韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2024.38.1.69
제 38집 제 1호, 2024. 3. 69-92

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 38, No. 1, Mar. 2024. 69-92

# 등차수열 수업에서 나타나는 학생의 수학 주목하기

조 민 수 (판곡고등학교, 교사)
이 수 진 (한국교원대학교, 교수)†

본 연구는 수열에 대한 학생의 두 가지 인식을 바탕으로 고등학교 수열 수업에서 나타나는 학생의 수학 주목하기를 분석하였다. 구체적으로 수학 주목하기를 초점의 중심, 초점을 유발하는 상호작용, 수학 과제의 특징, 수학 활동의 본질의 네 가지 측면에서 분석하여 다음의 결과를 얻었다. 우선 초점의 중심 변화 양상은 ‘초점을 유발하는 상호작용’, ‘물질적 자원’, ‘수학 활동의 본질’ 중 어떤 한 구성요소만으로는 유일하게 묘사될 수 없었다. 다음으로 수학 주목하기 구성요소 간의 상호작용이 식별되었으며, 소집단 활동에서의 교사의 개별 피드백은 초점의 중심 형성에 영향을 주었다. 마지막으로 학생들은 동일 교실, 즉 동일 초점을 유발하는 상호작용, 물질적 자원, 수학 활동의 본질 내에서도 서로 다른 두 가지 추론 양상을 보였다. 본 연구가 마중물이 되어 수열에 대한 학생의 이해 연구가 더욱 활발히 진행되길 기대한다.

## Ⅰ. 서론

2022 개정 수학과 교육과정 개발의 강조점 중 하나는 ‘깊이 있는 학습’이다(교육부, 2022). 깊이 있는 학습을 추구한다는 것은 학습자가 학습 자료를 스스로 자신의 것으로 만들고 배운 것을 새로운 상황에 적용할 수 있도록 소수의 핵심 내용을 깊이 있게 배우는 것을 의미한다. 이를 위해 2022 개정 수학과 교육과정에서는 내용 체계에서 핵심 아이디어를 선정하였다. 핵심 아이디어는 2015 개정 수학과 교육과정의 ‘일반화된 지식’과 유사하며, 수학 교과의 핵심을 관통하여 일반화할 수 있는 내용을 진술한 것이다. 여기에는 학습자가 사고와 탐구를 통해 습득, 구성하고 일반화하여 전이시킬 수 있는 내용이 포함된다(이경화 외, 2022). 이러한 핵심 아이디어를 통한 깊이 있는 학습은 전이(Transfer) 이론에 기초를 두고 있다(한혜정 외, 2022).

전이는 교육학이 학문으로 인정받기 시작했던 20세기부터 수학교육을 포함한 교육의 전 영역에서 지속하여 관심을 가져온 주제이다(이수진, 신재홍, 2022). 이 중 Lobato의 행위자 지향적 전이(actor-oriented transfer: AOT) 관점은 관찰자에서 행위자의 관점으로 전환하여 전이 현상을 정의한 점(이수진, 신재홍, 2022)과 전이를 개인 인지뿐 아니라 물질적 그리고 사회, 문화적으로 분포된 현상(distributed phenomena)으로 본다는 점(Lobato et al., 2013)이 특징이다.

나아가 Lobato 외(2013)의 연구에서는 수업 내에서 전이 현상을 체계적으로 설명하기 위해 ‘수학 주목하기’라는 용어를 사용하였다. Lobato와 그의 동료들은 수학 주목하기를 통해 수업 과정에서 학생들이 주목하는 수학적 대상이 이후 학생의 추론 과정에 어떻게 관련되는지를 확인하였다. 또한 학생 개인의 인지 차원과 교실과 같은 사회적 차원이 어떻게 결합할 수 있는지를 보여주었다. 이를 바탕으로 수학 주목하기는 학생이 수업에서 무엇에

* 접수일(2024년 2월 5일), 심사(수정)일(2024년 3월 11일), 게재확정일(2024년 3월 19일)
* MSC2000분류 : 97D99
* 주제어 : 수학 주목하기, 학생의 이해, 수열
* 이 논문은 제1저자의 석사학위 논문 일부를 재구성하고 수정 및 보완하여 작성한 것임
† 교신저자 : sjlee@knue.ac.kr

그리고 어떻게 수학적으로 주목하는지 대한 타당한 설명을 제공할 수 있다.

학교에서의 수학 학습은 특정 교육 맥락에서 진행될 수밖에 없는데, 이는 연구에 있어 학생 개인의 심리뿐 아니라 교실이라는 사회적 차원을 함께 살펴볼 필요성을 제기한다. 이에 본 연구에서는 수학 주목하기 이론이 교실 수준에서 학생의 수학 학습을 집단적 활동과 연계하여 분석하는데 더 적합하다고 판단하였다. 또한 본 연구는 수학 학습에 있어 교실 속 상호작용, 사회 규범과 같은 사회적 차원의 역할을 설명하는 것이 학교 현장에 더 많은 시사점을 제공할 수 있다고 보았다.

주목하기 또는 수학 주목하기를 이론적 기반으로 하여 수행된 국내 연구는 주로 예비교사 혹은 교사를 대상으로 한 연구(예: 김희정, 2022; 이진아, 이수진, 2019; 조형미, 이은정, 2021; 지현옥, 2021; 최윤형, 이수진, 2023)가 많고 학생을 대상으로 한 연구(예: 이유진, 2023)는 부족한 편이다. 이 중 이유진(2023)의 연구는 학생 개개인에 대한 초점의 중심이 아닌 전체 학생들의 경향성에 따른 초점의 중심을 분석했다는 점에서 본 연구와는 구별된다.

한편, 수열 학습에 있어 학생의 수학 주목하기를 살펴볼 필요성이 있다. 그 이유는 학생이 수열과 함수의 연결성에 얼마나 주목하는지를 분석하면 학생이 수열을 순서가 있는 수의 나열로만 인식하는지 혹은 수열을 정의역이 자연수인 함수로도 인식하는지 판단할 수 있기 때문이다.

국외 선행연구에서는 학생들에게 ‘수열은 공식을 가져야 한다(Sierpinska, 1990).’, ‘수열은 수의 나열이다(Mamona, 1990; McDonaldet al., 2000).’와 같이 수열을 순서가 있는 수의 나열로 이해하는 관점이 지배적으로 드러났다. 하지만 대학 수학에서 엄밀하게 수열을 정의역이 자연수 집합인 함수(정동명, 2022)라고 정의한다는 것을 고려하면, 고등학교 수업에서 학생에게 수의 나열로만 수열을 이해하는 것에서 나아가 수열을 함수의 일종으로 이해할 기회가 제공될 필요가 있다.

하지만 Przenioslo(2005, 2006)의 연구에 따르면 학생들이 수열을 순서가 있는 수의 나열로만 이해하는 원인 중 하나로 등차, 등비수열과 같이 비교적 일정한 규칙이 있는 제한된 수열의 예시만을 다루는 학교 수업을 지적하였다. 이에 본 연구는 수열을 함수로 보는 것을 강조하는 수업 사례를 분석하는 것이 학생에게 수열을 함수로 볼 수 있는 기회를 제공하는 교실 자원과 교사의 상호작용 등과 같은 시사점을 도출할 수 있다고 보았다.

수열은 초등학교의 규칙성 영역에서부터 중학교의 함수, 고등학교의 수열의 극한 그리고 대학 수학의 미적분까지의 계열성에 있어 핵심 개념이라 볼 수 있다(교육부, 2015; 김연, 김동원, 2022). 그러나 수열과 관련된 국내 연구는 규칙성, 함수, 수열의 극한을 주제로 한 연구에 비해 부족한 편이었다. 더구나 주된 연구 방법은 검사지를 활용한 연구(김연희, 황우형, 2011; 박다슬, 2017; 장현석 외, 2020; 홍진곤, 김윤경, 2008; Przenioslo, 2005; 2006)로 수학 수업에서 교사와 학생의 상호작용을 통해 각 주체가 수열 학습에서 어떤 것에 주목하는지, 어떻게 자신의 이해를 발달시켜나가는지 면밀하게 살펴보기에는 아쉬움이 있다.

본 연구의 목적은 학생의 수학 주목하기가 어떠한지를 살펴보고 이 과정에서 수학 주목하기의 특징을 도출하는 것이다. 이를 위하여 본 연구에서는 고등학교 수열 수업에서의 학생을 참여자로 선정하여 이들이 교실에서 수학적으로 주목하는 대상이 무엇이고 이에 어떻게 접근하게 되었는지, 또 수학 주목하기 측면에서 어떤 특징이 있었는지 면밀하게 살펴보았다. 이를 통해 본 연구는 학생의 수학 주목하기의 특징을 조망하고 체계적인 시사점을 모색하기 위한 기초적인 논의를 제공할 수 있다. 연구 목적에 따른 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 학생의 수학 주목하기는 어떻게 조직되어 수열 수업에서 나타나는가?

둘째, 수열 수업에서 학생의 수학 주목하기 구성요소의 특징은 어떠한가?

# Ⅱ. 연구의 배경

## 1. 수학교육의 이론적 배경

### 가. 수학 주목하기(Mathematical Noticing)

Lobato와 그의 동료들은 '수학 주목하기'라는 용어를 수업 상황에서 학생의 전이를 설명하기 위해 사용하였다. 수학 주목하기는 여러 정보원(source of information)이 학생의 관심을 끌기 위해 경쟁할 때, 특정 수학적 특징이나 규칙성을 선택하고 해석하고 작업하는 것이다(Lobato et al., 2013). 이때 수학적 특징이나 규칙성에는 지각적 대상(예: 경사로)과 개념적 대상(예: 비율)이 모두 포함되는데, Lobato 외(2013)에서는 이를 초점의 중심이라고 개념화하여 더 면밀하게 관찰하였다.

한편 Lobato 외(2013)의 연구는 수학 주목하기가 개인 인지 차원뿐 아니라 사회적 차원, 문화적 차원에 걸쳐 분포하는 현상으로 보는 인식론을 바탕에 둔다. 수학 주목하기를 교실에 분포된 현상으로 본다는 것은 수학 학습에 있어 학생의 개인적 측면과 교실의 사회적 측면이 어떻게 결합할 수 있는지에 대한 타당한 설명을 제공할 수 있게 된다(이수진, 신재홍, 2022). 또한 교실의 사회적 차원이 수학 학습에 어떻게 영향을 미치는지 살펴보며, 교사가 교실 내 다양한 사회적 자원을 효과적으로 활용하는 데 유용한 시사점을 얻을 수 있다.

Lobato 외(2013)의 연구는 교실의 사회적 측면으로 초점을 유발하는 상호작용(Focusing interaction), 수학 과제의 특징(Task features), 수학 활동의 본질(Nature of mathematical activity)을 보고하였다. 그리고 교실의 사회적 측면에 학생의 개인적 측면을 합하여 이들을 '초점 분석틀(Focusing framework)'로 정리하여 제시하였다. 초점 분석틀은 수학 교실의 복잡한 현상을 개인의 인지, 상호작용, 물질적 자원, 교실 규범의 4가지 측면에서 체계적으로 살펴볼 수 있는 이론적 틀을 제공한다고 볼 수 있다. 초점 분석틀의 각 구성요소에 대한 설명은 다음과 같다.

첫째, 초점의 중심은 개별 인지의 주체(예: 교사, 학생) 차원과 교실이라는 집단의 수준 차원 모두에서 유효한 개념(이수진, 신재홍, 2022)으로, 인지의 주체가 주목하는 수학적 성질 및 규칙성이다. 초점의 중심은 수학 주목하기의 결과물(Lobato et al., 2012)로 연구자에게 포착되는데, Lobato 외(2013)의 연구에서는 이를 초점의 중심으로 표현하였다. 그리고 초점의 중심이 이동하고 변화하는 과정을 전이의 증거로 채택하여 학생들이 앞서 수학적으로 주목하는 것이 그들의 후속 추론에 영향을 미칠 수 있다고 주장하였다. 둘째, 초점을 유발하는 상호작용[1]은 사회적 상호작용 차원의 구성요소 중 하나로, 특정 초점의 중심을 일으키는 말과 행동, 다이어그램 등을 포함하는 교사와 학생, 학생과 학생 간의 담화의 실행(Discursive practice)이다(이수진, 신재홍, 2022). 선행연구에서는 하이라이팅(Lobato et al., 2013), 이미지화하기(이진아, 이수진, 2019), 양적 대화(최윤형, 이수진, 2023; Lobato et al., 2013) 등이 보고되었다. 셋째, 수학 과제의 특징은 물질적 자원 차원의 구성요소 중 하나로, 초점의 중심이 출현할 기회를 제공하거나 제한할 수 있다(Lobato et al., 2013). 수학 과제는 수업에서 빈번하게 사용되는 자원으로, 수학 개념을 지도하기 위한 매개체이며, 수학적 논의를 위한 배경을 형성할 수 있다(Stein et al., 2008; Sievert et al., 2021). 넷째, 수학 활동의 본질(Nature of mathematical activity)은 학생과 교사의 행동을 관장하고 초점의 중심이 출현하도록 이끄는 데 기여하는 교실 관행으로, 이수진, 신재홍(2022)에 의하면 수학 활동의 본질은 Cobb의 교실 사회 규범(Classroom Social Norms)에 대응시켜 볼 수 있다. 교실 사회 규범의 예로는 교실에서 교사와 학생 중 누구에게 발언권이 있는지, 어떤 종류의 기여가 가능한지, 다른 사람이 제시한 설명을 이해하려고 시도하는 것 등이 있다(Cobb & Yackel, 1996).

---

[1] 본 연구에서 식별된 초점을 유발하는 상호작용은 연구 방법에 자세하게 기술하였다.

### 나. 수열

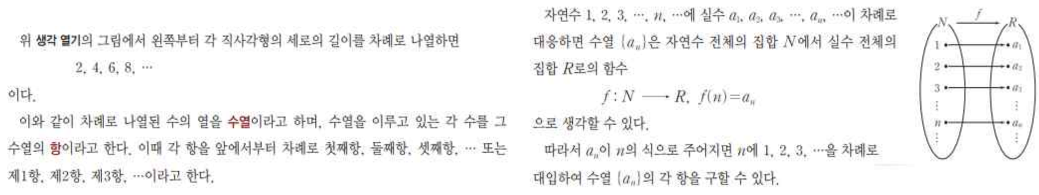
고등학교의 ‘수열’ 단원은 초등학교의 ‘규칙성’ 단원, 중학교의 ‘함수’ 단원과 계열적으로 연결된다(김연, 김동원, 2022). 이후 수열 개념은 수열의 극한을 연결고리로 하여 미적분 학습의 바탕이 된다(교육부, 2015). Przenioslo(2005, 2006)의 연구에 의하면 수열에 대한 학생의 인식은 크게 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 수열을 함수로 보는 경우로 구분된다. 장현석 외(2020)는 Przenioslo(2005, 2006)의 연구를 <표 Ⅱ-1>과 같이 정리하였다. 함수로 보는 경우는 수열의 정의를 정확하게 알고 수열의 정의역을 자연수의 부분집합으로 이해하며, 수열은 무한이어야 한다고 인식하는 것이다. 반면 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우는 단조함수이거나 항 사이의 차이가 일정한 것처럼 수열은 규칙적이어야 하며, 항들은 공식을 형성해야 한다고 인식하는 것이다.

본 연구에서는 Przenioslo(2006)의 수열에 대한 학생의 두 가지 인식을 차용하되, 구체적인 내용은 본 수업 사례에 맞춰 재구성하였다. 예를 들어 함수로 보는 경우에서 ‘수열의 정의를 정확하게 알고 정의를 능숙하게 사용하는 경우’에 대해 본 연구에서는 교육과정 내의 일차함수와 이차함수의 성질을 알고 이를 활용하여 문제를 해결하는 것으로 보았다.

<표 Ⅱ-1> 수열에 대한 학생의 두 가지 인식(Przenioslo, 2006, 장현석 외, 2020에서 재인용)

| 구분 | 내용 | |
|---|---|---|
| 함수로 보는 경우 | • 수열의 정의를 정확하게 알고 정의를 능숙하게 사용하는 경우<br>• 수열의 정의를 정확하게 알지만, 정의 사용에 미숙한 경우<br>• 수열은 무한이어야 한다고 인식하는 경우<br>• 수열의 정의역을 자연수의 부분집합으로 보는 경우 | |
| 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우 | • 크거나 작은 관계가 있다.<br>• 단조함수이어야 한다.<br>• 항 사이의 차이는 같다.<br>• 항들은 공식을 형성해야 한다. | • 규칙적이다.<br>• 수의 목록이다.<br>• 어떤 조화가 있어야 한다. |

국외 선행연구에 따르면 수열을 수의 나열로 보는 것에만 주목한 학생들은 ‘수열은 공식을 가져야 한다(Sierpinska, 1990).’, ‘수열은 수의 나열이다(Mamona, 1990; McDonaldet al., 2000).’와 같이 수열에 대한 제한된 이해를 보였다. 또한 Przenioslo(2005, 2006)는 수열을 이미 학습한 중등학교 영재학생과 대학생조차 수열을 순서가 있는 수의 나열로만 이해하는 경향이 있다고 보고하였다. 위와 같이 수열을 함수로 보지 않고 순서가 있는 수의 나열로만 이해한 학생들은 수열에 대한 편향된 개념 이미지를 형성할 수 있다(Sierpinska, 1990). 대학 수학에서 수열을 정의역이 자연수 집합인 함수라고 정의한다는 것을 고려하면(정동명, 2022), 수열에 대한 편향된 개념 이미지는 추후 수학 학습에 어려움을 야기하는 원인이 될 수 있다. 따라서 수열에 대한 두 관점에 대해 균형 있는 학습이 요구된다.


위 **생각 열기**의 그림에서 왼쪽부터 각 직사각형의 세로의 길이를 차례로 나열하면

2, 4, 6, 8, ⋯

이다.

이와 같이 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라고 하며, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다. 이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, ⋯ 또는 제1항, 제2항, 제3항, ⋯이라고 한다.

자연수 1, 2, 3, ⋯, $n$, ⋯에 실수 $a_1$, $a_2$, $a_3$, ⋯, $a_n$, ⋯이 차례로 대응하면 수열 $\{a_n\}$은 자연수 전체의 집합 $N$에서 실수 전체의 집합 $R$로의 함수

$$f : N \longrightarrow R,\ f(n)=a_n$$

으로 생각할 수 있다.

따라서 $a_n$이 $n$의 식으로 주어지면 $n$에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구할 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 수열에 대한 두 가지 관점이 반영된 교과서 설명

한편, 수열은 수학 과목에서 처음 다뤄지는데, [그림 Ⅱ-1]과 같이 교과서의 수열 도입 부분에서 수열에 대한 두 관점을 모두 찾아볼 수 있다. 또 [그림 Ⅱ-2]와 같이 교사용 지도서에는 학생들이 수열을 함수의 일종으로 이해하도록 지도하는 방안이 제시되어 있다. 이는 교육과정에서도 수열에 대한 두 관점을 균형 있게 제시하고자 하는 것으로 이해해볼 수 있다.


지도 Tip

등차수열의 모든 항은 첫째항 $a$와 공차 $d$로 표현될 수 있고, 공차가 0이 아닌 등차수열의 일반항은 $n$에 대한 일차식으로 나타내어짐을 알게 한다. 이때 $n$의 계수가 등차수열의 공차임을 파악하도록 한다.

• 등차수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라고 하면

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = pn^2+qn \ (p, q\text{는 상수})$$

의 꼴로 나타내어지므로 공차가 0이 아닌 등차수열의 합은 $n$에 대한 이차식으로 표현됨을 알게 한다.

[그림 Ⅱ-2] 고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서 수열 단원 지도상의 유의점(류희찬 외, 2018, p. 187)

수열에 대한 국내 선행 연구로는 수열의 수학적 용어, 기호에 대한 학생들의 이해 수준을 분석한 연구(김연희, 황우형, 2011), 수열에 대한 오개념과 선행학습에 관한 연구(김동현, 2013), 수열 단원 문제해결에서 보여지는 학생들의 대수적 사고 양식과 일반화 수준을 분석한 연구(박다슬, 2017), 수열에 대한 인식과 수열의 극한에 대한 인식 간의 연결성을 확인한 연구(장현석 외, 2020), 수열 단원에서 개방형 과제의 특징을 분석한 연구(오영석, 김동중, 2023) 등이 있다. 앞선 연구들은 방법론적으로 주로 검사지를 활용하여 학생 개인의 이해를 면밀하게 조사하였다. 이는 학생의 이해를 면밀하게 살펴볼 수 있는 이점이 있지만, 학생이 교실의 사회적 차원과의 상호작용을 통해 수열 학습에서 어떤 부분에 주목하고 자신의 이해를 어떻게 발전시켜 나가는지를 세밀하게 파악하기에는 어려움이 있다.

따라서 본 연구에서는 수학 주목하기 렌즈를 채택하여 수열 수업 내에서 학생이 수학적으로 무엇에 어떻게 주목하는지, 학생의 이해가 사회적 차원과 어떻게 상호작용하면서 발전하고 변화하는지를 면밀하게 확인해보고자 한다.

## 2. 연구 방법

본 연구는 고등학교 수열 수업에서 나타나는 학생의 수학 주목하기를 면밀하게 분석하기 위해 질적 사례연구를 채택하였다. 사례연구는 실제 맥락에서 드러나는 특정 현상을 심층적으로 분석하는 데 적합한 연구 방법이다(유기웅 외, 2012).

### 가. 연구 참여자

본 연구는 수열 단원에서 학생의 수학 주목하기를 보고자 하였기에 고등학교 2학년 학생들을 대상 학년으로 선정하였다. 그리고 본 연구의 목적에 부합하는 연구 대상을 교사, 학급, 학생 순으로 선정하였다.

#### (1) 교사 선정

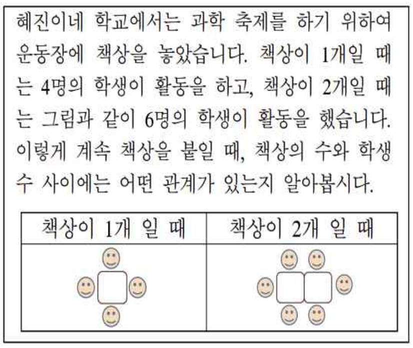
면담을 통해 수열을 함수로 보는 이해를 반영한 수업을 계획하고 있던 교사(이하 김교사)를 연구 참여자로 선정하였다. 연구 당시 김교사의 교직 경력은 11년이고 이 중 5년간은 정규수업에서, 3년간은 비정규수업(예: 방

과후수업)에서 등차수열 단원을 지도한 경험이 있었다. 김교사가 근무했던 고등학교의 학력 수준은 중위 수준에 속하였다.

본 연구에서 김교사의 수업을 사례로 선정한 이유는 다음과 같다. 김교사의 수열을 함수로 보는 이해를 강조한 수업 사례는 국내에 보고된 적 없는 독특한 수업 사례로, 이 사례를 분석하여 학생의 이해에 영향을 줄 수 있는 교실의 자원과 상호작용 등의 측면에서 시사점을 얻을 수 있기를 기대하였다. 또한 김교사는 평소 의사소통이 활발한 수업 분위기 조성과 학생 참여 수업을 지향하였기에, 김교사의 수업에서 학생의 수학 주목하기가 잘 드러날 것으로 기대하였다.

(2) 학급 선정

학급 선정을 위해 연구 참여 교사가 수업하는 고등학교 2학년 3개 학급의 학생 전체를 대상으로 사전검사를 실시하였다. 사전검사 문항은 총 2개의 문항으로 구성하였다. 구체적으로 등차수열의 선행학습 여부를 예/아니오로 답하는 진위형 1문항과 패턴의 일반화 과제 1문항이다([그림 Ⅱ-3] 참고). 수열에 대한 선행학습 여부를 조사한 이유는 학생이 보여준 이해가 교실의 상호작용을 통한 것인지 개인의 인지에 의한 것인지를 파악하기 위함이었다(Lobato et al., 2013). 또 패턴의 일반화 과제를 활용한 이유는 학생의 수열과 함수에 대한 선행 지식을 파악하기 위함이었다. 특히, [그림 Ⅱ-3]의 과제를 선정한 이유는 낮은 문턱의 과제로, 학생들이 비교적 쉽게 접근할 수 있는 과제라고 보았기 때문이다. 비슷하게 김연, 김동원(2020)의 연구에서도 패턴의 일반화 과제를 이용하여 수열에 대한 초등 예비교사의 지식을 확인하였다.


혜진이네 학교에서는 과학 축제를 하기 위하여 운동장에 책상을 놓았습니다. 책상이 1개일 때는 4명의 학생이 활동을 하고, 책상이 2개일 때는 그림과 같이 6명의 학생이 활동을 했습니다. 이렇게 계속 책상을 붙일 때, 책상의 수와 학생 수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아봅시다.

| 책상이 1개 일 때 | 책상이 2개 일 때 |
|---|---|
| | |

[그림 Ⅱ-3] 패턴의 일반화에 대한 문항 (선우진, 방정숙, 2020에서 재인용)

사전검사는 약 10분간 연구 참여 교사에 의해 수업 시간 중 진행되었다. 응답지는 파일로 변형되어 연구진에게 전달되었다. 연구진은 사전검사의 응답을 무응답 및 해석 불가 항목의 수가 적고 다양한 전략이 드러난 답변을 중심으로 분류하였다. 이는 다양한 사고를 지닌 학생들이 속한 학급을 선정하기 위함이었다. 사전검사 분석을 기반으로 수업 분위기, 남녀 성비, 학생들의 선행학습 비율 등을 종합적으로 고려하여 1개의 학급을 최종적으로 선정하였다. 선정된 학급의 정원은 27명(남 13명, 여 14명)이었다.

(3) 학생 선정

선정된 학급에서 좀 더 면밀하게 관찰할 학생의 초점 집단 선정을 위해 제1 저자는 연구 참여 교사와의 협의를 통해 성별, 성적, 수업 참여도 등에서 학급을 대표할 수 있고 본인의 생각을 적극적으로 표현하는 활동적인 학생 5명을 최종 참여 학생으로 선정하였다. 참여 학생 중에는 수열 단원을 예습한 학생도 있었으나 수열을 함

수로 보는 관점에 대해서는 학습한 학생이 없었기에, 연구 진행에 무리가 없다고 판단하였다. 초점 집단 학생들의 전반적인 특징은 사전검사와 사전면담의 내용을 기반으로 확인되었고 <표 Ⅱ-2>와 같다. 소집단 활동에 있어 학생 A, E는 같은 모둠이고 학생 B, C, D는 같은 모둠이었다. 모둠 내의 활발한 상호작용은 있었으나, 두 모둠 간의 직접적인 상호작용은 없었던 것으로 보였다.

<표 Ⅱ-2> 연구 참여자 학생의 전반적인 특징

| | 전반적인 특징 |
|---|---|
| 학생 A | 남학생으로, 등차수열의 일반항과 등차수열의 합 공식을 알고 있었다. 또한 매체를 통해 수열이 정의역이 자연수인 함수로 볼 수 있다는 관점을 알고는 있지만 이에 대해 자세하게 학습하진 않아서 호기심을 지니고 있었다. 수업 중 교사의 질문에 적극적으로 대답하며, 교사와 호의적인 관계를 지니고 있어 보였다. 또 본인의 생각을 조리 있게 잘 표현하며, 모둠활동에서도 주변 학우를 적극적으로 가르쳐주는 모습이 자주 보였다. |
| 학생 B | 남학생으로, 등차수열의 일반항과 등차수열의 합 공식을 알고 있었다. 하지만 수열을 함수로 볼 수 있다는 사실을 전혀 인지하지 못한 상태였다. 사전검사와 형성평가 문제해결에 있어 정형화된 풀이보다는 자신만의 풀이법을 사용하였고, 학습에 있어 자신만의 방식이 뚜렷하게 존재하는 것처럼 보였다. 수업 중 자신을 드러내기 보다 성실하게 수업에 참여하며, 차분하게 모둠원(C, D)과 소통하는 모습이 자주 보였다. |
| 학생 C | 여학생으로 등차수열의 일반항과 등차수열의 합 공식을 알고 있었다. 하지만 수열을 함수로 볼 수 있다는 사실은 전혀 인지하지 못하였다. 본인의 생각을 조리 있게 전달할 줄 알고 필기 및 문제 풀이를 꼼꼼하고 깔끔하게 하는 성향을 지닌 것으로 보였다. |
| 학생 D | 남학생으로, 사전검사 과제의 풀이를 표로 나타냈으며 관계식으로 표현함에는 어려움이 있었다. 비교적 배움의 속도가 느리지만 수업 중 자신이 할 수 있는 부분에 대해서는 최대한 이해하고자 노력하는 모습이 자주 포착되었다. 소모둠 활동에 있어 학생 B와 상호작용이 많았다. |
| 학생 E | 여학생으로, 사전검사 과제의 풀이를 관계식($2n+2$)으로 나타냈지만 이에 대한 이유를 정확하게 설명하진 못했다. 본인의 생각을 표현함에 약간은 어려움을 느끼는 것으로 보였고 답안의 풀이 방식이 일관되지 않게 드러나는 특징이 있었다. 소모둠 활동에 있어 학생 A에게 도움을 많이 받은 것으로 보였다. |

### 나. 수업 설계

본 연구는 3차시의 등차수열 수업을 분석하였다. 김교사의 수업은 이미 사전에 설계된 것으로 연구진의 의견은 해당 수업 설계 및 실행에 반영되지 않았다. 매 수업(50분)은 교사 주도의 설명식 수업과 학생 참여형 수업이 적절하게 혼합되어 진행되었고 이러한 수업방식은 수학 활동의 본질과 초점을 유발하는 상호작용을 분석함에 용이하였다. 차시별 전반적인 수업 개요는 <표 Ⅱ-3>와 같다.

<표 Ⅱ-3> 차시별 전반적인 수업 개요

| | 차시별 전반적인 수업 개요 |
|---|---|
| 1차시 | '수열의 뜻'을 주제로 5분간 전 단원 복습, 15분간 교과서 정보 사냥, 23분간 모둠활동, 7분간 학급 논의 순으로 실행되었다. 교과서 정보 사냥은 학생들이 스스로 교과서를 보면서 활동지의 빈칸을 채우고 간단한 퀴즈를 푸는 형식이었고 모둠활동은 실생활 속 수의 나열을 표, 대응도, 기호 등 다양한 표현양식으로 나타내는 활동이었다. |
| 2차시 | '등차수열의 일반항'을 주제로 26분간 교사의 강의식 설명, 24분간 모둠활동으로 실행되었다. 교사는 강의식 설명에서 등차수열과 일차함수를 연결 짓고 등차수열의 예제를 일차함수의 성질을 이용하여 풀이하는 시범을 보였다. 학생은 교사의 설명을 들으며 활동지 앞장을 필기하였다. 모둠활동에서는 학생들이 활동지 뒷장의 문제들을 모둠원과 함께 논의하고 공유하였고 교사는 순회 지도하였다. |
| 3차시 | '등차수열의 합'과 '수열의 합과 일반항 사이의 관계'를 주제로 29분간 교사의 강의식 설명, 21분간 모둠활동으로 실행되었다. 교사는 강의식 설명에서 등차수열의 합과 이차함수를 연결 짓고 수열의 합이 주어진 경우, 일반항을 구하는 법과 일반항이 주어진 경우, 수열의 합을 구하는 법에 대해 시범 보였다. 학생은 교사의 설명을 들으며 활동지 앞장을 필기하였다. 모둠활동에서는 학생들이 활동지 뒷장의 8문항을 게임 형식으로 모둠원과 함께 논의하고 해결하였고 교사는 순회 지도하였다. |

### 다. 자료 수집 및 분석 방법

#### (1) 자료 수집

본 촬영에 앞서 1차시의 예비 촬영을 진행하여 교사와 학생에게 연구진의 존재를 익숙하게 하도록 하였고 연구진은 카메라 위치, 동선 등을 점검할 수 있었다. 수업은 매일 1차시씩 3일간 김교사에 의해 실행되었고 수업의 전 과정은 3개의 고정형 비디오와 1개의 이동식 비디오로 녹화되었다. 고정형 카메라는 총 3대로, 교실 전반을 비추는 카메라 1대와 두 모둠을 각각 비추는 카메라 2대였다. 이동식 카메라는 촬영 도우미를 통해 촬영되었다. 또 수업 중 김교사의 음성은 녹음기를 통해 녹음되었고 학생의 산출물(활동지, 연습장, 형성평가지)은 모두 수집되었다.

제 1저자는 모든 수업을 참관하면서 수업 관찰 일지를 작성하였고, 학생을 대상으로 사전 1회, 수업 후 3회 약 10분간 반구조화된 면담을 진행하였다. 학생의 사전, 사후 면담은 형성평가 문항을 바탕으로 진행되었고 가능하면 수업 직전, 직후에 즉각 실시하여 자료의 타당성을 높이고자 하였다. 형성평가는 매 차시 제1 저자에 의해 제작되어[2] 수업 종료 10분 전에 학생들에게 배부되었으며, 면담의 전 과정도 비디오로 녹화되어 분석에 활용되었다.

#### (2) 자료 분석

녹화된 수업 비디오 영상에서는 교사의 말과 행동, 판서(PPT 포함), 학생의 말과 행동 등이 분석의 대상이 되었다. 녹음기를 통해 녹음된 음성에서는 순회지도 상황에서 비디오 영상에 담기지 않은 김교사와 학생 간의 대화가 분석의 대상이 되었다. 또한 학생의 산출물, 수업 관찰 일지 그리고 수업 전, 후 학생의 면담 자료는 수업에서 보여지는 학생의 표현을 심층적으로 이해하기 위한 자료로 활용되었다.

자료를 분석하기 위해 연구진은 수집한 3차시 수업 영상을 교사 주도의 설명식 수업 장면과 학생 참여형 수업 장면으로 크게 구분하였고, 각 장면에서 교사가 설명을 시작하고 학생이 대답하는 것을 하나의 에피소드로 조직화해서 수업 장면을 해석할 수 있는 단위로 분리하였다. 이후 에피소드 안에 숨어 있는 패턴을 찾기 위해 주로 문헌 연구와 반복적 비교 분석법을 적용하였다. 구체적으로 문헌 연구를 통해 코딩의 큰 범주를 추출하였고 이후 반복적 비교 분석법을 통해 범주의 하위요소를 도출하였다. 반복적 비교 분석법의 과정은 '개방 코딩', '범주화', '범주 확인'으로 요약할 수 있다(유기웅 외, 2012).

위 절차에 따라 연구진은 수업과 면담 전사 자료를 반복, 비교, 대조하여 읽으면서 각 에피소드 속 교사와 학생의 말, 행동 등에서 드러나는 수학 주목하기의 4가지 차원을 코딩하였다(이진아, 이수진, 2019; 최윤형, 이수진, 2023; Lobato et al., 2013). 또 수학교육전문가 3명(박사 1명, 박사과정 2명)의 자문과 검토를 통해 코딩 결과의 타당도를 높이고자 하였다. 이를 통해 도출된 학생의 수학 주목하기의 4가지 차원과 그 구성요소에 대한 구체적인 분석은 다음과 같다.

첫째, 개인 인지 차원의 구성요소는 '초점의 중심'으로, 교실에서 학생이 수학적으로 주목하는 것으로 보이는 항목을 개방 코딩을 사용하여 분석되었다(유기웅 외, 2012; 이진아, 이수진, 2019; Lobato et al., 2013). 이 과정에서 3차시 수업 영상의 전사 자료와 형성평가 답변 그리고 사전, 사후 면담 내용이 분석 대상이 되었으며, 분석과정에서 수열에 대한 학생의 인식 연구(장현석 외, 2020; Przenioslo, 2005, 2006)와 현행 교과서, 교사용 지도서의 내용을 참고하였다. 분석이 진행됨에 따라 학생이 주목한 것으로 보이는 6개의 초점의 중심이 확인되었다(<표 Ⅱ-4> 참고). 이때, CoF1-1, CoF2-1, CoF3-1은 개방 코딩을 통해 CoF1-2, CoF2-2, CoF3-2은 문헌 연구를 통해 코드화되었다. CoF는 Center of Focus(초점의 중심)의 약자이며, '-'을 기준으로 앞의 숫자는 수업 차시를 의미하고 뒤의 숫자의 1은 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 관련된 초점의 중심, 숫자 2는 수열을 함

[2] 제1 저자는 김교사의 수업 의도와 김교사가 제작한 활동지를 참고하여 형성평가 문항을 제작하였다.

수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심임을 의미한다.

<표 Ⅱ-4> 각 차시 수업에서 보여지는 초점의 중심(CoF) 코드와 설명

| | 1차시 | 2차시 | 3차시 |
|---|---|---|---|
| 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우 | CoF1-1. 수열의 규칙성 파악<br><br>수열의 이웃한 두 항간의 규칙을 파악해보거나 수열의 모든 항에 성립하는 일반적인 규칙을 파악해본다. | CoF2-1. 등차수열의 항을 첫째항과 공차의 일차결합으로 표현<br><br>등차수열의 구체적인 항 혹은 일반항을 첫째항($a_1$)과 공차($d$)의 일차결합으로 표현한다.<br>예를 들어 제8항을 첫째항($a_1$)과 공차($d$)를 이용하여 $a_1+7d$로 나타내거나 등차수열의 일반항을 $a_1+(n-1)d$로 나타낸다. | CoF3-1. 등차수열의 합은 평균×항의 개수<br><br>등차수열을 나열하여 항 간의 대칭성을 파악하고 등차수열의 합을 평균×항의 개수로 이해하여 과제에 접근한다. |
| 수열을 함수로 보는 경우 | CoF1-2. 수열은 정의역이 자연수 집합인 함수<br><br>수열을 정의역이 자연수 집합인 함수로 생각하면 수열의 그래프는 이산적인 점들의 집합으로 볼 수 있다. 혹은 수열 $\{a_n\}$에 대하여<br>$n$의 값에 $1, 2, 3$을 대입하면 $a_1, a_2, a_3$가 각각 대응된다. | CoF2-2. 등차수열을 일차함수로<br><br>등차수열을 일차함수로 바라보고 일차함수의 성질을 이용하여 등차수열의 과제를 탐구한다. 구체적으로 등차수열의 공차를 일차함수의 기울기로 해석하고 '기울기'와 '한 점'이 주어지면 일차함수가 오직 하나로 결정되듯이 '공차'와 '한 항'이 주어지면 등차수열이 하나로 결정됨을 이용하여 일반항의 식을 구한다. 또 공차의 부호가 양수(음수)이면 등차수열을 오른쪽 위(오른쪽 아래)로 향하는 일차함수의 그래프로 해석하는 것을 포함한다. | CoF3-2. 등차수열의 합을 이차함수로<br><br>등차수열의 합을 이차함수로 바라보고 이차함수의 성질을 이용하여 등차수열의 합에 대한 과제를 탐구한다. 구체적으로 등차수열의 합은 최고차항의 계수가 $\frac{d}{2}$인 상수항이 없는 이차함수로 그래프의 개형은 위로 볼록한 또는 아래로 볼록한 곡선이며, 등차수열의 합의 그래프는 대칭성(대칭축)이 있음을 이해하는 것을 포함한다. |

둘째, 사회적 상호작용 차원의 구성요소는 '초점을 유발하는 상호작용'으로, 면담에서의 학생의 답변과 각 초점의 중심이 출현 되었다고 생각되는 장면에서 교사와 학생의 말과 행동을 분석의 대상으로 하여 분석되었다. 초점을 유발하는 상호작용에 대한 이론적 틀은 문헌 연구(김슬비, 2019; 김향숙 외, 2007; 이원주, 2021; 이진아, 이수진, 2019; Lobato et al., 2013)를 바탕으로 개방 코딩의 과정을 통해서 보다 정교화되었으며, 그 결과 코드는 <표 Ⅱ-5>와 같이 생성되었다.

셋째, 물질적 자원 차원의 구성요소는 '수학 과제의 특징'으로, 활동지 속의 과제[3]가 분석 대상이 되었다. 수학 과제는 학생의 주목에 영향을 주는 것으로 생각되는 수학적 특징을 분석하였다(최윤형, 이수진, 2023). 이때, 수열에 대한 학생의 두 가지 인식(<표 Ⅱ-1> 참고)을 활용하였다. 넷째, 교실 관행 차원의 구성요소는 '수학 활동의 본질'로, 에피소드 간 교사와 학생의 말과 행동 그리고 전반적인 교실 분위기에 초점을 두어 분석하였다.

[3] 구체적인 과제의 예시는 연구 결과에 보다 자세히 기술하였다.

추가로 형성평가 1번 문항(본인이 생각하기에 교사가 오늘 수업에서 강조한 핵심적인 수학 내용은 무엇이라고 생각하시나요?)에 대한 응답에서도 수학 활동의 본질에 대한 정보를 확인할 수 있었는데, 이 또한 분석의 대상이 되었다.

<표 II-5> 초점을 유발하는 상호작용 코드와 설명 그리고 예시

| 구분 | 설명 | 예시 |
|---|---|---|
| 하이라이팅 | 특정 대상을 강조하기 위해 기호 사용, 주석 달기, 색을 이용하여 구분하는 시각적인 행동 등을 통해 외부 현상에 대한 가시적 조작을 하는 것 | • 손으로 칠판의 판서를 가리키거나 손가락으로 TV 화면의 특정 부분을 지칭<br>• 색분필을 이용하여 시각적으로 중요성을 표시하거나 주석 달기<br>• 칠판에 화살표 기호(↕)를 사용하여 등차수열과 일차함수를 시각적으로 비교<br>• 손바닥으로 칠판이나 교탁을 쳐서 물리적으로 소리 냄<br>• 시각적 애니메이션(↺,+2)을 활용하여 TV 화면에 두 항간의 관계 표현 |
| 표현하기 | 지각한 것을 조직하기 위하여 실제적, 조작적, 시각적, 언어적, 기호적 표현을 통해 표상을 생산하고 분명히 설명하는 것 | • 수열을 언어, 수의 나열, 대응도, 그래프, 식으로 표현함<br>• 등차수열(의 합)을 좌표평면 위에 그래프로 표현함 |
| 반복 | 동일한 표현을 되풀이 하는 것을 포함하여 동일한 의미적 요소를 유사한 다른 단어로 바꾸어 말하는 것 | • 수열을 함수로 볼 수 있음<br>• 등차수열은 일차함수로 볼 수 있음<br>• 등차수열의 합은 평균×항의 개수임<br>• 등차수열의 합은 상수항이 없는 이차함수임<br>• 새롭다, 유용하다, 중요하다, 강조하고 싶다 등의 용어를 반복 사용 |
| 유도적 질문 | 교사가 학생들에게 특정한 답변이나 설명을 유도하는 것 | • 다 같이 ‘평균×항의 개수’라고 말해보자<br>• 수열은 뭐로 볼 수 있다? (함수)<br>• 등차수열의 합은 뭐라고? (상수항이 없는 이차함수)<br>• $a_4$는 $a_1$더하기 몇 $d$지? ($3d$) * ( )는 학생의 대답 |

## Ⅲ. 연구 결과 및 논의

### 1. 초점의 중심

이 장은 크게 수열에 대한 두 가지 인식에 따라 나뉘고 수업 차시별로 기술되었다. 이는 초점의 중심들이 크게 두 가지 인식으로 분류될 수 있음을 보다 잘 드러내기 위함이었다.

#### 가. 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 관련된 초점의 중심

(1) CoF1-1. 수열의 규칙성 파악

이 초점의 중심은 1차시 수업에서 참여 학생 모두에게 나타났고 교실 차원에서 지배적으로 드러났다. 활동지 과제에 대한 학생의 풀이에는 수열의 규칙을 파악하기 위하여 이웃한 두 항의 차이를 구해 보거나(B, C, D, E) 모든 항에 성립하는 일반적인 규칙(예: 소수의 나열)을 파악해보려는 시도(A)들이 보여졌다. 특히, 학생 E는 소수를 나열한 수열의 규칙을 파악할 때 이웃한 두 항간의 차이에 주목하는 전략을 사용하였지만, 소모둠 활동에서 학생 A와의 의사소통을 통해 수열의 모든 항에 성립하는 일반적인 규칙을 파악해보는 전략으로 주의가 옮겨

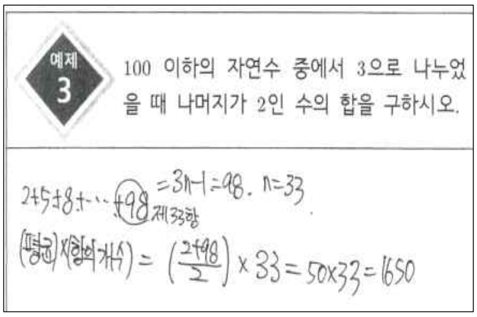
진 것으로 보였다. 또 전체 논의 시, 학생들은 일상 속 수열을 다양한 방법으로 표현하는 활동에서 이웃한 두 항 간의 규칙이 존재하는 수열(예 : $+6$씩 증가, $\times 3$씩 증가)의 예만을 다루면서 두 항 사이의 관계에서 주목하는 초점이 지배적으로 드러났다.

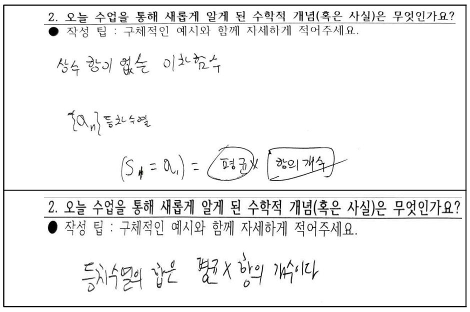
**(2) CoF2-1. 등차수열의 항을 첫째항과 공차의 일차결합으로 표현**

이 초점의 중심은 2차시 수업에서 참여 학생 모두에게 드러났으나 그 양상은 상이했다. 구체적으로 3명의 학생(A, B, C)은 관계적 이해를 바탕으로 등차수열 일반항 공식을 사용하거나 특정 항을 첫째항과 공차의 일차결합으로 표현하였다. 가령, 학생 C는 문제 풀이 과정에서 $a_8 - a_5 = 3d$이 성립하는 이유를 $a_8 - a_5 = \{a_1 + 7d\} - \{a_1 + 4d\} = (7-4)d = 3d$와 같이 설명하였다. 반면, 2명의 학생(D, E)은 등차수열에 대하여 등식 $a_m - a_n = (m-n)d$이 성립하는 이유는 모르는 채 암기한 규칙을 문제해결에 적용한 것으로 사후 면담을 통해 확인되었다. 가령, 학생 D는 $a_8 - a_5 = 3d$이 성립하는 이유를 8에서 5를 뺀 결과인 3에 공차 $d$을 붙이는 규칙으로 설명하였다.

**(3) CoF3-1. 등차수열의 합은 평균 × 항의 개수**

이 초점의 중심은 3차시 수업에서 참여 학생 모두에게 나타났고 교실 차원에서도 지배적인 루틴으로 보여졌다. 학생들은 김교사의 반복적인 설명과 강조를 통해 등차수열의 합을 평균과 항의 개수가 곱해진 것으로 재개념화하였고 이를 활용하여 과제를 해결하는 것으로 보였다. 구체적으로 [그림 Ⅲ-1]는 이에 대한 학생 A의 풀이로, 등차수열의 합을 평균(50)×항의 개수(33)로 나타낸 것이 확인된다. 또한 학생 D, E는 면담에서 교사가 오늘 수업에서 강조한 것 또는 본인이 수업을 통해 새롭게 알게 된 수학 내용(아이디어)이 무엇이냐는 질문에 등차수열의 합이 평균×항의 개수라는 것을 언급하였고 관련된 문제의 풀이에서도 이를 활용하고자 하는 모습이 포착되었다.




[그림 Ⅲ-1] 예제 3에 대한 학생 $S_1$의 풀이(왼쪽)와 학생 D, E의 형성평가 2번 답변(오른쪽)

**나. 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심**

**(1) CoF1-2. 수열은 정의역이 자연수 집합인 함수**

앞서 수업 전반에 걸쳐 드러난 CoF1-1과는 달리, 이 초점의 중심은 1차시의 특정 수업 장면과 특정 학생(A)에게만 뚜렷하게 포착되었다. 구체적으로 [그림 Ⅲ-2]와 같이 활동지의 빈칸에 ‘자연수’라고 적는 과제와 수열을 대응도로 표현해보는 장면에서 이 초점의 중심이 드러났다. 아래 발췌에 나타나듯이 학생 A는 수업을 통해 자신의 평소 생각을 발전시켰고 이는 학생에게 CoF1-2가 안정되게 형성되었다고 판단하는 근거가 되었다.

• 수열은 ( ㉥ )집합이 정의역인 함수로 볼 수 있다.

[그림 Ⅲ-2] 1차시 수업 활동지의 일부

면담자 : 2번에서는 이제 오늘 수업(그러니까 어제 수업)에서 새롭게 알게 된 내용이 무엇인지를 여쭤봤었는데요. 이제 어떻게 답변하셨죠?

학생A : 수열의 정의역은 이제 자연수이기 때문에 우리가 일반적으로 그리는 함수는 정의역이 실수임을 가정하고 푸는 건데 그렇게 돼버리면 이 수열하고는 안 맞기 때문에 수열을 함수로 나타낼 때는 대응표(도)로 나타낼 수도 있지만 그래프로 그릴 때는 점을 찍어서 나타낸다고 다시 생각하게 됐어요.

면담자 : 근데 이거를 교사가 알려줬었나요?

학생A : 아니요 그냥 좀 전에 제가 가지고 있던 생각과 어제 배운 거를 가지고 약간 추론해낸 그런 거...

면담자 : 어제 수업의 어떤 장면에서 이런 것을 생각해낼 수 있었어요?

학생A : 정의역 함수라고 내용물에 적혀 있었는데 거기서 저처럼 그래프는 그리지 않으시고 대응표를 그려서 함수로써 나타냈는데 그래서 거기서 저기서는 정의역이 딱 자연수니까 숫자들이 정확하게 정해져서 나와야 되는구나 그렇게 해서 알게 되었어요.

면담자 : 숫자가 정해져서 나온다는 게 무슨 뜻이죠?

학생A : 이게 정의역이 딱 하나로 제한이 되어 있고 그게 연속적인 게 아닌 딱 불연속적으로 하나씩 그러니까 그 자연수마다 하나씩 끊겨서 나온다는 말이었어요.

### (2) CoF2-2. 등차수열을 일차함수로

이 초점의 중심은 2차시 수업에서 교사의 설명 방식을 적극적으로 수용하고자 하는 세 학생(A, C, E)의 필기 및 문제 풀이 과정에서 포착되었다. 학생 C는 [그림 Ⅲ-4]의 문항에서 본인의 풀이 방식보다 일차함수의 그래프 성질을 통한 풀이 방식으로 비교적 간단하게 해결됨을 인지하면서 등차수열을 일차함수로 이해하는 방식에 대한 유용성을 느꼈다([그림 Ⅲ-3] 참고). 또 학생 D는 이유는 모르는 채 '공차 = 기울기 = $n$의 계수'임과 주어진 항의 값을 대입하여 등차수열의 일반항을 구하는 절차를 암기하여 문제 풀이에 활용하였다. 이는 등차수열의 일반항을 구하는 절차를 알고리즘적으로 학습한 도구적 이해 수준이지만, 일차함수의 개념과 연관시키고자 하는 노력으로 판단되어 초점의 중심 CoF2-2이 형성된 것으로 보았다.

2. 오늘 수업을 통해 새롭게 알게 된 수학적 개념(혹은 사실)은 무엇인가요?

● 작성 팁 : 구체적인 예시와 함께 자세하게 적어주세요.

오늘 수업을 통해 새롭게 알게 된 수학적 개념은 '매듭짓 문항 2번'에서 등차수열을 일차함수를 통해 표현함으로써 보다 쉽게 문제를 이해할 수 있다는 것을 새롭게 깨닫게 되었던 것 같다

[그림 Ⅳ-3] 학생 C의 2차시 형성평가 답변 중 일부

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = -15,\ |a_3| - a_4 = 0$$

일 때, $a_7$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25

④ 27 ⑤ 29

[2019 9월 모의평가]

[그림 Ⅳ-4] [그림 Ⅳ-3]의 2번 문항

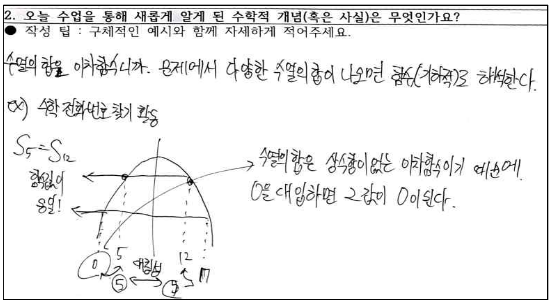
반면, 아래 발췌와 같이 학생 B는 수열을 함수로 이해하는 관점을 받아들이기보다 본인의 풀이 방식을 선호하였고 본 연구에서는 초점의 중심이 형성되지 않은 사례로 분석되었다.

면담자 : 선생님이 수열 함수로 보기를 강조했다고 본인이 느꼈죠?
학생B : 네
면담자 : 그래서 이것을 느꼈음으로 인해서 어떤 생각 방식이라든가 사고방식이 바뀐 부분이 있을까요?
학생B : 음 근데 저는 근데 제가 푸는 방식이 편해서 바뀌었다기보다는 사실 추가된 느낌이라고 해야 되나?
면담자 : 추가된 느낌?
학생B : 네 그렇죠. 서술형 쓸 때 이것도 쓰면 좋을 것 같다는 거지. 그냥 객관식 문제할 때는 제가 하는 방식대로 하는 게 더 좋을 것 같아서 저 방식을 사용하는 것 같아요.

### (3) CoF3-2. 등차수열의 합을 이차함수로

이 초점의 중심은 3차시 수업에서 학생 A와 C에게 주로 보였다. 교사는 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 지도하면서, 등차수열의 합이 최고차항의 계수가 이고 상수항이 없는 이차함수라는 점을 강조하였다. 일반적인 이차함수는 $ax^2+bx+c$ 꼴로 미지수가 3개이지만, 등차수열의 합의 경우에는 $\frac{d}{2}n^2+\bigstar\cdot n$ 꼴이므로 미지수가 2개이다. 따라서 공차($d$)를 알 때, $a_1=S_1$임을 이용하여 $n$의 계수만 구하면 된다고 지도하였다. 두 학생(A, C)이 교사가 소개한 방식을 적극적으로 과제 해결에 활용하는 장면과 이들의 형성평가 응답에서 이 초점의 중심은 잘 드러났다. 또 아래 발췌와 같이 학생 A는 형성평가에서 등차수열의 합을 함수로 보는 것에 대해 자신이 이해한 바를 서술하였다([그림 Ⅲ-5] 참고).

학생A : 수열의 합이 아까 상수항이 없는 이차함수라고 했는데 아까 이걸 가지고 문제를 만든 그 활동을 그러니까 이걸 가지고 문제를 만들어서 저희가 푸는 그런 활동이 있었는데 거기서 함수 수열의 합은 어쨌든 2차 함수이기 때문에 거기서 대칭성을 활용하여서 문제를 푸는 그거를 좀 새롭게 봤고요. 이거 가지고 앞으로 이런 문제 비슷한 문제 나오면 좀 유용하게 풀 수 있구나를 생각하게 되었습니다.




[그림 Ⅲ-5] 학생 A의 형성평가 답변의 일부

### 다. 초점의 중심의 변화 양상

수업에 따른 초점의 중심과 그 변화 양상은 [그림 Ⅲ-6]과 같이 정리할 수 있다. 표에서 기호 ○는 해당 초점의 중심이 해당 학생에게 나타났다는 것을 뜻한다. 또 음영 처리는 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심을 의미하며 음영 처리가 되지 않은 것은 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 관련된 초점의 중심을 의미한다. 또 화살표는 초점의 중심이 이동하였음을 의미한다.

| | 1차시 | | 2차시 | | 3차시 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | CoF1-1 | CoF1-2 | CoF2-1 | CoF2-2 | CoF3-1 | CoF3-2 |
| 학생 A | ○ | ○ | ○ → | ○ | ○ → | ○ |
| 학생 B | ○ | | ○ | | ○ | |
| 학생 C | ○ | | ○ → | ○ | ○ → | ○ |
| 학생 D | ○ | | ○ → | ○ | ○ | |
| 학생 E | ○ | | ○ | | ○ | |

[그림 III-6] 차시별 학생별 초점의 중심 변화 양상

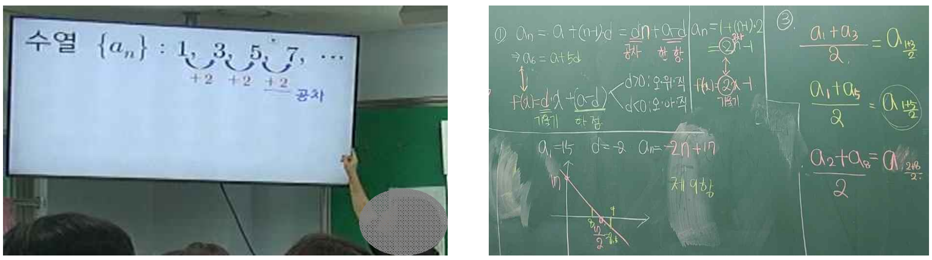
매 차시 수업에는 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우(CoF1-1, CoF2-1, CoF3-1)와 함수로 보는 경우(CoF1-2, CoF2-2, CoF3-2)와 연관된 초점의 중심이 1개씩 나타났다. 1차시의 두 초점의 중심 중 CoF1-1은 참여 학생 모두에게 나타났지만, CoF1-2는 학생 A에게만 나타난 특징이 있었다. 즉, 학생 A에게는 두 개의 초점의 중심(CoF1-1, CoF1-2)이 동시에 나타났다. 2차시의 경우, 초점의 중심이 CoF2-1에서 CoF2-2로 발전(예: 학생 A, C, E)되기도 하지만, CoF2-1에서 CoF2-2로 나아가지 못하고 머무르기도 하였다(예: B, D). 마찬가지로 3차시에서도 초점의 중심이 CoF3-1에서 CoF3-2로 발전되기도 하지만, CoF3-1에서 CoF3-2로 나아가지 못하고 머무르는 것이 사례로부터 확인되었다. 수열을 함수로 보는 초점의 중심이 출현하기 위해서는 선행하여 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 초점의 중심이 출현해야 하며, 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 초점의 중심이 출현했다고 하여 반드시 수열을 함수로 보는 초점의 중심 출현이 보장되지는 않았다.

### 2. 초점을 유발하는 상호작용

본 연구에서는 초점을 유발하는 상호작용의 하위요소로 하이라이팅, 표현하기, 반복, 유도적 질문을 식별하였다. 하이라이팅과 표현하기 전략은 교사와 학생이 모두 주체가 되어 사용한 의사소통 전략이었으나, 반복과 유도적 질문 전략은 주체가 대부분 교사로 제한되어 드러났다.

#### 가. 하이라이팅과 표현하기

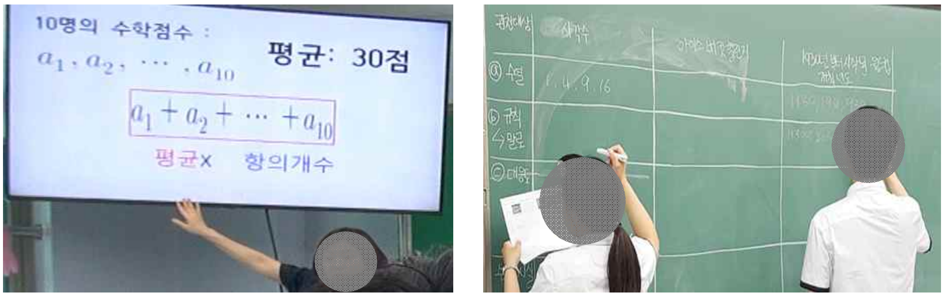
하이라이팅은 교사가 [그림 Ⅲ-7]과 같이 칠판의 판서와 TV 화면에 각각 색분필, 애니메이션을 통해 시각적으로 특정 수학적 개념에 학생들을 주목시키고자 할 때 드러났다. 구체적으로 화살표(↕, ↺)와 같은 기호 사용, 주석 달기를 통해 외부 현상에 대한 가시적 조작을 시도하였고 이 과정에서 반복적으로 손이나 손가락을 활용하여 특정 부분을 지칭하는 패턴을 보이기도 하였다. 이러한 시각적인 하이라이팅 전략들은 기존의 선행연구(김슬비, 2019; Lobato et al., 2013)에서도 보고된 바가 있는데, 나아가 본 연구에서는 교사가 손바닥으로 칠판이나 교탁을 쳐서 물리적 소리를 내어 청각적으로 학생들의 주목을 이끄는 하이라이팅 유형을 추가로 식별할 수 있었다. 하이라이팅 전략은 초점의 중심이 형성됨에 있어 많은 영향을 끼친 상호작용 중 하나로 분석되었다.




[그림 III-7] 2차시 수업의 TV 화면과 칠판 판서

표현하기는 강의식 설명 장면에서 교사의 말과 판서를 통해 드러났고 학생 참여형 수업 장면에서 학생들의 말과 풀이 공유를 통해 드러났다. 교사는 수열을 함수로 보는 관점을 강조하기 위해 수열을 대응도로 나타내보고 등차수열 또는 등차수열의 합을 좌표평면 위에 그래프로 시각적으로 표현하였다. 이는 함수를 시각적으로 표현하는 것이 함수를 쉽게 이해할 수 있는 방법 중 일부라는 Janvier(1987)의 견해와 일치한다. 그리고 교사는 [그림 Ⅲ-8]의 왼쪽 그림과 같이 등차수열의 합을 평균×항의 개수로 조작적으로 표현했으며, 수열의 규칙을 언어적(예: 3씩 증가한다), 기호적(예: $a_{n+1} = 3 \times a_n$)으로 표현하였다.

학생들은 수업 중 활동지를 채우고 과제를 해결하면서 자연스럽게 수열을 다양한 표상으로 표현하였고[4] 이는 칠판을 통해 학급에 공유하는 과정([그림 Ⅲ-8]의 오른쪽 그림 참고)에서 두드러지게 관찰되었다. 표현하기는 주로 수열을 다양한 표현양식으로 나타내어 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심 형성에 기여됨을 확인하였다.




[그림 III-8] 3차시 수업에서의 TV 화면과 1차시 수업에서의 칠판 판서

### 나. 반복과 유도적 질문

교사는 사전면담에서 수열을 함수로 보는 관점을 강조하는 수업을 설계하였다고 답하였는데, 이러한 교사의 의도가 반복, 유도적 질문을 통해 수업으로 표출되었다고 판단되었다. 1차시 수업에서는 '수열을 함수', 2차시 수업에서는 '등차수열을 일차함수', 3차시 수업에서는 '등차수열의 합을 평균 × 항의 개수 혹은 상수항이 없는 이차함수'라는 의미를 가진 표현을 되풀이하거나 유사한 다른 표현으로 바꾸어 말하였다. 이러한 반복은 유도적 질문을 통해서도 나타났는데, 교사가 학생들에게 '수열은 뭐로 볼 수 있다?', '등차수열은 무슨 함수라고?', '다 같이 00이라고 말해보자'라는 특정한 답변을 요구하는 질문을 하였다. 이 두 상호작용은 학생에게 사회적 참여와 학업적 직무를 촉진시키는 담화 전략(O'Connor & Michaels, 1993)으로, 수열을 함수로 보는 인식과 관련된 초점의 중심(CoF1-2, CoF2-2, CoF3-2) 출현에 영향을 미친 핵심적인 상호작용 중 하나로 판단되었다.

## 3. 수학 과제의 특징

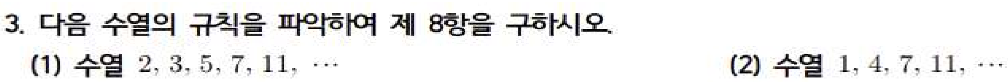
수학 과제는 시중 교과서나 참고서에서 흔히 접해볼 수 있는 예제, 모의고사 기출문제, 교사가 제작한 문제 등이었다. 수학 과제의 특징은 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 과제의 특징과 수열을 함수로 보도록 유도하는 과제의 특징으로 분석되었다. 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 과제는 3차시

4) 수열을 함수로 해석하는 측면을 강조한 김교사의 의도에 비춰본다면, Janvier(1987)의 표현양식 간의 번역 활동을 함수가 아닌 수열을 대상으로 진행한 것으로 판단된다.

수업 전반에 걸쳐 드러났고 수열을 함수로 보도록 유도하는 과제는 주로 1차시 수업에 집중되어 드러났다. 그 결과 전반적으로 학생들은 수열을 함수로 보는 경우보다 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 과제의 특징에 더 주목되었다. 추가로 본 연구에서 주목할만한 부분은 교사는 발문을 통해 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 과제의 특징을 수열을 함수로 보도록 유도하는 과제의 특징으로 변형시켰다.

### 가. 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 수학 과제의 특징

[그림 Ⅲ-9], [그림 Ⅲ-10], [그림 Ⅲ-11]과 같은 과제는 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 수학 과제의 특징으로 분석되었다. 즉, 이들은 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 관련된 초점의 중심 출현의 배경이 되었다. 구체적으로 [그림 Ⅲ-9]의 과제는 학생에게 규칙을 파악하여 수열을 나열하도록 주목을 이끌었고 [그림 Ⅲ-10]의 과제는 수열의 항 사이의 차이가 같고 항들은 공식을 형성해야 한다는 주의를 끌었다. 또 [그림 Ⅲ-11]의 과제는 등차수열의 합을 평균과 항의 개수의 곱으로 나타내어 항들은 어떤 조화가 있어야 한다는 집중을 이끌었다.




[그림 III-9] 1차시 수업에서의 과제 중 일부


[그림 III-10] 2차시 수업에서의 과제 중 일부


[그림 III-11] 3차시 수업에서의 과제 중 일부

### 나. 수열을 함수로 보도록 유도하는 수학 과제의 특징

[그림 Ⅲ-12], [그림 Ⅲ-13]과 같은 과제는 수열을 함수로 보도록 유도하는 수학 과제의 특징으로 분석되었다. 즉, 이들은 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심 출현의 배경이 되었다. 구체적으로 [그림 Ⅲ-12]의 과제는 수열은 함수의 일종으로, $n$에 $a_n$이 대응됨으로 $n$의 값에 적당한 수를 대입하여 수열의 특정 항을 구할 수 있음을 은연중에 인지하도록 도왔다. [그림 Ⅲ-13]의 과제는 수열을 수의 나열, 언어적 표현, 대응도, 관계식으로 다양하게 표현하도록 장려하였고 특히, 시각적인 대응도를 통해 수열이 함수의 일종이라는 사실에 학생들의 주목을 이끌었다.

**2. O, X를 판단하시오.**

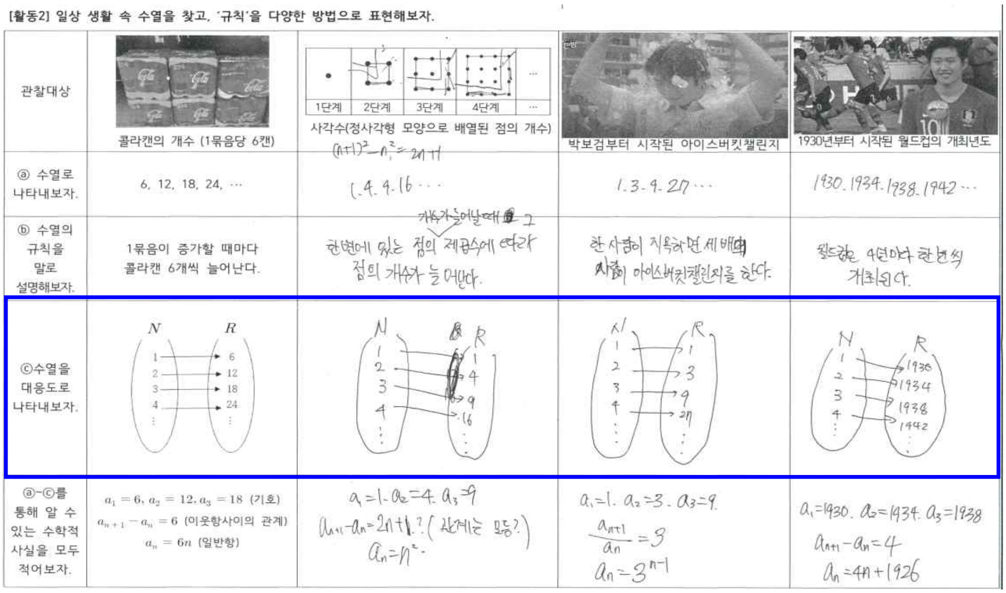
**(1) 수열 $\{a_n\}$에서 { }는 집합 기호를 뜻한다. ( )**

**(2) 일반항이 $a_n$이 $n$에 대한 식이면 $n$에 $1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다. ( )**

**(3) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = 2n+1$일 때, $a_5 = 11$이다. ( )**

**(4) 수열 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$에서 $a_{10} = \frac{11}{10}$이다. ( )**

[그림 Ⅲ-12] 1차시 수업에서의 과제 중 일부




[그림 Ⅲ-13] 1차시 수업에서의 학생 A의 활동지 중 일부

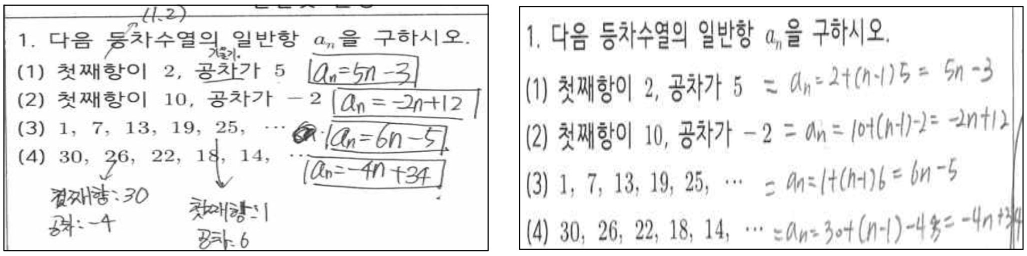
### 다. 변형된 수학 과제의 특징

본 연구에서는 김교사가 '수열을 함수로 해석해서 문제를 풀어볼까요?', '교과서의 풀이와 다르게 선생님이 설명한 방식으로 문제를 해결해볼까요?'와 같은 발문을 통해 수학 과제의 특징을 변형시켰다고 판단되었다. 이러한 김교사의 발문은 초점을 유발하는 상호작용에서도 그대로 드러나며, 이는 초점을 유발하는 상호작용이 수학 과제의 특징에 영향을 주었다고 볼 수 있다.

[그림 Ⅲ-14]는 같은 과제에 대한 두 학생의 서로 다른 풀이 방식이다. 본 연구에서는 [그림 Ⅲ-14]의 과제는 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보도록 유도하는 과제로 분석되었다. 따라서 이 과제의 일반적인 접근은 [그림 Ⅲ-14]의 오른쪽 학생 B의 풀이라고 볼 수 있다. 하지만 [그림 Ⅲ-14]의 왼쪽의 학생 A의 풀이를 살펴보면 공차를 기울기로, 첫째항을 점$(1, 2)$로 해석하면서 수열과 함수 간의 관련성을 찾고자 하며, 교사의 방식을 수용하고자 하였다.

본 연구에서는 같은 수학 과제임에도 학생 간의 풀이가 다른 이유를 학생마다 초점을 유발하는 상호작용에 주목하는 정도가 다르기 때문이라고 판단하였다. 수학 과제의 특징보다 초점을 유발하는 상호작용에 더 주목되면 학생 A와 같은 풀이를 보일 수 있고 수학 과제의 특징이 초점을 유발하는 상호작용보다 영향력이 강하면 학

생 B와 같은 풀이를 보일 수 있다.



[그림 III-14] 동일 문항에 대한 학생 A(왼쪽)와 학생 B(오른쪽)의 풀이

### 4. 수학 활동의 본질

김교사가 학기 초부터 꾸준하게 교실 규범을 형성하고자 의도했던 흔적을 학생 B, C의 형성평가 답변으로부터 확인할 수 있었다. 아래 발췌는 학생 B의 형성평가 1번 문항에 대한 면담의 일부로, 밑줄 친 ㉠, ㉡, ㉢과 같이 교사가 학기 초부터 주변 동료와 함께 배우면서 질문하고 공유하는 교실 문화를 형성하기 위해 노력한 점을 확인할 수 있었다. 여기서 주목해볼 점은, 형성평가 1번은 수학 내용(아이디어)에 한정하여 교사가 강조한 것이 무엇인지 응답하는 문항임에도 불구하고 두 학생은 수학 활동의 본질과 관련된 응답을 보였다는 점이다. 이는 교사가 평소에도 이러한 교실 규범을 강조했음을 뒷받침하는 증거로 볼 수 있다.

면담자 : 1번에 내용에 대해서 한번 설명해 주세요.

학생B : 1번은 이제 샘이 항상 강조하셨던 것을 썼는데요. 수열의 함수로 보기랑 이제 모르는 것은 ㉠서로 알려주고 질문하고 아는 것은 공유하기에 대해서 선생님이 강조하셨던 것 같아요. 그래서 질문을 서로 많이 하라고 했었던 것 같아요. 그래서 저는 이것을 이제 수학을 푸는 데 꼭 필요한 자세라고 생각합니다.

면담자 : 그렇군요. 그러면 교사가 이걸 강조한다는 걸 어떻게 느낄 수 있었어요?

학생B : 선생님께서 뭔가 애들이 막 질문도 안 하고 그러면 질문하라고 계속 그런 자세를 길러야 한다고 계속 말씀하셔서 강조한다고 느꼈습니다.

면담자 : 그것은 교사가 처음 3월(학기초)에 만났을 때부터 계속 그랬나요?

학생B : 평소에도요? 네 ㉡평소에도 모둠활동을 많이 해서 애들한테 질문하는 것을 위주로 했어요. 그래서 샘보다 애들한테 질문하는 게 많을 정도로 애들한테 질문을 해라는 식으로 알려주셔서...

면담자 : 그렇게 애들끼리 질문하는 분위기가 수학 시간에만 그래요 아니면 다른 과목 시간에도 다 그래요?

학생B : 제 생각에는 수학 시간이 더욱더 그런 것 같아요.

면담자 : 그럼 (수학) 수업 시간에만 그렇게 애들이 더 적극적으로 얘기를 하는 이유는 뭘까요?

학생B : ㉢선생님이 그런 분위기를 만들어주셨다고 생각합니다. 저는 처음부터 그렇게 했을 때는 애들이 그렇게 적극적으로 참여하지 않았지만 지금 시간이 꽤 흘렀고 그렇게 되면서 애들도 이제 그런 질문을 하고 이런 활발한 분위기가 만들어질 수 있었던 것 같습니다.

다음으로 수업 사례를 교사 주도의 강의식 수업 상황과 학생 참여 수업 상황으로 구분하여 분석하였다. 그 결과 수업 유형에 따라 초점의 중심 출현 정도에 차이를 확인하였다. 구체적으로 학생 참여 수업 상황에서는 초점의 중심 출현이 촉진되었고 교사 주도의 강의식 수업 상황에서는 초점의 중심 출현이 제한되었다. 이는 선행연구(이진아, 이수진, 2019; Lobato et al., 2013)의 결과와 일맥상통한다.

마지막으로 교사와 학생의 말과 행동에 주목하여 교실에 형성된 수학 활동의 본질을 분석하였다. 교사는 꾸준히 학생들에게 모둠 내에서 동료들과 협력하여 함께 문제를 해결하고 그 결과를 공유하는 것에 대한 중요성을 강조하였다. 또 교사는 학생들을 존중하는 말투와 질문, 친근한 행동과 제스처를 바탕으로 교사 주도의 강의식 수업 상황에서도 학생의 참여를 끌어내었다. 그 결과 교사 주도의 강의식 수업 상황임에도 학생 초점의 중심 형성 정도를 어느 정도 추측해볼 수 있었다. 학생들은 소모둠 활동이 매우 익숙한 듯 자연스럽게 모둠 내 동료들과 어려운 점을 묻고 답하면서 협력적으로 학습하였고 교사는 순회 지도를 통해 개별 학생들에게 피드백해주었다.

## Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 학생의 수학 주목하기가 어떻게 조직되어 수업에서 드러나는지 그리고 그 과정에서 어떤 특징이 나타나는지 탐색하였다. 이를 위해 고등학교 수열 수업을 사례로 선정하여 학생의 수학 주목하기를 분석하였다. 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 초점의 중심의 변화 양상은 초점을 유발하는 상호작용, 수학 과제의 특징, 수학 활동의 본질 중 어떤 한 구성요소만으로는 유일하게 묘사될 수 없었다. Lobato 외(2013)의 연구는 학생의 수학 주목하기를 교실에 분포된 현상으로 보고 개인의 인지뿐 아니라 사회적 차원을 함께 고려하여 초점 분석틀을 제안하였다. 본 연구에도 초점 분석틀을 적용해본 결과, 사회적 차원인 초점을 유발하는 상호작용, 물질적 자원, 수학 활동의 본질이 개인의 인지와 상호작용하여 초점의 중심을 형성해가는 메커니즘을 확인할 수 있었다. 구체적으로 수학 활동의 본질은 초점의 중심이 드러나는 기회와 가능성을 제공하였으며, 수학 과제의 특징은 특정 초점의 중심 출현을 지지하거나 제한하였다. 그리고 초점을 유발하는 상호작용은 특정 초점의 중심으로의 이동과 변화를 포착하는데 기여하였다(이진아, 이수진, 2019).

둘째, 초점을 유발하는 상호작용은 초점의 중심 형성에 직접적으로 영향을 미치기도 하지만 수학 과제의 특징을 변형시켜 간접적으로 영향을 미치기도 하였다. 본 연구에서의 초점을 유발하는 상호작용은 하이라이팅, 표현하기, 반복, 유도 질문이었으며, 초점의 중심이 드러나도록 함에 핵심적인 역할을 하였다. 하이라이팅은 기존 선행연구에서도 보고된 바 있는 상호작용의 한 유형이며(이진아, 이수진, 2019; Lobato et al., 2013), 표현하기, 반복, 유도 질문은 본 연구에서 새롭게 식별된 상호작용 유형이었다. 이들은 학생들이 수열을 함수로 보는 것에 주목이 끌리도록 도와 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심 형성에 영향을 주었다. 또 초점을 유발하는 상호작용은 수학 과제의 특징을 변형시켜 간접적으로 초점의 중심 형성에 영향을 주었다. 변형된 수학 과제의 특징은 학생에게 수열을 함수로 보도록 하며, 함수의 성질을 이용한 풀이와 전략을 탐구하도록 주목을 이끌었다. 구체적으로 본 연구에서의 초점을 유발하는 상호작용은 주로 직접적 혹은 간접적으로 수열을 함수로 보는 경우와 관련된 초점의 중심(예: CoF1-2, CoF2-2, CoF3-2) 형성에 영향을 준 것으로 판단되었다.

셋째, 소집단 활동에서의 교사의 개별 피드백은 초점의 중심 형성에 영향을 주었다. 구체적으로 3차시 초점의 중심 CoF3-2 형성에 영향을 준 것으로 보였다. 초점의 중심 CoF3-2는 참여자 학생 중 A과 C에게만 드러났는데, 이 두 학생은 모두 3차시 수업의 소모둠 활동에서 교사의 개별 피드백을 받은 경험이 있었다. 교사의 개별 피드백은 집단 피드백보다 학생의 학습에 더 유의미한 영향을 미친다는 측면(김수경, 2003)에서 보면, 학생은 집단 피드백 내용보다 교사의 개별 피드백 내용에 더 주목했다고 볼 수 있다. 마찬가지로 개별 피드백은 학생의 동기를 유발하여 수학적 흥미를 높이고 정의적 영역에 대한 긍정적인 태도를 갖추게 하여, 교사의 설명을 더 포용적으로 수용할 수 있게 도왔다고 볼 수 있다(안종수, 2021). 이처럼 교사의 개별 피드백은 은연중에 초점의 중심 CoF3-2 형성에 영향을 준 요인으로 볼 수 있다.

넷째, 학생들은 동일 교실, 즉 동일 초점을 유발하는 상호작용, 물질적 자원, 수학 활동의 본질 내에서도 서로 다른 두 가지 추론 양상을 보였다. 하나는 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 추론 양상이고 또 하나는 수열을 함수로 보는 추론 양상이었다. Lobato 외(2013)의 연구에서는 덧셈적 사고와 곱셈적 사고에 각각 주목된 학생들의 서로 다른 추론 방식을 보고하였고 이진아, 이수진(2019)의 연구에서는 그래프의 양적 접근과 질적 접근에 각각 주목된 교사들의 서로 다른 추론 방식을 보고하였다. 이 두 연구는 서로 다른 두 교실을 사례로 하였지만, 본 연구에서는 하나의 교실 사례에서도 서로 다른 두 추론 방식이 드러났다는 점은 주목할 만하다.

이는 집중하는 상호작용, 수학 과제의 특징, 수학 활동의 본질이 동일한 교실 환경임에도 학생의 개인 인지가 이 사회적 차원들과 결합하는 과정에서 서로 다른 초점의 중심을 형성한 것을 의미한다고 볼 수 있다. 즉, 사회적 차원들이 교실에서 학생의 주목을 이끌고자 경쟁할 때 학생마다 사회적 차원에 주목된 정도가 다른 것으로 볼 수 있다. 구체적으로 수학 과제의 특징은 주로 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 초점의 중심 형성에, 초점을 유발하는 상호작용은 수열을 함수로 보는 초점의 중심 형성에 각각 영향력이 더 큰 것으로 판단되었다. 이때 수학 과제의 특징과 초점을 유발하는 상호작용이 학생의 주목을 이끄는 정도에 차이가 생겨, 그 결과 학생마다 서로 다른 초점의 중심이 형성된 것으로 판단된다.

앞선 결과를 바탕으로 본 연구는 다음과 같은 의의와 시사점을 지닌다. 첫째, 본 연구는 수업 사례를 통해 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 경우와 함수로 보는 경우에 관한 학생의 이해를 구체적으로 확인하였다. 이는 설문을 통해 수열에 대한 학생의 이해를 살핀 선행연구(장현석 외, 2020; Przenioslo, 2005, 2006)의 결과가 수업 맥락에서도 여전히 유효함을 확인하는 동시에 수열에 대한 학생의 이해를 초점의 중심을 통해 구체적으로 살펴본 것에 의의가 있다고 본다. 나아가 본 연구에서의 수열을 함수로 보는 초점의 중심은 수열을 순서가 있는 수의 나열로 보는 초점의 중심을 기반으로 출현 된 것으로 보였다. 이 두 관점 사이의 관계는 추가적인 연구를 통해 검증되어야 할 것이다.

둘째, 학생의 수학 주목하기는 추론하는 방식에 영향을 미친다는 측면에서 그 중요성이 있는데, 본 연구는 이를 확인하는 하나의 사례로 볼 수 있다. 구체적으로 학생 A과 C는 2차시 수업에서 등차수열을 일차함수로 볼 수 있다는 것을 수학적으로 주목하였고 이를 바탕으로 3차시 수업에서 등차수열의 합을 이차함수로 볼 수 있다는 수학적 추론을 할 수 있었던 것으로 판단되었다. 반면, 학생 B는 2차시 수업에서 등차수열을 일차함수로 볼 수 있다는 사실에 크게 주목하지 않았고 이어서 3차시 수업에서도 등차수열의 합을 이차함수로 볼 수 있다는 점에 주목하지 않은 것으로 보였다. 연구진은 학생 B가 2차시 수업에서 등차수열을 일차함수로 볼 수 있다는 것에 주목하지 않았기 때문에 3차시 수업에서 등차수열의 합을 이차함수로 볼 수 있다는 것에 여전히 주목하지 않았을 것으로 판단하였다. 이는 학생이 교실 상황에서 무엇에 주목하느냐가 이후 학생의 추론 과정에 영향을 미친다는 것을 뒷받침하는 사례로 볼 수 있다(Lobato et al., 2012, 2013).

셋째, 본 연구는 초점 분석틀의 구성요소 간의 관계를 확인하였다. Lobato 외(2013)의 연구를 기반으로 한 국내 선행연구(이유진, 2023; 이진아, 이수진, 2019; 지현옥, 2021; 최윤형, 이수진, 2023)는 주로 여러 맥락에서 개인의 인지와 사회적 차원이 결합하여 어떻게 초점의 중심으로 나타나는지 보여주었다. 본 연구 또한 수열을 지도하는 정규수업 맥락에서 학생의 수학 주목하기가 어떻게 조직되는지 확인하였는데, 나아가 본 연구는 초점 분석틀의 구성요소 간의 상호작용 양상까지 확인했다는 점에서 기존 연구와 차별화된다고 볼 수 있다. 구체적으로 초점을 유발하는 상호작용이 수학 과제의 특징을 변형시켜 새로운 초점의 중심이 형성되게 함을 확인하였다.

본 연구는 고등학교 수열 수업에서 나타나는 학생의 수학 주목하기를 분석한 것으로, 초점을 유발하는 상호작용, 수학 과제, 수학 활동의 본질과 연관하여 초점의 중심 변화를 면밀하게 살펴보았다. 더불어 이 과정에서 드러나는 수학 주목하기의 특징을 함께 조사하였다. 수열 단원이 초등학교의 ‘규칙성’ 단원에서부터 대학교 해석학 과목과 계열적으로 연결된다는 점을 감안해볼 때, 본 연구가 마중물이 되어 수학 주목하기 측면에서 수열 단원에서 학생의 이해에 관한 연구가 더욱 활발히 진행되길 기대한다.

# 참 고 문 헌


교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].

Ministry of Education. (2015). *Mathematics curriculum. Notification of the Ministry of Education No.* 2015-74.

교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8].

Ministry of Education. (2022). *Mathematics curriculum. Notification of the Ministry of Education No.* 2022-33.

김동현 (2013). 학생들의 수열 단원에서 나온 오류와 선행학습. 건국대학교 석사학위논문.

Kim, D. H. (2023). *Study on errors and leading learning caused by sequence unit in the students* [Master's thesis, Konkuk University].

김수경 (2003). 고등학교 영어 형성평가에 대한 교사의 집단 피드백과 개별 피드백의 효과 비교 연구. 부산대학교 석사학위논문.

Kim, S. K. (2003). *Comparative study of teacher's group feedback and individual feedback on high school English formative test* [Master's thesis, Busan National University].

김슬비 (2019). 교사와 학생의 수학적 주목하기의 차이에 따른 교수 전략 탐색. 이화여자대학교 박사학위논문.

Kim, S. B. (2019). *A Study on differences of mathematical noticing and teaching strategies* [Ewha Woman University Doctoral dissertation].

김연・김동원 (2022). 가르침을 위한 수학 지식의 문제: 초등학교 규칙성에 대한 사례 연구. 수학교육철학연구, 4(2), 63-76.

Kim, Y., & Kim, D. W. (2022). A study on mathematical knowledge for teaching: Patterns in elementary school. *Journal for Philosophy of Mathematics Education*, 4(2), 63-76.

김연희・황우형 (2011). 수열 및 수열의 극한 단원에 제시된 수학적 용어·기호에 대한 학생들의 이해 수준 분석. 교과교육연구, 4(2), 21-47.

Kim, Y. H., & Hwang, W. H. (2011). An analysis of student's understanding of mathematical terminology and symbols suggested in mathematical series and its limits. *KU Center for Curriculum and Instruction Studies*, 4(2), 21-47.

김향숙・박정미・박진석・배화수・방승진 (2007). 수학과 창의성 계발을 위한 발문의 실제. 경문사

Kim, H. S., Park, J. M., Park, J. S., Bae, H. S., & Bang, S. J. (2007). *The Realities of Mathematics and Creativity Development.* Kyungmoon.

김희정 (2022). 예비 수학교사의 수학적 사고 중심 수업에 관한 노티싱 역량 탐색. 수학교육, 61(2), 339-357.

Kim, H. J. (2022). Pre-service mathematics teachers' noticing competency: Focusing on teaching for robust understanding of mathematics. *The Mathematical Education*, 61(2), 339-357.

류희찬 외 10명 (2018). 고등학교 수학Ⅰ 교사용 지도서. ㈜천재교육

Ryu, H. C. Sunwoo, H. S., Shin, B. M., Jo, J. M., Lee, B. M., Kim, Y. S., …, Jung, S. Y. (2018). *High school math I teacher's guidebook.* Chunjae.

박다슬 (2017). 고등학교 수열단원 문제해결과정에서 나타나는 학생들의 대수적 사고 양식과 일반화 수준 분석 연구. 이화여자대학교 석사학위논문.

Park, D. S. (2017). *A study on analysis of students' algebraic thinking habits of mind and generalization level in problem solving process of high school sequence unit* [Doctoral dissertation, Ewha Woman University].

선우진・방정숙 (2020). 패턴 일반화를 지도하는 초등 교사의 반응적 교수 관행에 대한 연구. 학교수학, 22(2), 445-465.

Sunwoo, J., & Pang, J. S. (2020). A study on the responsive teaching practices of an elementary school teacher teaching pattern generalization. *School Mathematics*, 22(2), 445-465.

안종수 (2023). 창의・인성 활동이 학업성취도 및 수학적 학습태도에 미치는 영향. 학습자중심교과교육연구,

23(8), 775-791.

An, J. S. (2023). The Effects of Creative and Personality Activities on Academic Achievement and Mathematical Learning Attitudes. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 23(8), 775-791.

오영석 · 김동중 (2023). 고등학교 수학교과서의 수열 단원에 포함된 개방형 과제의 특징 분석: 인지적 난이도 관점을 중심으로. 수학교육, 62(2), 257-268.

Oh, Y. S., & Kim, D. J. (2023). An analysis of characteristics of open-ended tasks presented in sequences of high school mathematics textbooks: Focusing on cognitive demands. *The Mathematical Education*, 62(2), 257-268.

유기웅 · 정종원 · 김영석 · 김한별 (2012). 질적 연구방법의 이해. 박영사

Yu, K. W., Jung, J. W., Kim, Y. S., & Kim, H. B. (2012). *An understanding of qualitative research methods*. PYbook.

이경화 (2022). 2022 개정 수학과 교육과정 시안(최종안) 개발 정책연구. 한국과학창의재단.

Lee, K. H. (2022). *2022 revised mathematics curriculum proposal (Final Draft) development policy study*. Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity.

이수진 · 신재홍 (2022). '행위자 지향적' 전이 관점에 대한 소고. 수학교육철학연구, 4(2), 97-116.

Lee, S. J., & Shin, J. (2022). The actor-oriented transfer perspective and radical constructivism. *Journal for Philosophy of Mathematics Education*, 4(2), 97-116.

이원주 (2021). 교사의 반복이 한국어 초급 학습자에게 미치는 영향 연구 - 교사-학습자 간 상호작용 과정을 중심으로. 외국어로서의 한국어교육, 63, 141-163.

Lee, W. J. (2021). A study on the effect of teacher repetition on beginning level Korean class: Based on interaction between teacher and learners. *Teaching Korean as a Foreign Language*, 63, 141-163.

이유진 (2023). 등호의 관계적 이해를 강조한 수업에서 나타나는 학생의 노티싱 분석. 수학교육, 62(3), 341-362.

Lee, Y. J. (2023). Analysis of student noticing in a lesson that emphasizing relational understanding of equals sign. *The Mathematical Education*, 62(3), 341-362.

이진아 · 이수진 (2019). 중등 수학 예비교사의 수업 과정에서 보여지는 '수학적 주목하기(Mathematical Noticing)'. 학교수학, 21(3), 561-589.

Lee, J. A., & Lee, S. J. (2019). Mathematical noticing of two prospective secondary teachers in the course of planning, implementing, and reflecting on lessons. *School Mathematic*, 21(3), 561-589.

장현석 · 이세형 · 이동원 (2020). 수열과 수열의 극한에 대한 고등학생의 인식의 연결성 조사. 학교수학, 22(1), 69-83.

Jang, H. S., Lee, S. H., & Lee, D. W. (2022). A survey on the connection of high school students' perception to a sequence and the limit of sequence. *School Mathematic*, 22(1), 69-83.

정동명 (2022). 실해석학 개론. 경문사

Jung, D. M. (2022). *Introduction to real analysis*. Kyungmoon.

조형미 · 이은정 (2021). 변수 개념에 대한 중등 예비교사들의 노티싱. 수학교육논문집, 35(3), 257-275.

Jo, H. M., & Lee, E. J. (2021). Prospective teachers' noticing about concept of variables. *Communications of Mathematical Education*, 35(3), 257-275.

지현옥 (2021). 과제 대화록 작성하기 활동에 나타난 중등수학 예비교사들의 수학적 주목하기. 한국교원대학교 석사학위논문.

Ji, H. O. (2021). *Mathematical noticing of prospective secondary mathematics teachers through analyzing the task dialogue writing activity* [Master's thesis, Korea National University of Education].

최윤형 · 이수진 (2023). 초등학교 수학 교과의 원격수업에서 나타나는 교사의 수학적 주목하기. 수학교육학연구, 33(4), 951-974.

Choi, Y. H., & Lee, S. J. (2023). Teachers' mathematical noticing in elementary school mathematics classroom during remote learning. *Journal of Educational Research in Mathematic*, 33(4), 951-974.

한혜정 (2022). 2022 개정 교육과정 각론 조정 연구(Ⅰ). 한국교육과정평가원.

Han, H. J. (2022). *2022 revised curriculum coordination study (I)*. Korea Institute for Curriculum and Evaluation.

홍진곤・김윤경 (2008). 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해에 관하여. 수학교육학연구, 18(1), 123-135.

Hong, J. G., & Kim, Y. G. (2008). On the students' understanding of mathematical induction. *Journal of Educational Research in Mathematic*, 18(1), 123-135.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31(3/*4), 175-190.

Hohensee, C. (2011). *Backward transfer: How mathematical understanding changes as one builds upon it* [Published doctoral dissertation, University of California].

Janvier, C. (Ed.). (1897). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *Educational Researcher, 32*(1), 17-20.

Lobato, J., Hohensee, C., & Rhodehamel, B. (2013). Students' mathematical noticing. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(5), 809-850.

Lobato, J., Rhodehamel, B., & Hohensee, C. (2012). "Noticing" as an alternative transfer of learning process. *Journal of the Learning Sciences, 21*(3), 433-482.

Mamona, J. (1990). Sequences and series-sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21(2)*, 333-337.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., & Strobel, K.H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, In A. H. Schoenfeld and J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education No. 4* (pp. 77-102). American Mathematical Society.

O'Connor, M. C., & Michaels, S. (1993). Aligning academic task and participation status through revoicing: Analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly, 24*(4), 318-335.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 71-93. doi:10.1007/s10649-005-5325-4

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(7), 805-823. doi:10.1080/00207390600733832

Sievert, H., van den Ham, A. K., & Heinze, A. (2021). The role of textbook quality in first graders' ability to solve quantitative comparisons: A multilevel analysis. *ZDM-Mathematics Education, 53*(6), 1417-1431.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Mmiddle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Hennignsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development (2nd ed.)*. Teachers College Press.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Thorndike, E. L. (1906). *Principles of teaching*. Seiler.

Wagner, J. F. (2006). Transfer in pieces. *Cognition and Instruction, 24*(1), 1-71.

# Students’ mathematical noticing in arithmetic sequence lesson

**Cho, Minsu**
Pangok High School
E-mail : alstn105@naver.com

**Lee, Soo Jin†**
Korea National University of Education
E-mail : sjlee@knue.ac.kr

This study analyzed students' mathematical noticing in high school sequence classes based on students' two perceptions of sequence. Specifically, mathematical noticing was analyzed in four aspects: center of focus, focusing interaction, task features, and nature of mathematics activities, and the following results were obtained. First of all, the change pattern of central of focus could not be uniquely described by any one component among ‘focusing interaction’, ‘task features’, and ‘the nature of mathematical activities’. Next, the interactions between the components of mathematical noticing were identified, and the teacher's individual feedback during small group activities influenced the formation of the center of focus. Finally, students showed two different modes of reasoning even within the same classroom, that is, focusing interaction, task features, and nature of mathematics activities that resulted in the same focus. It is hoped that this study will serve as a catalyst for more active research on students' understanding of sequence.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D99
* Key words : mathematical noticing, student’s understanding, sequence
† corresponding author