

# 가상질량과 저주파통과필터가 일차홀드를 포함한 햅틱 시스템의 안정성 영역에 미치는 영향

이 경 노\*

한국교통대학교 기계자동차항공공학부

## Effects of a Virtual Mass with a Low-pass Filter on Stable Boundaries of a Haptic System with First-order Hold

Kyungno Lee\*

School of Mechanical, Automotive and Aeronautical Engineering, Korea National University of Transportation,  
50 Daehak-ro, Geomdan-ri, Daesowon-myeon, Chungju-si, Chungbuk 27469, Korea

(Received 2023.11.03. / Accepted 2023.11.22.)

**Abstract** : This paper presents the effects of a virtual mass with a low-pass filter on stability boundaries of a virtual spring in the haptic system with first-order hold. A virtual mass is required to improve the realism of a virtual environment. However the second derivative of a displacement of a haptic device is needed while the inertia forces are computed, which causes the reflective force to change quickly and then makes the haptic system unstable. A low pass filter is added to resolve this problem and the stability region of a haptic system depends on the characteristics of the filter. In this paper the finite impulse response filter (FIR filter) is applied as one of low pass filters and the effect of the FIR filter on the stable region of a haptic system with first order hold is analyzed. When compared to stable region of the system without the FIR filter, the region of available virtual mass is increased by 20% and the maximum of the stable virtual spring is reduced by 32%, irrespective of the sampling time. Besides it is shown that the stable region of a virtual spring is proportional to the inverse square of the sampling period.

**Key words** : Haptic system (햅틱시스템), stability boundary (안정성 영역), virtual mass (가상질량), low-pass filter (저주파통과필터), first-order hold (일차홀드)

### 1. 서론

가상 환경과 현실감높은 상호작용을 하기 위해서는 현실감높은 반력 제시가 필수적이다. 따라서 가상 강체와 상호작용할 경우 보다 큰 반력을 제시할수록 현실감을 높일 수 있다. 그러나 너무 큰 반력을 제시하면 시스템이 불안정해질 수 있다. 그래서 안정적으로 보다 큰 반력을 사용자에게 전달해 주기 위한 연구들이 진행되었다.

샘플-홀드가 영차홀드인 환경에서 수동성 (passivity)

을 토대로 안정적인 가상 스프링의 영역을 분석<sup>1)</sup>하거나 루쓰-헤이츠(Routh-Hurwitz) 판별식을 이용해서 시스템의 안정성을 분석<sup>2)</sup>하였다. 또한 샘플-홀드 방식으로 영차홀드 대신 일차홀드를 적용할 때의 시스템 안정성 영역을 분석하였다.<sup>3)</sup> 일차홀드를 적용함으로써 안정성 영역이 샘플링주기가 1ms일 때 영차홀드 방식을 사용할 때에 비해 약 60배 더 커진다.<sup>3)</sup> 보다 현실감높은 가상환경을 구현하고자 일차홀드가 포함된 시스템에 가상질량을 포함시켜 안정성 영역을 분석하였다.<sup>4)</sup> 샘플링주기가 1ms인 경우 가상질량을 추가함으로써 가상질량이 없는 경우보다 최대 17배 더 큰 가상스프링을

\*Corresponding author, E-mail: klee@ut.ac.kr

안정적으로 구현할 수 있었다. 그렇지만 가상의 관성력을 구현하려면 이중 미분의 과정이 필요하고 이 과정에서 반력이 급변하면서 시스템을 불안정하게 만들 수도 있다. 따라서 이러한 고주파 성분을 제거하기 위해 저주파 통과필터가 필요하다.

따라서 본 논문은 일차홀드와 가상질량이 포함된 햅틱 시스템에서 저주파 통과 필터의 추가가 시스템의 안정성 영역에 어떠한 영향을 미치는지를 살펴보고자 한다.

## 2. 가상질량, 저주파통과필터와 일차홀드가 포함된 햅틱 시스템

햅틱 시스템의 구성요소를 모델화한 것이 Fig. 1이다. 가상질량과 일차홀드가 포함된 햅틱 시스템 모델<sup>4)</sup>에서 저주파통과필터를 추가한 것이다. 햅틱 장치는 질량 ( $M_w$ )과 댐퍼 ( $B_d$ )로 구성된 동역학적 2차 시스템으로 모델화되고, (1)에 근거하여 가상질량 ( $M_w$ )와 가상스프링( $K_w$ )로 구성된 가상환경이 모델화된다. 그리고 (2)로 모델화된 일차홀드(FOH)와 (3)으로 표현된 저주파통과필터인 유한임펄스응답필터 (FIR; Finite Impulse Response Filter)로 구성된다. 그리고 T는 샘플링 주기이다.

본 논문에서는 햅틱장치의 질량을 0.5 kg, 댐핑상수를 1.0 Ns/m로 고정하고, 유한임펄스응답필터가 포함된 경우와 제외된 경우에 대해 샘플링 주기 (T)와 가상질량 ( $M_w$ ) 변화에 따른 가상스프링상수 ( $K_w$ )의 안정성 영역을 시뮬레이션을 통해 분석한다. 안정적인

$$\text{Reflective force model: } f_r = M_w \ddot{x} + K_w x \quad (1)^{(4)}$$

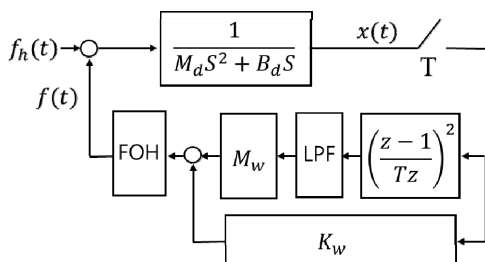


Fig. 1 Block diagram of haptic system including a virtual mass ( $M_w$ ), a low-pass filter (LPF), a virtual spring ( $K_w$ ) and a first-order hold.

$$\text{FOH model: } G_{h1}(s)_T = \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right)^2 \frac{Ts + 1}{T} \quad (2)^{(3)}$$

$$\text{Lowpass FIR digital filter: } H_0(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} \quad (3)$$

가상스프링의 최대값은 시뮬레이션에서 시간 흐름에 따라 변위 ( $x$ ) 값이 더 이상 증가하지 않는 조건에서 가장 큰 가상스프링상수 ( $K_w$ ) 값이다.

## 3. 가상질량, 저주파통과필터와 샘플링 주기 변화에 따른, 일차홀드가 포함된 가상 스프링의 안정성 영역 분석

샘플링 주기 1ms를 기준으로 유한임펄스응답필터 (FIR필터)가 포함된 경우, 가상질량 크기변화에 따른 가상스프링상수의 안정성 영역 변화를 시뮬레이션을 통해 분석한 결과가 Table 1이며, FIR 필터가 없는 경우와 있는 경우를 비교한 것이 Fig. 2이다.

Table 1에서 Ratio는 가상질량 ( $M_w$ )가 커짐에 따라 안정적인 가상스프링상수 ( $K_w$ )의 최대값이 얼마나 커지는지를 살펴보기 위해서 가상질량이 '0'인 경우를 기준으로 가상질량 크기 증가에 따른 가상스프링의 안정성 영역 비율을 나타낸다. 가상질량이 0.2 kg 일 때, 가상질량이 없는 경우보다 약 12배정도 안정성 영역이 증가하는 것을 볼 수 있다. Fig. 2를 살펴보면, FIR 필터가 없는 경우와 있는 경우 모두 가상질량이 0.2 kg

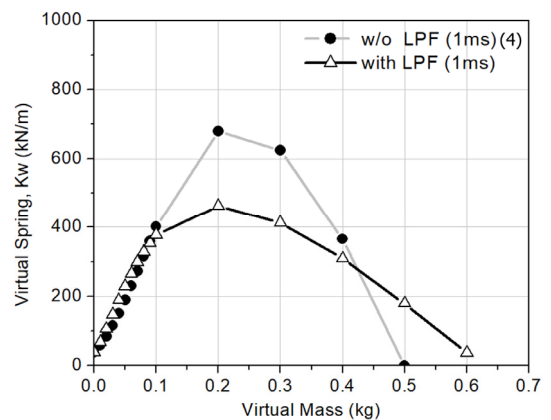


Fig. 2 Max. available stiffness of the virtual spring ( $K_w$ ) according to the virtual mass, where  $T_s=1$  ms,  $M_d=0.5$  kg,  $B_d=1.0$  Ns/m, data hold type=FOH, LPF=FIR model.

Table 1 Max. stiffness of a virtual spring ( $K_w$ ) according to a virtual mass with FIR low-pass filter when sampling time( $T_s$ )=1 ms,  $M_d$ =0.5 kg,  $B_d$ =1.0 Ns/m and FOH.

Sampling time (sec)	$M_w$ (kg)	$K_w$ (N/m)	Ratio
0.001	0	38377	1.00
	0.01	67762	1.77
	0.02	106035	2.76
	0.03	147541	3.84
	0.04	188988	4.92
	0.05	228585	5.96
	0.06	265314	6.91
	0.07	298637	7.78
	0.08	328340	8.56
	0.09	354424	9.24
	0.1	377026	9.82
	0.2	462541	12.05
	0.3	412537	10.75
	0.4	308522	8.04
	0.5	179516	4.68
	0.6	37600	0.98

Table 2 Max. stiffness of a virtual spring ( $K_w$ ) according to a virtual mass with FIR low-pass filter when sampling time( $T_s$ )=5 ms,  $M_d$ =0.5 kg,  $B_d$ =1.0 Ns/m and FOH.

Sampling time (sec)	$M_w$ (kg)	$K_w$ (N/m)	Ratio
0.005	0	3399	1.00
	0.01	4452	1.31
	0.02	5710	1.68
	0.03	7096	2.09
	0.04	8527	2.51
	0.05	9930	2.92
	0.06	11258	3.31
	0.07	12481	3.67
	0.08	13581	4.00
	0.09	14555	4.28
	0.1	15403	4.53
	0.2	18601	5.47
	0.3	16561	4.87
	0.4	12395	3.65
	0.5	7239	2.13
	0.6	1570	0.46

일때 안정적인 가상스프링의 최대값이 가장 커진다. 이 경우 안정성 영역이 FIR 필터가 있는 경우가 FIR 필터가 없는 경우에 비해 약 0.68배가 된다. 그러나 FIR 필터가 있는 경우, 가상질량 크기를 FIR 필터가 없는 경우보다 더 크게 할 수 있으며, Fig.2에서 보는 바와 같이 가상질량을 0.5kg이상의 크기로 모델화할 경우에는 FIR 필터를 포함시켜야 가능하다. 그리고 가상질량이 0.1kg보다 작은 영역에서도 최대 1.28배 안정성 영역을 확대할 수 있다.

샘플링주기 변화에 따른 가상스프링의 안정성 영역 변화를 살펴보기 위해서 샘플링주기를 5ms, 10ms로 증가시켜서 시뮬레이션을 진행한다. 샘플링 주기 5ms이고 FIR 필터가 있는 경우, 안정적인 가상 스프링의 최대값 영역을 나타낸 것이 Table 2이다. 그리고 FIR 필터 영향에 따른 안정성 영역을 비교한 그래프가 Fig. 3이다. 마찬가지로 샘플링주기가 10ms인 경우에 대해 분석한 결과가 Table 3과 Fig. 4이다.

샘플링주기는 1ms에서 5ms, 10ms로 변하지만, 안정적인 가상스프링의 영역이 가장 큰 가상질량의 크기는 0.2 kg이며, FIR 필터가 없는 경우와 비교할 때 그

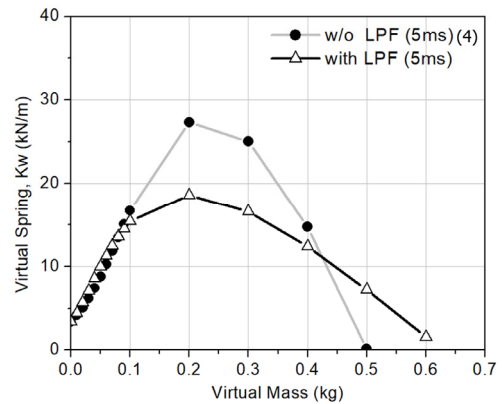


Fig. 3 Max. available stiffness of the virtual spring ( $K_w$ ) according to the virtual mass, where  $T_s$ =5 ms,  $M_d$ =0.5 kg,  $B_d$ =1.0 Ns/m, data hold type=FOH, LPF=FIR model.

크기는 약 0.68배 작아진다. 이러한 경향은 샘플링주기에 상관없이 유사함을 알 수 있다. 그리고 샘플링주기가 증가함에 따라서, 안정적인 가상스프링 영역의 크기는 가상질량이 없는 경우보다 최대 12.05배, 5.47배, 그리고 3.92배로 그 비율이 더 작아진다. 즉 샘플링

Table 3 Max. stiffness of a virtual spring ( $K_w$ ) according to a virtual mass with FIR low-pass filter when sampling time( $T_s$ )=10 ms,  $M_d=0.5$  kg,  $B_d=1.0$  Ns/m and FOH.

Sampling time (sec)	$M_w$ (kg)	$K_w$ (N/m)	Ratio
0.01	0	1194	1.00
	0.01	1449	1.21
	0.02	1738	1.46
	0.03	2050	1.72
	0.04	2371	1.99
	0.05	2687	2.25
	0.06	2989	2.50
	0.07	3269	2.74
	0.08	3522	2.95
	0.09	3748	3.14
	0.1	3945	3.30
	0.2	4681	3.92
	0.3	4159	3.48
	0.4	3116	2.61
	0.5	1828	1.53
	0.6	413	0.35

Table 4 Relative ratio of Max. virtual spring ( $K_w$ ) with LPF to the max. stable boundary of the virtual spring without LPF, according to the sampling time and the virtual mass.

$M_w$ (kg)	$\frac{Kw_{FIR\ Filter}}{Kw_{NoFilter}}$	$\frac{Kw_{FIR\ Filter}}{Kw_{NoFilter}}$	$\frac{Kw_{FIR\ Filter}}{Kw_{NoFilter}}$
	@ $T_s=1ms$	@ $T_s=5ms$	@ $T_s=10ms$
0	1.00	1.00	1.00
0.01	1.17	1.07	1.04
0.02	1.26	1.12	1.07
0.03	1.28	1.15	1.09
0.04	1.25	1.15	1.09
0.05	1.21	1.13	1.08
0.06	1.15	1.10	1.06
0.07	1.10	1.06	1.02
0.08	1.04	1.01	0.98
0.09	0.99	0.97	0.95
0.1	0.94	0.92	0.91
0.2	0.68	0.68	0.68
0.3	0.66	0.66	0.66
0.4	0.84	0.84	0.84
0.5	204.69	41.13	20.77

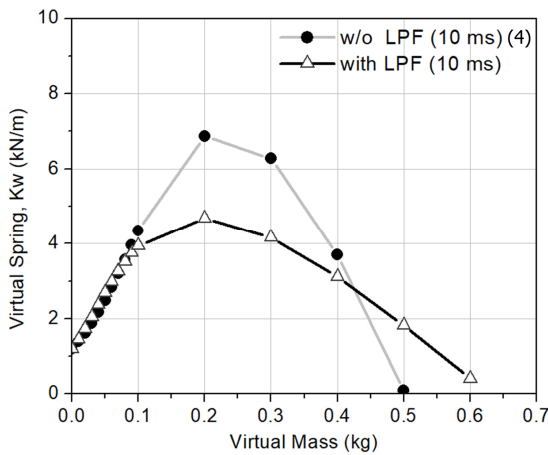


Fig. 4 Max. available stiffness of the virtual spring ( $K_w$ ) according to the virtual mass, where  $T_s=10$  ms,  $M_d=0.5$  kg,  $B_d=1.0$  Ns/m, data hold type=FOH, LPF=FIR model.

주기가 커짐에 따라 가상질량에 의한 안정성 영역의 확장력이 축소됨을 알 수 있다.

저주파통과필터인 FIR필터에 의한 안정성 영역 변화를 살펴보기 FIR필터가 없는 경우 대비 FIR필터가

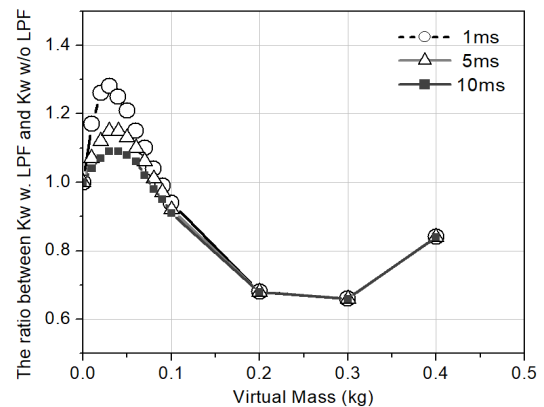


Fig. 5 The ratio between max. available stiffness of the virtual spring ( $K_w$ ) with LPF and that of the virtual spring without LPF, where  $M_d=0.5$  kg,  $B_d=1.0$  Ns/m, data hold type=FOH.

있는 경우의 안정성 영역을 상대 비교한 것이 Table 4 와 Fig. 5이다.

가상질량이 0.1 kg 보다 작은 경우 FIR필터 영향으로 안정성 영역이 약 10%~25%정도 더 커지지만, 그

Table 5 Relative ratio of Max. virtual spring ( $K_w$ ) with  $T_s=1$  ms and 5 ms to that with  $T_s=10$  ms depending on the sampling time and the virtual mass with FIR filter.

$M_w$ (kg)	$\frac{Kw_{T_s=1ms}}{Kw_{T_s=10ms}}$	$\frac{Kw_{T_s=5ms}}{Kw_{T_s=10ms}}$	$\frac{Kw_{T_s=10ms}}{Kw_{T_s=10ms}}$
	@FIR Filter	@FIR Filter	@FIR Filter
0	32.14	2.85	1.00
0.01	46.76	3.07	1.00
0.02	61.01	3.29	1.00
0.03	71.97	3.46	1.00
0.04	79.71	3.60	1.00
0.05	85.07	3.70	1.00
0.06	88.76	3.77	1.00
0.07	91.35	3.82	1.00
0.08	93.23	3.86	1.00
0.09	94.56	3.88	1.00
0.1	95.57	3.90	1.00
0.2	98.81	3.97	1.00
0.3	99.19	3.98	1.00
0.4	99.01	3.98	1.00
0.5	98.20	3.96	1.00

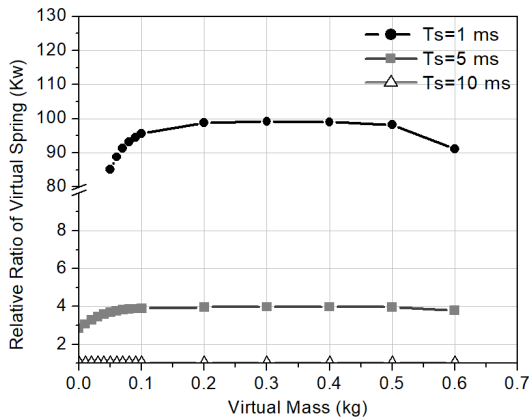


Fig. 6 The relative ratio between max. available stiffness of the virtual spring ( $K_w$ ) with  $T_s=1$  ms and 5 ms to that with  $T_s=10$  ms depending on the virtual mass with FIR filter, where  $M_d=0.5$  kg,  $B_d=1.0$  Ns/m, data hold type=FOH.

이상의 영역에서는 FIR 필터가 없는 경우가 오히려 안정성 영역이 더 커짐을 알 수 있다. 그렇지만 FIR 필터의 추가로 가상 질량의 영역이 0.5 kg에서 0.6 kg으로 확대됨은 가상 환경을 모델화할 때 장점으로 작용

될 것으로 보인다.

저주파통과필터와 일차홀드가 있는 경우에서, 샘플링주기 변화와 가상질량 크기 변화에 따른 가상 스프링의 안정성 영역 변화를 분석한 것이 Table 5와 Fig. 6이다. 샘플링주기가 가장 큰 10ms를 기준으로 1ms와 5ms의 결과를 비교한다.

샘플링주기가 작아질수록 안정성 영역의 상대 크기가 더욱 커지며, 가장 큰 안정성 영역을 갖게 되는, 가상질량 0.2 kg~0.3 kg에서는 상대적인 크기 비율이 샘플링주기 비율 역수의 제곱에 비례하는 것을 볼 수 있다. 즉 샘플링주기 10ms 일 때의 안정성 영역보다 샘플링주기 5ms 일때는 약 4배, 샘플링주기 1ms일때에는 약 100배정도 안정성 영역이 더 커지는 것을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서는 일차홀드와 가상질량이 포함된 햅틱시스템에서 FIR 저주파통과필터가 시스템 안정성 영역에 어떤 영향을 끼치는 지를 살펴보았다. FIR 필터의 추가로 안정적으로 모델화할 수 있는 가상질량의 크기 영역은 약 20%정도 증가되는 반면, 안정적인 가상 스프링의 최대값은 FIR 필터가 없는 경우에 비해 약 0.68배정도로 줄어든다. 그리고 FIR 필터의 영향으로 0.1 kg보다 작은 가상질량이 포함된 경우에는 샘플링주기에 따라 10%~25%정도 안정성 영역을 더 크게 할 수 있다. 또한 샘플링주기 크기의 역수 제곱에 비례해서 가상스프링의 안정성 영역은 더 커진다. 본 연구를 통해 가상질량을 활용한, 보다 현실감높은 가상환경 구현이 가능해질 것으로 기대된다.

#### Acknowledgement

2023년 한국교통대학교 지원을 받아 수행하였음.

This was supported by Korea National University of Transportation in 2023.

#### References

- 1) J. E. Colgate and G. Schenkel, "Passivity of a class of sampled-data systems: Application to Haptic Interfaces," *Journal of Robotic Systems*, vol.14, no. 1, pp.37-47, 1997.

- 2) J. J. Gil, A. Avello, A. Rubio, and J. Florez, "Stability analysis of a 1 DOF haptic interface using the Routh-Hurwitz criterion," *IEEE Trans. on control systems technology*, vol. 12, no. 4, pp. 583-588, July 2004.
- 3) K. Lee, "Stability analysis of a haptic system with a first-order-hold method," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 389 - 394, 2014.
- 4) K. Lee, "A study on the effect of first-order hold method on the stability boundary of a virtual mass-spring model," *Journal of Institute of Convergence Technology*, vol. 10, no. 1, pp. 41-45, 2020.