韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2023.26.4.257
2023. 10. 제 26권, 제 4호, 257-275

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2023, Vol. 26, No. 4, 257-275

초등학교 5학년 학생들의 수학적 논증을 강조한 수업의 실제

황지남(용이초등학교, 교사)

본 연구는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 수학적 논증을 강조한 수업을 설계 및 구현하여 수업의 실제를 분석하였다. 문헌 연구를 통해 수학적 논증을 강조한 수업을 1) 패턴 주목하기, 2) 추측 분명히 나타내기, 3) 시각적 모델로 표현하기, 4) 표현에 근거한 논증하기, 5) 비교 및 대조하기 5단계로 구성한 다음, 연속된 홀수의 합은 제곱수임을 주제로 수업을 설계하였다. 그리고 실제 수업 과정에서 수학적 논증을 강조한 수업이 어떻게 구현되는지 수업의 흐름을 단계별로 분석하였다. 본 연구의 결과를 바탕으로 초등학교에서 수학적 논증을 강조한 수업의 시사점을 논의하였다.

I. 서론

수학적 사실 및 절차에 대해 왜 그런지 탐구하고 논증하는 과정은 수학교육에서 매우 중요한 활동 중 하나이다. 이에 따라 논증은 여러 나라의 교육과정에서 전 학년에 걸쳐 발전시켜야 할 중요한 교수·학습 목표로 제시된다. 미국의 수학교육과정 규준에서는 ‘논증을 구성하고 다른 사람의 추론을 비판하기’를 수학적 실천의 기준 중 하나로 제시한다(CCSSI, 2010). 특히 타인의 논증을 이해하고, 그 논증이 타당한지 판단하는 활동은 전 학년에서 수행해야 할 수학적 실천으로 명시하고 있다. 영국의 교육과정은 전 학년에 걸쳐 ‘관계를 추측하고, 일반화하고, 논증을 발전시키고, 수학적 언어로 정당화 또는 증명을 전개함으로써 수학적으로 추론해야 한다’고 명시하고 있다(Department for Education, 2013, p. 3). 우리나라 교육과정의 경우 ‘귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다’고 제시하고 있다(교육부, 2022, p. 44). 우리나라 교육과정에서는 논증이라는 용어를 직접적으로 사용하지 않지만, 추측한 내용을 정당화하고 이에 알맞은 근거를 찾는 과정으로써 논증을 함의하고 있다.

실제 수학 수업에서도 논증이 필요한 상황이 종종 발생하는데, 학생들이 새롭게 구성된 지식을 받아들이는 과정에서 왜 그런지 또는 정말 그런지에 대한 의문을 가지기 때문이다. 이에 학생 수준에서 그 이유를 탐구하고 논증하는 과정은 교육적으로 유의미하다. 다만 논증의 과정은 학년급과 학교급에 따라 달라질 수 있으며 같은 주제일지라도 차이가 있을 수 있다(Spinillo et al., 2021). 예를 들어 삼각형의 내각의 크기의 합이 180°임을 논증하는 경우 초등학교 수업에서는 삼각형을 세 조각으로 자른 후 세 꼭짓점이 한 점에 모이도록 이어 붙이는 귀납적인 근거를 마련하지만, 중학교 수업에서는 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다는 연역적인 근거를 마련한다. 따라서 교사는 학생 수준에 알맞은 논증의 과정을 파악하고, 실제 수업에서 생산적인 논증이 이루어질 수 있도록 지원할 필요가 있다.

하지만 논증에 관한 연구는 학교급별로 양적인 차이가 있는 것으로 보고되고 있다(Campbell et al., 2020; Stylianides, 2016). 특히 중고등학교에 비해 초등학교를 대상으로 한 논증 관련 연구는 매우 부족한 편이다. Campbell 외(2020)는 논증과 관련된 연구 동향을 살펴본 결과, 여러 나라의 교육과정에서 논증을 전 학년에서 수행하도록 안내하고 있음에도 불구하고 초등학교를 대상으로 한 연구는 거의 이루어지지 않았음을 지적하였다. Stylianides(2016)는 논증은 수학교육에서 핵심이 되는 활동이지만, 국제적인 동향을 살펴본 결과 초등 수업에서는 논증과 관련된 활동이 간과되고 있다고 말하였다.

초등학교를 대상으로 한 논증 관련 연구를 살펴보면 초등학생도 성공적인 논증을 수행할 수 있으며, 귀납적 사고에서 연역적 사고로 논증이 점차 확장되는 모습을 보여준다(Russell et al., 2017; Van Ness &

* 접수일(2023년 10월 4일), 심사(수정)일(2023년 10월 16일), 게재확정일(2023년 10월 16일)
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 논증, 표현, 시각적 모델, 추측하기, 일반화하기

Maher, 2019). 이러한 연구 결과는 초등학교부터 논증과 관련된 수업을 충분히 경험할 필요가 있음을 보여준다. 특히 논증이 자연스럽게 이루어질 수 있도록 수업을 설계하면 교실에서 논증이 활발히 이루어지는 인상적인 장면을 볼 수 있다(Schifter & Russell, 2020; Stylianides, 2016).

이에 본 연구에서는 선행연구를 검토하여 초등학교 5학년 학생들에게 적합한 수학적 논증을 강조한 수업을 구성하고, 이를 실제 적용했을 때 수업의 흐름이 어떻게 나타나는지 Toulmin(2003)의 논증 모형을 참고하여 자세히 분석하고자 한다. 본 연구를 통해 초등학교에서 논증을 구체적으로 지도하는 방안과 수학적 논증을 강조한 수업의 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학교육에서의 논증

논증은 수학교육에서 일반적으로 사용되는 용어이지만, 연구자 별로 상이하게 정의되는 용어이기도 하다(Reuter, 2023). Van Eemeren 외(1996)는 논증을 '합리적 판단(rational judge)'을 바탕으로 그 입장을 정당화(또는 반박)하기 위한 명제들을 제시함으로써 청중이나 독자에게 논쟁적인 입장의 수용가능성을 높이거나 낮추는 것을 목표로 하는 언어적, 사회적 활동으로 정의한다.

Shinno 외(2018)는 논증을 증명의 특별한 유형으로 간주하고, 근거와 전제로부터 도출된 결과를 바탕으로 타인을 설득하는 활동으로 설명하였다. 특히 논증 과정에서 수학적 언어를 사용하여 수학적 아이디어와 논리를 정확하고 간결하며 논리적으로 표현하는 능력을 강조하였다.

Russell 외(2017)는 수학에서 관찰되는 규칙에 주목하며, 주목한 규칙을 분명히 주장하며, 이러한 주장이 모든 경우에 참임을 확인하는 일련의 과정에서 논증이 발현된다고 설명하였다.

Lannin 외(2011)는 수학적 추론을 '추측하고, 일반화하고, 왜 그런지에 대해 탐구하고, 논증을 발전시키고 평가하는 점진적인 개선 과정'으로 정의한다. 이때 논증은 수학적 추론의 전체적인 과정에서 부분적으로 이루어진다. 특히 논증은 정당화하기 및 반박하기와 밀접한 관련이 있다고 설명하였다.

· 수학적 정당화는 이미 알려진 아이디어에 바탕을 둔 논증이다.
· 정당화하기와 반박하기는 논증의 타당성에 대한 평가를 포함한다.
· 권위, 직관, 대중적 합의, 여러 예들에 바탕을 둔 논증은 수학적 정당화가 될 수 없다.

Lannin 외(2011, p. 12)

본 연구는 수학적 논증을 강조한 수업에서 논증이 어떻게 구현되고 진행되는지에 초점을 둔다. 따라서 권위, 직관, 대중적 합의가 아닌 수학적으로 타당한 근거를 기반으로 한 반응을 논증의 과정으로 포함한다. 이에 따라 논증은 수업 전반에 걸쳐 나타나며, 특히 왜 그런지 그 이유를 정당화(또는 반박)하는 반응을 주의 깊게 분석하고자 한다.

2. 수학적 논증을 강조한 수업

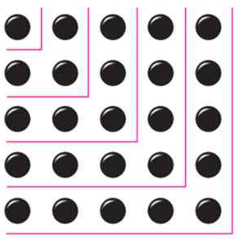
Stylianides(2008)는 수학적 논증을 강조한 수업을 '패턴 찾기', '가설 세우기', '증명이 아닌 논증 제시하기', '증명 제시'의 흐름으로 구성하였다. '패턴 찾기'는 주어진 자료에 적합한 일반적인 수학적 관계를 찾는 활동을 의미한다. 이때 패턴은 유일한 패턴(definite pattern)과 가능한 패턴(plausible pattern)으로 구분된다. 예를 들어 [표 1]에서 제시하는 자료의 패턴은 $y=3x$라고 생각하기 쉽지만, $y=x^3-3x^2+5x$도 가능하다. 이외에도 무수히 많은 패턴이 존재하기 때문에 [표 1]의 자료는 유일한 패턴이 아닌 가능한 패턴이라고 할 수 있다. 가능한 패턴은 다양한 패턴을 발견할 수 있다는 점에서 확산적 사고를 돕지만, 심화된 논증을 수행하는 데 방해가 되기도 한다. 따라서 논증을 강조한 초등 수업에서는 구체적인 상황을 함께 제시하여 유일한 패턴이 될 수 있도록 자료를 제공한다. 예를 들어 [표 1]에서 '한 테이블에 3명의 사람이 앉을 수 있다'와 같은 상황을 설정하면 유일한 패턴으로 추측할 수 있고, 이는 나아가 논증을 구체적으로 구성하는 데 도움을 준다.

[표 1] 가능한 패턴의 예 (Stylianides & Silver, 2010)

x	0	1	2	3	4
y	0	3	6	?	?

Lannin 외(2011)는 K-8학년을 대상으로 ‘추측하기와 일반화하기’, ‘왜 그런지 탐구하기’. ‘정당화하기와 반박하기’의 과정으로 수학적 논증을 강조한 수업을 구현하였다. ‘추측하기와 일반화하기’는 여러 사례에서 수학적 관계를 발견하고, 그 관계를 확장하여 적용하는 것을 의미한다. 이는 앞서 Stylianides(2008)의 ‘패턴 찾기’ 및 ‘가설 세우기’ 과정과 유사하다.

또한, Lannin 외(2011)는 ‘왜 그런지 탐구하기’에서 추측한 내용이 참인지 또는 거짓인지 확인하기 위해 특정 사례를 시각적 모델로 표현하는 활동에 주목한다. 예를 들어 연속된 홀수의 합이 제곱수임을 확인하기 위해 [그림 1]과 같이 1+3+5+7+9라는 특정 사례를 5×5 배열로 표현하여 추측이 맞는지 파악한다. 이는 특정 사례를 임의의 사례로 확장하는 데 역할을 할 뿐만 아니라. 이후 ‘정당화하기와 반박하기’ 과정에서 수학적 근거를 마련하는 데 도움을 준다.



[그림 1] 특정 사례를 시각적 모델로 표현하기

Russell 외(2017)는 초등 수학 수업에서 수학적 논증을 강조한 수업의 모델을 ‘규칙 주목하기’, ‘주장 나타내기’, ‘표현을 통해 탐구하기’, ‘논증 구성하기’, ‘연산 비교하기’의 5단계로 제시하였다. 여기서 단계(phase)는 수업의 흐름 또는 활동 과정을 의미한다. Russell 외(2017)의 수업 모델에서 주목할 점은 앞서 Lannin 외(2011)가 언급했던 특정 사례에 대한 표현을 ‘표현을 통해 탐구하기’라는 하나의 단계로 설정했다는 점이다. 이는 초등 수학 수업에서 특정 사례를 표현하는 활동이 논증을 구성하는 데 중요한 역할을 한다는 것을 의미한다.

또한 ‘연산 비교하기’의 단계를 마지막에 추가하였다는 점도 앞선 연구들과 차이가 있다. Russell 외(2017)는 수학적 논증을 강조한 수업을 수와 연산 영역에 특화하여 구성하였는데 ‘연산 비교하기’는 ‘규칙 주목하기’에서 탐색한 사례를 연산기호만 바꾸어 탐구함으로써 논증을 확장하는 단계이다. 예를 들어, [그림 2]와 같이 ‘규칙 주목하기’ 단계에서 제시된 덧셈의 사례를 바탕으로 가수 또는 피가수가 1 커질 때 결괏값이 1 커진다는 규칙을 일련의 과정으로 논증했다면, 마지막 단계에서는 승수 또는 피승수가 1 커질 때 앞서 탐구한 내용이 적용 가능한지 확인한다. 이후 수업은 ‘연산 비교하기’에서 제시된 사례를 바탕으로 수학적 논증을 강조한 수업이 순환하여 이루어진다. 이는 단일 차시가 아닌 여러 차시에 걸쳐 진행되기에 가능한 수업 모델이다.

7+5=12 7+6=□	7+5=12 8+5=□
9+4=13 9+5=□	9+4=13 10+4=□

↓

7×5=35 7×6=42	7×5=35 8×5=40
9×4=36 9×5=45	9×4=36 10×4=40

[그림 2] ‘규칙 주목하기’에서 제시된 자료(위)와 ‘연산 비교하기’에서 제시된 자료(아래) (Russell et al., 2017, p. 30, 40)

Schifter와 Russell(2020)은 Russell 외(2017)에서 설계한 수업 모델의 일부를 수정하여, ‘규칙 및 패턴 주목하기’, ‘추측 분명히 나타내기’, ‘사례 표현하기’, ‘표현에 근거한 논증 구성하기’, ‘연산 비교 및 대조하기’의 5단계로 수학적 논증을 강조한 수업을 보완하였다. 특히 ‘표현에 근거한 논증 구성하기’에서는 특정 사례를 근거로 논증을 구성할 것을 명시하여 이전 단계와의 연계를 강화하려는 시도가 나타났다. 또한, ‘패턴 주목

[표 2] 수학적 논증을 강조한 수업의 흐름

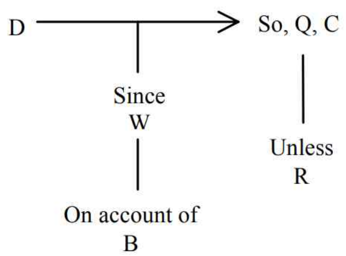
<table>
<tr><th>Stylianides (2008)</th><th>Lannin 외 (2011)</th><th>Russell 외 (2017)</th><th>Schifter와 Russell (2020)</th><th>본 연구</th></tr>
<tr><td>패턴 찾기</td><td rowspan="2">추측하기와 일반화하기</td><td>규칙 주목하기</td><td>규칙 및 패턴 주목하기</td><td>패턴 주목하기</td></tr>
<tr><td>가설 세우기</td><td>주장 나타내기</td><td>추측 분명히 나타내기</td><td>추측 분명히 나타내기</td></tr>
<tr><td></td><td>왜 그런지 탐구하기</td><td>표현을 통해 탐구하기</td><td>사례 표현하기</td><td>시각적 모델로 표현하기</td></tr>
<tr><td>증명이 아닌 논증 제시하기</td><td rowspan="2">정당화하기와 반박하기</td><td rowspan="2">논증 구성하기</td><td rowspan="2">표현에 근거한 논증 구성하기</td><td rowspan="2">표현에 근거한 논증하기</td></tr>
<tr><td>증명 제시하기</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>연산 비교하기</td><td>연산 비교 및 대조하기</td><td>비교 및 대조하기</td></tr>
</table>

하기'를 신설하여 수학적 논증을 강조한 수업의 모델을 수와 연산 영역뿐만 아니라. 변화와 관계 영역으로 확장하여 적용할 수 있는 가능성을 제시하였다.

선행연구를 종합하여 분석한 결과, 초등학교에서 수학적 논증을 강조한 수업은 여러 사례를 통해 패턴을 추측하고, 추측한 사실을 분명히 나타내고, 이를 특정 사례로 표현하고, 추측한 내용이 참인지 또는 거짓인지 논증하는 수업의 흐름이 공통으로 나타났다([표 2] 참조). 본 연구에서는 선행연구를 바탕으로 '패턴 주목하기', '추측 분명히 나타내기', '시각적 모델로 표현하기', '표현에 근거한 논증하기', '비교 및 대조하기'의 5단계로 수업을 구성하고자 한다.

3. 수학교육에서의 Toulmin의 논증 모형

본 연구에서는 수학적 논증을 강조한 수업을 분석하기 위해 Toulmin의 논증 모형을 참고한다. Toulmin(2003)은 논증의 결론(conclusion)에 도달하기 위해서는 크게 자료(datum)와 보증(warrant)이 필요하다고 설명한다. 예를 들어 '가람이는 한국인이다'라는 결론을 논증하기 위해 '그녀의 부모는 모두 한국인이다'라는 자료를 제시할 수 있다. 하지만 자료에 의한 결론은 불완전할 수 있으므로 '대한민국은 속인주의를 따른다'와 같은 보증을 통해 결론을 명확히 밝힐 수 있다. 이외에도 지지(backing), 한정어(qualifier), 반박(rebuttal)이 추가되어 논증이 완성된다고 보았다. [그림 3]은 논증의 요소들을 도식화하여 나타낸 Toulmin의 논증 모형이다.



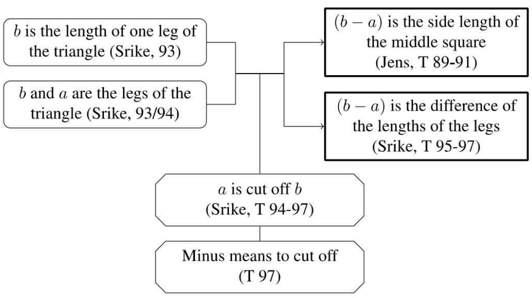
[그림 3] Toulmin의 논증 모형 (Toulmin, 2003, p. 97)

· 자료(D): 결론에 호소하는 사실
· 보증(W): 자료에서 결론으로 이동하는 과정에서 권위를 주는 명제
· 지지(B): 보증을 뒷받침하는 명제
· 한정어(Q): 결론이 참이 되도록 제한하는 표현
· 반박(R): 결론에 반대되는 명제
· 결론(C): 명제를 전제로 하여 내린 판단

수학교육에서 Toulmin의 논증 모형은 교실에서 논증이 어떤 흐름으로 진전되는지 분석하는 틀로 주로 사용되었다(Knipping & Reid, 2019; Van Ness & Maher, 2019). Krummheuer(1995)는 교실에 기반한 논증을 분석하는데 Toulmin의 논증 모형을 수학교육 분야에서 처음으로 사용하였다. Krummheuer(1995)는 Toulmin의 논증 모형에서 한정어와 반박을 축소 및 생략하여 수업을 분석하였는데, 이 두 요소는 교실에

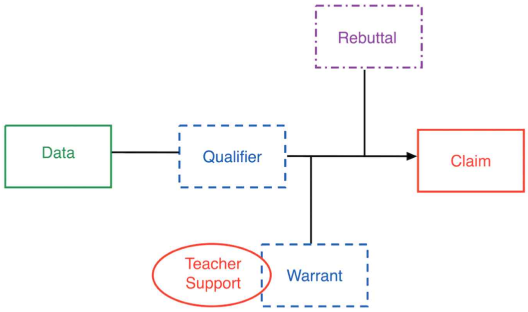
서의 논증과 관련이 적은 것으로 보았다. 그러나 Inglis 외(2007)는 Krummheuer(1995)의 축소 및 생략된 모델이 그가 원하는 수준에서 교실 내 에피소드들을 분석하는 데는 충분할지 모르나, 수학적 논증을 강조한 수업의 흐름을 분석하는 틀로는 적절하지 않다고 보았다. 이어 한정어의 역할을 강조한 Toulmin의 논증 모형을 분석 틀로 사용할 것을 권고하였다.

Cervantes-Barraza 외(2019)는 교실 내에서의 논증은 다수의 인원이 수학적 근거를 제시하여 동료를 설득하는 사회적 활동의 특징을 갖기 때문에 Toulmin의 논증 모형처럼 선형적인 형태로 구현되기는 어렵다고 지적하였다. 또한, Knipping과 Reid(2019)는 교실에서의 논증은 복잡한 방식으로 상호 연결되기 때문에, 기존의 Toulmin의 논증 모형으로는 교실 내 논증의 흐름을 분석하기 어렵다고 설명하였다. 따라서 Knipping과 Reid(2019)는 Toulmin의 논증 모형을 수정 및 보완하여 교실에서의 복잡한 논증을 파악할 수 있는 확장된 논증 모형을 개발하였다. [그림 4]는 확장된 논증 모형으로 꼭짓점 부분이 둥근 직사각형은 자료, 테두리가 굵은 직사각형은 결론, 꼭짓점 부분이 잘린 직사각형은 보증 및 지지를 의미한다. 확장된 논증 모형은 자료와 결론이 단일하지 않게 표현되지 않을 수 있다는 특징이 있다.



[그림 4] 확장된 Toulmin의 논증 모형 (Knipping & Reid, 2019, p. 6)

또한 논증은 수업 상황에서 교사의 개입을 통해 발전하기도 한다(Conner et al., 2014). 수학적 논증을 강조한 수업은 학생과 학생뿐만 아니라, 교사와 학생 사이의 상호작용에서도 이루어지기 때문에, 교사는 학생들이 논증을 잘할 수 있도록 격려하며 학생들의 반응을 보고 적절히 개입해야 한다. 개입은 학생들의 논증을 재정비하고 정교화하는 데 도움을 준다(Zhuang & Conner, 2022). 이에 Zhuang과 Conner(2022)는 Toulmin의 논증 모형에서 논증의 주체를 구분하여 표기하였다. [그림 5]와 같이 교사가 논증 과정에 참여한 경우 빨간색 실선, 학생이 논증 과정에 참여한 경우 파란색 점선, 교사와 학생이 함께 참여한 경우는 보라색 파선으로 표시하였다. 그리고 논증의 구성 요소는 아니지만, 교사의 개입을 빨간색 타원으로 표시하였다.



[그림 5] 교사의 역할을 강조한 Toulmin의 논증 모형 (Zhuang & Conner, 2022, p. 4)

이처럼 수학교육에서 Toulmin의 논증 모형은 연구의 목적과 대상에 따라 수정 및 보완되어 활용되었음을 알 수 있다. 본 연구에서는 수학적 논증을 강조한 수업을 분석하는 데 적합한 Knipping과 Reid(2019)의 확장된 논증 모형을 사용하면서 교사의 개입을 시각적으로 확인할 수 있도록 Zhuang과 Conner(2022)의 논증 모형의 일부를 활용하고자 한다. [부록 1]은 본 연구에서 구현한 수업을 Toulmin의 논증 모형으로 도식화한 내용으로 꼭짓점 부분이 둥근 직사각형은 자료, 꼭짓점 부분이 잘린 직사각형은 보증 및 지지, 일반적인 직사각형은 결론을 의미한다. 또한 화살표 위에 위치한 직사각형은 반박을 의미하고, 빨간색 타원은 교사의 개입을 의미한다. 본 연구에서는 [부록 1]을 참고하여 수학적 논증을 강조한 수업의 실제를 분석하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 충청북도에 소재한 초등학교의 5학년 학생 26명을 대상으로 수학적 논증을 강조한 수업을 구현하였다. 학생들의 학습 수준은 전체적으로 중상위권 수준이었다. 수업 적용 시기는 9월 중순경으로 학생들은 교육과정 재구성을 통해 평균과 가능성 단원의 학습을 마친 상태였다. 연구 대상을 5학년 학생으로 선정한 이유는 5학년 1학기에 ‘한 양이 변할 때 다른 양이 그에 종속하여 변하는 대응 관계를 나타낸 표에서 규칙을 찾아 설명하고 □, △ 등을 사용하여 식으로 나타낼 수 있다’의 성취기준에 해당하는 내용을 학습한 상태이기 때문에 두 양 사이의 관계를 일반화된 식으로 나타낼 수 있을 것으로 기대하였다. 또한 4학년 규칙 찾기 단원에서 정사각형 모양의 배열을 연속된 홀수의 덧셈식으로 표현하거나, 크기가 같은 두 수의 곱셈식으로 표현한 경험이 있기 때문에 수업 주제가 익숙할 것이라고 기대하였다.

2. 수업 과제

수업 과제는 연속된 홀수의 합과 크기가 같은 두 수의 곱이 같다는 규칙을 과제로 제시한다. [그림 6]과 같이 4학년 교과서에서는 정사각형 모양의 배열을 통해 연속된 홀수의 합이 제곱수와 같다는 사실을 내재적으로 다루고 있다(강완 외, 2023). 이 과정에서 학생들은 연속된 홀수의 합이 크기가 같은 두 수의 곱과 같은 이유에 대해 궁금증을 가질 수 있지만, 4학년 학생들의 경우 두 식 사이의 관계를 논증하는 데에는 다소 무리가 있을 수 있다고 판단하였다. 다만 규칙과 대응 단원을 학습한 5학년 학생들에게는 충분히 도전할 수 있는 과제라고 여겨진다(방정숙, 선우진, 2016). 또한 해당 과제는 연속된 홀수의 합을 제곱수로 나타내는 유일한 패턴 과제라는 점에서 논증을 구성하기에 적합하고, 여러 가지 방법으로 시각적 모델을 표현할 수 있다는 점에서 표현에 근거한 논증이 다양하게 구현될 가능성이 있어 좋은 과제라고 판단하였다. 따라서 본 연구에서는 연속된 홀수의 덧셈식을 크기가 같은 두 수의 곱셈식으로 표현하는 과제를 제시하고, 두 식 사이의 관계를 논증하는 수업을 계획하였다.


3 사각형 모양의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.

첫째 둘째 셋째 넷째

• 사각형 모양을 만드는 데 필요한 쌓기나무의 수를 식으로 나타내어 구해 보세요.

순서	식	쌓기나무의 수(개)
첫째	1	1
둘째	1+3=4	4
셋째		
넷째		

• 사각형 모양을 만드는 데 필요한 쌓기나무의 수를 식으로 나타내어 구해 보세요.

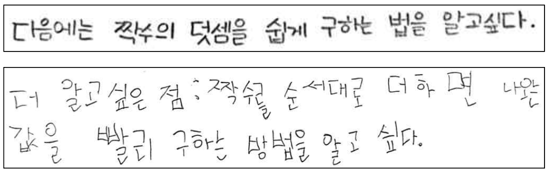
순서	식	쌓기나무의 수(개)
첫째	1×1=1	1
둘째	2×2=4	4
셋째		
넷째		

[그림 6] 정사각형 배열을 덧셈식과 곱셈식으로 표현한 교과서 장면 (강완 외, 2023, pp. 146-147)

3. 수업 설계

본 연구는 선행연구를 근거로 수업을 계획하고, 두 차례의 예비 수업을 진행하여 최종적으로 수학적 논증을 강조한 수업을 설계하였다. 수학적 논증을 강조한 수업은 예비 수업을 통해 크게 두 부분이 수정 및 보완되었다. 첫째, 단일 차시로 수업을 계획하였기 때문에 Schifter와 Russell(2020)이 마지막 단계로 언급한 ‘비교 및 대조하기’ 단계를 생략하고자 하였으나, 예비 수업에서 학생들은 연속된 짝수의 합을 탐구하고 싶다는 의견을 다수 피력하였다([그림 7] 참조). 따라서 본 수업에서는 학생들이 자연스럽게 논증의 확장을 경험할 수 있다는 의도를 반영하여 ‘비교 및 대조하기’ 단계를 추가하여 연속된 홀수의 합을 탐구한 내용을 근거로 연속된 짝수의 합을 탐색하는 활동을 추가하였다. 둘째, ‘비교 및 대조하기’ 단계가 신설된 것과 관련하여

충분한 탐구활동 시간을 제공하기 위하여 수업 시간을 연차시(80분)로 증배하였다.


다음에는 짝수의 덧셈을 쉽게 구하는 법을 알고싶다.

더 알고싶은 점 : 짝수를 순서대로 더하면 나온 값을 빨리 구하는 방법을 알고 싶다.

[그림 7] 연속된 짝수의 합에 대한 탐구를 요청한 학생 반응

최종적으로 [표 3]과 같은 흐름으로 수학적 논증을 강조한 수업을 설계하였다. 먼저 연속된 홀수의 덧셈식을 계산하여 연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값이라는 사실을 학생 스스로 추측할 수 있도록 한다. 이어서 □, △ 등의 변수를 사용하여 추측한 내용을 일반화된 식으로 나타낼 수 있도록 한다. 다음으로 학생들은 연속된 홀수의 합과 홀수의 개수를 두 번 곱한 값 사이의 관계를 시각적 모델로 표현한다. 이때 교사는 학생들이 탐구 과정에서 구체적 조작 활동을 할 수 있도록 쌓기나무를 제공하되, 쌓기나무를 반드시 사용하지 않아도 된다고 설명한다. 예비 수업에서 사용한 바둑돌의 경우 낱개 별로 하나씩 옮겨야 하는 불편함으로 인해 식의 구조를 파악하기 어려웠지만, 쌓기나무의 경우 여러 개를 한꺼번에 옮길 수 있다는 점에서 식의 구조를 파악하는데 더 적합한 교구라고 판단하였다. 이후 학생들은 연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같은 이유를 시각적 모델을 근거로 논증한다. 마지막으로 앞서 탐구한 내용을 바탕으로 연속된 짝수의 합은 어떤 규칙이 있을지 탐색한다.

4. 자료 수집 및 분석

교실 뒤편에 카메라를 설치하여 전체 수업을 녹화하였으며, 녹화한 수업은 전사하여 분석 자료로 활용하였다. 이때 학생 이름을 코드화하여 기록하였다. 또한 수업에 배부된 활동지를 수거하여 불성실한 활동지 3부를 제외한 23부를 분석 자료로 활용하였다. 그리고 수업이 끝난 후 일부 학생들과 비구조화된 면담을 실시하였다. 면담의 목적은 수업 중에 보인 학생의 반응과 관련하여 그 의도를 정확히 파악하고, 수업 중에는 나타나지 않은 학생의 논증을 심층적으로 확인하는 데 있다. 면담 자료는 녹음 후 전사하여 분석 자료로 활용하였다.

Ⅳ. 결과 분석

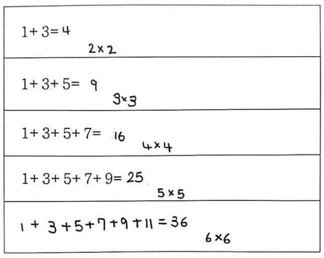
1. '패턴 주목하기'의 수업 양상

'패턴 주목하기'에서 교사는 [그림 8]과 같이 연속된 홀수의 덧셈식을 자료로 제공하고, 계산을 끝마친 학생들에게 식과 답 사이에 규칙이 있는지 질문하였다. [에피소드 1]에서 학생 A는 홀수의 개수와 덧셈식의 가운데에 위치한 수를 서로 곱하는 방법을 설명하였다.

[표 3] 수학적 논증을 강조한 수업의 단계

단계	내용
패턴 주목하기	연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같다는 규칙을 발견한다.
추측 분명히 나타내기	연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같다는 내용을 일반화된 식으로 나타낸다.
시각적 모델로 표현하기	연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같음을 시각적 모델로 표현한다. 이때 쌓기나무와 같은 구체물을 함께 제공한다.
표현에 근거한 논증하기	연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같은 이유를 시각적 모델을 근거로 논증한다.
비교 및 대조하기	앞서 탐구한 내용을 근거로 연속된 짝수의 합을 주목한다.

이때 학생 B가 1+3+5+7과 같은 덧셈식에는 가운데에 위치한 수가 없음을 반박하였다. 학생 A는 홀수의 개수가 짝수 개인 경우 가운데에 위치한 두 수 사이에 있는 자연수를 곱하면 된다고 대안을 제시하였다. 이에 교사는 더 간단한 방법은 없는지 질문하였고, 학생들은 최종적으로 홀수의 개수를 두 번 곱하면 연속된 홀수의 덧셈식을 계산할 수 있음을 추측하였다.



[그림 8] '패턴 주목하기'의 자료를 탐색한 학생 반응

[에피소드 1] 규칙을 설명하고 이를 반박하는 장면

학생 A	더하는 수의 개수와 가운데 있는 수를 서로 곱하여 계산합니다. …(중략)…
학생 B	(1+3+5+7의 식을 가리키며) 그런데 저런 거 같은 건 어떻게 해야 해요?
학생 A	가운데 두 수의 가운데 수를 곱하면 돼.
교사	(1+3+5+7의 식을 예시로 들며) 3과 5의 가운데 수 4 이런 거요?

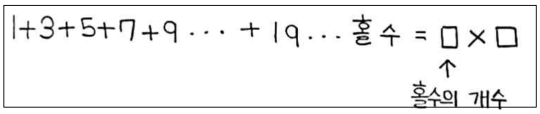
'패턴 주목하기'에서는 주어진 4개의 덧셈식을 모두 만족하는 추측을 교실 내에서 최종적으로 수용하였다. '홀수의 개수를 두 번 곱한다'라는 추측이 4개의 덧셈식을 모두 만족하자 대부분 수긍하는 분위기를 보였다. 1+3+5+7+9+11+13과 같이 사례를 확장하는 등의 추가적인 반응은 나타나지 않았다. 또한 주어진 자료를 모두 만족하지 않은 추측을 한 경우, 만족하지 않은 자료를 반례로 들어 반박하는 모습을 보였다. 따라서 주어진 자료가 유일한 패턴이 아닌 가능한 패턴이라면 교사의 추가적인 개입이 필요할 수도 있는 상황이었다.

'패턴 주목하기'에서 나타난 논증의 흐름을 살펴본 결과, 추측한 내용을 명료화하는 과정은 학생들의 반박을 통해 이루어짐을 알 수 있다. 또한 '홀수의 개수를 두 번 곱한다'라는 추측은 몇몇 사례를 통해 도출한 명제라는 점에서 귀납적인 특성을 가진다.

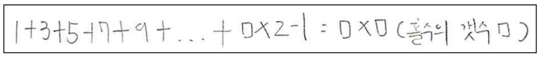
2. '추측 분명히 나타내기'의 수업 양상

'추측 분명히 나타내기'에서 교사는 홀수의 개수를 □로 하여 식을 나타내도록 안내하였다. 그 결과 학생들 대부분은 [그림 9]와 같이 식을 나타내었다. 이때 교사는 마지막에 더해지는 홀수를 일반화된 식으로 나타내기를 요구하였다. 학생들은 마지막에 더해지는 홀수를 일반화하기 어려워하였고, 교사는 홀수의 개수가 15개인 경우 마지막으로 더해지는 홀수를 찾아보도록 안내하였다. 학생들은 15번째 홀수를 찾기 위해서는 '15×2-1'을 하면 된다고 설명하였다. 따라서 마지막으로 더해지는 홀수는 '□×2-1'로 나타낼 수 있으며, 최종적으로 [그림 10]과 같이 추측한 내용을 일반화된 식으로 나타낼 수 있었다.

본 수업에서는 추측한 내용을 식으로 표현하는 과정에서 교사의 개입이 많이 나타났다. 이는 마지막에 더해지는 홀수를 일반화하여 표현하고자 하는 교사의 의도가 반영되었기 때문이다. 학생들은 교사의 안내에 따라 마지막으로 더해지는 홀수가 '□×2-1'임을 몇몇 사례를 통해 추측할 수 있었다.



[그림 9] 추측한 내용을 식으로 표현한 학생 반응



[그림 10] 마지막에 더해지는 홀수를 포함하여 추측한 내용을 식으로 표현한 학생 반응

[그림 10]은 언뜻 보면 일반화된 식으로 보일 수 있으나, 식으로 표현되는 과정을 면밀하게 살펴보면 귀납적으로 추측한 내용을 대부분 반영한 것임을 알 수 있다. 따라서 이 식이 모든 경우에 성립하는지에 대한 학생들의 생각은 [에피소드 2]에서 확인할 수 있다. 교사는 학생들에게 추측한 내용이 모든 경우에 적용 가능한지 물어보았고, 전체 인원에 절반 정도는 규칙이

발생하였기 때문에 모든 경우에 적용 가능하다고 응답하였다. 하지만 나머지 절반의 학생들은 확신할 수 없다는 응답을 보였다. 이러한 결과가 나타나는 이유는 몇몇 사례만을 바탕으로 일반화가 이루어졌기 때문이다. 이에 추측한 내용이 참인지 거짓인지 확인하기 위한 추후 활동이 필요하였다.

[에피소드 2] 추측한 내용을 얼마나 확신하는지 확인하는 장면

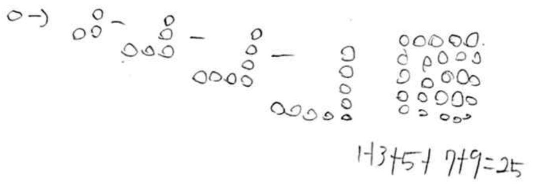
교사　(우리가 표현한 식이) 모든 경우에 가능할 것 같아요? 안되는 건 하나도 없을까?
학생 C　다 될 것 같은데.
학생 D　이건 법칙이야.
학생 E　규칙이 발생했으니까...
교사　나는 이거 다 될 것 같다. 하나도 빠짐없이 다 될 것 같다 손들어보세요.
교사　나는 안 되는 거 있을 것 같다. 안 되는 거 하나쯤을 있을 것 같다. 오. 반반으로 (의견이) 딱 갈렸네요.

‘추측 분명히 나타내기’에서 나타난 논증의 흐름을 살펴본 결과, 학생들 수준에서 연속된 홀수의 합을 □와 같은 변수를 사용하여 식으로 나타내는 것이 교사의 개입 없이도 가능하였다. 또한, 교사의 개입이 있다면 보다 일반화된 식으로 나타내는 것이 가능하였다.

3. ‘시각적 모델로 표현하기’의 수업 양상

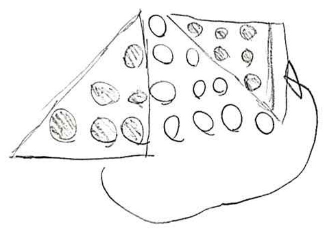
‘시각적 모델로 표현하기’에서 교사는 학생들이 시각적 모델을 표현하기에 앞서, 칠판에 바둑돌 모형을 부착한 다음 크기가 같은 두 수의 곱을 어떻게 표현할 수 있는지 질문하였다. 학생들은 바둑돌 모형을 정사각형 모양으로 배열하면 크기가 같은 두 수의 곱을 표현할 수 있다고 응답하였다. 이어서 칠판에 4×4 정사각형 모양으로 배열된 바둑돌 모형에서 1+3+5+7의 구조를 발견할 수 있는지 질문하였다. 학생들은 정사각형 배열을 ㄴ자 모양으로 분할하면 1+3+5+7의 구조를 볼 수 있다고 답하였다. 교사는 해당 방법을 포함한 다양한 방법으로 특정 사례를 표현할 것을 안내하였다. 이때 교사가 학생들에게 시각적 모델의 한 사례를 제공한 이유는 학생들이 수학적 논증을 강조한 수업을 처음 경험하기 때문에 수식을 시각적 모델로 표현하는 것에 익숙하지 않았기 때문이다.

학생들은 교실 전체에서 논의된 방법을 포함한 다양한 방법으로 시각적 모델을 표현하였다. [그림 11]은 ㄴ자 모양으로 홀수들을 표현한 다음, 이를 조합하여 정사각형 배열을 만든 모습이다. 이는 정사각형 모양의 배열에서 연속된 홀수의 덧셈식을 파악하는 기존의 방법을 역으로 접근했다는 점에서 다소 차이가 있다.



[그림 11] 연속된 홀수의 덧셈식을 정사각형 배열로 표현한 학생 반응

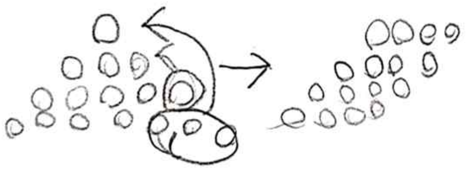
[그림 12]는 1+3+5+7을 삼각형 모양으로 배열하여 표현한 다음 삼각형 모양의 일부분을 옮겨 정사각형 모양의 배열을 만든 모습이다. 이는 교실에서 전체적으로 논의한 방법이 아닌 다른 방법으로 표현했다는 점에서 의미가 있었다. 다만 삼각형 모양의 일부분을 옮겨 정사각형 배열을 만드는 과정에서 학생이 시각적 모델의 구조를 얼마나 파악했는지는 추가로 확인해 볼 필요가 있었다.



[그림 12] 삼각형 배열을 정사각형 배열로 변형한 학생 반응

[그림 13]은 삼각형 모양의 일부분을 옮겨 평행사변형 모양의 배열을 만든 모습이다. [그림 12]와 같이 1+3+5+7을 삼각형 모양으로 배열하였다는 공통된 모습이 관찰되지만, 부분의 이동을 두 번으로 나누어 수행했다는 점에서 차이가 있다. 이는 가로줄에 놓인 낱

개의 개수를 같게 만들기 위한 전략으로 풀이된다.

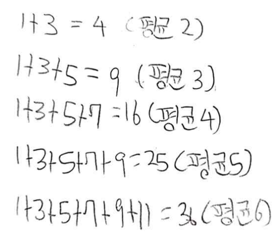


[그림 13] 삼각형 배열을 평행사변형 배열로 변형한 학생 반응

다만 일부 학생들은 특정 사례를 시각적 모델로 표현하는 것을 어려워하였다. [그림 14]와 같이 1+3+5+7을 삼각형 모양으로 배열한 다음, 일정한 규칙 없이 부분을 옮겨 정사각형 모양의 배열로 바꾸는 모습을 보이기도 하였다. 시각적 모델의 구조를 파악하지 못하면, 임의의 사례로의 확장을 할 수 없기 때문에 다음 단계인 '표현에 근거한 논증하기'에서 어려움을 느낄 수 있다. 따라서 이 단계에서는 단순히 시각적 모델을 표현하는 것뿐만 아니라, 특정 사례를 통해 추측한 내용과의 관계를 파악하는 것이 중요하다. 이는 이후 논증의 근거를 마련하는 데 중요한 역할을 한다.

[그림 14] 시각적 모델의 구조를 파악하지 못한 학생 반응

또한, 시각적 모델을 사용하지 않고 [그림 15]와 같이 평균의 개념을 도입하여 특정 사례를 파악한 반응도 존재하였다. 이는 '패턴 주목하기' 단계의 반응과 유사하게 보일 수 있으나, 학생의 사고 과정을 들여다보면 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 교사는 이 학생에게 평균을 도입한 이유에 대해 질문하였고, 학생은 홀수의 개수와 평균값이 같다는 사실을 발견하였기 때문이라고 답하였다. 이는 □×□를 (홀수의 개수)×(홀수들의 평균)으로 파악한 것이다. 학생은 홀수의 개수와 평균값이 같은 이유에 대해서는 아직 파악하지 못하였지만, 교사는 학생이 평균에 근거한 논증을 충분히 마련할 수 있을 것으로 판단하여 관련한 탐구를 몰입할 수 있도록 지원하였다.



[그림 15] 시각적 모델을 사용하지 않은 학생 반응

'시각적 모델로 표현하기'에서 나타난 논증의 흐름을 살펴본 결과, 하나의 사례를 교실 전체에서 논의했음에도 불구하고, 이와 차별화된 다양한 반응들이 다수 나타났다는 특징이 있었다. 여기에는 시각적 모델을 사용하지 않고 탐구하는 사례도 존재하였다. 이 단계에서는 연속된 홀수의 덧셈식과 크기가 같은 두 수를 곱한 곱셈식을 시각적 모델로 어떻게 표현하느냐에 따라 논증의 근거가 달라질 수 있다는 점에서 이후 논증이 다양한 흐름으로 진행될 가능성을 야기하였다.

4. '표현에 근거한 논증하기'의 수업 양상

'표현에 근거한 논증하기'는 논증이 활발하게 나타나는 핵심적인 단계이다. 본 수업에서 교사는 시각적 모델의 구조를 파악한 것으로 보이는 학생들을 대상으로 발표를 요청하였다. 그리고 교실 전체에서 자연스럽게 논의가 이루어질 수 있도록 격려하는 분위기를 조성하였다. 먼저 정사각형 모양의 배열을 ㄴ자로 분할한 시각적 모델을 근거로 논증을 진행하였다. 이 논증의 구체적인 상황은 [에피소드 3]과 같다. 학생들은 정사각형 모양의 배열에서 ㄴ자 모양으로 한 줄씩 추가될 때마다 이전 ㄴ자 모양에 비해 쌓기나무가 2개 더 필요하다고 설명하였다. 그리고 ㄴ자 모양으로 한 줄씩 추가되는 상황이 연속된 홀수를 하나씩 더 더해나가는 과정임을 설명하였다. 교사는 연속된 홀수의 덧셈식과 홀수의 개수를 두 번 곱한 곱셈식 사이의 관계를 파악하고 있는지 질문하였다. 이때 한 학생이 홀수의 개수만큼 ㄴ자 모양이 있으므로 홀수의 개수는 정사각형 배열의 한 줄의 개수와 같다고 말하였다. 논증의 과정

에서 학생들은 시각적 모델에 대한 구조를 잘 파악하고 있었기 때문에, 임의의 사례에서도 모두 적용될 수 있음을 충분히 논증할 수 있었다. 그리고 결론까지 도달하는 과정에서 추가적인 논증이 필요한 경우 근거를 마련한 학생이 중간중간 참여하여 보증 및 지지를 마련하는 방식으로 수업이 진행되었다.

[에피소드 3] 정사각형 배열을 ㄴ자 모양으로 분할한 시각적 모델에 근거한 논증 장면

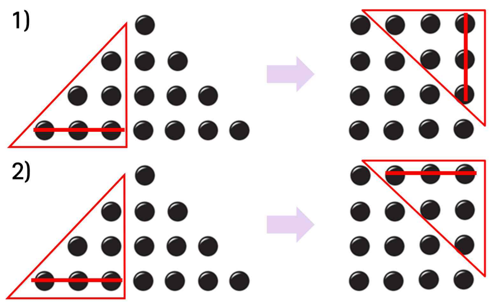
학생 F (ㄴ자 모양으로) 이게 한 줄씩 늘어날 때마다 홀수가 2씩 커지니까 모든 경우에 다 돼요. 그러니까 한 줄씩 늘어날 때마다 홀수가 순서대로 계속 더해져요.
교사 정말 그러네요. 그런데 홀수의 개수를 두 번 곱한 것과는 어떤 관계가 있어요?
학생 F 정사각형의 넓이 구하는 거랑 같으니까 같은 수를 두 번 곱하는 거예요.
교사 그런데 왜 그 수가 하필 홀수의 개수인 거야?
교사 혹시 이야기하고 싶은 사람?
학생 G 홀수의 개수만큼 ㄴ자 모양이 있으니까요. 그게 정사각형 한 변의 길이랑 같아요.

이어서 [그림 12]와 같이 삼각형 모양의 배열을 정사각형 모양의 배열로 변형한 시각적 모델을 근거로 논증을 진행하였다. [에피소드 4]에서 학생 B는 삼각형 모양의 배열에서 왼쪽 부분을 오른쪽 빈 공간으로 이동시켜 정사각형 모양을 만드는 방법을 설명하였다. 하지만 이 방법이 왜 모든 상황에 적용할 수 있는지에 대해서는 연역적인 근거를 마련하지 못하였다. 교사는 왜 그런지 그 이유를 교실 전체에 물어보았으나, 수학적 근거를 마련하는 학생이 없어 더 이상 논증이 이루어질 수 없었다. 논증이 이루어지지 못한 이유는 학생들이 시각적 모델의 구조를 파악하지 못했기 때문으로 해석된다.

[에피소드 4] 삼각형 배열을 정사각형 배열로 변형한 시각적 모델에 근거한 논증 장면

학생 B (삼각형 배열의 세로줄을 가리키며) 가운데를 중심으로 (왼쪽에 있는) 이 부분을 (오른쪽에 있는) 이쪽으로 옮기면 정사각형이 돼요.
교사 이 방법은 이 줄이 백 개, 천 개 있어도 항상 가능한 방법이에요?
학생 B 아마도요?
교사 왜 그렇게 생각해요?
학생 B 이게 안 되는 경우가 없었어요.
교사 혹시 이게 왜 다 되는지 힌트를 줄 수 있는 사람 있을까?
학생들 ……

학생 B가 설명한 방법을 구체적으로 살펴보면, 삼각형 모양의 배열을 정사각형 모양의 배열로 변형하는 과정을 수식과의 관계와 관련지어 파악하는 것은 초등학교 5학년 학생들에게 다소 어려운 내용임을 알 수 있다. [그림 16]과 같이 삼각형 모양의 배열에서 왼쪽 부분을 오른쪽 빈 공간으로 한 번에 이동시키는 방법은 크게 두 가지 방법으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 이때 방법 1)의 경우 시각적 모델에서 수식과의 관계를 파악하는 것은 초등 수준에서 가능하지 않다. 수업이 끝난 직후 학생 B를 면담한 결과, 방법 1)로 활동을 수행한 것으로 나타났다. 방법 2)의 경우 방법 1)에 비해 수식과의 관계를 비교적 파악하기 쉽지만, 이동시켜야 하는 부분을 뒤집기 한 다음 옮겨야 하는 불편함 때문에 쌓기나무를 사용하여 탐구한 학생들에게는 부자연스러운 방법이었다. 이처럼 시각적 모델을 어떻게 표현하는지에 따라 이후 논증의 구현 정도에 큰 영향을 주었다.



[그림 16] 시각적 모델을 통한 관계 파악의 어려움

마지막으로 [그림 13]과 같이 삼각형 모양의 배열을 평행사변형 모양의 배열로 변형한 시각적 모델을 근거로 논증을 진행하였다. 이와 관련한 논증은 수업 전체에서 가장 활발한 담론이 이루어진 상황으로 구현되었다. [에피소드 5]에서 학생 A는 첫 번째 줄과 마지막 줄, 두 번째 줄과 마지막에서 두 번째 줄을 연결하여

가로줄의 개수를 같게 만드는 방법을 설명하였다. 교사는 이 방법이 모든 경우에 가능한지 질문하였고, 학생 H는 가로줄이 여러 개이더라도 학생 A가 설명한 방법을 확장하여 적용하면 가능하다고 설명하였다. 이때 첫 번째 수와 마지막 수, 두 번째 수와 마지막에서 두 번째 수 등을 더한 값이 모두 같다는 사실과 더한 값을 2로 나누면 가로줄의 낱개 개수와 같다는 보증을 하였다. 이 설명을 듣고 학급 내 학생들은 크게 동의하는 모습을 보였다.

[에피소드 5] 삼각형 배열을 평행사변형 배열로 변형한 시각적 모델에 근거한 논증 장면

학생 A	가장 밑에 있는 줄에 있는 거 3개를 위에 있는 줄에 옮기면 이 한 줄이 4개가 되고, 밑에서 두 번째 줄에 있는 돌 1개를 두 번째 줄에 옮기면 이 한 줄도 4개가 돼요.
교사	모든 줄이 4개가 됐네? 이게 모든 경우에 가능한 거야?
	...(중략)...
학생 H	첫 번째 수랑 마지막 수랑 더하면 같고, 두 번째 수랑 마지막에서 두 번째 수랑 더하면 같아요. 이런 식으로 계속 더하면 돼요. 그리고 이걸 2로 나누면 값이 나와요.
학생들	(박수를 치며) 아! 그러네.

이때 [에피소드 6]과 같이 학생 I는 학생 H에 대한 보증을 반박하였다. 가로줄이 짝수 개일 때는 서로 짝을 지어 부분을 옮기는 것이 가능하지만, 가로줄이 홀수 개일 때는 가운데에 위치한 가로줄이 하나 남으므로 앞선 논증을 적용할 수 없는 경우가 발생한다고 반박하였다. 학생 H는 가로줄이 홀수 개이더라도 가운데 위치한 가로줄의 경우 낱개의 개수가 서로 짝을 지어 더한 다음 2로 나눈 값과 같으므로 가로줄이 홀짝 여부는 상관이 없다고 재반박하였다. 이에 학생 I는 수긍하는 모습을 보였다.

[에피소드 6] 논증에 대한 반박을 하는 장면

학생 I	근데 줄이 짝수 줄일 때는 가능한데 홀수 줄일 때는 안되지 않아요?
교사	가운데 줄이 있으면 짝꿍이 안 맞는다는 말이지?
학생 H	근데 어차피 가운데 줄은 개수가 똑같으니까 옮길 필요가 없잖아.
학생 I	그러네.

여기서 학생 H는 [에피소드 5]에서 시각적 모델의 구조를 파악한 다음 이를 수식과 관련지어 논증하는 모습을 보였지만, [에피소드 6]에서는 다시 시각적 모델로 회귀하여 설명하는 혼재된 모습이 보였다. 이는 학생들에게 시각적 모델이 논증을 구성하는 과정에서 매개적인 역할을 하는 것을 보여준다.

[에피소드 7]은 [그림 15]와 같이 평균의 개념으로 특정 사례를 탐구했던 학생이 삼각형 모양의 배열을 평행사변형 모양의 배열로 변형한 시각적 모델과 자신의 주장을 연결 짓는 흥미로운 장면이 관찰되었다. 앞서 이 학생은 평균을 근거로 논증을 구현하는 데 어려움을 겪었으나, 가로줄의 개수를 같게 만들어주는 과정이 평균을 만드는 방법과 유사하다는 것을 발견하고 이를 논증의 근거로 활용하였다. 교사는 수업이 종료된 후에 평균을 이용하여 논증을 구현하고자 했던 학생과 면담을 진행하였다. 교사는 학생에게 평균을 이용한 방법이 모든 경우를 설명할 수 있는지 물어보았고, 학생은 평균을 구하기 위해서는 모든 수의 크기를 같게 만들어주면 되는데, 첫 번째 수와 마지막 수, 두 번째 수와 마지막에서 두 번째 수 등의 크기를 같게 만들어주는 작업을 반복하면 모든 수의 크기를 같게 만들 수 있다고 설명하였다. 그리고 이는 수업 시간에서 다룬 시각적 모델에서 아이디어를 얻었음을 이야기하였다. 이를 통해 교실 내 논증의 흐름은 타인의 논증을 자신의 논증에 근거로 활용하는 방식의 상호 보완적 모습이 나타날 수 있음을 보여준다.

[에피소드 7] 논증의 근거를 공유하는 장면

학생 K	선생님. 이거 평균으로 생각하면 되지 않아요?
교사	좀 더 자세히 설명해줄 수 있어?
학생 K	바둑돌을 옮겨서 모든 줄에 바둑돌의 개수가 같으니까 이게 평균을 나타내는 거예요.

‘표현에 근거한 논증하기’에서 나타난 논증의 흐름을 살펴본 결과 첫째, 시각적 모델로 특정 사례를 표현하는 것이 가능하더라도 시각적 모델의 구조를 정확하게 파악하지 못한다면 논증의 흐름을 이어 나갈 수 없었다. 학생들은 삼각형 모양의 배열을 정사각형 모양의

배열로 변형하여 특정 사례를 표현하는 것이 가능하였으나, 수식과의 관계를 파악하지 못해 귀납적인 사고에만 의존하는 모습을 보였다. 이에 논증의 흐름이 더 이상 이어지지 못하였다.

둘째, 교실 내에서 공유된 보증 및 지지를 자신의 논증과 연결하여 발전시키는 것이 가능하였다. 한 학생은 평균을 이용하여 논증을 시도하였지만, 그 근거를 마련하는 데 어려움을 느꼈다. 하지만 교실에서 논의된 보증 및 지지가 평균을 이용한 방법과 매우 유사하다는 사실을 발견하고, 이를 수용하여 자신의 논증을 심화할 수 있었다. 이는 수학적 논증을 강조한 수업에서 나타나는 특수한 사례라고 볼 수 있다.

셋째, 동일한 보증과 지지를 공유하더라도 도달한 결론에는 차이가 있을 수 있다. [그림 13]과 같은 시각적 모델을 근거로 한 논증의 흐름에서 결론은 '연속된 홀수의 합은 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같다'로 나타났다. 평균을 이용한 방법 역시 이와 같은 보증과 지지를 공유하였으나 결론은 '연속된 홀수의 합은 홀수의 개수와 평균을 곱한 값과 같다'로 다소 다르게 나타났다.

5. '비교 및 대조하기'의 수업 양상

'비교 및 대조하기'에서는 앞서 탐구한 내용을 바탕으로 학생들이 연속된 짝수의 합에 대한 자료를 어떻게 탐색하는지 분석하였다. 교사는 '패턴 주목하기'의 방식처럼 연속된 짝수의 덧셈식 사례를 제공하였다. 학생들은 주어진 자료를 바탕으로 규칙을 찾기 시작하였다. [에피소드 8]에서 학생 J는 앞서 논증한 내용과 비교하여 평균을 이용한 방법을 적용할 수 있을 것으로 추측하였다. 이후 학생 J는 사례로 제시된 덧셈식에 있는 짝수들의 평균이 항이 하나씩 늘어날 때마다 1 크다는 규칙을 발견하였다. 이외에도 학생들은 연속된 짝수의 합의 규칙을 찾는 과정에서 이전에 탐구한 내용과 연결하려는 시도를 보였다. 이처럼 '비교 및 대조하기'는 학생들의 앞서 탐구한 내용은 근거로 논증을 확장할 수 있는 기회를 제공한다는 점에서 의의가 있었다.

[에피소드 8] 앞서 논증한 내용을 비교하는 장면

학생 J	선생님. 이것도 평균으로 될 것 같은데요?
교사	어떻게?
학생 J	(사례로 제시된 덧셈식에 있는 짝수들의 평균을 각각 구하며) 잠시만요. 첫 번째 식은 평균이 3이고, 두 번째 식은 평균이 4이고, 세 번째 식은 평균이 5이고, 네 번째 식은 평균이 6이에요. 이게 1씩 커져요.

[에피소드 9]에서 학생 G는 학생 J가 발견한 규칙에 근거하여 평균값은 (짝수의 개수+1)이라는 규칙을 발견하였다. 이를 통해 학생들은 연속된 짝수의 합을 구하는 방법을 (짝수의 개수+1)×(짝수의 개수)로 정리하였다. 이때 평균값을 이용하여 추측한 내용을 정리하였기 때문에 (짝수의 개수)가 승수가 되고 (짝수의 개수+1)이 피승수가 되었다는 특징을 보였다. 이 단계에서는 한 학생이 논증의 흐름을 주도하지 않고, 여러 학생이 수학적 근거를 함께 마련하여 함께 규칙을 정리하는 모습을 보였다.

[에피소드 9] 연속된 짝수의 합의 규칙을 추측하는 장면

교사	그래서 (평균값이 1씩 커진다는 규칙으로) 어떻게 계산하면 될까요?
학생 G	짝수의 개수에다가 1 더하면 학생 J가 찾은 규칙이 나와요.
	...(중략)...
학생 I	짝수의 개수에 1 더한 값이랑 짝수의 개수랑 곱하면 돼요.

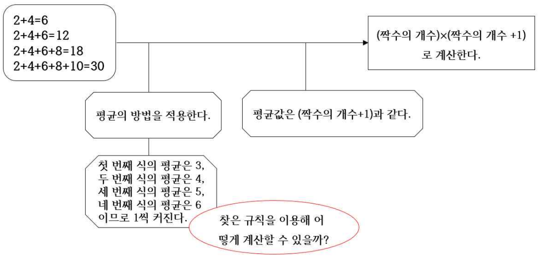
'비교 및 대조하기'에서 나타난 논증의 흐름을 살펴본 결과, 학생들은 연속된 홀수의 합 과제에서 탐구한 내용을 연속된 짝수의 합에도 적용하려는 시도가 나타났다. 따라서 '비교 및 대조하기'에서 앞서 탐구한 내용을 일부 적용할 수 있는 사례를 제공한다면 교실 내 논증을 확장할 수 있을 것이라고 판단된다. 또한 학생들은 최종적으로 (짝수의 개수+1)×(짝수의 개수)의 계산 방법을 추측하였는데 주어진 자료만을 바탕으로 내린 결론이기 때문에, 추측한 내용이 정말 맞는지 확인하기 위해서는 수학적 논증을 강조한 수업을 다시 순환하여 적용할 필요가 있었다. 단 본 수업의 경우 단일 수업으로 계획되었기 때문에, '비교 및 대조하기'에

서 수업의 흐름이 어떻게 나타나는지 분석하는 데에만 초점을 둔다.

수학적 논증을 강조한 수업을 구현한 결과, 각 단계에서 나타난 논증의 특징을 정리하면 다음과 같다([부록 1] 참조). 먼저 ‘패턴 주목하기’와 ‘추측 분명히 나타내기’에서 교사 개입이 많이 나타남을 알 수 있다. 학생들은 수학적 논증을 강조한 수업을 처음 경험하기 때문에, 수업 초반에 교사가 여러 차례 개입하는 모습이 나타났다. 또한 학생들은 연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한다는 규칙을 발견하고, 이를 변수를 사용하여 나름대로 표현하는 것이 가능하였으나, 마지막에 더해지는 홀수를 변수로 표현하는 과정은 교사의 개입이 두드러졌다. 하지만 학생들은 이후 활동에서 마지막에 더해지는 홀수는 크게 고려하지 않고 논증하는 모습을 보였다. 따라서 교사의 개입은 학생의 수준을 고려하여 이루어질 필요가 있었다.

‘시각적 모델로 표현하기’와 ‘표현에 근거한 논증하기’에서는 시각적 모델의 한 사례를 제시하였음에도 불구하고 다양한 방법으로 시각적 모델을 표현하는 모습이 나타났다. 다만 시각적 모델을 추측한 내용과 얼마나 관련지어 이해했는지에 따라 이후 논증의 구현 양상이 달라졌다. 본 수업에서는 특정 사례를 표현하는 반응이 크게 4가지로 나타났으나, 시각적 모델의 구조가 파악된 2가지 반응만이 논증을 심화할 수 있었다. 이 과정에서 학생들은 보증 및 지지, 반박을 통해 교실 내 논증을 강화하였다. 또한, 특이한 점은 시각적 모델을 사용하지 않고 논증의 근거를 마련하려는 시도가 있었는데, 결국 시각적 모델에서 논의된 보증 및 지지를 공유하여 논증을 심화하는 모습이 나타났다. [부록 1]에서 이 부분은 점선으로 표현하였다. 본 수업을 통해 초등학교 5학년 학생들이 논증의 근거를 마련하는 과정에서 시각적 모델이 매우 중요한 역할을 하는 것으로 나타났다.

‘비교 및 대조하기’에서는 앞서 탐구한 내용을 바탕으로 비슷한 사례에 적용해보려는 시도가 나타났다. 다만 학생들은 ‘연속된 홀수의 합은 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같다’라고 교실 내에서 받아들여진 명제를 활용하기보다는 주어진 자료를 바탕으로 귀납적인 탐구를 진행하였다. 이는 ‘패턴 주목하기’와 비슷한 양상이었다([그림 17] 참조).



[그림 17] ‘비교 및 대조하기’의 논증 모형

V. 결론 및 논의

본 연구는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 수학적 논증을 강조한 수업의 사례를 분석하였다. 문헌 연구와 예비 수업을 바탕으로 수학적 논증을 강조한 수업을 5단계로 구성하여 수업을 설계하였다. 그리고 실제 수업에서 수학적 논증을 강조한 수업이 어떻게 구현되는지 그 양상을 단계별로 분석하였다. 이때 Toulmin의 논증 모형을 바탕으로 논증의 흐름에서 자료, 보증, 지지, 반박, 결론, 교사 개입이 언제 어떻게 일어났는지를 참고하였다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 결론 및 논의를 제시하면 다음과 같다.

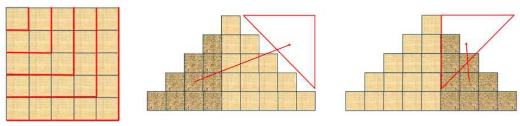
첫째, 변화와 관계 영역에 적합하도록 수학적 논증을 강조한 수업을 계획하면 초등 수준에서 구현하는 것이 가능하였다. 선행연구에서는 수와 연산 영역에서의 논증을 강조한 초등 수업 모델을 계획하였지만 (Russell et al., 2017; Schifter & Russell, 2020), 본 연구에서는 변화와 관계까지 영역을 확장하여 적용하였다. 따라서 Schifter와 Russell(2020)의 수업 모델에서 수와 연산 영역에 특화된 다섯 번째 단계인 ‘연산 비교 및 대조하기’를 수정하여 적용할 필요가 있었다. 본 연구에서는 4학년 규칙 찾기 단원에 소개된 연속된 홀수의 합 또는 크기가 같은 두 수의 곱을 이용하여 정사각형 모양의 배열을 탐구하는 활동을 재구성하여 두 식의 결괏값이 같은 이유에 대해 논증하는 수업을 구성하였다. 마지막 5단계에서는 유사한 과제인 연속된 짝수의 덧셈식을 자료로 제시하여 규칙을 탐색하도록 하였다. Schifter와 Russell(2020)은 ‘연산 비교 및 대조하기’에서 기존에 제시된 자료에 연산을 변경하여 연산의 적용 범위를 확장하고자 하였다. 하지만 이는 역연산의 관계가 아니라면 기존의 탐구 내용을 적용하기

어렵다는 한계가 있었다. 이에 본 연구에서는 ‘연산 비교 및 대조하기’를 ‘비교 및 대조하기’로 수정하고, 기존에 탐구한 내용을 확장하여 적용할 수 있는 연속된 짝수의 덧셈식을 ‘비교 및 대조하기’의 자료로 제시하였다.

수업 결과, 5학년 학생들은 연속된 홀수의 합과 홀수의 개수를 두 번 곱한 값이 같다는 규칙에 주목하고, 주목한 규칙을 일반화된 식으로 나타냈으며, 추측한 내용이 모든 경우 참인지 확인하고, 유사한 사례를 통해 앞선 논증을 확장하려는 모습을 보였다. 이는 본 연구에서 계획한 수학적 논증을 강조한 수업이 변화와 관계 영역에서도 충분히 적용 가능하다는 것을 보여주는 사례이다.

둘째, 시각적 모델을 매개로 두 식 사이의 관계를 이해하면 논증을 효과적으로 할 수 있었다. 학생들은 ‘시각적 모델로 표현하기’ 단계에서 특정 사례를 시각적 모델로 표현하는 활동을 하였는데, 이 과정에서 연속된 홀수의 합과 크기가 같은 두 수의 곱의 구조를 파악할 수 있었다. 시각적 모델을 매개로 두 식 사이의 관계를 파악한 학생들은 이후 논증을 성공적으로 수행하는 모습을 보였다. 또한, 한 학생의 경우 시각적 모델을 사용하지 않고 논증을 시도하였지만, 결국 시각적 모델의 도움을 받아 자신의 논증을 이어갈 수 있었다.

다만 [그림 18]의 사례 2와 사례 3처럼 시각적 모델에 변형이 있다면, 이에 대한 수학적인 근거를 추가로 이해할 필요가 있었다. 사례 1은 학생들이 표현한 사례 중에서 유일하게 시각적 모델을 변형하지 않아도 되는 방법이었다. 사례 1을 근거로 한 논증은 몇몇 보증을 추가하여 결론에 어렵지 않게 도달할 수 있었다. 하지만 사례 2를 근거로 한 논증은 시각적 모델을 변형한 이유를 설명할 수 있는 학생이 없었기 때문에 더 이상의 논증이 이루어지지 않았다. 사례 3을 근거로 한 논증은 시각적 모델을 변형한 이유를 설명하기 위해 보증 및 지지, 반박이 여러 차례 일어나면서 다소 복잡한 논증의 흐름이 나타났다. 이처럼 시각적 모델에 대한 이해 정도에 따라 교실 내 논증의 흐름에 큰 영향을 주었다.



사례 1 사례 2 사례 3

[그림 18] 시각적 모델로 표현한 사례

셋째, 학생들은 수학적 논증을 강조한 수업을 통해 추측한 내용을 확신할 수 있었다. ‘추측 분명히 나타내기’에서 교사는 연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 항상 같을지 질문하였고, 학생들의 의견은 반반으로 나누어졌다. 절반 정도의 학생들은 추측한 내용에 반례가 있을 수도 있다고 생각하였다. 학생들에게 논증을 거치지 않은 일반화된 표현은 추측 수준에 머물러 있을 가능성이 존재하였다. ‘표현에 근거한 논증하기’가 마무리되는 시점에서 대부분의 학생들은 연속된 홀수의 합이 홀수의 개수를 두 번 곱한 값과 같다는 사실을 확신하였다. 따라서 수학적 논증을 강조한 수업 등을 통해 수학적 사실을 추측하는 것에서 나아가, 정말 그런지 그 이유를 탐색하여 확신을 갖는 경험을 제공해야 한다.

넷째, 수학적 논증을 강조한 수업에서 교사의 개입은 교실 내 논증의 흐름에 많은 영향을 주었다. 학생들은 수학적 논증을 강조한 수업이 처음이기 때문에 무엇을 탐구해야 하는지 익숙하지 않은 모습을 종종 보였다. 이에 교사는 학생들이 주목해야 할 부분을 구체적으로 안내하는 모습이 여러 차례 나타났다. 또한, 논증이 활발하게 일어날 수 있는 학급 문화를 조성하여 학생들이 다양한 의견을 나눌 수 있도록 하였다. 특히 ‘표현에 근거한 논증하기’에서는 학생들이 표현한 시각적 모델 가운데 수식과의 관계를 파악한 것으로 판단되는 사례를 발표할 수 있도록 적극적으로 권장하였다. 이에 교실 내 논증의 흐름이 다양하게 나타날 수 있었다. 반면 ‘추측 분명히 나타내기’에서 교사는 마지막으로 더해지는 홀수를 식으로 나타내기 위해 다소 무리한 개입을 보이기도 하였다. Zhuang과 Conner(2022)는 논증이 생산적으로 유지될 수 있도록 지원하는 것이 교사의 가장 중요한 역할이라고 하였다. 따라서 수학적 논증을 강조한 수업에서 교사는 논증이 풍부하게 일어날 수 있도록 적절한 개입을 해주어야 한다.

다섯째, 수학적 논증을 강조한 수업에서 나타나는 논증의 유형은 단계별로 차이가 있었다. '패턴 주목하기'에서는 제시된 자료를 통해 규칙을 발견한다는 단계의 특성상 귀납적인 성격의 보증 및 지지가 나타났다. '표현에 근거한 논증하기'에서는 모든 경우를 포함하는 논증을 요구한다는 점에서 연역적인 성격의 보증 및 지지가 나타났다. '비교 및 대조하기'에서는 앞서 탐구한 내용을 근거로 제시된 자료를 살펴보는 것이기 때문에 연역적인 논증이 나타날 가능성이 있었으나, 실제로는 귀납적인 성격의 보증 및 지지만이 나타났다. 따라서 수학적 논증을 강조한 수업에서 연역적인 논증의 흐름이 나타나기 위해서는 제시된 자료를 충분히 탐색하고, 특정 사례를 시각적 모델 등으로 확인하는 일련의 과정이 필요하다.

본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 수학적 논증을 강조한 수업을 계획 및 적용하여 수업의 실제를 분석하였다. 연구 결과 학생들은 확신할 수 없었던 주장을 논증을 통해 모든 경우에 참임을 확인하였다. 본 연구가 학생들의 심상에서 나타나는 '왜'라는 질문을 의미 있게 만들어줄 수 있는 대안이 되길 바란다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤, 전인호, 이경화, 김연, 이미연, 윤동선, 백종숙, 강태석, 송정환, 이정, 도주원, 이주영, 김봉준, 정희선, 김경미, 이정민, 권혜현, 임다원, ... 이윤경(2023). 수학 4-1. 대교.

교육부(2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호.

방정숙, 선우진(2016). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석. 초등수학교육, 19(1), 1-18.

Campbell, T. G., Boyle, J. D., & King, S. (2020). Proof and argumentation in K-12 mathematics: A review of conceptions, content, and support. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(5), 754-774.

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G., & Reid, D. (2019). Complex argumentation in elementary school. *PNA, 13*(4), 221-246.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf

Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 401-429.

Department for Education. (2013). *Mathematics: programmes of study: key Stages 1 and 2* (national curriculum in England). Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239129/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 3-21.

Knipping, C., & Reid, D. (2019). Argumentation analysis for early career researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 3-31). Springer.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. In R. M. Zbiek (Ed.), *Essential understandings series*. National Council of Teachers of Mathematics.

Reuter, F. (2023). Explorative mathematical argumentation: A theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 112*(3), 415-435.

Russell, S. J., Schifter, D., Kasman, R., Bastable, V., & Higgins, T. (2017). *But why does it work? Mathematical argument in the elementary grades*. Heinemann.

Schifter, D., & Russell, S. J. (2020). A model for teaching mathematical argument at the elementary grades. *Journal of Educational Studies in Mathematics, Special Issue*, 15-28.

Shinno, Y., Miyakawa, T., Iwasaki, H., Kunimune, S., Mizoguchi, T., Ishii, T., & Abe, Y. (2018). Challenges in curriculum development for mathematical proof in secondary school: Cultural dimensions to be considered. *For the Learning of Mathematics, 38*(1), 26-30.

Spinillo, A. G., Lautert, S. L., & Borba, R. (2021). *Mathematical reasoning of children and adults*. Springer.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J., & Silver, E. A. (2010). Reasoning-and-proving in school mathematics: The case of pattern identification. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 235-249). Routledge.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.

Van Eemeren, F. H., Grootendorst, R., & Henkemans, F. S. (1996). *Fundamentals of argumentation theory. A handbook of historical backgrounds and contemporary developments*. Lawrence Erlbaum Associates.

Van Ness, C. K., & Maher, C. A. (2019). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. *The Journal of Mathematical Behavior, 53*, 13-41.

Zhuang, Y., & Conner, A. (2022). Secondary mathematics teachers' use of students' incorrect answers in supporting collective argumentation. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2067932

Teaching Practices Emphasizing Mathematical Argument for Fifth Graders

Hwang, JiNam
Yongi Elementary School
E-mail : whiyoung10@naver.com

In this study, we designed and implemented a instruction emphasizing mathematical argument for fifth-grade students and analyzed the teaching practices. Through a literature review related to instruction emphasizing mathematical argument, we organized a teaching model of five phases that explain why the general claim that the sum of consecutive odd numbers equals a square number is true: 1) noticing patterns, 2) articulating conjectures, 3) representing through visual model, 4) arguing based on representation, 5) comparing and contrasting. Then, we analyzed the argumentation stream by phases to observe how the instruction emphasizing mathematical argument is implemented in the elementary classroom. Based on the results of this study, we discuss the implications of teaching a mathematical argument in elementary school.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : mathematical argument, representation, visual model, conjecturing, generalizing

[부록 1] 수학적 논증을 강조한 수업의 논증 모형