

고점성 유체의 슬로싱 유동 해석

박준상^{*,†}

Analysis of Sloshing Flow in Highly-Viscous Fluids

Jun Sang Park^{*,†}

Abstract A sloshing motion of highly viscous fluid in a rigid rectangular box with free surface is considered. The flow is generated by the motion of container being in harmonic motion in time along the horizontal axis normal to gravity, where the container velocity externally imposed is $u = \cos(2\pi t)$. Matched asymptotic method is invoked to elucidate flow visualization results such as linear profile of free surface and thin film flow on the vertical sidewall. Theoretical solution and physical reasoning are given to confirm that no-slip condition could be satisfied through near wall boundary layer of the thickness of $l \sim O(F_r/\sqrt{R_e})$, where F_r and R_e denotes, respectively, Froude and Reynolds number.

Key Words : Asymptotic Method(점근법), Boundary Layer(경계층), Highly Viscous Fluid(고점성 유체), Sloshing Flow(슬로싱 유동)

1. 서론

중력에 직각인 수평 방향을 따라 좌우로 주기적으로 진동하는 용기 내에 담겨있는 자유표면을 갖는 액체 유동이 슬로싱(sloshing) 유동이다.

이전의 연구를 살펴보면 대부분 대형 LNG 수송선에서 발생하는 슬로싱 유동으로 인한 구조물의 파괴, 액체연료를 이용한 추진체의 비행 불안정성, 지상의 액체 저장소에 미치는 지진에 의한 강제진동 등과 같은 비교적 스케일이 큰 공학적 응용을 위한 문제에 초점을 맞추고 있다⁽¹⁻³⁾.

특성 길이가 큰 경우, 즉, 시스템 레이놀즈수

가 매우 큰 경우는 벽면 근처의 얇은 영역에만 점성의 영향이 나타나는 경계층 유동이 발생하고 유동 영역 대부분을 차지하는 주 유동 영역에는 비점성 유동이 지배하게 된다. 따라서 시스템 특성 길이 크기의 파동에 의해 발생하는 동특성을 다룬 대부분의 이전 연구는 비점성 파동역학에 기반한 연구이다. 레이놀즈수가 큰 경우에 대한 비점성 파동 연구는 용기 크기의 길이 특성을 갖는 주 유동을 지배하는 웨이브 파동과 벽면 경계층에서 발생하는 매우 작은 길이 특성을 갖는 경계층 점성유동 사이의 상호작용이 없다는 가정의 연구이다⁽¹⁾.

슬로싱 유동에서 점성 효과를 다룬 연구의 시 작은 Keulegan⁽⁴⁾ 와 Mei⁽⁵⁾의 연구가 있다. 이들 연구는, 레이놀즈수가 큰 전형적인 슬로싱 유동에서, 용기 가진을 통해 외부에서 액체로 공급

^{†*} School of Mechanical & Automotive Engineering,
Halla University, Professor
E-mail : jspark@halla.ac.kr

되는 지속적인 에너지 증가를 벽면 근처 국지 경계층 유동 영역에서 발생하는 에너지 소산 작용으로 상쇄시킬 수 있다는 내부 비점성 주 유동이 해결할 수 없는 설명에 대한 것이다.

한편, 유동 영역 전체에서 점성이 매우 크게 작용하는 작동유체의 슬로싱 유동 연구는 상대적으로 흔하지 않다.

Wu, Taylor & Greaves⁽⁶⁾의 논문이 작동유체의 점성계수가 매우 커 유동 영역 전체에 걸쳐 점성 효과가 영향을 나타내는 경우를 다룬 최초의 연구이다. 이들은 유동 영역 전체에 걸쳐 점성의 영향이 강하게 나타나는 슬로싱 유동에 대한 이론연구 과정에서 용기 벽면에서의 속도 조건을 완전 미끄럼 조건(perfect slip condition) 선택했다. 물리적인 관점에서 생각하면 벽면에서의 완전 미끄럼 조건보다는 점착조건(no-slip condition)이 더 적절할 것이기 때문에 이 선택은 수학적 관점에서 문제를 단순화시키기 위한 것처럼 보인다. 따라서 Wu, Taylor & Greaves⁽⁶⁾가 채택한 벽면 조건의 타당성에 대한 의문이 그들의 이론 결과를 받아들이기 전에 해결해야 할 과제로 여전히 남아있었다.

이후 Park⁽⁷⁾은 고점성 실리콘 오일을 이용한 슬로싱 실험 연구를 통해 대부분의 유동 영역을 차지하는 벽에서 먼 내부 벌크 유동(inner bulk flow)은 전체 유동이 좌우 교반 운동하는 용기의 이동 변위와 같은 위상 운동(in-phase motion)을 하고 벽면 근처에서 발생하는 얇은 웨팅유동(wetting flow)이 내부 슬로싱 유동에 대한 완전 미끄럼 조건을 제공한다는 것을 보였다. 그리고 후속 실험 연구를 통해 Park⁽⁸⁾은 벽면에서의 점착조건(no-slip condition)은 매우 얇은 벽면 웨팅 유동에 의해 만족시킬 수 있고 현상학적인 관점에서 이 유동은 딥코팅(dip coating) 문제에서 발생하는 코팅 유동과 매우 긴밀한 유사성을 보인다는 것을 보였다.

결과적으로 Park^(7,8)은 실험을 통해 고점성 액체의 슬로싱 유동은 선형 자유표면을 갖는 내부 유동과 Landau-Levich⁽⁹⁾ 문제와 유사한 딥코팅(dip coating)에서 발생하는 유막 코팅 유동(thin film coating flow)과 유사한 벽면 유동으로

나눌 수 있다고 설명했다. 그러나 이 주장이 유동 가시화 실험에 대한 현상학적 관점에서 내려진 정성적인 결론이라는 것을 생각할 때 보다 논리적이고 해석적인 접근을 통한 주장의 타당성에 대한 정량적 검증의 필요성이 여전히 남아있다.

본 논문에서는 Park⁽⁷⁾의 실험 결과에 대한 해석적 접근을 통해 이전 주장의 엄밀성에 대한 문제를 이론적으로 살펴보고자 한다. 본 논문에서는 점근 해석법(matched asymptotic method)을 이용해 내부 주 유동과 벽면 경계층 유동의 매칭이 벽면 점착조건(no-slip condition)을 만족시킬 수 있는 것을 보일 것이다. 이를 통해 Wu, Taylor & Greaves⁽⁶⁾ 과 Park⁽⁸⁾가 채택한 내부 유동 해석을 위한 벽면에서의 완전 미끄럼 조건의 타당성을 엄밀히 보여줄 것이다. 그리고 벽면 근처에서 발생하는 코팅 유동은 표면장력이 주된 유동 변수인 Landau-Levich⁽⁹⁾ 유동이 아니라 중력과 점성력이 평형 작용을 하는 경계층 유동이라는 것을 보일 것이다.

요약하면 본 연구의 목적은 실험 결과를 체계적으로 설명할 수 있는 내부 주 유동과 측벽 근처의 경계층 유동에 대한 해석을 통해 고점성 슬로싱 유동의 이론 모형을 제공하는 것이다.

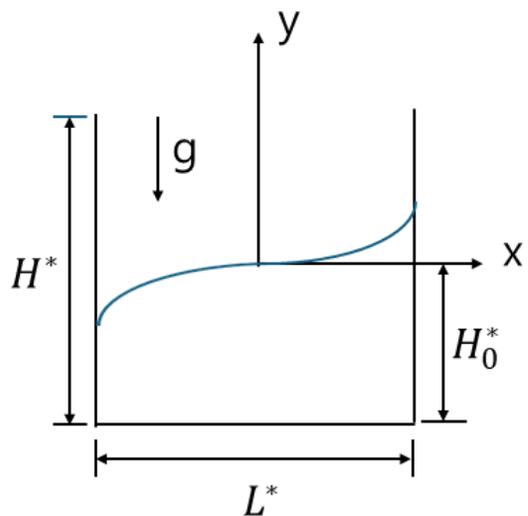


Fig. 1. Schematics of the experimental system

2. 실험 결과

여기서는 본 논문의 해석과 비교에 필요한 실험 결과를 간략히 요약한다. 실험 장치의 구성 및 실험의 정확도를 위한 벤치마크 테스트 등의 보다 자세한 내용은 Park⁽⁷⁾의 2장을 참고 하길 바란다.

본 실험에서는 2차원 슬로싱, 즉, $x-y$ 평면에서 발생하는 유동을 다룬다. (Fig.1 참고) 여기서 x -축은 중력에 수직인 수평 방향이고 y -축은 중력에 평행인 수직 방향이다. 실험에 사용한 용기의 크기는 x -방향 $L^* = 60mm$, y -방향 $H^* = 180mm$ 이고, 초기 정지상태에서 작동유체의 높이를 $H_0^* = 90mm$ 로 채워 심수 조건($H_0^*/L^* = 1.5$)을 만족하도록 했다. 그리고 수평 x -방향으로 주기적인 운동 변위 $S^* \sin(2\pi f^* t^*)$ 를 가하는 실험을 수행했다. 여기서 첨자 *는 차원변수를 의미한다.

그리고 본 실험에서 사용한 작동유체는 물보다 동점성계수가 100배, 즉, 100cs인 고점성 실리콘 오일을 사용하였다. 이를 통해 고점성 슬로싱 유동 특성을 가시화하는 실험을 수행했다.

Fig. 2는 실험 조건 $S^* = 20mm$, $f^* = 2.5Hz$ 에서 1/2-주기($0.5 \leq t \equiv t^* f^* \leq 1.0$) 동안 실험한 시간에 따른 자유표면의 형상 변화를 보여준다. 나머지 1/2-주기의 변화는 좌우를 바꾼 주기적인 형태로 나타나기 때문에 이것으로 충분하다.

Fig. 2를 보면 현상학적인 관점에서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

고점성 슬로싱 유동의 경우 수직 벽에서 먼 대부분의 내부 유동 영역(Fig. 3의 내부 영역 참고)에서는 자유표면이 선형 형상을 가지고 좌표 (0,0)를 중심으로 시소 운동 형태의 주기적인 운동을 한다. 이 사실은 수직 벽 근처로 다가갈수록 내부 유동의 수직속도(v)가 더 커져야 한다는 것을 의미한다. 그리고 자유표면이 하강하고 있는 우측 벽면에는 얇은 유막이 형성되고 있다. 이것은 자유표면에 상대적인 좌

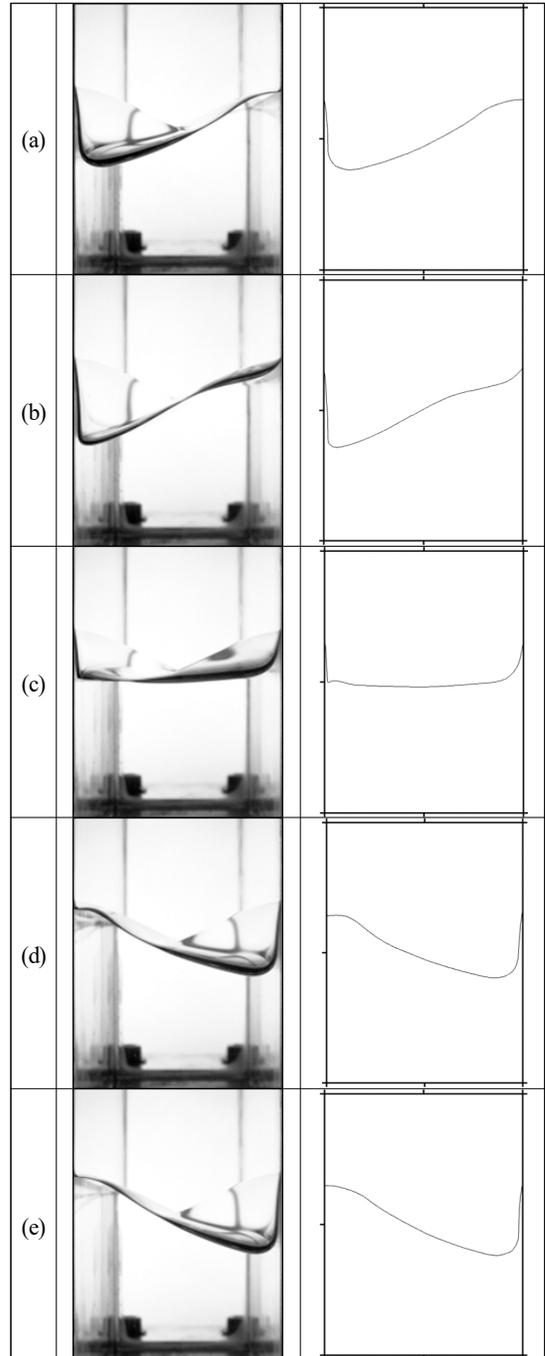


Fig. 2. Photos (left column) and surface-curves (right column) of free surfaces evolution during half cycle. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 0.65$, (c) $t = 0.8$, (d) $t = 0.9$, (e) $t = 1.0$. $S^* = 20mm$ and $f^* = 2.5Hz$

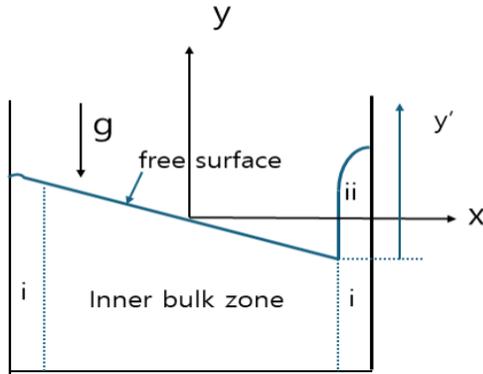


Fig. 3. Schematics of flow zones : (i) boundary layer and (ii) thin film layer. The y' denotes a vertical coordinate with respect to free surface.

표(Fig. 3의 좌표 y')에서 바라보면 액체에 잠긴 수직 벽을 액체 밖으로 끌어내는 흔히 딥코팅(dip coating)이라 부르는 드래그-아웃(drag-out) 과정에서 생기는 박막 유동(thin film flow)과 유사하다. 상기 결과를 바탕으로 이전 연구에서 Park^(7,8)은 내부 영역의 수직 방향 속도 v 가 벽($x = \pm 0.5$) 근처에서 크게 유지될 수 있는 이유를 벽면에 생성된 박막 유동층이 내부 유동에 대한 마찰을 완화하기 때문이라고 주장했다. 그리고 벽면에서 생성되는 박막 유동은 현상학적으로 Landau-Levich⁽⁹⁾ 문제의 박막 유동과 유사하다고 언급했다.

본 논문에서는 이론적인 접근을 통해 앞서 Park^(7,8)이 언급한 현상학적 결론을 검증하고 이전 연구의 불분명한 부분에 대해 보다 엄밀한 해석을 제공하고자 한다.

3장에서는 가진 강도가 매우 작은, 즉, $\delta (= 2\pi S^*/L^*) \ll 1$ 인 경우를 가정한 선형해석을 통해 수직 벽면에서 점착 조건을 만족시키기 위해 생성되는 벽면 근처의 얇은 유동층은 이전 연구의 주장과 다르게 자유표면 위, 아래에서 서로 다른 메카니즘으로 형성된다는 것을 보일 것이다. 그리고 자유 경계층 위에 생성되는 박막 유동이 표면장력이 주된 역할을 하는 Landau-Levich 유동이 아니라 점성력과 체적력이 평형을 이루는 얇은 유막 흐름이라는 것을 보여줄 것이다.

3. 해석

3.1 지배방정식

이제 용기를 수평 방향으로 주기적인 수평 x -방향으로 조화함수 형태의 주기적 가진 $d^* = S^* \sin(2\pi f^* t^*)$ 을 가하는 경우를 생각하자. 여기서 d^* 는 변위를 의미한다.

유동 변수에 대한 무차원화를 다음과 같이 하자. 여기서 u 와 v 는 각각 x - 및 y -방향 속도 성분, p 는 압력(reduced pressure), ρ 는 액체의 밀도, $\delta (= 2\pi S^*/L^*)$ 는 가진 강도를 나타내는 비선형 파라미터를 의미한다.

$$t = f^* t^*, x = x^*/L^*, y = y^*/L^*, u = u^*/\delta f^* L^*, v = v^*/\delta f^* L^*, p = p^*/\delta \rho^* (f^* L^*)^2,$$

고점성 액체 문제임을 고려하여 점성항에 비해 비선형 항이 무시할 정도로 작은 선형의 경우($\delta \ll 1$)를 고려하고 절대 좌표계에서 바라본 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{1}{Fr^2} \vec{j} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2)$$

여기서 $\vec{V} = (u, v)$ 이고, \vec{i} 와 \vec{j} 는 각각 x -방향 및 y -방향 단위벡터 들이다. 그리고 2개의 무차원수는 프루드(Froude)수, $Fr = f^* L^*/\sqrt{gL^*}$ 와 레이놀즈(Reynolds)수, $Re = f^* L^{*2}/\nu$ 를 의미하고 g 는 중력가속도이다.

본 문제에 연관된 경계조건은 다음과 같다 :

$$(i) \ x = \pm 0.5 \text{에서 } u = \cos(2\pi t), v = 0, \quad (3)$$

$$(ii) \ y = -1.5 \text{에서 } v = 0, \partial u/\partial z = 0, \quad (4)$$

$$(iii) \ y = H \text{에서 } \partial H/\partial t = v, \quad (5)$$

위 식에서 H 는 무차원 자유표면 높이를, u, v 는 각각 x, y 방향의 무차원 속도를 의미한다. 수학적 편의성을 위해 아래 바닥 벽면에서의 경계조건을 Wu, Taylor & Greaves⁽⁶⁾와 같은 완전 미끄럼 조건으로 가정했다. 물리적인 관점에서 침수조건($H_0^*/L^* > 1.5$)에서 용기 바닥이 자유표면과 측벽 근처의 유동에 미치는 영향이 작은 것을 고려하면 상기 가정은 본 연구의 결과를 그다지 제한하는 요인은 아니다. 그리고 주기적인 준정상 상태의 슬로싱을 고려하면 초기조건이 필요치 않게 된다.

상기 지배방정식에 대한 해를 구하기 위해 Fig. 3 같이 내부 주 유동 영역, 측벽 근처의 수직 경계층 영역(Fig.3에서 영역 (i))과 측벽 근처의 얇은 유막 영역(Fig.3에서 영역 (ii))으로 구분하여 각 영역에서의 해를 고려한다.

3.2 내부 유동 해석

대부분의 유동 영역을 차지하는 내부 유동에 대한 해를 알아보자. 레이놀즈수가 매우 작은 경우 유동변수를 다음과 같이 전개하자.

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_0 + R_e \bar{\Pi}_1 + O(R_e^2),$$

여기서 $\bar{\Pi}$ 는 유동변수($\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$)이고 bar는 내부 유동변수를 의미한다.

식(1)-(2)에 대입하고 내부 영역에서의 지배방에 대한 섭동해를 구하자.

최저차(leading order) 압력항 \bar{p}_0 는

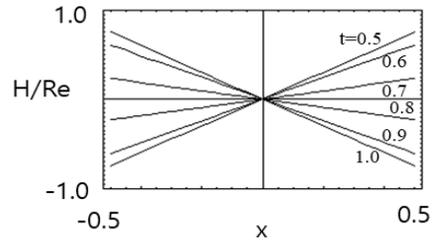
$$\bar{p}_0 = H - \frac{1}{F_r^2} y, \tag{6}$$

와 같이 정수압인 것이 자명하다.

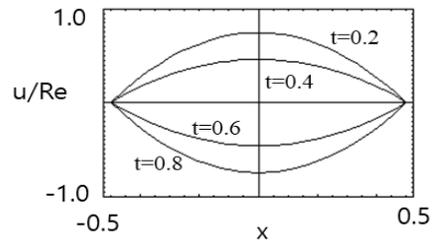
식(1)과 식(6)을 이용하여 속도 \bar{u} 와 \bar{v} 에 대한 차수식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(a) \quad \bar{u}\text{-차수식} \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial x^2} = 0, \tag{7a}$$

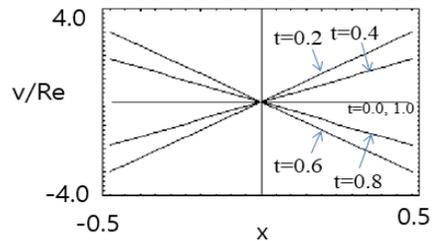
$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t}. \tag{7b}$$



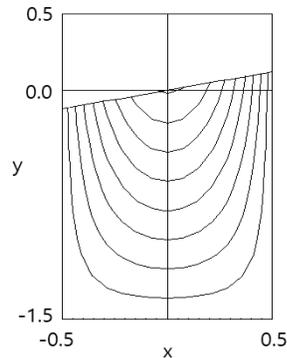
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4. Evolutionary profile of flow variables. (a) free surface height, (b) horizontal velocity u , (c) vertical velocity v at $y = -0.5$ and (d) stream lines at $t = 0.2$.

$$(b) \quad \bar{v}\text{-차수식} \quad \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial x^2} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{1}{F_r^2} \quad (8b)$$

경계조건 식(3)-(4)를 만족하는 근사해 \bar{u} 를 구하면

$$\begin{aligned} \bar{u} &\simeq \bar{u}_0 + R_e \bar{u}_1 + O(R_e^2) \\ &\simeq \cos(2\pi t) - R_e \pi \sin(2\pi t)(x^2 - 0.25) + O(R_e^2) \end{aligned} \quad (9)$$

을 얻을 수 있다. 그리고 연속방정식(2)를 이용하여 경계조건 식(3)-(4)를 만족하는 \bar{v} 해를 구하면

$$\begin{aligned} \bar{v} &\simeq \bar{v}_0 + R_e \bar{v}_1 + O(R_e^2) \\ &\simeq R_e 2\pi \sin(2\pi t)x(y + 1.5) + O(R_e^2), \end{aligned} \quad (10)$$

이 된다.

마지막으로 식(5) & 식(10)에서 내부 유동의 자유표면($y = H$) 높이를 구하면

$$H = \int \bar{v} dt \simeq -R_e \frac{3}{2} \cos(2\pi t)x + O(R_e^2), \quad (11)$$

와 같다.

Fig. 4(a)은 앞서 구한 해를 이용하여 그린 윗기에 고정된 상대 좌표계에서 바라본 1/2-주기 ($0.5 \leq t \leq 1.0$) 동안의 자유표면 모습이다. 주기 운동 때문에 앞선 1/2-주기($0.0 \leq t \leq 0.5$)의 자유표면 모습도 동일하다. $x = 0.5$ 에 있는 우측 벽을 기준으로 자유표면이 $0.0 \leq t \leq 0.5$ 동안 올라간다면 $0.5 \leq t \leq 1.0$ 동안에는 내려간다는 차이가 있을 뿐이다. 이것은 식(10)에서 쉽게 확인할 수 있다.

자유표면이 선형으로 나타나는 이론 결과는 Fig. 2에 있는 실험 결과와 정성적으로는 잘 일치한다. 실험 결과의 자유표면 형상이 완전한 선형이 아닌 이유는 가진 강도가 $\delta \approx 1.05$ 인

비선형 관성력이 작용하는 영역에서의 실험이기 때문에 나타난 비선형 효과 때문이다. 사실 $\delta \ll 1$ 인 선형 영역에 대한 실험을 통해서도 자유표면의 높이 변화를 관찰하기가 쉽지 않다. 그러나 실험 결과와 이론 결과로부터 고점성 선형 슬로싱의 경우 자유표면은 초기 정지상태 (0,0)에 위치한 $x-y$ 평면에 수직인 축을 중심으로 시소를 타는 것과 같은 주기적인 아래, 위 운동을 한다.

따라서 $x = 0.5$ 근처의 자유표면 높이를 기준으로 자유표면이 올라가는(내려가는) 경우 질량 보존을 위해 내부 영역의 액체는 오른쪽(왼쪽)으로 이동, 즉, $\bar{u} > 0$ ($\bar{u} < 0$) 해야 한다. 이것은 Fig. 4(b)에서 $y = -0.5$ 에서 수평 x -축을 따라 속도 u 가 $0 \leq t \leq 0.5$ 동안 + 값을 $0.5 \leq t \leq 1.0$ 동안 - 값을 갖는 것으로부터 잘 확인된다.

Fig. 4(c)에는 $y = -0.5$ 에서 수평 x -축을 따른 속도 v 가 나와 있다. 당연한 결과이지만 자유표면이 내려오는(올라가는) 동안 내부 액체의 수직 방향 속도 \bar{v} 도 -(+)값으로 움직이는 것을 볼 수 있다. 내부 영역에서의 수직 방향 속도의 크기는 자유표면이 아래, 위 정점에 도달했을 때인 $t = 0.25$ 와 $t = 0.75$ 에서 $v = 0$ 이고, 자유표면이 $x = 0$ 면을 지나갈 때 최대가 된다.

Fig. 4(d)는 앞서 구한 이론해에서 구한 전형적인 내부 유동의 유선을 그린 것이다. 물리적으로 유체의 점성이 매우 커지면 유동 영역 대부분을 차지하는 내부에서는 유체가 매우 큰 점착력에 의해 같은 위상으로 수평으로 운동을 하고, 이때 발생하는 수평 방향 가속도로 인한 체적력과 중력의 합력이 유동장 내부에서 동일한 기울기의 압력선을 만들어 결과적으로 등압선의 변화가 Fig. 4와 같은 좌, 우 교반 형태의 주기적인 내부 유동을 발생시킨다.

앞서 구한 내부 영역의 속도해에 대해 한가지 언급할 사실은 속도 \bar{v} 가 측벽($x = \pm 0.5$)에서 점착조건 $\bar{v} = 0$ 을 만족시키지 못한다는 것이다. 이것은 측벽 근처에 또 다른 유동층이 존재해야 한다는 사실을 의미한다. 그리고 실험이

$R_e \sim O(100)$ 에서 수행되었기 때문에 $R_e \ll 1$ 의 가정하에 앞서 구한 점근해와 실험결과와의 정량적인 비교는 무의미하다.

3.3 측벽 유동 해석

이제 앞서 구한 내부 유동에 대한 해(식(9)-(10))가 만족시키지 못하는 측벽($x = \pm 0.5$)에서의 점착조건을 생각하자.

점착조건 $v(x = \pm 0.5) = 0$ 은 측벽 근처의 얇은 유동 영역을 통해 만족시킬 수 있다.

Fig. 3과 같은 유동이 시차를 두고 좌, 우측 벽 근처에서 번갈아 주기적으로 나타나기 때문에 1/2-주기, 즉, $0.5 \leq t \leq 1.0$ 동안의 우측 벽 근처에서 자유표면이 내려가면서 생성되는 얇은 유막(Fig.3의 영역 (ii))과 내부 경계층(Fig.3의 영역 (i))을 고려하는 것으로 충분하다.

유동영역 (i)과 (ii)에서 유동변수의 미분값이

$$\partial \tilde{\phi} / \partial x \gg \partial \tilde{\phi} / \partial y$$

로 가정하자. 여기서 tilde는 경계층 혹은 유막 유동 변수를 의미한다.

그러면 식(1)을 이용하여 항들에 대한 크기 척도 해석(magnitude ordering analysis)을 통해 벽 근처의 얇은 유동 영역이 존재하기 위한 시간 및 길이 척도를 구하면

$$t \sim O(F_r^2), \quad l \sim O(F_r / \sqrt{R_e})$$

인 것을 쉽게 알 수 있다. 이 경우 측벽 근처에서 점성력과 중력에 의한 체적력이 평형을 이루는 얇은 경계층이 존재할 수 있다.

따라서 상기 해석이 물리적으로 타당성을 갖기 위해서는 경계층의 두께를 나타내는 길이 척도 l 이 매우 작아야 한다. 즉,

$$l \sim F_r / \sqrt{R_e} = \left(\frac{\nu f^*}{gL^*} \right)^{1/2} \ll 1$$

의 조건을 만족해야 한다. Fig. 2의 실험 조건에서 위 값을 구하면 $F_r / \sqrt{R_e} \approx 0.22$ 정도이기 때문에 본 장의 차원해석 결과로 실험 결과를 설명하는 것이 가능한 영역이다.

이제 두 영역(Fig. 3에서 영역(i) & (ii))에 대한 지배방정식과 해를 구하자.

(i) 경계층 영역

자유표면 아래에서는 압력이 정수압으로 주어지기 때문에 식(1)에서 영역(i)의 지배방정식

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2}, \quad (12)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 τ 와 ξ 는 각각 $\tau = t/F_r^2$ 와 $\xi = (0.5 - x)/(\sqrt{R_e}/F_r)$ 이다.

식(12)의 초기조건은

$$\tilde{v}(\tau = 0, \xi, y) = 0, \quad (13)$$

이고, 경계조건은 우측 벽면($x = 0.5$)에서 점착조건 $v = \tilde{v}(x = 0.5, t) + \tilde{v}(\xi = 0, \tau) = 0$ 을 만족하도록 식(10)을 이용하여

$$\tilde{v}(\tau, \xi = 0, y) = -R_e \pi \sin(2\pi t)(y + 1.5), \quad (14a)$$

와

$$\tilde{v}(\tau, \xi \rightarrow \infty, y) = 0, \quad (14b)$$

를 구할 수 있다.

시간변수 $\tau = t/F_r^2$ 가 t 에 비해 매우 짧은 시간척도를 가진다는 것을 고려하면 식(12)와 식(13)-(14)를 만족하는 해는 스톡스 유동(Stokes flow) 해를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다 ($F_r \sim O(1)$ 인 일반적인 경우의 해는 Fetecau et al.⁽¹⁰⁾의 논문을 참고 바란다).

$$\tilde{v}(\tau, \xi, y) \approx -R_e \pi \sin(2\pi t)(y+1.5) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (15)$$

결과적으로 내부 영역($\xi \gg 1$)에서 앞서 구한 해 식(10)이 되고, 측벽($x = 0.5$)에서는 점착조건을 만족하는 합성 점근해(composite asymptotic solution)

$$\frac{v(t, x, y)}{R_e} = 2\pi \sin(2\pi t)(y+1.5) \left(x - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \right), \quad (16)$$

를 구할 수 있다.

(ii) 유막 영역

유막 내부의 압력을 외부 공기압($p = 0$)으로 가정하면 지배방정식이

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = -1 + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} \quad (17)$$

이 된다. 그리고 $x = 0.5$ 에서 자유표면 운동에 상대적인 수직운동(Fig. 3에서 자유표면에 고정된 좌표 y' 을 기준으로 하는 벽면 운동)을 고려하면, 식(11)에서 벽면 점착조건

$$\tilde{v}(\tau, \xi = 0, y > H) = -R_e \frac{3}{2} \pi \sin(2\pi t), \quad (18a)$$

와 유막 바깥 가장자리에서 전단응력이 없는

$$\frac{\partial \tilde{v}(\tau, \xi = h, y > H)}{\partial \xi} = 0, \quad (18b)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 h 는 유막의 두께를 의미하고, 아직 결정되지 않은 미지 함수이다. 따라서 필요한 또 하나의 지배방정식은 식(2)에서

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \tilde{v} d\xi = 0, \quad (19)$$

와 같이 구할 수 있다. 그리고 식(17)과 식(19)

를 이용하여 유막 두께에 대한 식은

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-h + \frac{h^3}{3} \right) = 0 \quad (20)$$

이 된다.

이제 식(18a)와 식(18b)를 만족시키는 유막 두께 h 에 대한 지배방정식(20)의 해를 구하는 일이 남았다. 식(20)에 대한 이론해를 직접 구할 수는 없지만 정지한 상태의 무한 풀(pool)에 담겨있는 액체의 수위를 일정 속도로 내릴 때 발생하는 수직 벽에서의 유막에 대한 Benilov & Zukov⁽¹¹⁾의 이전 연구 결과를 이용하면 다음과 같은 본 논문의 주장을 뒷받침할 수 있는 결론을 도출할 수 있다.

Benilov & Zukov은 이론해석을 통해 수위가 일정 속도($\tilde{v} = -1$)로 낮아지는 경우 유막의 두께가 다음과 같다는 것을 보였다 (Benilov & Zukovrk 제시한 식(A2) 참조).

$$h = \sqrt{\frac{\xi}{\tau} + 1 + \frac{1}{4\tau^2}} - \frac{1}{2\tau}$$

그리고 본 논문에서 유도한 식(20)이 Benilov & Zukov의 논문의 유막 두께에 대한 식과 같고, 시간변수 $\tau = t/F_r^2$ 가 t 에 비해 매우 짧은 시간척도를 가진다는 것을 고려하면, 수직 벽의 속도 조건(식(18a))은 시간척도 $\tau = t/F_r^2$ 입장에서 준정상 조건으로 생각할 수 있다. 결과적으로 식(18)과 식(20)을 만족하는 해를

$$h \approx -R_e \frac{3}{2} \pi \sin(2\pi t) \left(\sqrt{\frac{\xi}{\tau} + 1 + \frac{1}{4\tau^2}} - \frac{1}{2\tau} \right) \quad (21)$$

로 근사할 수 있다.

식(21)은 자유표면이 내려가는, 다시 말해 용기의 수직 벽이 위로 올라가는 주기 $0.5 \leq t \leq 1.0$ 동안만 유용하다. Benilov & Zukov⁽¹¹⁾의 해가 딥코팅(dip coating) 유동, 즉 드래그아웃(drag-out) 과정에 대한 해이기 때문이다. 그러나 실험 결

과를 살펴보면 드래그-인과 드래그-아웃 동안 수직 벽에 형성되는 유막의 크기 변화는 그다지 심하지 않아 유막 두께를 전 주기를 통해 식(21)로 부터 얻을 수 있는

$$h \sim O(F_r / \sqrt{R_e}) \quad (22)$$

정도로 인 것으로 추정된다.

식(21)에 대해 한가지 언급해야 할 사실은 식(21)은 유동 변수에 대한 미분값이 $\partial\tilde{\phi}/\partial x \gg \partial\tilde{\phi}/\partial y$ 의 조건을 충족할 때 유용한 식이다. 따라서 본 절의 해석은 풀에서 유막이 시작되는 정적 계면(static meniscus) 영역과 유막 팁(tip) 영역에서는 성립하지 않는다.

사실 자유표면이 오르내리는 전 주기, 즉, 드래그-아웃(drag-out)과 드래그-인(drag-in) 과정의 전체에 대한 시간 해석과 유막 유동의 뿌리(시작점)에서 팁까지 유막이 형성되는 모든 공간에 대한 해석은 본 연구의 범위를 넘어서는 복잡성을 가진 대단히 어려운 문제일 뿐 아니라 다양한 관점에서 아직도 연구가 활발히 진행되고 있는 주제이다⁽¹²⁾.

4. 결론

본 연구에서는 고점성 슬로싱 유동에서 나타나는 유동에 대한 이론해석을 통해 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

점성이 매우 큰 액체를 담고 있는 용기가 주기적인 좌우 수평 운동을 하게 되면 공간 대부분을 차지하는 내부 영역의 액체는 중력과 수평가속도에 의한 좌우 교반하는 주기적인 체적력 변화를 겪게 된다. 이를 통해 용기 내 액체는 용기가 왼쪽으로 가속하는 주기 동안 ($0 < t < 0.5$)은 수직 축을 기준으로 용기의 오른쪽($0 < x < 0.5$)에 위치한 액체가 수직으로 올라가는 운동($v > 0$)을 하게 되면 반대편 왼쪽($-0.5 < x < 0$)에 위치한 액체는 내려가는 운동($v < 0$)을 하게 된다. 이 주기 동안 자유표면은 선형 형태를 유지하고 좌표 원점을 중심

으로 반시계방향 운동을 하고, 내부 액체는 질량보존을 만족시키기 위해 자유표면이 내려오는 왼쪽에서 자유표면이 올라가는 오른쪽으로 이동하는 운동($u > 0$)을 하게 된다. 이후 용기가 오른쪽으로 가속되는 다음 주기($0 < t < 0.5$)에서는 반대의 운동을 주기적으로 지속한다 (Fig. 4 참고).

상기 과정을 통해 나타나는 수직 방향 속도 (v)는 액체가 고점성임에도 불구하고 벽면에서의 점착조건을 만족시킬 수 없어 두께 $l \sim O(F_r / \sqrt{R_e})$ 인 두 종류의 경계층, 즉, 자유표면 아래 영역에서 나타날 수 있는 점성 경계층과 자유표면 위 수직 벽면에서 나타날 수 있는 얇은 유막(thin film)이 필요하다는 것을 해석적 방법으로 보였다. 자유표면 아래 영역의 점성 경계층에 대해서는 수직 벽에서 점착조건을 만족시키는 스톡스 유동 특성을 갖는 완전한 해를 구했고, 자유표면 위에 나타나는 유막 유동은 중력과 점성력이 평형을 이루는 Benilov & Zukov⁽¹¹⁾의 결과와 동일한 식에 지배되는 흐름이라는 것을 보였다. 따라서 본 논문의 결과는 고점성 유체를 이용한 딥코팅 문제에서 발생하는 박막의 두께 예측에 활용될 수 있다.

요약하면 본 연구에서는 이전 연구에서 관찰을 통한 현상학적 설명에 거쳤던 고점성 슬로싱 유동에 대해 이론적 접근을 통해 보다 체계적이고 해석적 설명이 가능한 논리체계를 제공했다.

REFERENCE

- 1) Ibrahim, R. A., 2005, Liquid Sloshing Dynamics, Cambridge Univ. Press.
- 2) Faltinsen, O. M. and Timokha, A. N. 2009, Sloshing, Cambridge Univ. Press.
- 3) Peregrine, D. H., 2003, "Water-Wave Impact on Walls," Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 35, pp.23~43.
- 4) Keulegan, G. H., 1959, "Energy Dissipation in Standing Waves in Rectangular Basins," J.

- Fluid Mech., Vol.6, pp.33~50.
- 5) Mei, C. C., 1976, "Power Extraction from Water Waves," J. Ship Res. Vol. 20, pp.63~66.
 - 6) Wu, G. X., Taylor, R. E. and Greaves, D. M., 2001, "The Effect of Viscosity on the Transient Free-surface Waves in a Two-dimensional Tank," J. Engr. Math., Vol.40, pp.77~90.
 - 7) Park, J. S., 2019, "Sloshing Flow of Highly-Viscous Fluid in a Rectangular Box," J. Korea Soc. Visualization, Vol.17(3), pp.39~45.
 - 8) Park, J. S., 2022, "On the Near Wall Coating Flow in a Sloshing Flow of Highly-Viscous Fluid in a Rectangular Box," J. Korea Soc. Visualization, Vol.20(3), pp.27~35.
 - 9) Landau, L. and Levich, B., 1942, "Dragging of a Liquid by a Moving Plate," ACTA Physicochimica U.R.S.S. Vol.17(1~2), pp.141~153.
 - 10) Fetecau C., Vieru C.D., Fetecau. C., 2008 "A Note on the Second Problem of Stokes for Newtonian Fluids," Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol.43 (5), pp.451~457.
 - 11) Benilov, E.S. and Zubkov, V.S., 2008, "On the Drag-Out Problem in Liquid Film Theory," J. Fluid Mech. Vol.617, pp.283~299.
 - 12) O'Brien, S.B.G. and Schwartz, L.W., 2002, "Theory and Modelling of Thin Film Flows," Encyclopedia of Surface and Colloid Science, pp.5283~5297.