

일량제어정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬의 고객수와 체재시간 분석

(Queue Lengths and Sojourn Time Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue under the Workload Control)

이 세 원^{1)*}
(Se Won Lee)

요약 본 논문에서는 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬의 이탈시점 및 임의시점 고객수 분포와 체재시간 분포를 분석하였다. 서로 상관성을 갖는 집단고객(패킷)들이 이산시간 마코비안 도착과정을 따라 시스템에 도착하고, 서버는 도착한 고객들의 서비스시간의 총합이 일량 임계값을 초과하였을 때 재가동을 시작하여 시스템에 남은 고객이 없을 때까지 서비스한다. 시스템의 안정상태 고객수 분포와 체재시간 분포를 변환 벡터 형태로 유도하고 성능척도로서 평균값을 계산하였다. 수치예제를 통해 복잡한 형태의 수식으로 나타나는 결과들을 계산하여 얻을 수 있음을 확인하고, 시뮬레이션 결과와 비교하여 이론값의 타당성을 검증하였다. 본 연구의 결과는 다양한 산업 분야에서 유사하게 작동하는 복잡계 시스템의 주요 성능척도들을 구하고 여러 가지 최적화 문제를 분석하는 데 사용할 수 있다.

핵심주제어: 이산시간 집단 마코비안 도착과정, 일량 제어정책, 고객수, 체재시간 (반환시간)

Abstract In this study, we analyzed queue length and sojourn time of discrete-time BMAP/G/1 queues under the workload control. Group customers (packets) with correlations arrive at the system following a discrete-time Markovian arrival process. The server starts busy period when the total service time of the arrived customers exceeds a predetermined workload threshold D and serves customers until the system is empty. From the analysis of workload and waiting time, distributions of queue length at the departure epoch and arbitrary time epoch and system sojourn time are derived. We also derived the mean value as a performance measure. Through numerical examples, we confirmed that we can obtain results represented by complex forms of equations, and we verified the validity of the theoretical values by comparing them with simulation results. From the results, we can obtain key performance measures of complex systems that operate similarly in various industrial fields and to analyze various optimization problems.

Keywords: Discrete-time Batch Markovian Arrival Process(D-BMAP), Workload Control, Queue Lengths, Sojourn Time (Turnaround Time)

* Corresponding Author : swlee@pknu.ac.kr

2024 / accepted February 15, 2024

* Manuscript received January 26, 2024 / revised February 14, 1. 국립부경대학교 경영학부

1. 서 론

생산공정이나 통신환경에서 서버(기계, 장비 등)의 재가동비용(restart cost) 또는 준비 비용(setup cost)이 큰 경우 가동-비가동 횟수를 제어함으로써 시스템의 단위시간 당 비용을 줄이고, 서버 이용률을 높이는 효과를 얻기 위해 다양한 형태의 서버 제어 정책(server control policy)들이 제안되었다.

대표적인 서버 제어 정책으로는 유희한 서버가 대기공간에 대기 중인 고객수가 N 명이 되면 가동을 시작하여 더 이상 서비스할 고객이 없을 때까지 서비스를 제공하는 N -정책(Yadin and Nao, 1963), 유희해진 서버가 정해진 시간 길이 T 만큼의 휴가를 떠났다가 돌아와서 기다리는 고객이 있으면 가동을 시작하고 없으면 다시 휴가를 반복해서 떠나는 T -정책(Heyman, 1977), 유희기간 동안 쌓인 일량이 임계값 D 를 초과할 때까지 기다렸다가 바쁜기간을 시작하는 D -정책이었다.

본 연구에서 다루는 D -정책은 Balachandran (1973)에 의해 처음으로 소개되었으며 number-dependent policy의 의미를 갖는 N -정책에 대하여 delay-dependent policy라는 의미로 이름이 붙여진 서버 제어 정책이다. D -정책을 갖는 대기행렬시스템의 고객수 분석은 Dshalalow(1998)에 의해 최초로 분석되었고, 이는 3년 후 다시 수정되었다(Dshalalow, 2001). Chae and Park (1999, 2001)은 유희한 서버가 서비스를 제공하여 바빠지기 시작하는 시점에서의 고객수에 조건을 취하여 고객들 간의 상호종속성을 유지하면서 고객수 분포의 확률생성함수를 유도하였고, Artalejo (2001)는 정확한 고객수 분포를 유도하였다. 평균 고객수를 이용한 최적 D 의 결정에 대한 연구는 Chae and Park(1999)에서 찾아볼 수 있다. Lee et al.(2005)은 D -정책을 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬시스템의 고객수를, Lee and Song(2004)은 D -정책을 갖는 MAP/G/1 대기행렬의 고객수를, Lee and Baek(2005)은 D -정책을 갖는 BMAP/G/1 대기행렬의 고객수를 분석하였다. 이들은 모두 Chae and Park(1999)의 분석방법을 사용하여 시스템의 고객수를 분석하였다. 이후

Lee et al.(2006b)은 일량제어정책을 갖는 M/G/1의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간을 하나의 틀 안에서 분석할 수 있는 통합적 접근방법을 소개하였다. 지금까지 언급한 모든 연구들은 연속시간 시스템을 대상으로 하고 있다.

실제 통신 및 교통시스템 등의 응용분야에서 단위시간을 고려하여 시스템을 분석하는 이산시간 시스템으로의 모델링이 연속시간보다 더 적합하다는 것은 잘 알려져 있는 사실이다(Brunel and Kim, 1993; Blondia, 1993). 또한 수학적 분석의 용이함 때문에 기존에 가정하여 왔던 고객들의 무작위 도착(random arrival)은 상관성을 가지고 도착하는 실제 시스템을 묘사하는데 한계를 가지고 있다(Paxon and Floyd, 1995). 이에 D -정책을 갖는 이산시간 시스템의 분석이 이루어졌다. Lee et al.(2011b)은 D -정책을 갖는 이산시간 Geo/G/1 대기행렬의 일량, 대기시간, 고객수, 체제시간을 분석하였고, Lee et al.(2012)은 D -정책을 갖는 이산시간 MAP/G/1 시스템의 일량, 대기시간, 고객수, 체제시간을 분석하였다. Lee(2016)은 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 시스템의 일량을 분석하였고, Lee(2018a)는 이를 바탕으로 대기시간을 분석하였다. 이산시간 Geo/G/1 시스템에 대하여 Lee(2018b)는 D -정책과 T -정책 하에서의 일량을 분석하였고, Lee (2020)는 D -정책과 단수휴가 정책 하에서의 고객수를 분석하였다. 본 연구는 Lee(2016), Lee (2018)의 후속연구이자 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 시스템의 주요성능척도들에 대한 분석을 마무리하는 연구이다.

Lee et al.(2006)의 연구 이전까지는 D -정책을 갖는 시스템에 대한 체제시간의 분석은 전혀 이루어지지 않았다. 체제시간은 이산시간 시스템으로의 모델링이 적합한 운영체제에서 대기시간보다 더 중요하게 생각하는 ‘반환시간’이라는 용어로도 불리는데 이러한 시스템에 D -정책을 적용하는 경우 기존의 방법으로는 제대로 된 체제시간 분석이 이루어지기 어렵다. 왜냐하면 다른 서버 제어 정책 하에서는 체제시간의 분포에 대한 변환이 단순히 대기시간에 서비스시간을 합한 형태로(변환에서는 곱셈의 형태로) 나타나기 때문인데, D -정책은 다른 서버 제어 정책과는 다르

계 유희기간 동안 도착한 고객들의 서비스시간이 서로 독립이지 않다는 특성을 가지기 때문이다. 따라서 선행연구를 바탕으로 한 체재시간의 분석까지 연구의 범위로 한다.

본 연구에서는 D -정책을 따르는 이산시간 BMAP/G/1 시스템의 고객수와 체재시간을 분석한다. 논문의 나머지 부분은 다음과 같다: 2장에서는 분석 대상 시스템을 설명하고, 분석에 필요한 기호와 확률, 함수들을 정의한다. 또한 선행연구에서 얻은 결과들 중에서 본 연구의 분석 및 계산에 꼭 필요한 부분을 다시 한번 정리한다. 3장에서는 고객수를 분석하고, 4장에서는 체재시간을 분석한다. 5장에서는 시스템의 성능척도로서 평균고객수와 평균체재시간을 각 장의 분석 결과로부터 유도한다. 6장에서는 수치예제와 시뮬레이션을 통해 분석 결과의 타당성을 검토한다. 또한 복잡한 시스템에서 얻은 복잡한 결과식이라 하더라도 각 성능척도 사이에 존재하는 관계가 그대로 적용됨을 확인한다. 7장에서는 결론과 추후 연구 주제를 다루고 논문을 맺는다.

본 연구에서 대상으로 하는 시스템은 다음과 같이 작동한다. Fig. 1은 시스템의 일량과정과 고객수과정 $\{U(k), N(k); k = 0, 1, 2, \dots\}$ 를 동일 축선 상에 나타낸 샘플경로이다.

- (1) 고객들은 파라미터 행렬 $\{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 을 갖는 이산시간 BMAP으로 집단으로 시스템에 도착한다 (Lucantoni, 1991; Lee, 2006).
- (2) 집단에 속하여 도착하는 각 고객들의 서비스 시간은 길이가 1 이상인 이산시간 일반분포를 따른다.
- (3) 서버는 시스템에 한 명으로 유희기간 동안 누적된 시스템 내 총 일량이 임계값 D 를 초과하면 선입선출 규칙으로 서비스를 시작하여 바쁜 기간을 보내다가 더 이상 서비스할 고객이 없으면 다시 유희기간을 갖는다.
- (4) 서비스 과정과 도착과정은 서로 독립이다.
- (5) 이산시간 시스템은 LAS-DA(Late Arrival System with Delayed Access)를 따른다. 이산시간 대기행렬시스템에 대한 자세한 내용은 Bruneel and Kim(1993), Takagi(1993)에서 찾아볼 수 있다.

2. 시스템 및 선행 연구의 주요 결과

2.1 시스템

분석에 사용할 기호와 함수를 다음과 같이 정의하자.

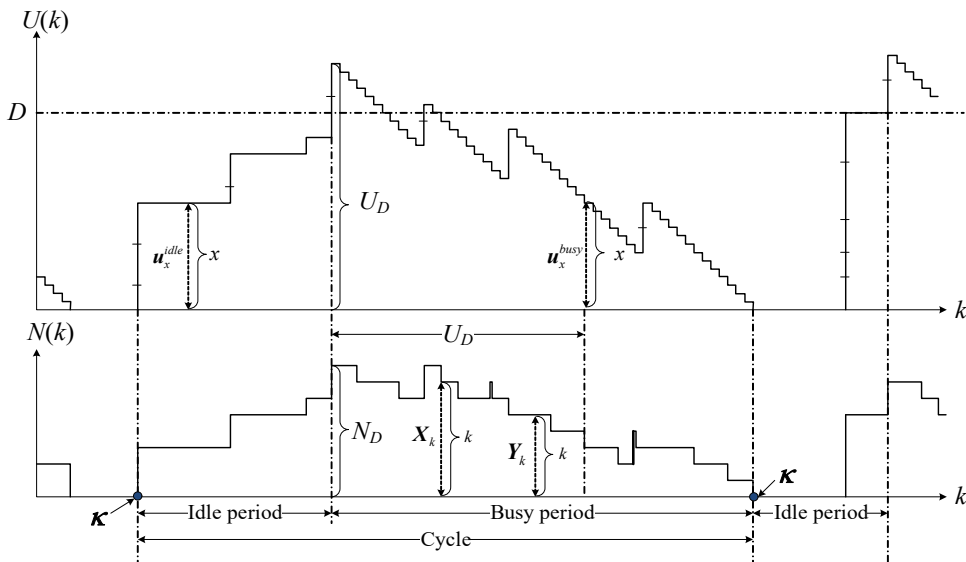


Fig. 1 A Sample Path of Workload and Queue Lengths

$D_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$: 이산시간 BMAP의 UMC

(underlying Markov chain) 파라미터 행렬

$(E)_{i,j}$: 행렬 E 의 (i, j) -원소

m : UMC 위상의 개수

$J(k)$: k 슬롯 시작점에서의 UMC 위상

$\pi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} Pr[J(k) = i], (i = 1, 2, \dots, m)$: UMC

위상의 안정상태확률

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$

$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$: 바쁜 기간 종료점에서의 UMC

위상을 나타내는 확률벡터

e : 모든 원소가 1인 크기 $(m \times 1)$ 의 열벡터

S : 서비스시간의 길이(이산확률변수)

$s(k) = Pr(S = k)$: S 의 확률질량함수(pmf),
($s(0) = 0$)

$S^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k)\omega^k$: S 의 확률생성함수(PGF)

$S^{(n)}(k) = Pr(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq k)$: S 의 n 차
중합의 분포함수(DF), ($S^{(0)}(k) = 1$)

$s^{(n)}(k) = S^{(n)}(k) - S^{(n)}(k-1)$: S 의 n 차 중합
의 확률질량함수

$\lambda_g = \pi \sum_{n=1}^{\infty} D_n e$: 단위시간 당 평균도착 집단수

$\lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e$: 단위시간 당 평균도착 고객수

$\rho = \lambda E(S)$: 교통밀도(traffic intensity)

N_D : 바쁜기간 시작점에서의 고객수

U_D : 바쁜기간 시작점에서의 일량

I_D : 유희기간의 길이

C : 사이클의 길이

2.2 선행연구 주요 결과

본 절에서는 연구에서 대상으로 하는 시스템의 선행연구인 Lee(2016)의 주요 결과 중에서 고객수와 체재시간 분석, 성능척도 계산을 위해 꼭 필요한 내용만을 요약하여 정리한다. 본 절에서 사용하는 기호와 확률, 함수 등은 증명 없이 Lee(2016)를 그대로 따른다.

임의의 슬롯 시작점에서 서버가 유희하고, 일

량이 x 일 확률벡터는 다음과 같다.

$$u_x^{idle} = \frac{(1-\rho)\kappa \sum_{k=0}^x \Phi(k, x)(I-D_0)^{-1}}{\kappa \sum_{x=0}^D \sum_{k=0}^x \Phi(k, x)(I-D_0)^{-1}e},$$

($x = 0, 1, 2, \dots, D$).

여기서,

$$\Phi(k, x) = \begin{cases} I, & (k=0, x=0) \\ I_k^* \cdot s^{(k)}(x), & \\ (x=1, 2, \dots, D)(k=1, 2, \dots, x) \end{cases},$$

$$I_k^* = \sum_{n=1}^k (I-D_0)^{-1} D_n I_{k-n}^*, \quad (I_0^* = I).$$

$\Phi(k, x)$ 은 크기 $(m \times m)$ 의 정방행렬로서, 유희기간 시작점의 UMC 위상 i 에서 출발한 일량과정이 유희기간 동안에 k 명의 고객들에 의해 일량 레벨 x 를 방문하고 그 직후의 UMC 위상이 j 일 확률 $\phi_{i,j}(k, x)$ 를 (i, j) -원소로 갖는다.

바쁜기간 시작점에서의 고객수(N_D)와 일량(U_D)이 각각 n 명, x 인 행렬 $N_D(n)$, $U_D(x)$ 와 이들의 확률생성함수는 다음과 같다. 여기에는 임의의 사이클의 유희기간 시작점과 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상정보가 모두 포함된다.

$$N_D(n) = \begin{cases} (I-D_0)^{-1} D_1 \sum_{x=D+1}^{\infty} s(x), & (n=1) \\ (I-D_0)^{-1} D_n \sum_{x=D+1}^{\infty} s^{(n)}(x) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{y=n-1}^D \sum_{k=1}^y [\Phi(k, y) \times \\ (I-D_0)^{-1} D_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$U_D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (I-D_0)^{-1} D_n s^{(n)}(x) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{y=n-1}^D \sum_{k=1}^y [\Phi(k, y) \times \\ (I-D_0)^{-1} D_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], \quad (x \geq D+1)$$

$$N_D^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} N_D(n) z^n, \quad U_D^*(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} U_D(x) \omega^x.$$

유휴기간 시작점에서의 UMC 위상이 i 라는 조건 하에 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상이 j 인 D -정책 시스템의 유휴기간의 길이에 대한 조건부 결합변환 $[I_D^*(\omega)]_{ij}$ 를 원소로 갖는 행렬은

$$I_D^*(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} (I - \omega D_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k s^{(k)}(x) \omega + \sum_{x=1}^D (I - \omega D_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} D_k s^{(k)}(x) \omega I_{D-x}^*(\omega).$$

바쁜기간 동안 임의 시점 일량의 결합변환벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_{busy}^*(\omega) = \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [U_D^*(\omega) - I] [\omega I - D[S^*(\omega)]]^{-1} \omega$$

바쁜 기간 종료점에서의 UMC 위상을 나타내는 확률벡터 κ 는 $\kappa = \kappa K$, $\kappa e = 1$ 의 관계식으로부터 구하며 Lee(2016)로부터 K 는 다음과 같다.

$$K = \sum_{x=D+1}^{\infty} (I - D_0)^{-1} D_1 [D(G)]^x s(x) + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (I - D_0)^{-1} D_k [D(G)]^x s^{(k)}(x) + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{y=1}^D I_n^* (I - D_0)^{-1} \times D_{k-n} [D(G)]^x s^{(n)}(y) s^{(k-n)}(x-y)$$

3. 고객수 분석

본 절에서는 대상 시스템의 고객수 분포를 유도한다. 마코비안 도착과정을 갖는 시스템의 특성을 고려하여 먼저 이탈시점 고객수 분포를 변환 형태로 유도하고, 이탈시점 고객수와 임의시점 고객수의 관계를 이용하여 임의시점에서의 고객수 분포를 유도한다.

3.1 이탈시점 고객수 분포

일량에 의해 서버의 재가동이 결정되는 D -정책 대기행렬시스템의 분석은 N -정책이나 T -정책을 갖는 경우와 달리 시스템에 도착하는 고객이 유휴기간과 바쁜기간 중 언제 도착하느냐에 따라 구분하여 분석할 필요가 있다. 왜냐하면 유휴기간 동안 도착하는 고객들의 서비스시간이 보통의 서비스시간과는 다르다는 특성을 지니기 때문이다 (Lee, 2006).

이제 유휴기간 동안 도착하는 고객을 특별고객 (special customer, SC), 바쁜기간 동안에 도착하는 고객을 보통고객(ordinary customer, OC)이라 하자. 시스템에 k 명의 고객들을 남기면서 이탈하는 고객이 특별고객(보통고객)이고, 이탈 직후의 UMC 위상을 포함한 결합확률벡터를 $\mathbf{x}_k^{sc(oc)}$ 라고 하면 각각의 변환은 다음과 같다. 이들 변환은 임의의 고객이 특별고객(또는 보통고객)일 확률을 각각 포함하고 있다.

$$\mathbf{X}_{sc}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^{sc} z^k, \quad \mathbf{X}_{oc}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^{oc} z^k$$

임의의 이탈시점 고객수 분포의 벡터GF는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{X}_{sc}(z) + \mathbf{X}_{oc}(z) \quad (1)$$

특별시험고객이 이탈하면서 시스템에 남기는 고객들은 바쁜기간 시작점에서 자기 뒤에 대기 중인 특별고객들 N_R 과 그의 도착 직후 시스템 내 총일량(특별시험고객의 서비스시간까지만을 포함) S_T 동안 도착한 보통고객들의 합이다 (Fig. 2 참조). 여기서, S_T 와 N_R 은 서로 독립이 아니고 D-BMAP으로 도착한 N_R 은 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상 J_{busy} 에 영향을 미치므로 S_T , N_R , J_{busy} 의 결합분포를 구해야 한다. 이들의 결합확률과 벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha_j(x, n) = \Pr(S_T = x, N_R = n, J_{busy} = j), \quad (2a)$$

$$(x \geq 1, n \geq 0, j = 1, 2, \dots, m).$$

$$\boldsymbol{\alpha}(x, n) = (\alpha_1(x, n), \alpha_2(x, n), \dots, \alpha_m(x, n)). \quad (2b)$$

위 $\alpha(x, n)$ 의 정의에 의하면 특별시험고객의 이탈시점 고객수는 바쁜기간 시작점에서 자기 뒤에 대기 중인 특별고객들(z^n)과 도착 직후 자신이 바라보는 시스템 내 총일량 x 동안 D-BMAP으로 도착한 고객들($D(z)^x$)의 합이다. 따라서 특별시험고객의 이탈시점 고객수 벡터 GF $\mathbf{X}_{sc}(z)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_{sc}(z) = \sum_{x=1}^D \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(x, n) z^n [D(z)]^x + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(x, n) z^n [D(z)]^x. \quad (3)$$

식 (3)에서 $D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n z^n$ 이다.

Lee (2018)에 따르면 특별시험고객의 유형은 Fig. 2에서 동그라미로 표시한 6가지의 경우로 나뉜다.

(경우 a) 유휴기간 중에 도착한 첫 집단에 속한 경우

- 1) 시험집단의 도착 이후 시스템 내 총일량이 D 이하
- 2) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이 D 초과
- 3) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이 D 이하, 시험집단의 도착으로 D 초과

(경우 b) 첫 번째 집단에 속해 있지 않은 경우

- 1) 시험집단의 도착 이후 시스템 내 총일량이 D 이하
- 2) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이 D 초과
- 3) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이 D 이하, 시험집단의 도착으로 D 초과

임의의 특별시험집단이 도착하면서 보는 일량이 v , 고객이 자기가 속한 집단 내에서 i 번째 고객이고 동일 집단 내에 자기 뒤에 k 명이 있을 확률은 도착 직후의 UMC 위상을 포함하여 벡터 형태로 표현하면 $\mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda}$ 이다 (Lee, 2018). 이를 이용하여 특별시험고객의 유형에 대해 $\alpha(x, n)$ 을 각각 경우별로 표현하면 다음과 같다.

$$\alpha^{(a)}(x, n) = \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0^{idle} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i)}(x) \sum_{y=0}^{D-x} s^{(k)}(y) N_{D-x-y}(n-k), & (1 \leq x \leq D, n \geq 1) \\ \mathbf{u}_0^{idle} \sum_{i=1}^x \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x), & (x \geq D+1, n \geq 0) \\ \mathbf{u}_0^{idle} \sum_{i=1}^x \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x) \sum_{y=D-x+1}^{\infty} s^{(n)}(y), & (1 \leq x \leq D, n \geq 1) \end{cases}$$

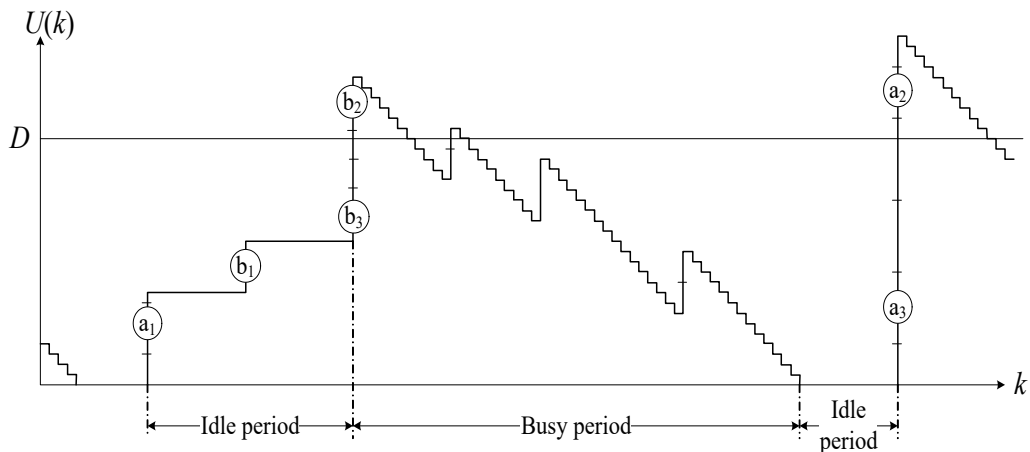


Fig. 2 Six Disjoint Cases of a Special Customer (Lee, 2018)

$$\alpha^{(b)}(x, n) = \quad (4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=1}^{x-1} \mathbf{u}_v^{idle} \sum_{i=1}^{x-v} \sum_{k=0}^{x-v-i} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) \\ \times \sum_{y=0}^{D-x} s^{(k)}(y) \mathbf{N}_{D-x-y}(n-k), (2 \leq x \leq D, n \geq 1) \\ \sum_{v=1}^D \mathbf{u}_v^{idle} \sum_{i=1}^{x-v} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v), \quad (x \geq D+1, n \geq 0) \\ \sum_{v=1}^{x-1} \mathbf{u}_v^{idle} \sum_{i=1}^{x-v} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) \sum_{y=D-x+1}^{\infty} s^{(n)}(y), \\ (2 \leq x \leq D, n \geq 1) \end{array} \right.$$

식 (4)를 이용하여 식 (3)을 다시 쓰고 최대한 정리하면 다음을 얻는다.

$$\mathbf{X}_{sc}(z) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=0}^{D-x-v} \sum_{i=1}^y \sum_{k=0}^{y-i} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) \mathbf{N}_{D-x-y}(n-k) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^D \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(n)}(y) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \end{aligned}$$

이제 보통고객의 이탈시점 고객수를 구해 보자. 보통고객의 이탈시점 고객수 확률벡터 \mathbf{x}_k^{oc} 는 직전 이탈시점에 조건을 취하여 구할 수 있다. 보통고객의 직전 이탈고객은 보통고객인 경우 (\mathbf{x}_j^{oc})와 마지막 특별고객($\mathbf{x}_j^{sc,last}$)인 경우가 있으므로 시간 x 동안 k 명의 고객이 도착할 확률행렬을 $\mathbf{P}(k, x)$ 라고 하면 \mathbf{x}_k^{oc} 와 벡터 GF $\mathbf{X}_{oc}(z)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_k^{oc} = \sum_{j=1}^{k+1} (\mathbf{x}_j^{oc} + \mathbf{x}_j^{sc,last}) \sum_{x=1}^{\infty} \mathbf{P}(k-j+1, x) s(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{oc}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^{oc} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} [\mathbf{x}_j^{oc} + \mathbf{x}_j^{sc,last}] \sum_{x=1}^{\infty} \mathbf{P}(k-j+1, x) s(x) z^k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} z^j [\mathbf{x}_j^{oc} + \mathbf{x}_j^{sc,last}] \sum_{k=j-1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} \mathbf{P}(k-j+1, x) s(x) z^{k-j+1} z^{-1} \\ &= [\mathbf{X}_{oc}(z) + \mathbf{X}_{sc}^{last}(z) - \mathbf{x}_0] \mathbf{A}(z) z^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_{oc}(z) = [\mathbf{X}_{sc}^{last}(z) - \mathbf{x}_0] \mathbf{A}(z) [z\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)]^{-1} \quad (7)$$

$$\text{식 (7)에서 } \mathbf{A}(z) = \sum_{x=1}^{\infty} s(x) [\mathbf{D}(z)]^x \text{이고, } [z\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)]^{-1}$$

와 $\mathbf{A}(z)$ 는 서로 가환이다. 마지막 특별고객의 이탈시점 고객수는 $\alpha(x, n)$ 으로부터 다음과 같이 어렵지 않게 구할 수 있다.

(8)

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{sc}^{last}(z) &= \mathbf{u}_0^{idle} \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{i=1}^x \frac{D_i}{\lambda} s^{(i)}(x) [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{v=1}^D \mathbf{u}_v^{idle} \sum_{i=1}^{x-v} \frac{D_i}{\lambda} s^{(i)}(x-v) [\mathbf{D}(z)]^x \end{aligned}$$

식 (7)을 완성하기 위해서는 확률벡터 \mathbf{x}_0 를 구해야 하는데 이는 Lee (2016)의 결과들을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\kappa}^*} = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\lambda E(C)} = \frac{(1-\rho)\boldsymbol{\kappa}}{\lambda E(I_D)} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_0^{busy} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\boldsymbol{\kappa}$ 는 사이클 시작점에서의 UMC 위상이 주어졌다는 조건 하에 사이클 끝점의 UMC 위상과 그 사이클 동안 서비스 받은 고객수 행렬 GF $\mathbf{K}(z)$ 를 사용하여 얻은 $\mathbf{K} = \mathbf{K}(z)|_{z=1}$ 의 정상 확률벡터이고, $\boldsymbol{\kappa}^*$ 는 사이클 동안 서비스 받은 평균고객수, \mathbf{u}_0^{busy} 는 단위시간당 바쁜기간이 끝나는 평균횟수와 그 때의 UMC 위상을 나타내는 벡터이다. 위 결과들로부터 임의고객의 이탈시점 고객수 분포 벡터 GF는 다음과 같다.

$$\mathbf{X}(z) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=0}^{D-x-v} \sum_{i=1}^y \sum_{k=0}^{y-i} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\ &\quad s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) \mathbf{N}_{D-x-y}(n-k) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^D \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(n)}(y) z^n [\mathbf{D}(z)]^x \\ &+ \left[\sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{v=0}^D \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_i}{\lambda} s^{(i)}(x-v) [\mathbf{D}(z)]^x \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_0^{busy} \right] \mathbf{A}(z) [z\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)]^{-1} \end{aligned}$$

3.2 임의시점 고객수 분포

임의시점(임의의 슬롯 시작점)에서 고객수가 k 명이고 그때의 UMC 위상이 i 일 확률을 $y_{k,i}$ 라고 하면 확률벡터와 변환은 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_k = (y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,m}), \quad \mathbf{Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k z^k.$$

임의시점에서의 고객수 분포의 벡터 GF $\mathbf{Y}(z)$ 는 다음의 관계로부터 얻는다(Kim et al, 2002).

$$\mathbf{Y}(z)(\mathbf{D}(z) - \mathbf{I}) = \lambda(z-1)\mathbf{X}(z) \quad (11)$$

4. 체재시간 분석

D -정책을 갖는 대기행렬시스템에서는 특별고객들의 서비스시간이 iid하지 않을 뿐만 아니라 그들의 서비스시간과 체재시간이 독립이 아니다. 즉, 아래 식과 같다.

$$\mathbf{W}^*(\omega) \neq \mathbf{W}_q^*(\omega) \mathbf{S}^*(\omega).$$

그러므로 체재시간 분포의 변환 벡터 GF는 고객의 유형에 조건을 취하여 다음과 같이 구한다.

$$\mathbf{W}^*(\omega) = \mathbf{W}_{sc}^*(\omega) + \mathbf{W}_{oc}^*(\omega) \quad (12)$$

4.1 특별고객의 체재시간 분포

시스템에 도착한 특별시험고객의 체재시간은 도착시점에서의 잔여유희기간과 자기보다 먼저 도착한 특별고객들과 자신의 서비스시간의 총합이다. 여기서 특별고객의 서비스시간은 자신의 체재시간과 독립이 아니다. 왜냐하면 특별시험고객의 서비스시간의 길이에 따라 잔여유희기간의 길이가 영향을 받을 것이고, 체재시간 역시 영향을 받기 때문이다.

따라서 결합분포로부터 체재시간을 구해야 하

는데 특별고객의 유형에 따라 경우를 나누어 체재시간 벡터 GF를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_{sc}^*(\omega) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{W}_{sc}^{*(a_i)}(\omega) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{W}_{sc}^{*(b_i)}(\omega). \quad (13)$$

여기서

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(a_1)}(\omega) = \sum_{x=1}^D \omega^x \sum_{y=0}^{D-x} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i)}(x) s^{(k)}(y) \mathbf{I}_{D-x-y}^*(\omega),$$

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(a_2)}(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x),$$

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(a_3)}(\omega) = \sum_{x=1}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^y \sum_{n=1}^y \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x) s^{(n)}(y),$$

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(b_1)}(\omega) = \sum_{x=2}^D \omega^x \sum_{y=0}^{D-x-1} \sum_{i=1}^{x-y} \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) \mathbf{I}_{D-x-y}^*(\omega),$$

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(b_2)}(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v),$$

$$\mathbf{W}_{sc}^{*(b_3)}(\omega) = \sum_{x=2}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y).$$

식 (13)을 더 간략히 정리하면 다음을 얻는다.

$$\mathbf{W}_{sc}^*(\omega) \quad (14)$$

$$= \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \omega^x \sum_{y=0}^{D-x-v} \sum_{i=1}^y \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) \mathbf{I}_{D-x-y}^*(\omega)$$

$$+ \sum_{v=0}^D \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v)$$

$$+ \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y)$$

4.2 보통고객의 체재시간 분포

바쁜기간에 도착하는 고객들은 모두 서비스시간이 iid(independent and identically distributed)하므로 임의의 보통고객의 체재시간은 자신의 대

기시간과 서비스시간의 합이다. 따라서 보통고객에 한해서는 다음이 성립한다. 대기시간을 분석한 Lee (2018)의 결과를 이용하면 보통고객의 체제시간의 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_{oc}^*(\omega) &= W_{q,oc}^*(\omega)S^*(\omega) \\ &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [U_D^*(\omega) - I] [\omega I - D[S^*(\omega)]]^{-1} \\ &\quad \times \frac{D - D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))} S^*(\omega) \end{aligned} \quad (15)$$

이제 식 (14)와 식(15)를 식 (12)에 대입하면 체제시간 분포의 벡터 GF를 얻는다.

5. 성능척도

본 장에서는 시스템의 성능을 평가하는 척도로서 평균 고객수와 평균 체제시간을 각각 유도한다. 마코비안 도착과정(MAP)을 갖는 대기행렬시스템의 평균 성능척도를 구하는 방법은 결과들이 행렬과 벡터로 표현되므로 고객들의 무작위 도착(random arrivals)을 가정하는 시스템의 성능척도를 구하는 것에 비해 상당히 복잡하다. 편의상 어떤 행렬 GF $A(z)$ 에 대하여 다음을 정의하자.

$$A = A(z)|_{z=1}, \quad A^{(n)} = \frac{d^n}{dz^n} A(z) \Big|_{z=1}$$

5.1 평균 고객수

이탈시점 평균 고객수 L_{dep} 와 임의시점의 평균 고객수 L 은 식 (10)과 식(11)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L_{dep} = X^{(1)} \mathbf{e} = X_{sc}^{(1)} \mathbf{e} + X_{oc}^{(1)} \mathbf{e} \quad (16)$$

$$L = Y^{(1)} \mathbf{e} \quad (17)$$

특별시험고객의 이탈시점 평균고객수는 식 (5)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_{sc}^{(1)} \mathbf{e} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=0}^{D-x-x-v} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) \\ &\quad \times s^{(k)}(y) \mathbf{N}_{D-x-y}(n-k) n \mathbf{D}^x \mathbf{e} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=0}^{D-x-x-v} \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) \\ &\quad \times s^{(k)}(y) \mathbf{N}_{D-x-y}(n-k) \frac{d}{dz} [D(z)]^x \Big|_{z=1} \mathbf{e} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^D \sum_{x=v+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i)}(x-v) \left[n \mathbf{D}^x + \frac{d}{dz} [D(z)]^x \Big|_{z=1} \right] \mathbf{e} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x-v} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(n)}(y) \left[n \mathbf{D}^x + \frac{d}{dz} [D(z)]^x \Big|_{z=1} \right] \mathbf{e} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{식 (9.11)에서 } \frac{d}{dz} [D(z)]^x \Big|_{z=1} \mathbf{e} = \sum_{k=0}^{x-1} \mathbf{D}^k \sum_{j=1}^{\infty} j \mathbf{D}_j \mathbf{e} \text{이다.}$$

보통시험고객의 이탈시점 평균고객수를 구하기 위해 식 (7)을 아래와 같이 다시 쓰고 계산 편의상 $H(z) = [X_{sc}^{last}(z) - \mathbf{x}_0]$ 라고 하자.

$$X_{oc}(z)[zI - A(z)] = [X_{sc}^{last}(z) - \mathbf{x}_0] A(z) \quad (19)$$

식 (19)를 z 에 대해 1차 미분한 후 $z=1$ 을 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} X_{oc}^{(1)}(z)[zI - A(z)] + X_{oc}(z)[I - A^{(1)}(z)] \\ = H^{(1)}(z)A(z) + H(z)A^{(1)}(z) \end{aligned}$$

$$X_{oc}^{(1)}(I - A) + X_{oc}(I - A^{(1)}) = H^{(1)}A + HA^{(1)} \quad (20)$$

식 (20)에 $X_{oc}^{(1)} \mathbf{e} \pi$ 를 더한 후 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} X_{oc}^{(1)} = X_{oc}^{(1)} \mathbf{e} \pi \\ + [H^{(1)}A + HA^{(1)} - X_{oc}(I - A^{(1)})][I - A + \mathbf{e} \pi]^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)을 z 에 대해 2차 미분한 후 $z=1$ 을 대

입하고, \mathbf{e} 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{X}_{oc}^{(1)}(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{(1)})\mathbf{e}-\mathbf{X}_{oc}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \\ & =\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{A}\mathbf{e}+2\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}+\mathbf{H}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \end{aligned}$$

위 식에서 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}$ 는 서비스시간 동안의 평균도착고객수를 나타내는 벡터로서 β 로 표현하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{X}_{oc}^{(1)}\mathbf{e}-2\mathbf{X}_{oc}^{(1)}\beta-\mathbf{X}_{oc}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \\ & =\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{e}+2\mathbf{H}^{(1)}\beta+\mathbf{H}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \end{aligned}$$

여기서 $\beta=\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}=\rho\mathbf{e}+[\mathbf{I}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}-\mathbf{D}]^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{A})\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{D}_n\mathbf{e}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{oc}^{(1)}\beta & =\mathbf{X}_{oc}^{(1)}\mathbf{e}-\frac{1}{2}\mathbf{X}_{oc}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \\ & \quad -\frac{1}{2}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{e}-\mathbf{H}^{(1)}\beta-\frac{1}{2}\mathbf{H}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \end{aligned} \quad (22)$$

이제 식 (20)의 뒤에 β 를 곱한 후, $\boldsymbol{\pi}\beta=\rho$ 를 이용하여 식 (22)와 함께 정리하면,

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_{oc}^{(1)}\mathbf{e}\rho+[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{A}+\mathbf{H}\mathbf{A}^{(1)}-\mathbf{X}_{oc}(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{(1)})][\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}\beta \\ & =\mathbf{X}_{oc}^{(1)}\mathbf{e}-\frac{1}{2}\mathbf{X}_{oc}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e}-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{e}-\mathbf{H}^{(1)}\beta-\frac{1}{2}\mathbf{H}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e} \\ & \quad \mathbf{X}_{oc}^{(1)}\mathbf{e} \\ & =\frac{1}{2(1-\rho)}[\mathbf{X}_{oc}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e}+\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{e}+2\mathbf{H}^{(1)}\beta+\mathbf{H}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{e}] \\ & \quad +\frac{1}{1-\rho}[\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{A}+\mathbf{H}\mathbf{A}^{(1)}-\mathbf{X}_{oc}(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{(1)})] \\ & \quad \times[\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}\beta. \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)의 \mathbf{X}_{oc} 는 $\mathbf{X}_{oc}=\mathbf{X}-\mathbf{X}_{sc}$ 로부터 구한다. \mathbf{X} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} & =\boldsymbol{\pi}+\mathbf{X}_{sc}(\mathbf{I}-\mathbf{A})[\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}. \\ & \quad +\mathbf{H}\mathbf{A}[\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

이제 임의시점에서의 평균고객수를 구하자. 식 (5)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{Y}(z)(\mathbf{D}(z)-\mathbf{I})=\lambda(z-1)\mathbf{X}(z)$$

위 식을 z 에 대하여 1차, 2차 미분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^{(1)}(z)(\mathbf{D}(z)-\mathbf{I})+\mathbf{Y}(z)\mathbf{D}^{(1)}(z) \\ & =\lambda[\mathbf{X}(z)+(z-1)\mathbf{X}^{(1)}(z)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}^{(2)}(z)(\mathbf{D}(z)-\mathbf{I})+2\mathbf{Y}^{(1)}(z)\mathbf{D}^{(1)}(z) \\ & \quad +\mathbf{Y}(z)\mathbf{D}^{(2)}(z) \\ & =\lambda[2\mathbf{X}^{(1)}(z)+(z-1)\mathbf{X}^{(2)}(z)] \end{aligned} \quad (26)$$

식 (25)에 $z=1$ 을 대입하고 양변에 $\mathbf{Y}^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}$ 를 더하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\mathbf{Y}^{(1)}=\mathbf{Y}^{(1)}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+(\lambda\mathbf{X}-\mathbf{Y}\mathbf{D}^{(1)})(\mathbf{D}-\mathbf{I}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} \quad (27)$$

식 (26)에 $z=1$ 을 대입하고 뒤에 \mathbf{e} 를 곱하여 정리하면,

$$\mathbf{Y}^{(1)}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{e}=\lambda\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{e}-\frac{1}{2}\mathbf{Y}\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{e}. \quad (28)$$

이제 식 (27)의 양변 뒤에 $\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{e}$ 를 곱하여 식 (28)과 정리하면 임의시점에서의 평균 고객수 L 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L & =\mathbf{Y}^{(1)}\mathbf{e} \\ & =\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{e}-\frac{1}{2\lambda}\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^{(2)}\mathbf{e} \\ & \quad -\frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{X}-\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^{(1)})(\mathbf{D}-\mathbf{I}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi})^{-1}\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{e} \end{aligned} \quad (29)$$

5.2 평균 체재시간

식 (14)로부터 임의의 특별고객의 체재시간 W_{sc} 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 W_{sc} &= W_{sc}^{*(1)} \mathbf{e} \\
 &= \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=0}^{D-x-v} \sum_{i=1}^y \sum_{k=0}^y \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\
 &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) [x \mathbf{I}_{D-x-y}^* + \mathbf{I}_{D-x-y}^{*(1)}] \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{v=0}^D \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i)}(x-v) \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{v=0}^{D-1} \sum_{x=v+1}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^y \sum_{k=0}^y x \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\
 &\quad \times s^{(i)}(x-v) s^{(k)}(y) \mathbf{e}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

시험고객이 보통고객일 확률을 포함한 보통고객의 대기시간 $W_{q,oc}$ 는 식 (15)로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 W_{oc}^{*(1)} \mathbf{e} &= W_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e} + W_{q,oc}^* S^{*(1)} \mathbf{e} \\
 &= W_{q,oc} + E(S) \mathbf{u}_{busy}^* \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n D_n}{\lambda} \mathbf{e} \\
 &= W_{q,oc} + E(S) (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{u}_{idle}^*) \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n D_n}{\lambda} \mathbf{e} \\
 &= W_{q,oc} + E(S) - E(S) \mathbf{u}_{idle}^* \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n D_n}{\lambda} \mathbf{e}
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

위 식에서 \mathbf{u}_{idle}^* , \mathbf{u}_{busy}^* 는 Lee (2016)의 식 (6.9)와 <정리 1>, $W_{q,oc}$ 는 Lee (2018)의 식 (13)으로

부터 구할 수 있으며 $\mathbf{u}_{idle}^* \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n D_n}{\lambda} \mathbf{e}$ 는 유희기간 동안 도착한 평균고객수를 나타낸다. 따라서 식 (31)과 식 (32)를 더하면 임의 고객의 평균체제 시간을 얻는다.

6. 수치예제

본 장에서는 시스템의 성능척도로서 평균 고객수와 평균 체제시간을 각각 구한다. 대상 시스템과 같은 복잡계 시스템(complex system)에서도 평균대기시간과 평균체제시간, 평균고객수와 평균체제시간과의 관계가 유효한지 확인하기 위해 대기시간을 분석한 Lee (2018)의 설정을 그대로

사용하기로 한다.

또한 연구를 통해 구한 이론값들과 시뮬레이션 결과를 비교하여 분석의 타당성을 확인한다. 이론값의 계산은 Mathematica 12.3을 사용하였고, 시뮬레이션은 SIMSCRIPT II.5을 사용하여 100,000개의 사이클로부터 평균값들을 얻었다.

서비스시간의 분포는 기하분포와 음이항분포를 사용하였으며 예제에 사용한 각 분포의 확률질량함수(pmf), 이론값(T)과 시뮬레이션 결과($Appr$)의 비교를 위한 백분율 상대오차는 다음과 같다.

$$\text{Geom}(p): s(k) = (1-p)^{k-1} p, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
 \text{NB}(n,p): s(k) &= \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \\
 &\quad (k = n, n+1, \dots)
 \end{aligned}$$

$$\text{상대오차}(\%) = \frac{T - Appr}{T} \times 100(\%)$$

(Example 1)

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.1 \\ 0.5 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$D = 15, \quad \lambda_g = 0.075, \quad \lambda = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \mathbf{e} = 0.1$$

Table 1 Mean Measures of Example 1

Service distribution		T	$Appr$	Relative error (%)
Geom(1/9) $E(S) = 9$	L	11.1843	11.2059	-0.1929
	W	111.843	112.020	-0.1583
	W_q	102.843		
NB(2,2/3) $E(S) = 3$	L	2.76011	2.75993	0.0065
	W	27.6011	27.5918	0.0336
	W_q	24.6011		

(Example 2)

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 \\ 0.45 & 0.35 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$D = 10, \quad \lambda_g = 0.065, \quad \lambda = \boldsymbol{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \mathbf{e} = 0.116.$$

Table 2 Mean Measures of Example 2

Service distribution	T		$Appr$	Relative error (%)
	L	W		
Geom(7/10) $E(S) = 1.4286$	L	3.6199	3.6176	0.0635
	W	31.2060	31.1778	0.0904
	W_q	29.7774		
NB(2,1/3) $E(S) = 6$	L	3.34798	3.3532	-0.1559
	W	28.8619	28.8990	-0.1285
	W_q	22.8619		

Table 1, 2에서 음영으로 표시한 부분은 Lee (2018)의 대기시간 분석 결과를 가져온 것이다. 위 결과로부터 시스템의 운영 행태가 복잡한 대기행렬시스템에서도 다음의 관계는 그대로 성립함을 확인할 수 있다.

$$L = \lambda W, \quad W = W_q + E(S).$$

7. 결론 및 추후 연구과제

본 연구에서는 상관성을 가진 집단 고객들이 시스템에 이산시간 마코비안 도착과정으로 도착하고 서버제어정책으로 D -정책을 갖는 복잡계 대기행렬의 고객수와 체제시간을 분석하였다. 시스템의 안정상태 고객수 분포와 체제시간 분포를 벡터 변환 형태로 구하고 성능척도로 각각의 평균을 계산식으로 유도하였다. 또한 수치예제를 통해 복잡한 형태의 수식으로 나타나는 결과들을 계산하고, 시뮬레이션 결과와 비교하여 이론값의 타당성을 검증하였다.

대기행렬시스템의 분석에서 고객들의 도착이 서로 상관성을 띠고 도착하는 것이 분명한데도 무작위 도착(예를 들면 포아송 도착과정이나 베르누이 도착과정)를 가정하여 분석하게 되면 서버 이용률이 높아질수록 시스템 내 평균 고객수, 평균 대기시간, 평균 체제시간과 같은 성능척도를 실제보다 저평가(underestimated)하여 예측하게 된다. 이렇게 되면 실제 시스템의 운영에서 이론을 바탕으로 한 의사결정의 신뢰도에 문제를

가져올 수 있기에 다소 복잡하더라도 이를 고려한 분석은 필요하다. 또한 실제 시스템에서는 고객들이 집단으로 도착하는 경우가 더 일반적이므로 모델에 이러한 상황들을 모두 반영하여 분석한 것은 학술적으로, 실무적으로도 그 의미가 크다. 실제 현장에서 사용하기 위해서는 수학 이론에 대한 충분한 이해가 요구되나 검증을 위해 개발한 시뮬레이션을 활용하면 초보자들도 주요 성능척도들을 구할 수 있다.

본 연구에서는 대상 시스템의 고객수와 체제시간을 이론적으로 분석하고 성능척도를 유도하는데 초점을 두었으나 추후 연구로는 보다 빠른 계산을 위한 알고리즘 개발과 이를 바탕으로 한 다양한 비용분석 최적화에 관한 연구들을 생각해 볼 수 있다. 다양한 시나리오 하에서 다른 서버 제어 정책과의 비교 연구도 가능하다.

References

Artalejo, J. R. (2001). On the M/G/1 queue with D -policy, *Applied Mathematical Modelling*, 25, 1055-1069.

Balachandran, K. R. (1973). Control policies for a single server system, *Management Science*, 19, 1013-1018.

Blondia, C. (1993). A discrete time batch Markovian arrival process as B-ISDN traffic model, *Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science*, 32(3/4), 3-23.

Bruneel, H., and Kim, B. G. (1993). *Discrete-time models for communication systems including ATM*, Kluwer Academic Publishers.

Chae, K. C. and Park, Y. I. (1999). On the optimal D -policy for the M/G/1 queue, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 25(4), 527-531.

Chae, K. C. and Park, Y. I. (2001). The queue length distribution for the M/G/1 queue

- under the D -policy, *Journal of Applied Probability*, 38(1), 278-279.
- Dshalalow, J. H. (1998). Queueing processes in bulk systems under the D -policy, *Journal of Applied Probability*, 35, 976-989.
- Dshalaw, J. H. (2001). A note on D -policy bulk queueing systems, *Journal of Applied Probability*, 38(1), 280-283.
- Heyman, D. P. (1977). The T -policy for the $M/G/1$ queue, *Management Science*, 23(7), 775-778.
- Kim, N. K., Chang, S. H., Chae, K. C. (2002). On the relationships among queue lengths at arrival, departure, and random epochs on the discrete-time queue with D -BMAP arrivals, *Operations Research*, 30, 25-32.
- Lee, H. W. (2006), *Queueing Theory*, Sigma Press.
- Lee, H. W. and Baek, J. W. (2005). BMAP/G/1 queue under D -policy: queue length analysis, *Stochastic Models*, 21(2-3), 484-505.
- Lee, H. W. and Seo, W. J. (2008). The performance of the $M/G/1$ queue under the dyadic $\text{Min}(N,D)$ -policy and its cost optimization, *Performance Evaluation*, 65, 742-758.
- Lee, H. W. and Song, K. S. (2004). Queue length analysis of $MAP/G/1$ queue under D -policy, *Stochastic Models*, 20(3), 363-380.
- Lee, H. W., Baek, J. W. and Jeon, J. (2005). Analysis of $M^X/G/1$ queue under D -policy, *Stochastic Analysis and Applications*, 23, 785-808.
- Lee, H. W., Cheon, S. H. and Seo, W. J. (2006a). Queue length and waiting time of the $M/G/1$ queue under the D -policy and multiple vacations, *Queueing Systems*, 54, 261-280.
- Lee, H. W., Lee, S. W., Seo, W. J., Cheon, S. H. and Jeon, J. (2006b). A unified framework for the analysis of the $M/G/1$ queues controlled by workload, *Lecture Note in Computer Science (LNCS)*, 3982, 718-727.
- Lee, H. W., Seo, W. J., Lee, S. W. and Jeon, J. (2010). Analysis of $MAP/G/1$ Queue under $\text{Min}(N,D)$ -policy, *Stochastic Models*, 26(1), 98-123.
- Lee, H. W., Seo, W. J. and Lee, S. W. (2011a). Analysis of the $M/G/1$ Queueing System under the Triadic (N,D,T) -Policies, *Quality Technology and Quantitative Management*, 8(3), 333-357.
- Lee, S. W. (2016). Workload Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue under D -policy, *Journal of Korea Society for Industrial Information Systems*, 21(6), 1-12.
- Lee, S. W. (2018a). Waiting Time Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue Under D -policy, *Journal of Korea Society for Industrial Information Systems*, 23(1), 53-63.
- Lee, S. W. (2018b). Analysis of Discrete-Time Geo/G/1 Queues under Workload Control and Multiple Vacations, *Journal of Korea Society for Industrial Information Systems*, 23(2), 29-39.
- Lee, S. W. (2020). Queue Length Analysis of Discrete-time Queueing System under Workload Control and Single Vacation, *Journal of Korea Society for Industrial Information Systems*, 25(1), 89-99.
- Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W. (2012). Analysis of Discrete-time $MAP/G/1$ Queue under Workload Control, *Performance Evaluation*, 69(2), 71-85.
- Lee, S. W., Lee, H. W., and Baek, J. W. (2011b). Analysis of Discrete-time Geo/G/1 Queue under the D -policy, *Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Analysis*, August 23-26, 2011, Seoul, Korea.
- Lucantoni, D. M. (1991). New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process, *Stochastic Models*, 7(1), 1-46.

Paxson, V., Floyd, S. (1995). Wide Area Traffic: The failure of Poisson modeling, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 3(3), 226-244.

Takagi, H. (1993). *Queueing Analysis: Volume 3. Discrete-Time Systems*, North-Holland.

Yadin, M., Naor, P. (1963). Queueing systems with a removable service station, *Operational Research Quarterly*, 14, 393- 405.



이 세 원 (Se Won Lee)

- 종신회원
- 성균관대학교 산업공학과 학사
- 성균관대학교 산업공학과 석사
- 성균관대학교 산업공학과 박사
- 국립부경대학교 경영대학 경영학부 부교수

- 관심분야: 대기행렬이론, 확률모형, 시스템 최적화