법을 통해 가능한 가장 강력한 비유는 곡선과 방정식 간의 비유이고, 특히 이 비유는 곡선 분류 문제에 대한 새로운 관점을 열었다. 이러한 관점에 대하여 좌표계의 변경 (즉, 선형 변환)을 통해 동일한 방정식을 갖는 모든 곡선의 구별이 가능해졌다. 즉, 기하학에서 선형성의 중요성은 대수적 방법을 기하학에 도입함으로써 가능해진 것으로 이해할 수 있다. 그러나 19세기 후반까지는 대수학 결과의 기하학적 해석이 3차원에 국한되어 있었고, 기술적으로는 기하학의 3차원 이상의 일반화가 가능했음에도 불구하고 이에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

노르웨이의 측량사였던 베셀(Caspar Wessel, 1745–1818)은 복소수의 기하학적 표현에 대해 연구하였고(1797년), 이는 복소수에 대한 새로운 사고방식의 기초가 되었다. 베셀은 평면에서 하나의 대수적 표현으로 선분의 길이와 방향을 모두 표현할 수 있는 방법이 있다면 벡터와 같은 기하학적 개념을 더 명확하게 이해할 수 있다고 보았다. 또한 대수적 표현이 조작 가능하다는 것으로부터 벡터를 표현하는 방법에 대해 생각하였다 [7].

해밀턴(William Rowan Hamilton, 1805–1865)은 물리학적 고찰에 의해 복소수를 실수의 쌍으로 나타낸 후 이들의 구조를 살펴보던 중에 곱셈의 교환법칙이 성립하지 않는 새로운 대수 구조를 탄생시킨다(1843년). 복소수의 체계는 평면에서의 벡터와 회전을 연구하는 데 매우 편리한 수 체계이다. 복소수 $z = a + bi$를 직교좌표계에서 점 $Z(a,b)$로 표시되는 것으로 생각하면 복소수 z는 원점 O에 대해 벡터 $\overrightarrow{OZ}$를 나타내는 것으로 간주될 수 있기 때문이다. 이와 같은 사실로부터 해밀턴은 3차원 공간에서의 벡터와 회전 연구를 위한 유사한 수 체계를 고안하였다. 그는 실수를 포함하는 실수의 순서쌍 (a,b) 가 아닌 실수와 복소수 모두를 포함하는 실수의 4중 순서수 (a,b,c,d) 를 고찰하였다. 즉 (a,b,c,d) 와 (e,f,g,h)가 같기 위한 필요충분조건은 $a = e, b = f, c = g, d = h$ 라 정의하면서 4중 순서수의 덧셈과 곱셈을

정의하였는데, 곱셈은 다음과 같이 정의하였다.

$$(a,b,c,d)(e,f,g,h) = (ac-bf-cg-dh, af+bc+ch-dg, ag+ce+df-bh, ah+bg+dc-cf)$$

해밀턴은 이러한 실수의 4중 순서수를 사원수(quaternions)라 부르고, 사원수의 덧셈은 교환법칙과 결합법칙을 만족하며 곱셈은 결합법칙과 덧셈에 관한 분배법칙을 만족하지만, 곱셈의 교환법칙은 성립하지 않는다는 사실로부터 최초의 비가환대수인 사원수 대수를 탄생시켰다(1843년) [1]. 해밀턴은《사원수 강의(Lectures on Quaternions)》(1853년)에서 비가환적인 대수 체계의 상세한 이론을 제시했다. 이 책의 기본 개념 가운데 벡터와 스칼라에 관한 것이 있으며, 사원수의 단위인 i, j, k 를 연산 기호와 좌표로 묘사하였다. 해밀턴은 사원수를 벡터로 다루었고, 그것들은 본질적으로 실수 분야에서 선형 벡터공간을 형성한다는 것을 보여주었다. 또한 벡터에 스칼라를 곱하는 것과 벡터에 벡터를 곱하는 두 가지 형태의 곱의 개념을 도입했다. 첫 번째 것은 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙을 만족시키는 반면에 두 번째 것은 결합법칙, 분배법칙만 만족시킨다는 것을 알았으며, 두 벡터의 내적 및 그것의 쌍일차성(bilinearity)을 증명하였다 [1].

이와 같이 수학 외적 영역의 필요에 의해 도입된 벡터 개념은 해석기하학의 좌표계를 통해 표현되면서 기하학적 특성이 더 부각되었다. 해석기하학은 벡터 개념이 수학적 개념으로 발전하는데 기여하였으며, 나아가 대수적 사고의 행렬 개념과 기하학적 사고의 일차변환을 연결시키는 과정에서 행렬의 한 열(또는 행)이 벡터로 간주될 수 있는 토대를 제공하였다.

2.3 구조적 관점에 의한 선형성 개념의 인식

오일러(Leonhard Euler, 1707–1783)는 그동안의 연립일차방정식의 해를 구하던 관점과는 다른, 연립일차방정식들 간의 관계에 주목하였다. 오일러는《Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes》(1750년)에서 'n개의 미지수를 갖는 n개의 선형 방정식 시스템이 고유한 해를 갖는다' 는 사실에 의문을 제기하였다 [2]. 오일러는 연립일차방정식의 해를 구하는 과정에서 방정식 (2)가 (1)의 두 배이므로, x 를 소거하면 y 역시 소거되므로, 두 방정식은 같음을 보임으로써, 아무것도 결정할 수 없음을 알았다. 즉, 미지수가 2개이고 방정식도 2개이지만 고유한 해를 갖지 않는 선형방정식 시스템의 예를 든 것이었다.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \cdots(1) \\ 4y = 6x - 10 & \cdots(2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0 & \cdots(1) \\ 2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0 & \cdots(2) \\ x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0 & \cdots(3) \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 & \cdots(4) \end{cases}$$

또한 $n = 4$ 인 경우 어떤 경우에도 두 개의 미지수조차 결정되지 않은 상태로 남아 있을 수 있음을 알았고, 네 개의 방정식 을 사용하여 그 예를 들었다. 여기에서 소거와 치환을

거치면 해 $x, y^{3)}$는 구해지지만 다른 두 미지수인 z, v 의 값은 구하지 못하는 미결정 상태로 남는다. 이와 같은 상황은 $(1) - 2 \times (2) = (3)$이고, $(1) - (2) = (4)$가 되기 때문인데 (3), (4)식이 (1), (2)에 포함되는 것으로부터 비롯된다고 보았다. 즉, '방정식이 다른 방정식에 포함되어 있다' 와 같은 표현을 썼는데, 이는 방정식 간의 선형 관계에서 비롯되는, 예컨대 하나의 방정식이 다른 방정식에 선형 종속적임을 의미하는 것이었다. 따라서 방정식 사이의 선형 관계 수와 미결정 상태로 남아 있는 미지수의 개수 사이의 상보성을 해석한 것으로 볼 수 있다.

현대의 선형 종속성 개념에 빗대어 오일러의 '포괄적 의존성(inclusive dependence)'을 보면 다소 사소해 보일 수는 있지만 곧 선형대수학의 발전에 매우 중요한 영향을 미쳤음을 알게 될 것이다. 실제로 오일러의 이와 같은 방정식들 간의 포괄적 의존성의 관점은 방정식의 설정과 연결되어, 지금의 선형 종속성을 근거로 한 일차결합을 만들 수 있는 가능성을 제공하였다. 오일러의 시도는 그동안의 연립일차방정식 해법에 대한 기술적 측면을 강조하였던 흐름 속에서 질적인 접근의 가능성을 제공하였다고 볼 수 있다 [2].

선형성 개념의 인식은 행렬 및 연립일차방정식의 해결에 있어서 구조적 관점에서 비롯되는 가우스와 조르단의 연구에서도 확인할 수 있다. 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)는 소행성 Pallas의 궤도를 연구하면서 이에 대한 관측을 통해 6개의 미지수로 된 6개의 선형 방정식 시스템을 얻었다(1811년) [8]. 가우스는 이러한 방정식을 풀기 위해 체계적인 방법을 제시했는데, 이것이 바로 계수 행렬에서의 가우스 소거법이었다. 조르단(Camille Jordan, 1838–1922)은 가우스의 소거법을 개선하여 역대입법을 조직화한 방법을 개발하였고(1870년), 원래 방정식의 계수로 구성되는 공식을 사용하여 해를 구하였다 [8]. 이것은 우리가 현재 연립일차방정식을 행렬로 바꾸어 풀거나 벡터공간 이론을 유도할 때 사용하는 Gauss-Jordan 방법에 해당하는 행렬의 대각화 알고리즘을 의미한다 [8].

한편, 기하학에서 구조적 관점에 의한 선형성 인식에 관해 뫼비우스(August Ferdinand Möbius, 1790–1868)의 아이디어를 살펴볼 필요가 있다. 뫼비우스는 기하학 공간의 점에서 작동하는 일종의 대수학인 무게중심(barycenter) 계산을 창안하여 기하학적 실체의 방향 및 방향과 관련된 일부 특성을 구별할 필요성을 주장하였다(1827년) [2]. 그는《Elemente der Mechanik des Himmels》(1843년)에서 비공간의 선형 선분의 합의 개념을 일반화하여 최초로 기하학적 실체의 선형 구조를 제시하였다. 즉, 선형성이란 본질을 기하학적 개념인 유향선분으로 나타낸 것이라 할 수 있으며 [2], 이는 벡터를 표시하는 데 아주 유용한 개념이 된다.

이와 같이 모든 문제의 틀이 행렬식 이론이었던 이 시기에 연립일차방정식을 바라보는 새로운 시각인 선형성에 대한 구조적 관점은 점차적으로 문제해결을 위한 방정식에 대한

3) $y = \dfrac{33z - 3v - 52}{29}$, $x = \dfrac{-23z + 33v + 212}{29}$

접근 방식과는 다른, 질적 연구가 나타나 특성 방정식이나 방정식 시스템의 해결과 분리가 가능해졌다 [2]. 연립일차방정식과 행렬을 구조적으로 바라보면서 선형성이 인식되었고, rank[4]의 개념이 탄생하였다. 즉, 선형방정식의 불확실하고 일관성 없는 시스템의 존재와 관련된 질문들에 관한 연구는 선형 종속과 독립 및 rank의 개념 정의의 토대를 제공하였다. 선형 방정식 시스템에서 rank는 해집합의 크기와 종속 관계의 수를 결정하는 불변량이다.[5]

프로베니우스(Ferdinand Georg Frobenius, 1849–1917)는 ⟨Über das Pfaffsche Problem⟩에서 방정식과 n-tuple에 대한 선형 종속성과 독립성 개념을 동시에 정의하여 오일러가 앞서 생각하였던 연립일차방정식 간에 포괄적 의존성 개념과의 연결을 매우 명확하게 만들었다[6] [2].

Dorier [2]에 따르면, 선형성과 관련하여 방정식과 n-tuple을 동일한 종류의 대상으로 간주하는 것은 현대 벡터 개념을 향한 중요한 발걸음을 내딛는 것이다. 이로부터 해의 기저에 대한 개념 및 행렬식 내에서 차수가 0 이 되지 않는 최대 차수를 rank라고 정의하였다. 연립일차방정식에서 선형성의 개념인 rank는 해집합의 크기에 관해 불변일 뿐 아니라 독립 방정식의 최대 수에 관한 것임을 보였다. 즉, 오일러가 생각하였던 포괄적 종속성 개념은 선형 종속성의 개념으로 대체된다. Rank의 개념은 행렬식의 개념과 오일러의 연립일차방정식을 바라보는 질적인 관점으로부터 선형성을 인식하고 일반화한 결과라고 볼 수 있으며, 일차종속 및 일차독립의 개념을 형식화했다고 볼 수 있다. 또한 독립, 종속성과 맞물리는 일차결합에 관한 아이디어는 벡터의 연산과 연결된다. 따라서 벡터를 선형공간의 한 원소로 다룰 수 있게 되었으며, 최종적으로 벡터공간으로의 확장이 가능해졌다.

초기의 선형성은 선형방정식에 첨부된 산술적 개념이었다. 선형성에 관한 문제를 구체화한 행렬식 개념의 정립 과정에서 방정식 풀이에 대한 정성적인 질문은 선형 방정식 시스템의 해법에 관하여 질적 접근을 가능하게 하였다. 즉, 방정식과 n-tuple 해법 간의 암시적 이중 관계에서 나타나는 선형성의 첫 번째 개념인 rank는 방정식과 n-tuple에 관한 선형 종속성 개념에 의해 정의되었다고 할 수 있다 [2].

2.4 대수적-기하적 사고의 통합에 의한 선형성의 통합

앞서 살펴본 연립일차방정식의 해법을 위해 등장한 행렬 및 행렬대수 이론들과 관련되어 인식된 선형성이 기하학적 사고와 연결되어 선형대수학으로 통합되어 가는 과정에 대해 살펴

4) coefficient(계수)와 혼동이 될 수 있어서 rank로 쓰겠다.

5) 해집합의 크기는 최소 생성자 수 또는 독립해의 최대 수로 볼 수 있고, 종속 관계의 수는 해 집합을 기술하는 최소 수의 방정식 또는 독립인 방정식의 최대 수로 볼 수 있다.

6) 만일 여러 특수해들 $A_1^{(\chi)}, A_2^{(\chi)}, \cdots, A_n^{(\chi)}$ $(\chi = 1, 2, \cdots, k)$ 이 $\alpha = 1, 2, \cdots, n$ 에 대해 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 가 모두 0 이 아닐 때 $c_1 A_1^{(1)} + c_2 A_2^{(2)} + \cdots + c_k A_n^{(k)}$ 가 0 이 아니면, 바꿔 말해서 k개의 일차방정식들 $A_1^{(\chi)} u_1 + A_2^{(\chi)} u_2 + \cdots, A_n^{(\chi)} u_n$ $(\chi = 1, 2, \cdots, k)$ 이 독립이라면, 그 특수해들은 서로 독립(independent)이거나 다르다(different)고 일컫는다. (Frobenius, 1875년) [6, 재인용])

보자.

새수학 시대(1968년–1985년)의 프랑스 중등교육의 기하학은 대부분 벡터공간 이론을 통해 소개되었으며, 고등학교 과정에서 유한차원의 주요 결과를 가르쳤다. 유클리드 공리는 선형 및 아핀 변환에 중점을 두고 아핀 공간의 공리로 대체되었다. 그러나 몇몇 수학자들은 이러한 방식에 동의하지 않았고, 이는 현대 수학 교육을 반대하는 입장과 더불어 늘 논쟁의 대상이었다. 반개혁 이후 기하학에 대한 강의는 근본적으로 수정되었고, 데카르트 기하학과 벡터 기하학의 기초는 여전히 가르쳤지만 기하학 교육은 본질적으로 종합적 접근법에 중점을 두고 있었다. 예를 들어 변환은 구조적 특징에 대한 일련의 점에 대한 변환으로 속성을 통하기보다는 도형에 대한 작용 연구를 통해 소개되었는데, 이러한 변화가 1980년대 후반에 대학의 선형대수학 교육을 영향에 미치기 시작했다. 많은 수학과에서는 벡터공간 이론에 대한 2차 정규 과정의 전제 조건으로 데카르트 및 벡터 기하학에 대한 과정을 개설하였다. 이는 기하학을 선형성의 주요 개념을 도입하기 위한 자연스러운 맥락으로 인정하고 있음을 보여주고 있는 것이다. [2]에 의하면, 이 아이디어는 디외도네(Jean Dieudonné, 1906–1992)의 유명한 책《Algébre linéaore et géométrie élémentaire》(1964년)에서 볼 수 있으며, 이는 프랑스 중등교육에서 현대 수학의 개혁에 중요한 역할을 했음을 말해준다.

이와 같이 선형대수학이 하나의 카테고리로 구축되어 가는 과정에서 기하학과 대수학 사이의 자연스러운 관계 및 그 연결에 대하여 역사 발생적으로 살펴볼 필요가 있다.

대수학과 달리 기하학은 본질적으로 시각적 인식과 연결되어 있기 때문에 잠재적으로 직관적 사고의 원천이 된다. 해석적 방법을 사용하여 기하학에 대수학을 도입함으로써 기하학 문제를 해결하는 것은 대수학과는 근본적으로 다른 기하학적 접근 방식을 사용하는 것보다 체계적인 방법으로 이끈다. 예를 들어 방정식의 분류를 통해 곡선의 분류를 하는 것에서 기하학 문제의 해결을 위한 접근 방식을 찾아볼 수 있다 [2].

19세기 전반에 기하학에 대한 몇 가지 중요한 변화에 해당하는 비유클리드 기하학의 발견, 미터법 관계, 사영 기하학 등의 새로운 접근법이 등장하였다. 즉, 전통적인 유클리드 기하학을 기존과는 다르게 바라보면서 수학과 현실의 관계에 대한 새로운 관점을 제시하였으며, 이와 관련하여 케일리(Arthur Cayley, 1821–1895)는 차원의 확장 가능성을 주장하였다.[7)]

기하학 분야는 새로운 영역으로 확장되었으며, 물리적 세계의 현실에 대한 고려는 더 이상 필요하지 않게 되었다. n차원 공간에 대해 개방된 기하학의 해석적 측면은 기하학에서 대수적 방법의 관련성을 강화하였다. 반면에 n차원 대수학은 기하학적으로 해석이 가능하였고, 이러한 맥락에서 모든 선형 질문은 대수적으로나 기하학적으로 해석할 수 있게 되었다. 19세기 후반에는 선형 문제를 다룸에 있어서 이렇게 다양한 경향들이 통일되기 시작하였으며,

7) 실제로 우리는 4차원 공간의 가능성에 관해 어떤 형이상학적인 개념에 의존하지 않고도 다음과 같이 추론이 가능하다. 4차원 공간을 가정할 때 고려해야 할 사항은 다음과 같다. 두 점으로 결정되는 선, 세 점으로 결정되는 반 평면, 네 점으로 결정되는 평면(두 평면이 반 평면에서 교차하는 등)(1846년): [2, 재인용]

선형방정식 시스템 해법에서 발생한 선형성은 기하학에서 훨씬 더 본질적인 것이 되었다. 즉, 직선을 일차방정식으로 생각할 수 있게 된 것이다. 이처럼 곡선의 분류가 방정식에 기초하게 되었기 때문에 기하학에서 불변량에 대한 연구는 자연스럽게 좌표의 변화[8)]에 따른 불변량의 연구로 이어졌다. 결국 좌표의 도입은 직선과 일차방정식 사이에 강력한 유추를 제공하였고, 일차변환을 기하학의 선형문제로 다루는 핵심적인 개념으로 인식하게 되었다 [2].

기하학적 문맥에서 발생한 일차변환은 행렬대수와 연결시키는 아이디어를 제공해 준다. 이와 관련된 코시(Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857)의 연구를 살펴보자(1829년). 코시는 이차형식(quadratic forms)을 통해 새로운 변수의 이차형식이 제곱 꼴의 합으로 표현될 수 있도록 하는 일차변환을 찾는 데 목적을 두었다. 즉, 원뿔곡선이나 이차곡면이 제곱 꼴의 합 또는 차만으로 표현 가능한 새로운 직교좌표계의 축을 발견하는 것으로 이해될 수 있다. 예를 들어 원 $x^2+y^2=1$을 만족하는 이차형식 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 의 최대, 최솟값을 찾는 것이었다. 즉, 기하학적으로 이차형식으로 표현된 타원(혹은 쌍곡선)이 단위원과 만나는 점을 찾는 것으로 해석할 수 있다 [4]. 이때 원점으로부터 이 점에 이르는 직선을 하나의 축으로 삼고 이에 수직인 직선을 다른 축으로 삼으면, 이 새로운 축에 대한 방정식은 제곱꼴만을 가지게 된다.

코시는 주어진 조건에 따른 극값이 $\frac{f_x}{2x}=\frac{f_y}{2y}$ 일때 성립한다는 것을 알고 있었다. 이때, 좌·우변의 값을 λ로 두면 $\frac{ax+by}{x}=\lambda,\ \frac{bx+cy}{y}=\lambda$ 가 성립하고

$$\begin{cases} (a-\lambda)x+by=0 \\ bx+(c-\lambda)y=0 \end{cases}$$

으로 다시 쓸 수 있다. 만약 이 연립일차방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지려면 이 방정식의 계수로 만든 행렬의 행렬식이 0 이어야 하므로 $(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$을 만족해야 함을 알 수 있다. 위 방정식의 근이 $\lambda_1,\ \lambda_2$ 이고 (x_1,y_1) 과 (x_2,y_2) 을 각각의 근에 대한 x,y 값이라고 할 때, 초기 조건으로부터 $x_1^2+y_1^2=1$ 이고 $x_2^2+y_2^2=1$ 이다. 방정식 $(a-\lambda)x+by=0$ 의

$$\begin{cases} (a-\lambda_1)x_1+by_1=0 & \cdots(1) \\ (a-\lambda_2)x_2+by_2=0 & \cdots(2) \end{cases}$$

에 대하여 $(1)\times x_2-(2)\times x_1$ 을 계산하면 $(\lambda_2-\lambda_1)x_1x_2+b(y_1x_2-x_1y_2)=0$ 을 얻는다. 방정식 $bx+(c-\lambda)y=0$ 에 대해서도 마찬가지로 조작을 하면 $b(y_2x_1-y_1x_2)+(\lambda_2-\lambda_1)y_1y_2=0$ 을 얻는다. 이 두 방정식을 합하면 $(\lambda_2-\lambda_1)(x_1x_2+y_1y_2)=0$ 을 얻게 되고, $\lambda_1\neq\lambda_2$ 이므로, $x_1x_2+y_1y_2=0$ 이라는 결론을 얻는다. 이 식을 벡터 $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)$ 에 대한 식으로 본다면 이 두 벡터의 내적이 0 임을 의미한다. 즉, 두 벡터는 서로 직교한다는 사실을 말해준다. 이를 일차변환 $x=x_1u+x_2v,\ y=y_1u+y_2v$ 에 적용하면 주어진 이차형식은 $f(u,v)=\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$ 와 같이 제곱꼴의 합으로 표현된다 [8]. 코시는 '만일 A와 B가

8) 오늘날의 일차변환으로 볼 수 있다.

모두 $n \times n$ 행렬이면 $|AB| = |A||B|$' 임을 증명하였고(1821년) [3], 방정식 $|A - \lambda I| = 0$ 을 행렬 A의 특성 방정식(characteristic equations)이라고 부름으로써 행렬이론에 '특성(characteristic)' 이란 용어를 도입하였다(1840년) [3].

케일리는 또 하나의 교환법칙이 성립하지 않는 대수인 행렬대수를 고안하였다(1857년). 케일리의 가장 위대한 업적은 불변식론을 만들고 발전시킨 일이다. 불변식론의 근본 문제는 일반적인 선형변환에 의하여 방정식의 변수가 변환될 때 단지 변환의 계수만을 포함하는 인자 외에는 불변인 대수방정식의 계수의 함수를 찾는 것이다 [3]. 케일리는 행렬을 이용하여 대수학의 형식과 구조에 관한 연구를 하였다. 행렬 개념은 당시의 변환 이론에 관한 1858년의 논문에서 나온 것으로, 변환 T_1, T_2[9)]에 대하여 T_1T_2 및 T_2T_1 을 구해보면[10)]교환법칙이 성립하지 않음을 알 수 있다. 이를 다시 행렬로 나타내면[11)] 변환과 마찬가지로 행렬의 곱셈에 관한 교환법칙도 성립하지 않음을 알 수 있다. 즉, 변환은 행렬로 표현되며, 변환들의 모임과 행렬들의 집합에 대하여 덧셈, 곱셈(변환의 경우에는 합성) 연산을 정의하고, 항등원 및 역원을 줌으로써 하나의 '행렬 대수 구조'를 만들 수 있다.

Boyer와 Merzbach([1])에 따르면, 행렬 대수학을 비롯한 그 밖의 비가환 대수학의 연구는 대수학의 추상화 개념을 발전시키는 데 중요한 요소였다. 실베스터(James Joseph Sylvester, 1814-1897)와 케일리는 '동차식(forms)' 의 이론을 전개 및 발전시키면서 공동 연구를 하였다. 실베스터는 동차식[12)] 과 이들의 불변식에 대해 해석기하학이나 물리학에서 가장 중요하게 다루는 이변수 또는 삼변수로 이루어지는 이차의 동차식을 연구하였다([1], 1854-1878년). 여기에서 이차 동차식을 어떤 상수와 같다고 하면 원뿔곡선이나 이차곡면을 나타낸다. 특히 이차동차식 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ 을 0 이 아닌 상수와 같게 놓으면 $B^2 - AC$ 가 0보다 작거나, 같거나, 클 경우에 따라 각각 (실, 또는 허)타원, 포물선, 쌍곡선이 된다. 그리고 이 도형을 원점을 중심으로 회전시켜 본래의 이차 동차식이 다른 이차 동차식 $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2$ 으로 변형된다면 $(B')^2 - A'C' = B^2 - AC$ 가 된다. 결국 이차 동차식의 판별식에 해당하는 식 $B^2 - AC$ 는 그와 같은 변환에서 불변식이며, $A + C$ 도 불변식이다. 이차 동차식과 관련된 중요한 또 다른 불변식은 특성방정식[13)] 의 근 k_1 과 k_2 이다. 사실 이 근들은 이차 동차식이 포물선 형태가 아닐 때, 축을 회전하면 변형될 수 있는 표준 동차식 $k_1x^2 + k_2y^2$ 에서 x^2 과 y^2 의

9) $T_1 : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad T_2 : \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$

10) $T_2T_1 : \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases} \qquad T_1T_2 : \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}$

11)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

12) 변수가 둘 또는 그 이상인 동차 다항식

13) $\begin{vmatrix} A - k & B \\ B & C - k \end{vmatrix} = 0$ 또는 $\begin{vmatrix} A' - k & B' \\ B' & C' - k \end{vmatrix} = 0$

계수이다. 이차 동차식의 계수로 이루어진 행렬 M과 이차단위행렬 I에 대하여 특성방정식은 행렬식 $|M - kI| = 0$ 으로 나타낼 수 있다. 즉, 행렬이 대수에서 가지는 중요한 성질인 '행렬 M이 그것의 특성방정식을 만족한다' 는 '케일리-해밀턴의 정리' 이다(1858년) [1]. 케일리는 해밀턴의 사원수 연구와는 별개로 자신의 행렬과 관련된 연구는 변환을 나타내기 위한 편리한 방법으로써 행렬식의 이론에서 발생한 것이라고 하였다 [1].

이와 같이 선형성 개념을 본질로 다루면서 대수적 사고에서 출발한 연립일차방정식의 행렬과 해석기하학에서의 일차변환은 서로 연결되어 통합을 이루게 된다.

2.5 벡터공간의 형식화

그라스만(Hermann Günther Grassmann, 1808–1877)이 쓴《광의양론(廣義量論)》(1844년) 초판에서 해밀턴의 사원수보다 훨씬 더 일반성을 갖는 대수의 유형을 찾아볼 수 있다 [3]. 그라스만은 실수의 4중 순서수 대신에 실수의 n중 순서수 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$를 고안하였고, 여기에 대수의 기본 단위들 $e_1, e_2, \cdots, e_n$을 결합시켜 $x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ 형태의 다원수(hypercomplex numbers)를 만들었다. 이러한 다원수는 마치 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 에 관한 다항식처럼 더해지고 스칼라가 곱해지므로 이들의 합은 같은 종류의 수가 되고, 곱 또한 해밀턴의 단위수 $1, i, j, k$ 에 관해 비가환성이 유지되는 대수의 법칙에 따라 같은 종류의 수가 된다. Eves에 따르면, 해밀턴과 그라스만 그리고 케일리는 보통의 대수에서 성립하는 곱에 대한 교환법칙과는 다른 구조적 법칙인 비가환성을 만족하는 대수를 발달시킴으로써 현대 추상대수학의 봇물을 터뜨렸다고 평가할 수 있다 [3].

그라스만은 n차원 벡터공간에 대한 개념을《선형확대론, 수학의 새로운 분야》(1844년)에서 자세하게 다루었다 [1]. 그는 음의 양(量)을 기하학적으로 설명하고, 이차원과 삼차원에서 유도된 선분의 합과 곱을 연구하였다. 또한 차원에 대한 개념을 역설했고 특별한 경우로서 이차원과 삼차원의 기하학을 포함하는 '공간' 과 '부분공간' 에 대한 추상적인 과학의 발전을 강조하였다.14)《선형확대론 개정판》(1862년)에서 벡터의 일차 종속과 독립의 개념을 정교하게 다듬었고 부분 공간과 그것들의 합집합과 교집합, 생성집합(spanning sets)에 대해 논의했으며, 벡터 공간 V의 두 부분 공간 S와 T에 대해

$$\dim S + \dim T = \dim(S \cup T) + \dim(S \cap T)$$

라는 명제와 동치인 정리를 설명했다. 그라스만은《선형확대론》에서 제기하였던 다른 유형의 곱에 대해 강조하면서 '내적', '외적' 을 구분했다.15) 여기에서 그가 다루었던 다른 유형의 곱은 보통의 대수적인 곱인 $ab = ba$와 행렬 곱에 대응하는 '외적' 을 의미한다. 그라스만은 기본적인

14) n차원 영역의 모든 원소가 하나와 (그 영역에 포함되지 않는) 어떤 한 개의 원소와 같은 종류의 결합으로 종속되면 이 변화와 그 역에 의해 생기는 원소 전체를 $n+1$차원의 영역이라 한다. [Merzbach 옮김 1964, 78쪽: 수학의 역사 하 에서 재인용]

15) 해밀턴의 스칼라곱과 벡터곱으로 환원된다.

개념을 이용해서 여러 가지 새로운 연산을 포함하는 n차원 시스템이 어떻게 세워질 수 있는지 보여 주었다. 하지만 당시에 이와 같은 내용을 포함한 《선형확대론》의 중요성은 좀처럼 인정받지 못하였고, 복소수의 체계에 관한 한켈(Hermann Hankel, 1839-1873)의 연구(1867년) 이후에 주목받기 시작하였다 [1]. 한켈은 복소수를 엄밀하게 소개하고, 그라스만의 '외적' 과 동치인 '교대수(alternating numbers)' 의 이론을 제시하였다.

페아노(Giuseppe Peano, 1852–1932)는 《Calcolo geometrico》(1888년)에서 벡터공간의 추상적인 정의를 형식화하였다. 페아노는 선형 시스템을 덧셈과 스칼라 곱셈 연산을 만족하면서 덧셈은 교환법칙과 결합법칙이 충족되고, 스칼라 곱셈은 분배법칙과 결합법칙 및 모든 양 v에 대해 $1v = v$를 만족하는 시스템으로 정의하였다. 또한 $v + (-1)v = 0$ 뿐만 아니라 임의의 v에 대해 $v+0 = v$ 를 만족하는 양인 0도 존재한다는 사실을 포함시켰으며, 선형 독립 수량의 최대 개수를 그 선형 시스템의 '차원' 으로 정의하였다. Katz에 따르면, 페아노는 차원에 대한 아이디어로부터 하나의 변수를 갖는 다항식 함수 집합은 선형 시스템을 형성하지만 선형 독립 수량의 최대 개수는 정할 수 없으므로 이 시스템의 차원은 무한일 수 밖에 없다는 사실에 주목하였다고 한다 [7].

바일(Hermann Weyl, 1885-1955)은 페아노의 공리를 재정의하고, n개의 미지수를 갖는 연립일차방정식의 계수를 벡터로 간주하면서 '이 공리가 일차방정식 이론에서의 연산의 기초를 결정한다' 는 점을 주장함(1918년) [8]으로써 비로소 우리가 현재 알고 있는 선형대수라는 영역으로 통합하였다.

앞에서 기술한 선형대수학이 선형성이란 본질을 매개로 하여 각 개념들의 발생에 따른 사고관점의 전환 및 그 연결에 관해 통합되어 가는 과정을 정리하면 도표 [Figure 1]로 정리할 수 있다.

3 학교수학에서 통합적 개념으로서의 선형대수 지도

앞에서 살펴본 역사 발생적 과정에 따라 통합된 선형대수가 학교수학에서는 어떻게 다루어지고 있는지 알아보자. 2009 개정 교육과정부터 현재의 2015 개정 교육과정의 선형대수 영역에 해당하는 행렬, 일차변환 내용은 《고급수학I》로 이동하였다 [10, 11]. 즉, 기본·공통 과목에서 '행렬' 이 빠지고, 심화과목인 《고급수학I》에서 '행렬' 을 지도한다. 《고급수학I》의 내용은 '벡터와 행렬' , '일차변환' , '그래프' 로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을 다룬다.

'일차변환' 개념은 6차 교육과정까지 《수학II》 과목의 대수 영역에 있었던 '간단한 일차변환과 행렬' 로써 지도되다가 7차 교육과정부터 삭제되었다. 일차변환 개념은 선형대수에서 행렬과 벡터를 연결시켜주기 때문에 가장 핵심적인 개념이며 선형대수의 여러 주제를 연결해

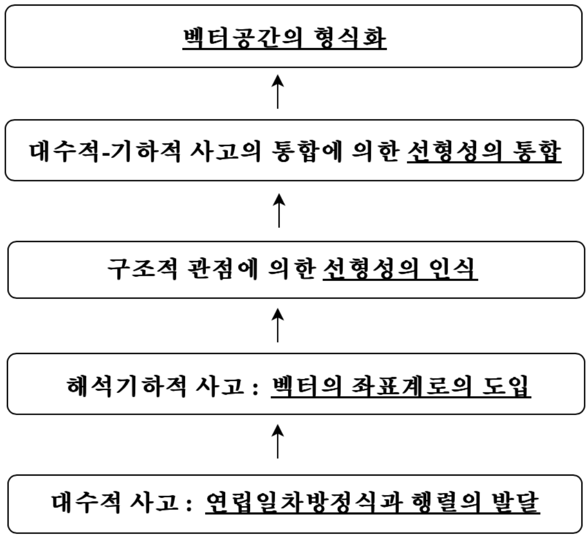

Figure 1. Thinking level up according to historical development of Linear Algebra; 선형대수학의 역사적 발생과정에 따른 사고의 상승

줄 수 있는 중심적인 아이디어를 갖고 있다 [4]. 즉 대수적 사고와 기하학적 사고를 연결시키고, 벡터공간으로의 형식화 사고로의 상승을 위한 도구로 활용될 수 있는 개념으로 볼 수 있다. 당시의 6차 교육과정의 '간단한 일차변환과 행렬' 단원에서는 일차변환의 뜻과 일차변환과 행렬 사이의 관계를 이해함으로써 일차변환의 합성과 역변환을 행렬과 연결시켜 지도하였다. 이것은 일차변환 개념이 행렬과 벡터를 연결하는 역할을 하고 있음을 의미한다. 하지만 현재는 이러한 일차변환 개념의 지도는《고급수학I》에서만 다루고 있다.

일차변환은 두 벡터공간 사이에서 선형성, 즉 합과 실수배의 규칙을 보존하는 함수로 정의된다. 가장 초보적인 일차변환의 예는 중학교 1학년 때 배우는 정비례 함수를 들 수 있다. 사실 이 정비례 함수는 가장 기본적이고 간단해 보이지만 선형성을 보존하고, 직선으로 그려지므로, 우리에게 선형성이란 본질을 대수적으로도, 기하학적으로도 가장 잘 보여준다. 즉, 합과 실수배의 규칙이라는 선형성의 의미와 본질을 명확히 하면서 이 성질을 갖는 벡터공간으로의 형식화를 이루고, 이를 보존하는 벡터 공간 사이의 함수관계인 일차변환, 곧 선형사상의 중요성을 알 수 있게 한다 [15]. 하지만 이렇게 중요한 의미를 갖는 일차변환의 내용이 현행 교육과정의 기본 공통 과정에서는 빠져있으므로, 행렬과 벡터 개념을 연결할 수 없게 되었으며, 각각의 독립된 개념으로 지도되는 등 통합적 개념으로서의 선형대수의 역할은 할 수 없게 되었다.

선형대수학은 선형방정식 시스템의 해법에 대한 연구로부터 출발하였다. 우리는 학교수학의 초등대수에서부터 일차방정식을 배우고, 나아가 여러개의 미지수를 갖는 연립일차방정식의 해를 찾는 문제를 접한다. 연립일차방정식의 풀이에서 각 식에 실수배를 하여 합과 차의 연산을 하는 것은 그 선형체계를 깨뜨리지 않으므로, 선형방정식 시스템은 그 계수에 의해

내용 요소	행렬과 그 연산
성취 기준	• 행렬의 뜻을 알고, 실생활 상황을 행렬로 표현할 수 있다 • 행렬의 연산을 수행하고, 관련된 문제를 해결할 수 있다.
성취기준 해설	행렬의 연산에서는 행렬의 덧셈, 뺄셈, 실수배 및 곱셈을 다루고, 행과 열의 수가 각각 2를 넘지 않는 범위에서 행렬의 곱셈을 할 수 있게 한다.
과정 · 기능	행렬을 실생활과 연결하기
가치 · 태도	행렬의 유용성 인식
성취기준 적용시 고려사항	• '행렬' 영역에서는 용어와 기호로 '행렬, 행, 열, 성분, 2×2 행렬'을 다룬다. • 실생활 자료를 직사각형 모양으로 나타낼 수 있는 경우를 찾아보는 활동을 통해 행렬의 유용성을 인식하게 한다. • 행렬의 표현과 관련하여 기후변화, 환경 재난 등의 사례를 단순화하여 다룰 수 있으며, 자료의 표현, 이해 및 처리 과정을 경험하게 할 수 있다. • 행렬의 연산에 관한 대수적 구조의 성질을 일반화하여 법칙으로 다루지 않으며, 지나치게 복잡한 행렬의 연산 문제는 다루지 않는다. • '정사각행렬', '영행렬', '단위행렬' 용어는 교수·학습 상황에서 사용할 수 있다.

Figure 2. 〈Common Mathematics 1〉 Matrices and its operations(Mathematics Curriculum, 2009); 《공통수학1》행렬과 그 연산 (2022년 개정 교육과정)

완전히 결정된다고 볼 수 있다. 따라서 방정식의 계수들을 성분으로 나타낸 행렬의 표현은 자연스러우며 선형대수의 영역에서 이러한 행렬을 배워야 함은 필수적인 것이다. 우정호 [15]에 의하면 행렬은 선형대수의 문제를 기술하고 해결하는 도구의 역할을 하기 때문에 선형대수의 필수불가결한 부분을 이룬다.

그동안 2009년, 2015년 개정 교육과정의 기본공통 과정에서 빠졌던 '행렬' 은 그 개념의 연결성 및 학습의 필요에 의해 2022년 개정 교육과정부터 다시 배우게 된다 [12]. 2022 개정 교육 과정의《공통수학1》에서의 행렬 지도는 Figure 2와 같다.

학교수학에서 '행렬' 단원의 지도를 살펴보면 역사발생적 원리에 의한 순서인 연립일차 방정식의 개념에서 출발하여 행렬을 도입하는 것이 아닌, 단순히 행렬을 정의하고 이에 대한 연산만을 다루고 있음을 알 수 있다. 즉, 행렬 개념이 갖는 본질적 의미를 파악하지 못할 뿐 아니라, 연립일차방정식 및 벡터 개념과의 연결 고리로서의 역할을 느끼지 못하게 하므로, 행렬 개념이 갖는 역사 발생적 의미를 퇴색시킨다. 따라서 연립일차방정식에서 출발하여 행렬 개념을 정의하고 이에 대한 의미를 부각시키는 지도가 필요하다. 이것은 결국 행렬의 유용성을 경험하게 하고, 다른 개념과도 연결되면서 선형대수 영역을 통합시키는 역할을 수행할 것이다.

선형대수는 연립일차방정식에서 나온 행렬 개념이 해석기하학의 일차변환과 연결되면서 이들의 공간인 벡터공간으로 형식화되는 역사 발생적 과정을 갖고 있다. 선형성이란 본질을 바탕으로 일차독립, 일차종속, 차원을 배우고, n차원으로의 확장을 통해 선형공간인 벡터공간으로의 형식화의 사고로 상승됨을 보여주고 있는 것이다. 이렇게 될때 비로소 선형대수학을 이루는 각 개념들이 선형성이란 본질로 연결되고, 하나의 영역으로 통합되고 완결될 수 있다.

앞서 살펴본 것처럼 학교수학에서는 이러한 연결성이 부족하고, 그 지도가 파편적으로 이루어지고 있다. 따라서 선형대수의 역사 발생적 과정이 보여준 관점의 전환과 사고 수준 상승을 통해 각 개념이 연결 통합될 수 있도록 하는 지도가 강구되어야 할 것이다.

연립일차방정식에 대한 연구로부터 시작된 선형대수학은 기하학적인 벡터 이론과 더불어 선형성이 그 중심에 놓여 있다. 선형구조를 이루는 벡터 개념은 수학과 과학의 여러 부분과 관련되어 오랜 동안에 걸친 노력의 결과로 복잡한 일반화와 통합화의 산물이며 현대 수학과 과학의 연구에 없어서는 안되는 매우 기본적이면서 강력한 도구가 되었다 [16].

선형대수학은 벡터공간을 구성하기 위해 대수적 관점에 의한 연립일차방정식과 그 행렬, 그리고 해석기하학과 결합되어 좌표 성분으로 표현되는 벡터, 가장 기본적인 함수라 볼 수 있는 일차변환, 또한 일차변환을 다시 행렬로서 표현하면서 서로 연결되고 순환되어 수학의 한 부류를 이루고 있다. 특히나 이러한 사고 및 관점의 중심에는 선형성이 자리잡고 있는데 이 선형성을 가장 잘 유지하는 법칙이 바로 합과 실수배이다.

한편 Klein의 수학교육에 있어서 '함수' 는 학교수학을 종합적이고 연속적으로 조직하게 하는 통합원리라고 보았다. 따라서 함수가 전체 수학 교육과정에 들어 있는 산술, 기하, 대수 등의 여러 내용과 나아가 물리나 경제 등 다른 교과목의 내용과 생동적인 관계를 갖도록 지도하고자 하였다. 그리고 한 단계에서 다음 단계로 진행하면서 학생들이 수학교과의 연속성을 더욱 의식하게 만들기 위해 통합개념으로서의 함수적 사고를 강조하였다 [5].

이와 같은 Klien의 통합개념으로서의 함수 개념과 관련하여, 선형대수 영역에서는 행렬의 전형이 곧 함수이고 거의 모든 수학적인 대상이 함수로 간주될 수 있으므로, 곧, 선형성을 갖는 행렬은 강력한 통합개념이 된다 [15]. 벡터는 변환을 나타내는 행렬과 연결되고, 선형공간인 벡터공간으로의 형식화를 이끌기 때문에 선형대수학을 이루어 가는 통합의 중심에 있다고 할 수 있다.

현대의 자연과학, 공학, 경제학과 같은 사회과학 분야에서 선형대수학의 벡터 및 행렬이론의 활용은 엄청나다. 특히 행렬이론과 관련되어 일차변환과 연결되는 대각화, 고유값, 고유벡터 등의 개념은 그 중요성이 매우 크다. 또한 벡터 및 벡터장 없이는 우리가 살고 있는 물리적 세계를 기술할 수 없듯이 벡터 개념의 학습은 꼭 필요하다. 이와 같이 수학 내적 영역 뿐 아니라, 수학 외적 영역에서 제기되는 다양한 응용문제들은 흩어져 있던 선형대수의 여러 개념들이 연결되고 통합되어 가는 과정 속의 실제적인 상황과 밀접하게 연관되어 있으므로 선형대수학을 공부하는 동기를 부여한다. 그리고 선형대수학의 역사발생적 원리에 따른 학습은 각 개념 간의 본질적 연결성을 느끼고, 대수적-기하학적 사고의 통합 및 사고 수준의 상승을 경험하게 한다.

선형대수학은 수학의 한 영역이면서, 다른 여러 영역과도 연결되는 통합적 개념이므로, 궁극적으로 수학교육이 추구하는 문제해결력, 창의성 및 합리적 사고의 함양이라는 목표를

이루는데 기여할 수 있다. 선형대수의 지도는 연립일차방정식, 행렬, 벡터, 일차변환이 서로 연결되고 통합되어 가는 역사 발생적 과정에 근거하여 자연스럽게 지도할 때, 선형성이라는 본질을 가장 잘 이해할 수 있다. 따라서 학교수학에서 선형대수학에서 다루는 각 개념들을 역사발생적 과정에 근거하여 서로 연결되고 통합할 수 있도록 지도할 때, 통합적 개념으로서의 선형대수의 역할이 극대화될 것이다 .

4 결론

본 논문에서는 선형대수학을 이루는 주요 개념인 행렬, 벡터, 일차변환이 어떻게 발생하고 연결되어가며 하나의 영역으로 통합되어 가는지에 관한 역사 발생적 과정을 살펴보았다. 선형대수학은 대수적 사고에 의해 발생된 연립일차방정식과 행렬을 구조적 관점으로 바라보면서 선형성이 인식되었다. 또한 해석기하학의 출현에 따라 벡터가 좌표계로 도입, 일차변환과 행렬이 연결되는 과정을 통해 선형성이 통합되었고, n차원으로의 확장 및 벡터공간으로 형식화가 이루어지면서 선형대수 영역으로 통합되었다. 이와 같은 선형대수의 역사 발생적 과정은 '선형성' 을 중심으로 이루어진 통합된 결과로서, 매우 자연스럽다.

하지만 학교수학에서 선형대수를 이루는 일차변환 및 행렬의 내용은 기본 공통 과정에서는 빠져있고 심화과목인《고급수학I》에서 다루고 있으나, 서로 각각의 독립된 개념으로 지도되고 있다. 행렬의 지도는 역사발생적 원리에 의한 순서인 연립일차방정식의 개념에서 출발하여 행렬을 도입하는 것이 아닌, 단순히 행렬의 정의 및 연산만을 다루고 있고, 일차변환의 내용은 빠져있으므로 행렬과 벡터를 연결하는 일차변환의 역할은 할 수 없게 되었다. 즉, 행렬은 연립일차방정식에서 출발하여 행렬 개념을 정의하고 이에 대한 의미를 부각시키는 지도가 필요하다. 또한 일차변환은 행렬과 벡터를 연결하는 역할을 알게 하고, 벡터는 행렬과 변환을 연결시키고 선형공간인 벡터공간의 형식화를 이끌기 때문에 이에 대한 통합적 의미로서의 지도가 필요하다.

현대의 자연과학, 공학, 경제학과 같은 사회과학 분야에서 다양하게 활용되는 선형대수학은 역사 발생적 과정을 반영하여 지도할 때, '선형성' 이란 본질로써, 각 개념들이 연결되고 하나의 영역으로 통합되고 완결될 수 있다. 이것은 역사 발생적 관점에서 바라본 통합적 개념으로서의 선형대수의 역할을 의미한다. 따라서 학교수학에서 본 논문에서 제안한 학교수학에서 선형대수학에서 다루는 연립일차방정식, 행렬, 일차변환, 벡터 등의 개념들을 역사발생적 과정에 근거하여 서로 연결되고 통합할 수 있도록 지도할 때, 비로소 통합적 개념으로서의 선형대수의 역할이 실현될 수 있을 것이다.

References

1. Boyer Carl B., Merzbach Uta C., *A History of Mathematics*(수학의 역사 상, 하), 양영오, 조윤동 옮김, 경문사, 2002.
2. Dorier, Jean-Luc, On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, 2000.
3. Eves Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, (수학사), 이우영, 신항균 옮김, 경문사, 2005.
4. Huh Eun Sook, Study on the teaching of the concepts of linear algebra in the high school mathematics: focused on the mathematical connections, Seoul National University Theses (Master's Degree), 2005. 허은숙, 고등학교에서의 선형대수 개념 지도에 관한 연구–수학적 연결을 중심으로–, 서울대학교 석사학위 논문, 2005.
5. Kang Hyun Young, A study of the mathematics education of F. Klein, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(2) (2011), 71–89. 강현영, F. Klein의 수학교육에 대한 고찰, 한국수학사학회지, 24(2) (2011), 71–89.
6. Katz, Victor J., 수학교육에서 역사 활용하기(상), 계영희 외 12인 옮김, 교우사, 2006.
7. Katz, Victor J., A History of Mathematics : an introduction(2nd ed.), Addison Wesley (1998).
8. Katz, Victor J., Historical Ideas in Teaching Linear Algebra, In F. Swetz(Ed.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, 1995, 188–206.
9. Knobloch, E., Komatsu, H., Liu, D., *Seki, founder of modern mathematics in Japan: a commemoration on his tercentenary*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **39**, Springer, 2013.
10. Ministry of Education (2009). Mathematics curriculum. 교육부 수학과 교육과정, 2009년 개정 교육과정.
11. Ministry of Education (2015). Mathematics curriculum. 교육부 수학과 교육과정, 2015년 개정 교육과정.
12. Ministry of Education (2022). Mathematics curriculum. 교육부 수학과 교육과정, 2022년 개정 교육과정.
13. Pak Hong Kyung, Two original concepts in linear algebra, *The Korean Journal for History of Mathematics* 21(1) (2008), 109–120. 박홍경, 선형대수학의 두 가지 기원적 개념, 한국수학사학회지 21(1) (2008), 109–120.
14. Woo Jeong Ho, Min Se Young, A study on historico-genetic principle of teaching and learning in mathematics, *The Journal of Educational Research in Mathematics* XII(3) (2002), 409–424.우정호, 민세영, 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구, *The Journal of Educational Research in Mathematics* XII(3) (2002), 409–424.
15. Woo Jeong Ho, *Educational Foundations of School Mathematics* (*1*), Seoul National University Press and Culture Center, 2017. 우정호, 학교수학의 교육적 기초 (상) 개정판, 서울대학교 출판문화원, 2017.
16. Woo Jeong Ho, *Historico-genetic approach of School mathematics*, Seoul National University Press and Culture Cente, 2017. 우정호, 학교수학의 역사-발생적 접근, 서울대학교출판문화원, 2018.