韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2024.27.2.155
2024. 4. 제 27권, 제 2호, 155-171

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
April. 2024, Vol. 27, No. 2, 155-171

‘삼각형 세 각의 크기의 합’에 관한 초등학생의 추론 연구

김지현(수원화홍초등학교, 교사)

본 연구는 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’의 학습에서 수학 수업의 도입 초점을 측정과 기하의 두 측면으로 달리하였을 때 학생들의 추론 과정 및 정당화 방식을 비교 분석하였다. 이를 확인하기 위하여 경기도 수원시에 위치한 H초등학교 4학년 1개 학급을 선정하여 연구를 실시하였다. 이 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다. 첫째, ‘삼각형 세 각의 크기의 합’을 수학 수업에서 도입할 때, 측정 관점에서 도입하는 것과 도형 관점에서 도입하는 것은 유의미한 차이가 있다. 둘째, ‘삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다.’를 정당화하기 위해 ‘세 각을 모으면 평각이 된다.’와 같은 도형 방식보다 ‘세 각의 크기를 더하면 180°이다.’와 같은 측정 방식으로 참임을 설명하는 것이 더 도움이 된다. 초등학생은 조작적 활동을 통해 수학적 지식을 이해하기 때문에, 활동의 수준은 수학 학습의 질로 연결된다. 이러한 추론 과정에 대한 연구는 2022 개정 교육과정의 ‘도형과 측정’이라는 하나 영역 속에서 ‘삼각형의 세 각의 크기의 합’을 어떤 계열로 접근할 것인지 기초 자료가 될 것이다.

I. 서론

일반화된 수학적 명제는 초등학교 수준에선 조작 활동으로 그 명제가 참임을 확인하는 정도로 학습하고, 중학교와 고등학교 수준에서 그 명제를 증명하기 위한 엄밀한 추론과 정당화 과정을 거치게 된다. 이때 다양한 방식으로 증명이 가능한 수학적 명제는 국가 교육과정 개정 시기마다 많은 논란이 있었는데, 대표적인 개념 중 하나가 ‘삼각형의 세 각의 크기의 합은 180°이다.’라는 명제이다. 다각형은 여러 개의 삼각형으로 분할할 수 있고, 다각형은 삼각형을 기초로 그 구성을 이해할 수 있다. 즉, 초등학교 수준에서 삼각형 세 각의 크기의 합이 180°임을 이해하는 것은 중등학교 수학에서 다각형, 즉 n각형의 내각의 크기의 합은 180×(n-2)°임을 이해하는 기초가 된다.

김지현, 김상미(2022)와 오영열, 박주경(2020)의 선행 연구와 교육부(2015, 2022)는 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’ 지도에서 이 개념을 “추론”을 통해 학습해야 한다고 서술한다. 이 개념에 관한 성취기준 [4수03-25]는 “여러 가지 방법으로 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합을 추론하고, 자신의 추론 과정을 설명할 수 있다.”라고 서술한다. 2022 개정 수학과 교육과정에 따르면, ‘추론’은 수학 교육을 통해 길러야 할 핵심 역량(문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리) 중 하나이다.

‘추론’ 역량은 교육과정이 여러 개정 시기를 거칠 때도 논리적 사고 함양을 위한 필수 기능으로 여겨져 변함없이 수학 교육의 목표로 제시됐다. 7차 교육과정에서는 개정 기본 방향 중 하나로 수학적 사고력을 설정하여 추론 능력 신장을 도모하였으며, 2007 개정 교육과정에서부터 ‘추론’이 명시적으로 언급된다. 2009 개정 교육과정에서는 성취기준, 교수·학습 방법 등으로 추론을 구체화하며, 2015 개정 교육과정에 이르러 수학 교육에서 반드시 길러야 할 6대 핵심역량 중 하나로 ‘추론’이 설정되었다. 우리나라뿐만 아니라 영국, 싱가포르 등 여러 나라의 수학과 교육과정에 추론이 제시되어 있다는 점에서 추론 교육의 중요성을 확인할 수 있다.

교육 이론의 측면에서 추론의 의미와 학생이 어떻게 수학적으로 추론하는 것을 배우는가를 설명하기 위한 많은 연구가 있었다. Piaget(1896)은 과학적이고 수학적인 추론은 양과 구조에 대한 개인의 이해에 기초한 활동으로 정의했고, 이에 기초하여 Thompson(1996)은 “의도적인 추측, 연역법, 귀납법 등 양과 구조 영역에서의 경험”으로 설명하였다. Bauersfeld(1980), Krummheuer(1995), Cobb(1994), Saxe(1991) 등은 수학적 추론은 수학 문제를 해결하기 위해 상호 작용함으로써 학습자가 참여하는 활동이라고 하였다. 추론의 의미에 대한 논의와 함께 초등학생들의 수학적 추론 과정에 관한 선행 연구들은 소집단 활동에서 나타나는

* 접수일(2023년 9월 19일), 심사(수정)일(2023년 10월 23일), 게재확정일(2024년 2월 27일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 추론, 삼각형 세 각의 크기의 합, 도형, 측정
* 저자(2023)의 석사학위논문을 수정 보완한 논문임.

초등학생의 수학적 추론 분석(이상해, 2004), 초등학교 5학년 수학학습 부진아의 귀납추론과 유추 지도(최은아, 이광호, 2012), 비구조화된 문제해결 과정에서의 비례적 추론에 관한 연구(홍지연, 김민경, 2013), 초등학교 4학년 학생들의 귀납적 추론 능력 실태와 특징에 관한 연구(정순화, 유현주, 2017)등이 있다. 이러한 선행 연구들은 추론의 다양한 유형을 다루지 않고 있고, 특정한 추론(귀납, 비례 등) 양상이 어떻게 나타나고 있는지 단계별로 분석한 연구가 대부분이다. 초등수학에서 이미 중요하게 다루어지고 있는 귀납적 추론뿐만 아니라 다양한 형태의 추론을 할 수 있는 기회가 주어졌을 때 학생들의 추론 과정에 관한 연구는 부족하다.

'삼각형 세 각의 크기의 합'은 학생들이 추론을 통해 일반화된 사실을 도출해내는 대표적인 학습 요소이다. 2015 개정에 따른 초등학교 수학 교과서는 세 각의 크기를 직접 측정하여 합을 구하는 활동 후 세 각을 잘라서 모아보는 활동으로 구성되어, 학생들은 귀납적 추론 과정을 통한 일반화로 이 명제를 학습한다. 이 학습 요소의 특이점이 있다면, 각도라는 '측정'만이 아니라 삼각형과 각이라는 '도형'에 대한 이해를 바탕으로 한다는 것이다. 이는 삼각형의 세 각의 크기의 합이 도형 영역과 측정 영역에 모두 포함될 수 있음을 시사한다. 그렇기에 교육과정 개정 시기에 따라 도형 영역에서 다루기도 하였고 측정 영역에서 다루기도 하였다. 또한 개정 시기마다 '삼각형의 세 각의 크기의 합'이 어떤 영역에 포함되느냐에 따라 교과서에서도 어떤 단원에 포함되는지, 어떤 흐름에서 지도되는지 변화가 있었다. 이러한 변화 속에서 주목해야 할 점은, 가장 최근의 교육 동향을 반영하고 있는 2022 개정 수학과 교육과정은 '수와 연산, 변화와 관계, 도형과 측정, 자료와 가능성'의 4개 영역으로 개정되었다는 것이다. 도형과 측정이 분리되었던 이전 교육과정과는 달리 하나의 영역이 되었다는 것은 두 영역이 서로 연계된 관점에서 지도될 것이라는 기대가 반영된 것이기도 하다.

김지현과 김상미(2022)는 '삼각형 세 각의 크기의 합'이 교육과정에 명시적으로 드러난 시기 이후 5차, 6차, 7차 교육과정에는 '도형 영역'에 속했고, 2007 개정, 2009 개정, 2015 개정 시기에는 '측정 영역'에 속해왔다고 밝히고, 두 영역을 이동해 온 근거 및 그에 따른 지도 중점은 어떻게 변화하였는지의 후속 연구가 필요하다고 하였다. 또한 '삼각형 세 각의 크기의 합'에 관한 다른 선행 연구에서는 이 개념의 교수·학습이 측정 영역에서 이루어지는 것의 문제점을 지적한다. 여러 삼각형에서 세 각의 크기를 측정하여 합을 구하는 방법은 귀납적 추론의 한계인 오차의 가능성이 존재하며, 몇 개의 삼각형에 대한 관찰을 일반화하여 명제로 정하기에 초등학생의 수학적 사고 발달 단계를 고려했을 때 성급한 일반화이다. 또, 많은 학생은 삼각형의 세 각을 각도기로 잰 다음 그 합을 구하게 되면 측정오차로 인해 그 합이 180°가 나오지 않게 된다. 임재훈(2009), 홍갑주와 오성훈(2018)은 삼각형을 그려서 세 각을 모으는 활동은 경험적 방법이기 때문에 정확히 일직선이 된다고 확신할 수 없다고 하였다. 이러한 연구들은 귀납적 추론 방식으로 제시되는 삼각형의 세 각의 크기의 합 교수·학습 방식에 대한 개선의 필요성을 지적한다. 또, 이 두 가지 활동 중에서 어떤 활동을 우선으로 할 것인지에 관해서는 실증적인 연구 결과 없이 교육과정 개정 시 종종 그 순서가 바뀌는데, 이에 대한 검토가 필요하다(김정하, 2019). 한편 오영열과 박주경(2020)은 측정 오차란 측정 활동에서 자연스럽게 나타나는 것으로 측정 오차를 활용하여 측정과 통계를 연결하여 삼각형의 내각의 합을 도출하는 방안을 제시하였다.

삼각형 세 각의 크기의 합이 도형 영역과 측정 영역을 이동하며 지도 방식의 변화가 있었지만, 학생들이 학습하는 과정에서 수학적 추론을 한다는 사실은 중요하다. 따라서 이 연구는 '삼각형 세 각의 크기의 합'의 수업에서 도입 초점을 도형과 측정으로 두었을 때 학생들의 추론 과정 및 정당화 방식을 알아보고자 첫째로, 수학 수업의 도입 초점에 따라 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 추론을 위해 자료를 수집하는 과정이 어떤 차이가 있는가 분석한다. 둘째로, 수학 수업의 도입 초점에 따라 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 정당화하는 방식이 어떤 차이가 있는가 분석한다.

II. 이론적 배경

1. 수학적 추론

우리는 이미 알고 있는 정보를 바탕으로 새로운 정보에 대한 진위를 판단하고 미지의 정보를 판단한다.

예를 들면, ‘소말리아’라는 국가에 대한 정보가 없어도 적도가 지나는 국가라는 것을 알면, 그 국가의 평균 기온은 매우 높고 건조한 기후를 가진 국가라고 예상할 수 있다. 이는 적도 부근의 국가는 대체로 더운 기온이며 습도량은 낮다는 기존의 지식으로부터 추론하는 것이라고 할 수 있다.

NCTM(2000)은 수학적 사고력 신장을 위해 주요한 수학적 소양의 하나로서 수학적 추론 능력을 수학 교육의 목표로 제시하였다. “체계적인 추론이 수학의 특징을 정의한다.”라는 주장에 더하여, 추론과 증명이 “유치원 이전에서 12학년까지 학생들의 수학적 경험에서 일관하는 부분이기를” 요구하고 있다. 학생이 세상의 의미를 이해하는 강력한 수단으로서 수학을 이해하고 수학에 접근하도록 하기 위해서는 수학적 활동의 기초가 되는 추론을 강조하는 것이 필수적이며, 수학적 추론은 일종의 습관 중 하나이므로 다양한 문맥에서 지속적으로 이용하며 발달되어야 하는 것이라고 보았다. NCTM에 따르면 수학적 추론은 시행착오를 통해 문제를 해결하고 그 과정을 반성할 때, 추측의 타당성을 검증 및 판단할 때, 연역적 논증과 귀납적 논증을 할 때, 규칙성을 인식하여 일반화할 때 등의 상황에서 하게 된다고 명시한다.

김은희(2002)는 수학적 추론은 논거를 세우고 새로운 결론을 이끌어내는 증명에만 국한되는 것이 아니라, 기존의 지식들을 보다 체계화시키는 데 필요한 고차적인 사고 기능이라고 보았다. 수학적 추론을 구성하는 하위 요소는 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 보고서Ⅱ(박경미 외, 2015)에서 최초로 확인할 수 있다. 추론 능력을 ‘수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력’으로 정의하고 있으며, [표 1]은 추론 능력의 하위 요소별 세부적인 의미와 기능이다.

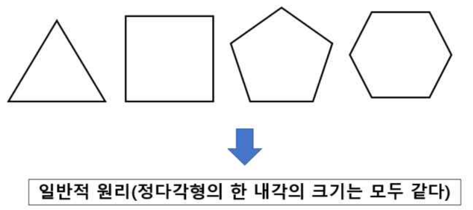
수학적 추론은 크게 지식을 찾아내는 추론과 이를 확인하는 추론으로 분류할 수 있다. Polya(1953)은 지식을 찾아내는 추론은 개연적(plausible) 추론, 이를 확인하는 추론은 논증적(deductive) 추론으로 명명한다. Polya가 구분한 개연적 추론과 논증적 추론에서 각각 대표적인 예가 되는 것은 귀납적 추론과 연역적 추론이다.

[표 1] 추론 능력의 하위 요소와 그 의미 및 기능 (박경미 외, 2015)

하위요소	의미	기능
관찰과 추측	관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 하여 수학적 사실을 추측하는 능력	관찰, 추측, 규칙 찾기, 탐구, 일반화, 특수화, 유추
논리적 절차 수행	수학적 절차와 수학적 사실 도출 과정을 논리적으로 수행하는 능력	형식화, 작도, 순서 짓기, 대입, 단순화, 계산, 절차 따르기, 풀기
수학적 사실 분석	수학적 개념, 원리, 법칙을 분석하는 능력	이해, (조건, 정보 등) 파악, 분석, 정의, 관계 짓기, 비교, 측정
정당화	수학적 사실이 참임을 보이기 위해 증거를 제시하고 이유를 설명하는 능력	정당화, 반례 찾기, 예증, 증명, 설명, 규칙 정하기
추론 과정의 반성	자신의 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 되돌아보는 능력	반성, 되돌아보기, 비판, 평가, 검토, 판단, 판별, 확인

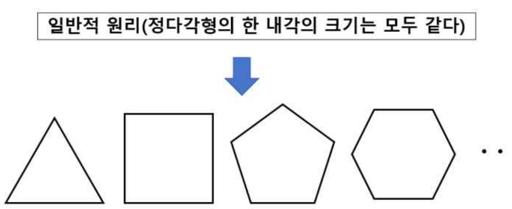
귀납적(歸納的, induction) 추론은 개개의 특수하고 구체적인 사실로부터 그 사실이 포함되는 전체에 해당되는 일반적인 원리나 법칙을 이끌어 내는 사고 방법(서동엽, 2003)이다. 귀납적 추론에서 전제는 결론에 대한 절대적인 근거가 될 수 없기에 새로운 전제를 추가했을 경우 결론의 안정성을 보장하지 못한다. 그럼에도 불구하고 귀납적 추론은 지식의 확장이 가능하다는 점에서 많은 지지를 받고 있다. 즉 전제에 포함된 정보나 지식의 양보다 더 많은 내용을 주장할 수 있다는 점에서 귀납적 비약이 발생한다. 상당수의 수학적, 과학적 지식은 이런 귀납적 비약을 통해 구성되었으며, 이는 연역적 추론에선 발견할 수 없는 특성이기도 하다.

예를 들면, [그림 1]과 같이 정다각형의 한 내각의 크기는 모두 같다는 명제를 발견하기 위해 학생들은 여러 정다각형의 각의 크기를 측정하고 계산한다. 특히, 초등학교에서는 사고 발달 단계를 고려하여 연역적 방법보다 실험·실측을 동반하는 귀납적 추론을 많이 사용한다. 귀납적 사고의 과정에서 자연스럽게 오류를 발견하거나 새로운 개념을 발견하여 시행착오를 통한 수학적 지식의 발견을 강조한다.



[그림 1] 귀납적 추론의 예시

한편, 연역적(演繹的, deduction) 추론은 보편적인 법칙이나 일반적인 명제를 전제로 하여 개별적인 명제 또는 특수 원리나 법칙을 이끌어 내는 사고 방법(서동엽, 2003)이다. 따라서 귀납적 사고와는 역방향으로 활동하는 사고 방법이다. 연역적 추론은 추론을 할 때 참인 전제에서 출발하여 타당한 추론 과정을 거쳤다면 도달한 결론 또한 참이고, 역으로 거짓인 전제에서 출발하였다면 타당한 추론 과정을 거쳐도 거짓인 결론에 도달한다. 예를 들면, [그림 2]와 같이 정다각형의 한 내각의 크기는 모두 같다는 사실을 근거로 정오각형의 내각의 크기의 합이 108°라는 결론을 얻을 수 있다.



[그림 2] 연역적 추론의 예시

초등학생의 사고 수준을 고려할 때, 초등학교 과정에서는 형식화된 연역적 추론의 지도를 요구하는 것이 무리인 경우도 있다(남승인, 1999). 그러나 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 터득하는 과정은 귀납이나 유추와 같은 귀납적 추론에 의해 얻어진 결과에 의존하지만 이를 특정화된 문제 상황의 해결에 활용되는 것은 연역적 추론이며, 이는 귀납적 추론에 비해 단순한 적용만으로 결론을 도출할 수 있다는 점에서 매우 간편하다. 따라서 수학 학습에서 활동의 기회가 많은 귀납적 추론을 통해 능동적으로 수학적 지식을 구성하고, 이를 확인하고 적용하는 연역적 추론의 기회를 발전시킴으로써 생동감 있는 수학 수업을 보장해야 한다.

2. ‘삼각형 세 각의 크기의 합’ 교수·학습

김지현과 김상미(2022)의 연구에 따르면 우리나라 수학과 교육과정 문서에서 삼각형의 세 각의 크기의 합 지도가 명시적으로 등장한 시기는 5차 교육과정이다. 5차부터 7차 교육과정에 이르기까지 삼각형의 세 각의 크기의 합은 도형 영역의 학습 요소로 구성되었다. 그러나 [표 2]와 같이 2007 개정 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 이르기까지 삼각형의 세 각의 크기의 합은 측정 영역에 포함되어 다루어지고 있다.

[표 2] 수학과 교육과정에서 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’이 제시된 영역과 학년 (김지현, 김상미, 2022)

수학과 교육과정	내용 영역	학년
5차	도형 영역	4학년
6차	도형 영역	4학년
7차	도형 영역	4-가 단계
2007 개정	측정 영역	4학년
2009 개정	측정 영역	3～4학년군
2015 개정	측정 영역	3～4학년군

현재 초등학교 4학년 수학 교과서는 2015 개정 교육과정을 따르고 있으며, 2015 개정 교육과정에서 1~2학년군은 국정 교과서 체제하에 개발되었지만, 3~4학년군과 5~6학년군은 국정 교과서와 검정 교과서가 개발되었다. 출판사마다 발문 및 삽화 등에서 약간의 차이는 있지만, 귀납적 추론 과정을 통한 일반화로 삼각형 세 각의 크기의 합을 학습한다는 공통점을 갖는다. 이 추론은 크게 두 가지 방법으로 나뉘는데, 세 각을 잘라서 모아보는 방법과 세 각의 크기를 측정하여 합

을 구하는 방법이다. 이 두 가지 방법은 셈본이나 1차 교과서부터 내용 도입 방식과 학습 계열을 달리할 뿐 5차 교육과정 시기부터 제시된 것과는 대조적으로 모든 교과서에서 지속적으로 제시되었다.

김지현, 김상미(2022)에 의하면 이 학습 내용이 교육과정 문서에서 어느 영역에 배치되었느냐에 따라 교과서에서 제시하는 추론 순서가 다르다는 것에 주목해야 한다. 5차 교육과정 시기를 기점으로 이전까지는 세 각을 잘라서 모아보는 활동을 우선 제시하여 삼각형의 세 각의 크기의 합이 180°라는 사실을 유클리드 기하의 관점에서 연역적 추론의 대상으로 삼다가, 그 이후의 시기에는 삼각형 세 각의 크기를 각각 측정하는 활동에서 180°를 찾아가면서 귀납적인 추론의 대상으로 삼는다. 이는 교과서가 교육과정이 개정되고 적응 시기를 가진 이후에 반영이 되기 때문에 시기의 차이가 있는 것으로 보인다. 하지만 이러한 전개 방식의 변화는 추론에 있어 평각을 만들어서 직관적으로 보일 것인지 또는 측정을 통할 것인지의 차이를 보여준다.

삼각형 세 각의 크기의 합이 7차에서 2007 개정 교육과정으로 개정되면서 기존의 도형 영역에서 측정 영역으로 이동한 이유가 교육과정 상에 명시적으로 밝혀있지는 않다. 그러나 2007 개정 교육과정의 개정 방향을 보면 당시 수학적으로 중요한 논의할 점이 무엇이며, 그 점이 영역 변화에 어떠한 영향을 주었는지 짐작해 볼 수 있다. 개정의 기본 방향 중 주목할 만한 것은 ‘수학과 교육내용의 적정화 추진’이었다. 7차 수학과 교육과정의 문제점으로서 일부 학습 주제가 학년 간, 학교급 간, 교과 간 연계성 부족하다는 점이 지적되었다. 이러한 문제를 해결하기 위해 상당한 학습 내용이 학년 간 또는 영역 간에 이동하거나 삭제되었고, 이 과정에서 삼각형의 세 각의 크기의 합은 도형 영역에서 측정 영역으로 이동한 것으로 보인다.

김지현과 김상미(2022)의 선행 연구에서 교육과정에서 특정한 교육내용을 어떤 영역에 포함하는가는 그 교육내용을 바라보는 입장을 밝혀준다는 것을 알 수 있다. 2022 개정 수학과 교육과정에서 지금까지 분리되었던 두 영역은 '도형과 측정 영역'이라는 하나의 영역으로 묶여 있다(교육부, 2022). 두 영역이 하나로 엮인 속에서 '세 각의 크기의 합'은 도형의 초점에서 또는 측정의 초점에서 바라볼 수 있을 것이다. 본 연구는 2022 개정 교육과정의 '도형과 측정'이라는 하나 영역 속에서 '삼각형의 세 각의 합'을 어떻게 접근할 것인가를 결정하는 데에 기초 자료로 활용될 수 있을 것이다. 교과서 개발자 또는 초등교사의 수업에서 이 교육내용을 어떻게 해석할 것인가의 결정이 더욱 중요해졌고, '세 각의 크기의 합'을 어떻게 접근할 수 있는지 그동안의 교육과정과 교과서를 통하여 몇 가지의 시사점을 보여준다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

학습 계열 및 도입 방식에 따른 초등학생의 추론 과정 및 정당화 방식의 차이점을 분석하기 위해 경기도 수원시 팔달구에 소재하고 있는 H초등학교 4학년 A반 학생들 27명을 대상으로 한다. H초등학교는 30학급 규모이며, 도심에 위치하고 있어 학교의 학력 수준과 사회 경제적 수준은 중상위 수준에 해당한다. 지역 특성상 학급 당 다문화 학생이 최소 2명씩 구성되어 있고, 연구 대상이 된 4학년 A반에도 다문화 학생이 4명 있다. 학급마다 차이가 있겠지만 본 연구 대상의 다문화 학생들은 한국말을 유창하게 할 수 있고 한국문화에 익숙하여 다문화 가정으로 인한 불편함을 전혀 겪지 않는다.

학급의 전체적인 분위기는 자유롭게 의견을 표현하는 데 익숙하며 다른 사람의 의견을 경청하여 이를 수용하거나 반론을 제기하고자 하는 의지가 높다. 연구 대상이 된 학생들은 과제수행력과 과제집착력이 높은 편이며, 학습 형태가 개별 활동보다 소집단 활동일 때 더욱 높아지는 것을 고려하여 학생들은 학기 초부터 소집단 자리 배치도에 따라 수업을 한다. 학생 개개인의 학습 능력이나 성취도는 비슷하나 수학 학습에서는 인지적 수준, 선행 학습 정도에 따라 개인차가 나타난다. 따라서 소집단 간의 학습 속도에서 차이가 크지 않도록 사전에 실시한 단원 평가, 수행 평가 등의 성취 수준과 성별, 교사가 관찰한 학생 특성, 교우 관계 등을 고려하여 집단을 구성한다. 평소 학생들이 경험하는 수학 수업은 시간이 오래 걸리더라도 스스로 원리를 터득하거나 단순 계산보단 다양한 문제 해결 전략을 활용할 수 있는 활동에 익숙하다. 이는 본 연구자이자 교사가 학생들이 수학의 가치를 충분히 알고

논리적 사고력을 통해 맥락적인 상황에서 문제 해결 능력을 기르는 것을 중요한 가치로 여겼기 때문이다. 수업 시기상 4월 셋째 주이기 때문에 이미 집단 구성원끼리 내적 친밀도가 높고 상호 간 학습 유형에 대해 파악하고 있다.

본 연구의 대상이 된 27명의 학생을 6개의 소집단으로 나누어, 그 중 집단1~집단3은 세 각의 크기를 각각 재고 더하여 180°가 된다는 것을 확인한 후 각을 모아보는 순서로 활동하여 측정(measurement) 관점에서 도입하여 도형(geometric shapes) 관점으로 학습하는 “MG(Measurement-Geometric shapes) 집단”으로, 집단4~집단6은 세 각을 모으면 180°가 된다는 것을 확인한 후 세 각의 크기를 재고 더하는 순서로 학습한 “GM(Geometric shapes-Measurement) 집단”으로 설정한다. 소집단 구성을 정리하면 다음 [표 3]과 같다.

[표 3] 소집단 구성 (단위 : 명)

추론 유형	MG 집단			GM 집단		
소집단	1	2	3	4	5	6
남학생 수	3	3	2	2	2	2
여학생 수	2	1	3	3	2	2
합계	5	4	5	5	4	4
총 인원	14			13		

2. 연구 절차

본 연구는 담임 교사의 지도에 따라 연구 대상의 사례를 수집하여 참여 관찰, 문서 및 녹취자료 분석을 통해 진행하였다. 수집된 자료를 분석하여 사례를 기술하고 결과를 연구한다. 연구 기간은 2022년 9월부터 2023년 8월까지 약 12개월에 걸쳐 수행하였다.

먼저, 2022년 9월부터 12월에 교육과정 개정 시기별 흐름을 따라 수학과 교육과정에서 포함된 영역과 수학과 교과서에서 학습 내용이 어떻게 변화하고 있는가를 분석하였다. 영역의 구분이 변경되기도 하였으나 5차 수학과 교육과정 이후 ‘세 각의 크기의 합’과 관련된 도형 영역과 측정 영역의 구분은 유지되어왔다. 따라서 5차, 6차, 7차, 2007 개정, 2009 개정, 2015 개정, 2022 개정 교육과정에서 두 영역 구분에서 배치 및 그 내용 서술에서 변화된 부분을 중심으로 분석하였다.

교육과정과 교과서 분석 결과에 따라, 학생들이 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’을 추론하는 과정을 분석하기 위한 교수·학습 자료를 개발하고 수업 활동을 계획하였다. 이때 귀납 추론과 연역 추론 과정에서 차이가 잘 드러날 수 있도록 활동지 문항 구성, 교사의 발문 등을 구성하였다. 또한 느낀 점을 기술할 수 있는 문항을 포함하여 수업 과정에서 학생들의 느낀 점, 인지적, 정의적 변화를 살펴보았다.

교수·학습 자료 및 수업 활동의 계획이 끝난 후, 2023년 3월 새 학기가 시작되는 시기에 연구 대상을 선정하고 연구 대상의 성취 수준 및 학습자 특성을 파악하였다. 이때 학생들이 편안한 분위기에서 자유롭게 추론할 수 있도록 연구자로서의 교사가 학생들과 래포를 쌓고 다양하고 창의적인 답을 허용하는 교실 분위기를 만들었다. 성취 수준 등 다양한 특성을 고려하여 6개의 소집단으로 나누고, 학생들은 협동 학습을 통해 학습 목표에 도달하는 수업 방식에 익숙해진다.

‘삼각형 세 각의 크기의 합’ 학습 요소가 4학년 1학기 2. 각도 단원의 마지막 차시에 위치한다는 사실을 고려하여 2023년 4월에 본 연구의 대상인 2차시의 추론 중심의 수업을 진행한 후, 수업 직후부터 8월까지 약 5개월에 걸쳐 수업 과정에서 수집된 자료를 종합 및 분석하여 연구 결과를 도출한다. 교육과정에 따른 교과서에서는 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’ 학습 요소가 한 차시의 수업으로 구성되지만, 본 연구에서는 학생들의 추론 과정을 면밀히 분석하고 충분한 활동 시간을 확보하기 위해 2차시의 수업으로 구성하여 연구를 진행하였다.

연구 절차 및 기간을 정리하면 [표 5]와 같다.

[표 5] 연구 일정

	내용	시기
1	교육과정 및 교과서 분석	2022년 9~12월
2	교수·학습 자료 개발 및 활동 계획	2023년 1~3월
3	연구 대상 선정	2023년 3월
4	성취 수준 파악 및 소집단 구성	2023년 3~4월
5	추론 중심 수업 활동(2차시)	2023년 4월
6	자료 분석 및 연구 결과 정리	2023년 4~8월

3. 자료 수집

본 연구의 수업 진행은 두 집단이 같은 장소, 같은 시간에 서로 다른 학습 순서로 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’을 발견하는 것이다. 6개의 소집단은 사전에 실시한 단원평가, 수행평가 등의 결과와 성비를 고려하여 학습 수준에서 차이가 나지 않도록 동질 집단으로 구성하였다. 이때 사전에 실시한 평가지는 매주 목요일 아침 시간에 푸는 수학 학습지로, 한 달 동안의 학습지를 모아 각 집단에 상위 학생 2명, 하위 학생 2명씩 배정하여 그다음 달의 소집단 구성에 반영하였다. 두 집단의 간섭효과를 통제하기 위해 교사의 안내는 최소한으로 하고, 학습지의 순서를 따라 학습하도록 유도하였다. 본 연구자는 과제를 해결하는 과정에서 학생들의 적극적인 참여가 원활히 이루어질 수 있도록 동기를 부여하면서, 동시에 학생들의 의사소통과 행동을 녹취 및 메모하는 연구자 및 교사로서 수업에 참여하였다. 6개의 소집단 각각 학급에 배치된 태블릿 pc의 음성 녹음 앱을 이용하여 학생들의 음성을 녹취하였으며, 보조 자료로 교사가 교실 앞과 뒤에 설치한 카메라로 녹화한 비디오 영상을 활용하였다. 특히 문제 해결에 어려움을 겪어 다음 단계로의 추론을 어려워하는 소집단에는 필요에 따라 반복하거나 보충 설명하여 이해를 도왔다. 학생들의 추론이 교사의 개입으로 인해 방해받지 않는 선에서 주어진 문제에 대해 여러 가지 해결 방법을 유도하거나 수학적 개념에 대한 정보를 제공하는 등의 개인적인 도움을 제공하였다. 이러한 교실 분위기를 배경으로 한 수업이 진행되면서 학생-교사 간 혹은 학생-학생 간의 모든 의사소통 과정을 소집단별로 녹취하여 수집하였고, 본 연구자가 수업 중에 학생들의 행동이나 의사소통 과정에 관해 메모한 것과 학생들이 수업 중에 문제 해결을 위해 사용한 활동지를 모두 수집하여 연구 분석의 토대로 삼았다.

본 연구에서 각 집단이 경험하는 추론 단계는 다음 [표 4]와 같다.

첫 번째 연구 문제에 따라 MG 집단은 측정 활동인 각도기와 자를 이용하여 삼각형 세 각의 크기를 재는 것에서 각 삼각형의 각을 찢어서 모아보는 방법으로 확인하는 순으로 활동을 진행하였고, GM 집단은 여러 삼각형에서 각을 모아보는 것에서 측정을 통해 확인하는 순으로 활동을 진행하였다. 두 집단에서 학생들은 어떤 내용을 중심으로 추론하는지 분석하고, 귀납적 추론 유형과 연역적 추론의 유형은 어떻게 나타나는지 분석하였다.

두 번째 연구 문제에 따라 두 집단이 서로 다른 순서로 활동하면서 ‘세 각의 각도를 재고 더한다.’ ‘각도기로 재서 더한다.’와 같이 덧셈식을 이용하여 설명한 경우는 “측정 방법”으로, ‘삼각형 세 각을 잘라서 모은다.’, ‘평각을 만든다.’와 같이 덧셈식이 아닌 모으거나 평각을 만드는 경험적 방법으로 설명한 경우는 도형 방법으로 분류하여 각 집단이 논거로 드는 내용을 중심으로 비교 분석하였다.

[표 4] 집단별 추론 과정

학습 단계	MG 집단	GM 집단	귀납 추론 학습 모형 단계
사례 수집	나누어준 모눈종이에 모둠 친구들과 각각 다른 삼각형을 1개씩 만들기		사례 수집 및 관찰, 실험
공통점 찾기①	각도기와 자를 이용해 여러 삼각형의 공통점 찾기	여러 삼각형을 접고 모아보거나, 찢고 모아보면서 공통점 찾기	추측하기
공통점 찾기②	①에서 발견한 공통점이 맞는지 확인하기 위해 각 삼각형을 찢어서 모아보는 방법으로 확인하기	①에서 발견한 공통점이 맞는지 각도기와 자를 이용해 확인하기	추측의 검증
정리	발견한 삼각형의 특징(공통점)을 하나의 문장으로 정리하기		일반화

Ⅳ. 연구 결과

1. 추론 과정 분석 결과

학생들에게 오늘 수업의 목표는 ‘여러 삼각형에서 공통점을 찾는 것’이며, 이 목표에 도달하기 위한 4가지 단계가 있음을 수업의 시작에서 안내하였다.

가. 사례 수집 단계

추론의 첫 단계는 추론을 위한 사례 수집을 위해

학생들이 공통점을 찾아야 하는 삼각형을 직접 만드는 활동이다. 이때 다양한 사례 수집을 위해 한 소집단에서 같은 삼각형이 나와선 안되고, 다른 여러 개의 삼각형이 만들어져야 함을 강조했다. 서로 다른 삼각형을 만들어야 하므로 소집단 내에서 의사소통을 통해 변의 길이, 각의 크기 등을 다양하게 논의했다. 그 결과 예각 삼각형, 둔각 삼각형, 직각삼각형 등의 다양한 삼각형의 사례를 수집할 수 있었다.

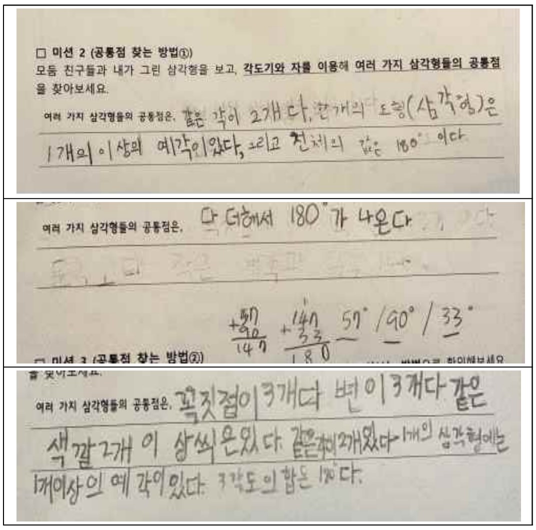
나. 공통점 발견하기① 단계

추론의 두 번째 단계는 수집한 삼각형에서 공통점을 발견하고 추측한다. 학생들에게 미션 2를 위한 시간 15분을 주고 집단별로 추론 과정을 관찰하였다.

1) MG 집단

MG 집단은 각도기와 자를 이용해야 한다는 미션의 조건을 보고 각자 만든 삼각형에서 세 각의 크기를 재기 시작했다.

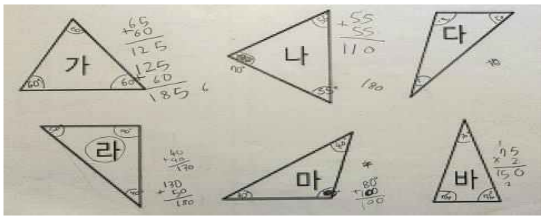
MG 집단은 [그림 3]과 같이 1개 이상의 예각이 있다 등 다수의 공통점을 발견한 것을 확인할 수 있었다. 처음에는 시각적 인식 수준의 공통점에 주목했으나, 시간이 지남에 따라 문항에서 주어진 조건에 주목하면서 삼각형 세 각의 크기의 합이 180°임을 주어진 시간 내에 대부분 발견할 수 있었다.



[그림 3] MG 집단의 추측 단계

다만 크게 두 가지 어려움을 발견할 수 있었다. 첫째로 10분 이상이 지나도 MG 집단 중 한 소집단은 '세 각의 크기를 모두 더해야한다.'라는 아이디어를 떠올리는데 어려워했으며, 다른 소집단은 이 아이디어를 떠올려도 몇몇의 학생이 삼각형을 정확하게 만들지 않아(변을 직선으로 그리지 않음) '삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다.'를 발견하지 못하고 있는 것이 관찰되었다. 그래서 '더해야한다' 아이디어를 떠올리기 어려워하는 집단에게 숫자들을 그대로 바라볼 수도 있지만 '연산'을 해보면 좋을 것 같다고 힌트를 주었더니 마침내 목표한 공통점을 발견할 수 있었다.

둘째로 부정확한 삼각형으로 어려움을 겪는 집단에겐 [그림 4]의 6개 삼각형이 그려진 도움 자료를 즉석에서 추가로 제공하였더니 본인들이 떠올린 아이디어를 새로운 삼각형에 적용해 공통점을 확인하였다.



[그림 4] 도움 자료

2) GM 집단

한편, GM 집단은 각각의 삼각형들을 접고 모아보거나, 찢고 모아보면서 공통점을 찾아야 한다는 미션의 조건을 보고 각자 만든 삼각형을 조작하였다.

GM 집단은 주어진 시간 안에 교사의 도움이나 추가 시간 없이 공통점을 발견하는데 모두 어려워했다. GM 집단에서 관찰된 학생들이 겪는 어려움을 다음과 같이 2가지로 정리할 수 있다.

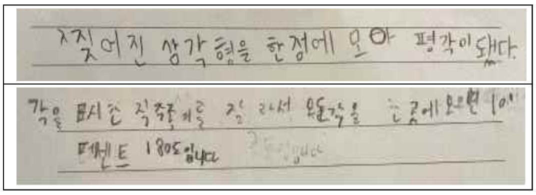
첫 번째 어려움은, 삼각형에서 어떤 부분을 접거나 찢어야 할지 전혀 아이디어를 떠올리지 못했다. 세 각을 '모아보는' 조작 활동을 하려면 세 각은 보존한 채로 변이 잘려야 하는데, 많은 학생들이 각을 접거나 자르려고 하였다. 이러한 학생들에게 교사는 발문을 통해 추론에 도움을 주었다.

단계적인 발문을 이용하여 각이 아닌 변을 잘라야 세 각이 보존된 채로 잘리고, 그렇게 만들어진 세 각

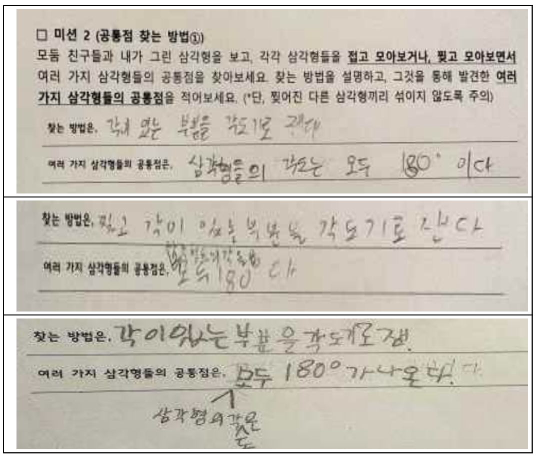
을 한 곳에 모았을 때 평각(180°)이 만들어진다는 사실을 발견하게끔 도움을 주었다. 그러나 이미 잘못 찢은 삼각형으로는 더 이상 활동을 계속할 수 없는 집단도 있어서, 이러한 집단에겐 즉석에서 색종이로 만든 세 개의 삼각형을 주었다.

두 번째로 발견된 어려움은, 세 각을 평각이 되도록 모으지 못했다는 것이다. 세 각을 온전히 잘랐지만 사이에 빈 공간이 있거나 서로 겹쳐지게 모아보는 경우에 공통점을 찾지 못했다. 이러한 학생들에겐 앞에서 각도의 합과 차를 배울 때, 각끼리 떨어져 있거나 겹쳐지는 부분이 있으면 연산이 불가능했던 것을 떠올리면서 각 삼각형의 세 각을 적절하게 '이동'시켜보라고 하였다.

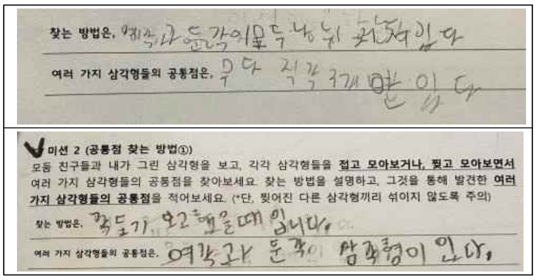
GM 집단의 문제 해결 과정에서는 위와 같이 크게 두 가지 어려움이 관찰되었고, 그 결과 조건에 맞게 공통점을 발견하는데 한 소집단[그림 5]이 성공했고, 다른 두 소집단은 측정(각도기로 재어 구한다)을 통해 구하거나[그림 6], 아예 공통점을 찾는데 실패했다[그림 7].



[그림 5] GM 집단에서 공통점을 발견한 소집단



[그림 6] GM 집단에서 측정 방법으로 추론한 소집단



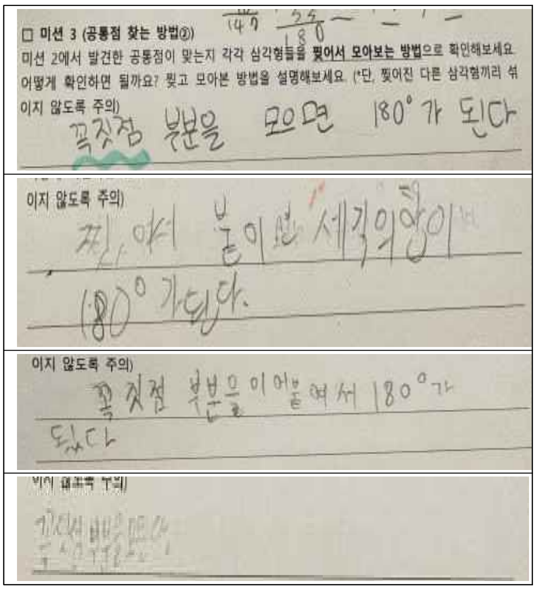
[그림 7] GM 집단에서 공통점을 발견하지 못한 소집단

다. 공통점 발견하기② 단계

추론의 세 번째 단계는 발견한 삼각형의 공통점을 다른 방법으로 확인하고 검증한다. 여기에서 추측이 맞지 않을 것 같은 반례를 찾아보고, 반례를 찾았을 경우 추측을 수정하거나 다시 삼각형을 만들어보는 관찰, 실험 단계로 돌아간다.

1) MG 집단

주어진 시간 15분 이내에 모든 집단이 공통점을 찾는데 성공한 MG 집단은 세 번째 단계로 넘어가 삼각형을 찢어서 모아보는 방법으로 두 번째 단계에서 발견한 공통점을 검증해보도록 했다.

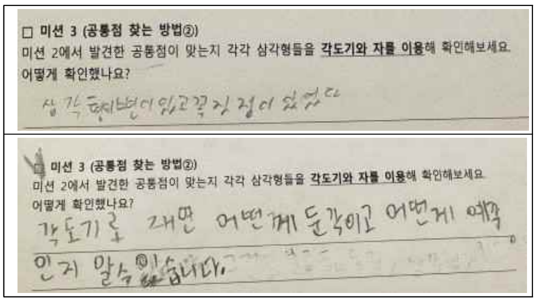


[그림 8] MG 집단의 추측의 검증 단계

MG 집단의 학생들은 추측하기 단계에서 이미 삼각형 세 각의 크기의 합을 합했을 때 180°가 되는 것을 발견했기에 [그림 8]에서 확인할 수 있듯 어렵지 않게 꼭짓점 부분을 이어 붙이는 것을 추론하였다. 또, 추측에 맞지 않는 반례가 나오지 않았으며 GM 집단의 추측하기 단계에서 발견된 두 가지 어려움도 관찰되지 않았다.

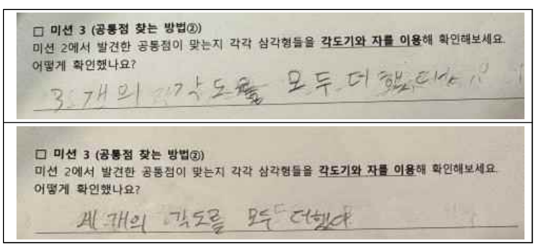
2) GM 집단

한편, GM 집단의 세 소집단 중 한 소집단은 공통점을 발견하는데 실패했기에 세 번째 단계에서 발견해보도록 하게 했다[그림 9]. 그러나 각도기로 세 각의 크기는 재었으나 각각의 크기를 더해야 한다는 아이디어를 떠올리지 못해 결국 주어진 시간이 끝날 때까지 공통점을 발견하지 못했다.



[그림 9] 추측하기에서 실패한 소집단의 추측의 검증 단계

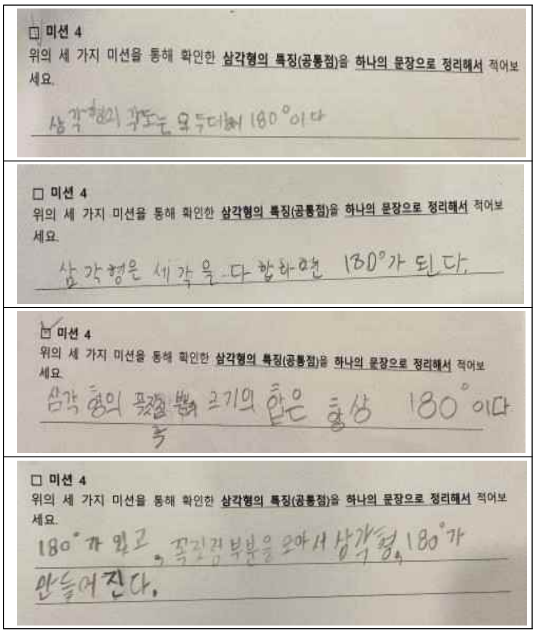
다른 두 소집단은 공통점을 발견하긴 했으나, 그 중 한 소집단은 [그림 10]에서 확인할 수 있듯, 추측의 검증 단계에서 했어야 할 방법(각도기로 측정해서 더해보는 것)으로 이미 발견했으므로, MG 집단에게 준 6개의 삼각형이 그려진 도움 자료를 동일하게 주고, 새로운 삼각형에 적용하여 발견한 공통점이 맞는지 확인해보도록 하였다[그림 10].



[그림 10] 새로운 사례를 통한 추측의 검증 단계

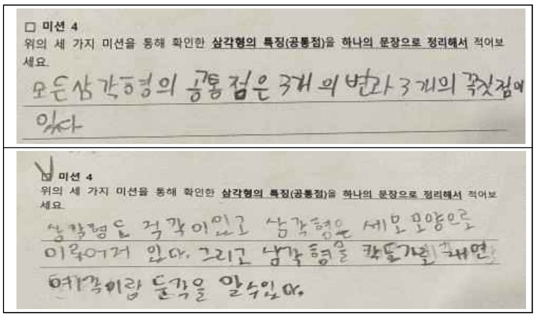
라. 정리 단계

마지막 단계는 오늘 수업의 목표인 '여러 삼각형에서 공통점 찾기'를 한 문장으로 정리해보는 것이었다. 끝까지 공통점을 발견하지 못한 한 소집단[그림 12]을 제외하고, MG 집단과 GM 집단 모두 표현의 차이는 있지만 [그림 11]과 같이 "삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다."임을 정리할 수 있었다.



[그림 11] 일반화에 성공한 소집단

추측하기 단계부터 실패한 하나의 소집단은 남학생 2명, 여학생 2명으로 구성되어 있다. 이 소집단은 삼각형을 잘라서 모아보는 활동과 세 각을 측정하여 더하는 활동 모두에서 "삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다."임을 발견하지 못하였다. 결국 일반화 단계에서 두 활동을 통해 발견한 공통점이 아닌, [그림 12]와 같이 시각적 인식 수준에서 단순히 전체적인 모양새로 도형의 공통점을 찾는다. 이 집단은 사전에 실시한 수학 성취도 평가에서 가장 높은 점수를 받은 학생이 포함되어 있다. 이 점을 고려할 때, 수학적 개념을 추론하는데 학생의 성취도보다 도입 방식 등의 지도 계열이 중요함을 발견할 수 있다.



[그림 12] 일반화에 실패한 소집단

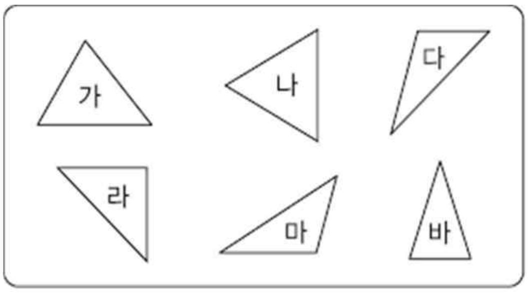
2. 정당화 방식 비교 분석 결과

정당화 과정을 비교 분석하기 위해 여러 삼각형에서 공통점을 찾고, 그렇게 생각한 이유와 이 수업에서의 느낀 점을 자유롭게 기술하는 문항으로 구성한다.

가. 정답자 비율

[그림 13]의 여러 삼각형에서 공통점을 찾아보는 첫 번째 문항에 대해 "삼각형의 세 각의 크기의 합은 180°이다."를 정확하게 서술한 학생 응답 비율은 다음 [표 6]과 같다. 이때 기타 응답은 [그림 14]와 같이 무응답, 관련없는 응답, 공통점을 찾지 못한 응답 등으로 분류하였다.

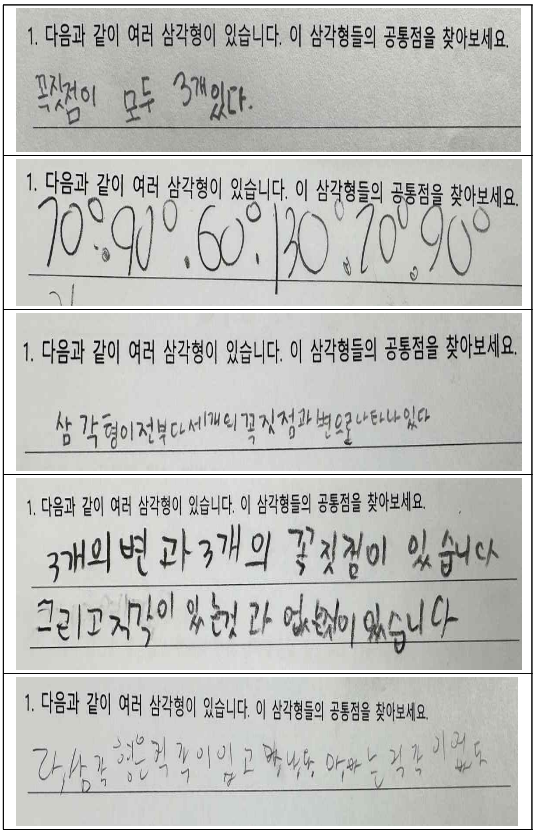
총 인원 대비 정답자 수의 비율이 MG 집단에선 약 78.5%, GM 집단에선 약 69.2%로 나타난다. 단순히 비율을 비교했을 땐 MG 집단의 정답률이 더 높다고 볼 수 있지만, GM 집단에서 소집단 6을 제외한 두 집단은 모두 삼각형 세 각의 크기의 합이 180°임을 찾아냈다는 점에서 추론 과정을 단순히 수치상으로 비교하기엔 비약이 있다는 점을 알 수 있다.



[그림 13] 여러 가지 삼각형

[표 6] 정답자 비율 (단위 : 명)

	MG 집단			GM 집단		
소집단	1	2	3	4	5	6
정답자 수	3	3	5	5	4	0
기타 응답자 수	2	1	0	0	0	4
총 인원	14 (정답자 78.5%)			13 (정답자 69.2%)		



[그림 14] 기타 응답으로 분류된 응답

나. 정당화 유형

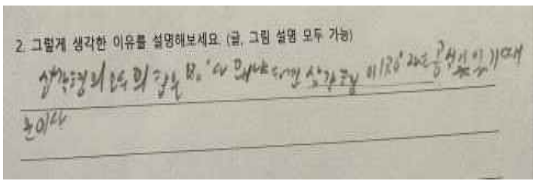
두 번째 문항에 대해 MG 집단과 GM 집단이 그들의 추론을 정당화한 방법을 분석 준거에 따라 측정 방법(각각 재어서 더하기)과 도형 방법(모아서 붙여보기)으로 분류한다고 했을 때, 각 응답자 수를 분석하면 다음 [표 7]과 같다. 이때 기타 응답은 문항 1에서와

마찬가지로 무응답, 관련없는 응답, 공통점을 찾지 못한 응답 등으로 분류하였다.

[표 7] 정당화 유형 비율 (전체:27명)

	MG 집단	GM 집단
측정 방법	9명 (33.3%)	6명 (22.2%)
도형 방법	1명 (3.7%)	3명 (11.1%)
기타 응답	4명 (14.8%)	4명 (14.8%)

위 통계 결과로 보아, MG 집단과 GM 집단 모두 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’ 개념을 정당화하기 위해 측정 방법으로 설명하고 있는 학생이 도형 방법으로 설명하는 학생보다 많은 것을 확인할 수 있다. 문항2에서 MG 집단의 기타 응답자 수가 문항1에 비해 1명 더 늘어난 것은, 문항 1에선 공통점을 올바르게 찾았으나 문항 2에서 “삼각형의 세 각의 크기의 합이 180° 라는 공식이 있기 때문에”와 같이 추론을 통한 정당화 과정을 서술하지 않은 응답[그림 15]이 포함되었다.



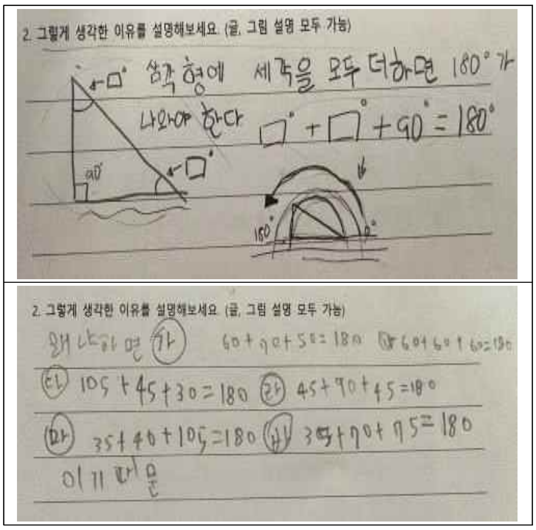
[그림 15] 새롭게 포함된 기타 응답

한편 두 집단에서 도형 방법으로 측정한 학생 수를 분석했을 땐 GM 집단 학생 수가 더 많다. 이는 수학적 개념의 도입 방식이 학생의 정당화 사고 과정에 영향을 준다는 것을 의미하는 바이다.

각 집단별 학생 응답을 분석 준거에 따라 분류하면 다음과 같다.

1) MG 집단에서 측정 방법

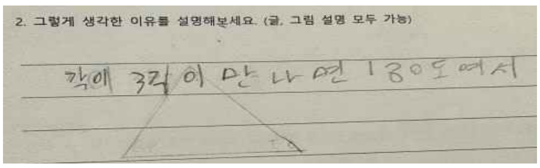
이미 알고 있는 사실(삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다)을 주어진 사례에 적용하여 정당화하는 응답, 주어진 사례에서 내재화된 개념을 도출하여 정당화하는 응답 등이 이에 해당된다. 이미 추론 단계에서 귀납적 추론을 통해 어렵지 않게 공통점을 발견한 선험적 경험이 있기에 MG 집단은 어렵지 않게 덧셈식을 이용해 계산함으로써 측정 방법으로 정당화하는 것을 발견할 수 있다.



[그림 16] MG 집단에서 측정 방법 응답

2) MG 집단에서 도형 방법

MG 집단에서 유일하게 정당화 과정을 도형 방법으로 추론한 1명의 학생은 세 각을 모았을 때 180°가 되기 때문에 삼각형 세 각의 크기의 합이 180°가 된다고 응답했다. 이 학생은 처음에는 삼각형을 직접 그려 각각 각도를 나타내어 합하면 180°가 된다는 것을 보여주려고 했으나, 덧셈식을 이용하지 않고 그렸던 삼각형을 다시 지워 세 각을 만나게 했을 때 180°가 된다고 했다.

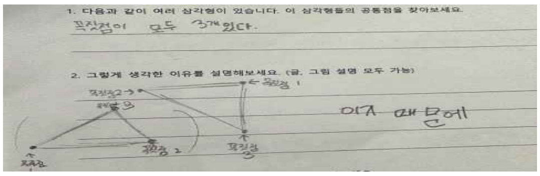


[그림 17] MG 집단에서 도형 방법 응답

3) MG 집단에서 기타

이 유형에 해당하는 응답은 [그림 15]와 같이 공식을 이용했다거나, [그림 18]과 같이 문제의 요점을 파악하지 못해 관련없는 답을 한 경우이다. 특히 [그림

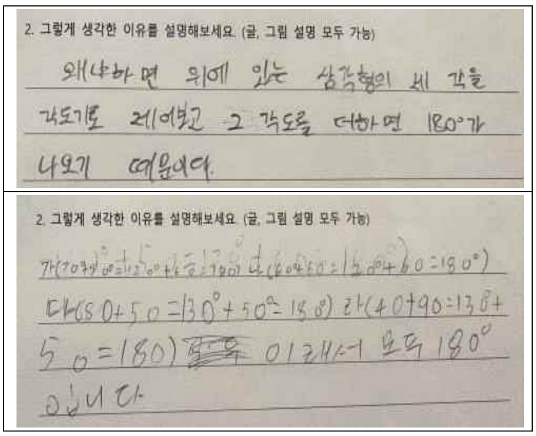
18]과 같이 응답한 학생의 경우 앞에서 했던 추론과 연관시키지 못하여 공통점을 시각적 인식 수준에서만 발견했다. 이는 본인의 추론을 정당화한 것에 해당은 되나, 본 연구에서 의도한 정당화 과정을 거치지 않았기에 기타 응답으로 분류한다.



[그림 18] MG 집단에서 기타 응답

4) GM 집단에서 측정 방법

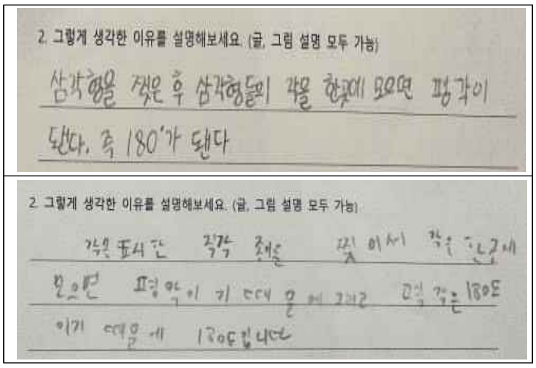
MG 집단과 마찬가지로 측정 방법으로 추론한 GM 집단의 집단은 정당화 과정에서도 주어진 삼각형의 세 각의 크기의 합을 모두 더하여 일반화된 개념을 도출했다. 특이한 점은 이 유형에 해당되는 응답에 그림으로 설명하는 학생은 없었고, 모두 더하여 180°가 된다고 서술하거나 직접 덧셈식으로 서술하는 학생 응답뿐이었다.



[그림 19] GM 집단에서 측정 방법 응답

5) GM 집단에서 도형 방법

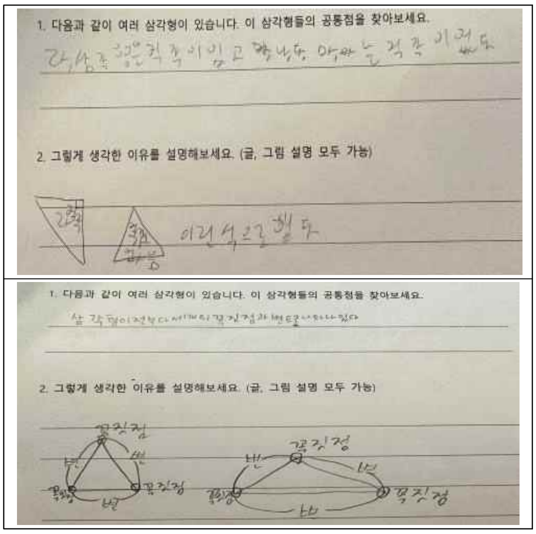
GM 집단은 MG 집단보다 도형 방법으로 정당화한 학생이 더 많은 것으로 보아, 수학적 개념의 도입 방식이 학생의 정당화 과정에 영향을 준다는 것을 확인할 수 있다. 도형 방법으로 정당화한 학생의 응답은 MG 집단의 학생과 마찬가지로 세 각을 모으면 180°가 되기 때문이라고 답했다. 주목해야 할 점은 '찢은 후 모으면'과 같은 표현에서 알 수 있듯 GM 집단은 MG 집단과 달리 경험적인 근거로 추론하고 있다는 것이다.



[그림 20] GM 집단에서 도형 방법 응답

6) GM 집단에서 기타

소집단 6에 해당되는 응답으로, 이 유형에 분류된 응답은 문항1에서 공통점을 발견하지 못했기에 문항2에서도 기타 응답으로 분류한다. MG 집단의 기타 응답과 마찬가지로 공통점을 시각적 인식 수준에서만 발견하고 본인의 추론을 정당화하고는 있으나, 본 연구에서 의도한 정당화를 하지 못했다.



[그림 20] GM 집단에서 기타 응답

V. 요약 및 결론

본 연구의 목적은 '삼각형 세 각의 크기의 합'의 수업에서 도입 초점을 도형과 측정으로 두었을 때 학생들의 추론 과정 및 정당화 방식을 비교 분석하는 것이다. 이를 실현하고자 수학 수업의 도입 초점에 따라 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 추론하는 과정에서 어떤 차이가 있는가를 연구 문제로 설정하였다. 연구 목적을 달성하기 위해 연구 대상자를 MG 집단과 GM 집단으로 구성하였다. 두 집단이 서로 다른 순서로 활동하며 덧셈식을 이용하여 설명한 경우는 "측정 방법"으로, 덧셈식이 아닌 모으거나 평각을 만드는 경험적 방법으로 설명한 경우는 도형 방법으로 분류하여 각 집단이 논거로 드는 내용을 중심으로 비교 분석하였다. 이 연구를 진행한 연구 결과를 통해 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, '삼각형 세 각의 크기의 합'을 측정 방법으로 도입하지 않을 경우에 학생 스스로 세 각을 모아보려는 아이디어를 떠올릴 수 있는 방법에 대한 지원이 필요하다. '삼각형 세 각의 크기의 합'을 수학 수업에서 측정 관점으로 도입하는 것과 도형 관점으로 도입하는 것은 학생들의 추론 과정에서 다른 양상을 보였다. 두 집단 모두 처음에는 시각적 인식 수준에서 공통점을 발견하였지만, MG 집단에서는 세 각의 크기를 재어서 더한다는 아이디어를 떠올리는 반면에, GM 집단은 세 각을 모으거나 각각 잘라서 붙여야 한다는 아이디어를 떠올리는데 어려워했다. 여기서 '삼각형 세 각의 크기의 합은 180°이다.'를 추론하기 위한 도입 방식으로 세 각의 크기를 각각 재어 더하는 방식이 모든 삼각형은 세 각의 합이 같다는 것을 인식하는 데에 효과적이라는 판단을 내릴 수 있다. 다만, 단원 계열 상 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 학습하기 전, 각의 크기를 비교하거나 예각과 둔각을 구별하며 각도에 대한 양감을 기르게 된다. 또한 각도를 어림하고 각도기로 재어 확인하는 활동과 각도의 합과 차를 구하며 구체적 조작 활동을 통해 삼각형과 사각형에서의 내각의 크기의 합을 학습하는 순서로 보았을 때, 본 연구에서 공통점을 시각적 인식 수준에서만 발견하는 것은 당연한 것이다. 세 각의 크기의 합을 구하는 조작적 활동에 앞서, 세 각을 합해야 하는 필요성을 인식하는 것이 단원 계열과 초등학교 4학년 학습 수준 상 자연스러울 것이다.

둘째, '삼각형 세 각의 크기의 합이 180°이다.'가 참임을 보여주기 위한 방법으로 평각을 만들어 직관적으로 보이는 것보다 측정을 통해 보이는 정당화 방법을 선호한다. 두 집단이 각각 추론한 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 정당화하는 방식에서 어떤 차이가 있는지 분석한 결과, 귀납 추론의 방법으로 정당화한 학생 수의 비율이 더 높았다. 또한 정당화 과정을 도형 방법으로 선택한 학생 수를 기준으로 두 집단을 비교했을 때는 GM 집단의 학생 수가 MG 집단의 학생 수보다 많았다. 본 연구에서 대상이 된 학생들의 결과만으로 일반화를 하기엔 한계가 있지만, MG 집단이 문제를 해결할 때 추가 시간이나 교사의 도움 자료를 필요로 한 경우가 더 많았음을 고려해볼 수 있다. 학생들은 두 가지 방법으로 '삼각형 세 각의 크기의 합'을 추론했지만, 정당화하는 과정에서는 본인들에게 더 내재화된 방법을 선택하여 가역적으로 추론하게 된다. 이처럼 자신이 알고 있는 수학적 개념을 정당화하기 위해 본인이 경험한 여러 추론 방법 중 자신의 이해 수준에 타당한 방법을 선택한다는 사실로 볼 때, 측정을 통한 방법이 비교적 더 적합하다는 것을 알 수 있다. 이는 2022 개정 교육과정에서 '도형'과 '측정' 영역이 하나의 영역으로 합쳐졌다는 관점에서 볼 때 측정 방식으로 설명하는 것은 자연스러운 것이라고 볼 수 있다. 이전까지의 교육과정은 두 영역이 분리되어 있었음에도 서로 밀접한 관련 속에서 학습되어 왔다. 예를 들어 삼각형은 1학년 때 세모 모양으로 배우다가, 2학년 때는 삼각형이라는 수학적인 용어로 다시 배운다. 이때 삼각형에는 변과 꼭짓점이 있다는 것을 배우고 변의 길이를 측정하는 것은 2학년 1학기 4단원 길이 재기에서 배운다. 3학년과 4학년에서는 삼각형의 개념에 더해서 직각삼각형, 정삼각형, 이등변삼각형을 배운다. 이런 삼각형의 개념을 바탕으로 5학년에서는 삼각형의 넓이를 배우는 것이다. 이런 도형에 대한 인식을 바탕으로 삼각형 세 각의 크기의 합에 대한 정당화는 측정 방식으로 나타내고 있음을 볼 수 있었다.

본 연구는 2차시에 걸쳐 한 학급을 대상으로 한 연구이기에 일반화를 하는 데는 제한이 있을 수 있다. 그러나 이 연구를 통하여 다음과 같이 제언하고자 한다. 첫째, 처음부터 '삼각형 세 각의 크기의 합이 180°가 된다'는 사실을 발견하기에 앞서, '모든 삼각형의 세

각의 크기의 합은 같다’라는 것을 발견한 뒤에, ‘그 합은 180°이다’를 확인하는 것이 학습 계열로 적절하다. 그러나 우리나라 수학과 교육과정에서는 ‘삼각형 세 각의 크기의 합’이 180°가 되는 것을 확인하는 것에 초점이 맞추어져 있다. 왜 삼각형 세 각을 더하거나 모아야하는지 그 필요성을 충분히 인식한 다음 구체적 조작 활동을 통해 모든 삼각형의 세 각의 크기의 합은 같다는 공통점을 발견하고, 그것을 측정했을 때 180°라는 값이 나온다는 순서로 학습할 수 있도록 수학과 교과서 활동을 구성해 볼 필요가 있다. 예를 들어 세 각을 자르고 모으는 아이디어를 떠올릴 수 있도록 점선을 활용한다면 삼각형의 공통점을 발견하는데 도움이 될 수 있다.

둘째, 삼각형의 세 각의 크기의 합을 지도하기 위해 창의적으로 추론할 수 있는 다양한 활동에 대한 연구가 필요하다. 교과서에서 제시하고 있는 세 각의 크기를 재어서 더하는 활동과 각을 오려서 한 곳에 모으는 두 활동 간의 연계성이 부족하다. 이를 보완하기 위해 교사용 지도서에 제시된 방법으로, 연필을 삼각형의 세 꼭짓점으로 이동하면서 각각의 내각만큼 연필을 회전하여 그 회전하는 각을 합하는 방식을 추가적으로 고려할 수 있다. 또한 교육과정 개정 시기에 따라 수학 교과서에서 제시하고 있는 활동의 변화는 두 가지 활동이 제시된 순서의 차이만 있을 뿐 본질적으로 활동이 달라진다거나 새로운 활동은 추가된 역사가 없다. 변화하지 않고 유지되어 온 교수·학습 방법만으로는 미래 사회가 요구하는 수학적 사고력을 기르는데 한계가 있다. 변화하는 미래 사회에 능동적으로 대처할 수 있는 인재를 기르기 위해 창의적 수학 교육이 필요한데, 이를 위해서 다양한 활동의 개발이 필요하다.

셋째, 각의 크기를 측정해서 더해보자는 아이디어를 떠올려도 각의 크기를 정확하게 측정하지 못하면 삼각형의 세 각의 크기의 합이 일정하다는 사실을 발견할 수 없다. 따라서 학생들의 실측 능력을 함양시키기 위한 방법과 수학 교과서 구성에 대한 연구가 필요하다. 혹은 공학적 도구를 활용한 수학 수업을 통하여 보다 직관적으로 삼각형의 세 각의 크기의 합이 일정하다는 사실을 발견할 수 있도록 공학적 학습 자료의 지원이 필요하다.

초등학생은 조작적 활동을 통해 수학적 지식을 이해하기 때문에, 활동의 수준은 수학 학습의 질로 연결된다. 이러한 추론 과정에 대한 연구는 2022 개정 교육과정의 ‘도형과 측정’이라는 하나 영역 속에서 ‘삼각형의 세 각의 크기의 합’을 어떤 계열로 접근할 것인지 기초 자료가 될 것이다. 또한 교사들로 하여금 학생들이 추론을 하게 되는 동기의 요소들을 자극할 수 있는 방법에 대해 시사점을 줄 수 있고, 추론 교육을 활성화할 수 있도록 하는 교수·학습 자료 개발에 도움을 줄 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김정하(2019). 삼각형 세 내각의 크기의 합과 관련 교과서 분석 및 지도방안 연구. 학습자중심교과교육연구, 19(7), 141-159.

김지현, 김상미(2022). 수학과 교육과정과 교과서에 제시된 ‘삼각형의 세 각의 크기의 합’. 교육연구, 85, 49-69.

교육과학기술부(2007a). 수학과 교육과정. 국가교육과정정보센타 홈페이지.

교육과학기술부(2007b). 수학과 교육과정 해설서. 국가교육과정정보센타 홈페이지.

교육과학기술부(2010). 수학 4-1. ㈜두산동아.

교육부(2021). 2022 개정 교육과정 총론 주요사항[시안]. 교육부[교육과정정책과]

교육부(2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8].

교육부(1992). 국민학교 교육과정. 국가교육과정정보센타 홈페이지.

교육부(1996). 수학 4-2. 국정교과서주식회사.

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1997-15호 [별책 8].

교육부(2011). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2011-361호 [별책 8].

교육부(2014). 수학 4-2. (주)천재교육.

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

남승인(1999). 초등수학교육에 있어서의 추론 방법. 수학교육 논문집, 8, 45-63.

서동엽(2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. 대한수학교육학회지, 13(2), 159-178

성창근(2006). 소집단 문제해결 과정에서 나타나는 6학년 학생들의 수학적 추론 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

오영열, 박주경(2020). 삼각형과 사각형의 내각의 합 지도에서 측정 오차의 활용 방안. 한국초등교육, 31(1), 143-156

이상해(2004). 소집단 활동에서 나타나는 초등학생의 수학적 추론 분석. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

임재훈(2009). 삼각형의 내각의 합: 180˚, 2직각, 평각, 불변성. 과학교육논총, 22(1), 23-35.

정길현(2018). 초등수학영재의 귀납적 추론과 연역적 추론 능력 실태 분석. 광주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

표형대(2020). 2015 개정 수학과 교과서 추론과제 및 정당화 내용 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

홍갑주, 강정민(2017). 초등학교 수학 교과서의 이해에 유클리드 원론이 주는 시사점. 초등수학교육, 20(1), 117-130.

홍갑주, 오성훈(2018). 초등학교 수학에서 삼각형의 내각의 합의 도입과 설명 방법. 초등수학교육, 21(1), 75-91.

Anna, H. & Andreas, D. M. (2013). SURFER in math art, education and science communication. In G. W. Hart & R. Sarhangi (Eds.). *Proceedings of Bridges 2013: Mathematics, music, art, architecture, culture* (pp. 271-278). Tessellations Publishing.

KEDI (2012). *21st century skills - Learning for life in our times* (translation of the book by Bernie Trlling and Charles Fadel, JOSSEY-BASS PUBLISHR, 2009), Hak-Ji Sa.

Lang, V., Lee, S.-G. & Lee, J. (2014). A mobile, open-source 2D and 3D printing graphic Creation CAS tool of mathematics courses. *Journal of US-China Education Review A, 4*(8), 569-580.

Means, T. B., Jonassen, D. H., & Dwyer, F. M. (1997). Enhancing relevance: Embedded ARCS strategies vs. purpose. *Educational Technology Research and Development, 45*(1), 5-17.

Moore, R. L.(1907). Geometry in which the sum of the angles of every triangle is two right angles. *Transactions of the American Mathematical Society, 8*(3), 369-378.

Van Drie, J., & Van Boxtel, C. (2008). Historical reasoning: Towards a framework for analyzing students' reasoning about the past. *Educational Psychology Review, 20*(2), 87-110.

An analysis of elementary students' reasoning on the sum of triangle angles

Kim, Ji Hyun
Hwahong Elementary School
E-mail : jenny12034@korea.kr

This study compared and analyzed students' reasoning processes and justification methods when introducing the concept of "the sum of angles in a triangle" in mathematics classes with a focus on both measurement and geometric aspects. To confirm this, the research was conducted in a 4th-grade class at H Elementary School in Suwon, Gyeonggi-do, South Korea. The conclusions drawn from this study are as follows. First, there is a significant difference when introducing "the sum of angles in a triangle" in mathematics classes from a measurement perspective compared to a geometric perspective. Second, justifying the statement "the sum of angles in a triangle is 180°" is more effective when explained through a measurement approach, such as "adding the sizes of the three angles gives 180°," rather than a geometric approach, such as "the sum of the angles forms a straight angle." Since elementary students understand mathematical knowledge through manipulative activities, the level of activity is connected to the quality of mathematics learning. Research on this reasoning process will serve as foundational material for approaching the concept of "the sum of angles in a triangle" within the "Geometry and Measurement" domain of the Revised 2022 curriculum.

* ZDM Classification : 97C30
* Key Words : mathematical reasoning, sum of three angles in a triangle, shapes, measurement