

수학 문제 해결에서 효과적인 ChatGPT의 프롬프트 고찰: 이차방정식과 이차함수를 중심으로

오 세 준 (이화여자대학교 사범대학부속 이화·금란고등학교, 교사)

본 연구는 이차방정식과 이차함수 단원을 중심으로 수학 문제 해결에 효과적인 ChatGPT의 프롬프트를 고찰하는 연구로 ‘역할-규칙-예제풀이-문제-과정’으로 이어지는 구조화된 프롬프트를 설계하였다. 본 연구에서는 GPT4, 올프람 플러그인, Advanced Data Analysis를 결합한 인공지능 모델을 활용하였으며, 계산 오류를 줄이기 위해 올프람 플러그인을 주요 연산의 도구로 사용하였다. 9종의 고등학교 수학 교과서의 이차방정식과 이차함수 단원 문제를 구조화된 프롬프트의 형태로 입력하였을 때 ChatGPT의 답변에 대한 정답률은 91%로, 제로샷 프롬프트 대비 높은 성과를 보였다. 이를 통해 수학 문제 해결에 효과적인 구조화된 프롬프트를 확인할 수 있었다. 본 연구에서 설계한 구조화된 프롬프트는 개별화 교육 및 맞춤형 교육을 위한 지능형 정보시스템 구축에 기여할 수 있을 것이다.

I. 서론

인공지능 기술의 발전은 우리 삶에 큰 변화를 가져왔다. 인공지능을 활용한 개인 맞춤 추천 서비스를 통해 관심있는 영상이나 제품을 자동으로 추천받고 있다. 그러나 이런 발전의 그림자도, 2023년 5월 미국에서만 4000 명이 인공지능 기술 도입으로 인해 해고되었다는 보도가 있었다(한보경, 2023). 이러한 변화는 교육 분야에도 큰 영향을 미치며, 미래 세대가 이 변화에 성공적으로 대응하기 위해서는 새로운 기술과 사고 방식의 습득이 필수적이다. 수학은 논리적 사고와 문제 해결 능력을 강조하는 중요한 교육 과목으로, 인공지능과 같은 복잡한 기술을 이해하고 활용하는 기초를 제공한다. NCTM(2000)은 학교 수학 교육이 문제 해결을 중심으로 이루어져야 한다고 강조했고, 이는 현재 수학 교육의 주요 목표로 인식되고 있다. 국내 교육과정 또한 문제 해결 능력의 중요성을 인식하고 있으며, ‘제2차 수학교육 종합계획’에서는 수학 교과의 핵심 역량 강화를 통해 수학적 추론과 문제 해결력의 증진이 필요하다고 주장하였다(교육부, 2015). 이에 따라, 2015 수학과 교육과정과 2022 수학과 교육과정에서는 문제 해결 역량을 핵심 역량 중 하나로 선정하였다.

또한, NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)은 수학 문제 해결 과정에서 계산기와 컴퓨터의 활용을 권장하였다. 한국 역시 ‘제3차 수학교육 종합계획’에서 학생들이 탐구활동을 통해 수학을 효과적으로 학습하도록 공학 도구의 활용을 강조하고 있다. 더불어, 인공지능 역량을 포함한 미래 핵심 역량을 함양하기 위해 수학교육의 내용과 방법에 대한 개선의 필요성을 언급하였다(교육부, 2020a). 이러한 변화의 결과 2022 수학과 교육과정(교육부, 2022)에서는 ‘공학 도구’와 관련된 성취기준이 10개로 증가하였으며, 이는 ‘공학적 도구’와 관련된 성취기준이 1개뿐이었던 2015 수학과 교육과정(교육부, 2020b)과 비교했을 때, 수학교육의 방향성이 점차 변화하고 있음을 보여준다.

한편, ‘제3차 수학교육 종합계획’에서 인공지능 기술을 활용한 개별화 맞춤형 수업 지원시스템 구축이 논의되

* 접수일(2023년 08월 28일), 심사(수정)일(2023년 09월 13일), 게재확정일(2023년 09월 22일)

* MSC2000분류 : 97U99

* 주제어 : ChatGPT, 프롬프트, 프롬프트 엔진, 이차방정식과 이차함수

고 있다. 이미 수학교육 연구에서는 인공지능을 활용하여 개별화 교육과 맞춤형 교육을 실현할 수 있다는 전망이 제시되고 있었다(김홍걸 외, 2018; 신동조, 2020; 이지혜, 허난, 2018). 신동조(2020)는 인공지능을 활용한 국외 연구 51편을 분석, 수학교육에서 인공지능 기술은 지능형 교수 시스템 형태로 설계되어 맞춤형 피드백을 제공하고 있음을 확인하였다. 하지만 활용되는 인공지능 모델은 대부분 규칙 기반 알고리즘으로 만족할 만한 수준은 아니었으며 딥러닝 기술이 활용된 대화형 챗봇과 같은 보완된 형태가 필요하다고 하였다. 이에 ChatGPT와 같은 대규모 언어모델의 등장은 지능형 교수 시스템의 수준을 높일 수 있으며, 개별화 교육과 맞춤형 교육의 실현을 한층 앞당길 수 있다.

공학 ‘도구’가 수학 교수·학습 상황에서 활용될 때에는 ‘인공물’이 아닌 ‘도구’로서 작용해야 한다(Trouche, 2004). 수학 문제 해결에서의 공학 도구 활용 역시 같은 원칙이 적용된다. 이에 따라 수학 문제 해결에서 공학 도구 활용에 대한 연구는 GSP(김남희, 2002), Cabri3D(김남희, 2006), CAS(한세호, 장경윤, 2009), 지오지브라(부덕훈, 2021; 양성현, 2014)와 같이 지속적으로 이루어져 왔다. ChatGPT는 인공지능 기술을 활용하는 ‘인공물’에 해당한다. 이러한 인공물이 ‘도구’로서 기능을 발휘하려면, 그 사용법과 가치에 대한 연구와 이해가 필요하다. Drijvers(2003)의 ‘망치’에 대한 비유는 ChatGPT에도 적용될 수 있다. 처음 ChatGPT를 접하는 사용자에게는 단순한 인공물로 보일 수 있지만, ChatGPT의 기능과 장점을 알게 되면 이는 매우 유용한 도구로 인식될 것이다. ChatGPT에 익숙한 사용자는 그 사용법과 유용성을 깊게 인지할 것이다.

이러한 관점에서 교육분야에서 ChatGPT를 활용한 연구는 2023년 3월을 기점으로 급증하고 있다. 대부분은 국어, 영어 등 언어 과목 교과에 한정되어 있다. ChatGPT가 대규모 언어모델인 이유도 있지만, 권오남 외(2023)의 연구에 따르면 ChatGPT의 수학적 성능이 우수하지 않은 것으로 확인되었기 때문이다. 대학수학능력시험의 문제로 평가했을 때, ChatGPT는 6등급에서 9등급 수준으로 수학 문제 해결에서 ChatGPT를 활용할 때는 신중한 접근이 필요해 보인다.

ChatGPT를 출시한 Open AI는 2023년 3월 14일 GPT4를 전격 공개하였다. GPT4는 그 이전 세대의 언어모델들의 가능성을 더욱 확장하였다. 이전에는 구조화된 데이터를 처리하거나 복잡한 문제 해결에 어려움을 겪었던 자연어처리 인공지능 모델은 텍스트 기반의 복잡한 작업을 더욱 효과적으로 처리할 수 있게 되었다. 또한, 플러그인 기능을 활용하여 자연어처리를 넘어서 다양한 문제 해결 능력을 보여주고 있다. 특히 메스메티카의 웹 버전인 울프람을 ChatGPT에 플러그인하여 사용할 수 있게 되어, 수학 교과에서 ChatGPT를 활용할 가능성이 증가할 것으로 기대된다. 또한, GPT4는 Advanced Data Analysis를 이용하여 이미지 데이터를 ChatGPT에 입력할 수 있게 되었다. 권오남 외(2023)의 연구에서는 ChatGPT 3.5버전을 활용하여 그림이 포함된 문제는 분석대상에서 제외하였다. 하지만 글과 수식으로 이루어진 수학 문제도 있지만, 그림을 포함하고 있는 경우도 많다. 이에 GPT4와 Advanced Data Analysis를 활용하여 그림을 입력할 수 있는 상황에서 ChatGPT의 수학 문제 해결 능력을 탐색할 필요가 있다.

한편 교육 분야에서 ChatGPT를 활용할 때, ChatGPT에 입력할 프롬프트의 중요성이 여러 교과에서 공통적으로 강조되고 있다(강동훈, 2023; 변정호, 권용주, 2023; 차민영, 임희주, 2023). 국어교과에서 ChatGPT를 활용한 연구에서는 ChatGPT가 갑자기 다른 장르로 글을 작성하거나, 학생들이 원하는 글을 생성하지 않는 것(유인근, 박형용, 2023)을 확인하였다. 이는 ChatGPT의 프롬프트에 가이드라인을 구체적으로 명시하지 않은 것으로 분석할 수 있다. 또한 영어 교과의 교수자는 프롬프트를 정교하게 제시하는 방법을 익힌다면 중급 이상 영어 실력을 갖춘 학생들에게 도움이 될 것(차민영, 임희주, 2023)이라고 하였다. 하지만 국내 교육 분야 연구에서 프롬프트에 대한 연구는 찾을 수 없었다. 이에 본 연구에서는 수학 문제 해결에 효과적인 프롬프트를 제안하고 프롬프트의 효과성을 확인하고자 한다. 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

수학 문제 해결에 효과적인 프롬프트는 무엇인가?

II. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 수학 문제 해결

1980년대부터 NCTM은 학교 수학에서 중점적으로 문제 해결 능력을 키우는 것이 필요하다고 제안했다. 그 결과, 문제 해결 능력은 수학 교육의 주요한 목표 중 하나로 인식되기 시작했다. 우리나라의 교육과정에서도 이를 중요하게 생각하며 교육해왔다. Polya(1973)는 문제 해결은 다양한 생각들을 연결하는 것이라고 설명했으며, <표 II-1>과 같이 문제 해결을 4단계(문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성)로 나누고, 각 단계에 필요한 발문과 권고를 제안하였다.

<표 II-1> 폴리아가 제시하는 문제 해결 단계에서의 발문과 권고(김남희, 2022, p.113)

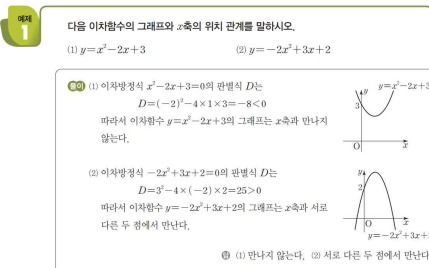
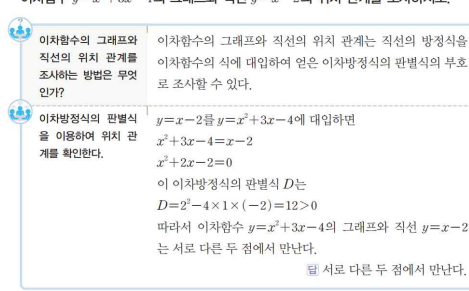
단계	주요 발문과 권고
문제 이해	미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가? 그림을 그려보기 적절한 기호를 사용하기 조건을 여러 부분으로 분해하기
계획 수립	전에 그 문제를 본 일이 있는가? 관련된 문제를 알고 있는가? 유용하게 사용될 어떤 정리를 알고 있는가? 미지의 것을 살펴보기 친숙한 문제 중 미지의 것이 같거나 유사한 문제를 생각해보기 관련된 문제로 전에 풀어본 문제가 있구나. 그것을 활용할 수 있을까? 문제를 달리 진술할 수 있을까. 정의로 되돌아가보기 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어보기 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 자료로부터 뭔가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있는가? 자료는 모두 사용했는가? 조건을 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심개념은 모두 고려했는가?
계획 실행	풀이 계획을 실행하고 매 단계를 점검하기 각 단계가 올바른지 명확하게 알 수 있는가? 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?
반성	결과를 점검할 수 있는가, 논증 과정을 점검할 수 있는가? 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? 그것을 한눈에 알 수 있는가? 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

수학 문제 해결의 ‘문제 이해’ 단계에서는 구하는 것에 주의를 집중하고, 적절한 기호를 사용하며, 조건을 여러 부분으로 분해하는 전략이 필요함을 확인할 수 있다. 한편 ‘계획 수립’ 단계의 발문 중 ‘전에 그 문제를 본 일이 있는가?’, ‘관련된 문제를 알고 있는가?’, ‘친숙한 문제 중 미지의 것이 같거나 유사한 문제를 생각해보기’, ‘관

련된 문제를 알고 있는가?’ 등을 통해 수학 문제 해결에서 유사한 문제를 떠올리는 것이 문제 해결에 큰 도움이 된다는 것을 알 수 있다. 문제 해결에 영향을 주는 것 중 하나는 문제를 해결하는 사람의 경험 및 문제 유형의 친숙도이며, 기존에 알고 있던 문제를 기반으로 새로운 문제를 해결하는 전략이 문제 해결에 효과적 이라는 사실은 여러 선행연구(이종희, 이진향, 김부미, 2003; Lester, 1994)를 통해 이미 확인되었다. 이에 수학 문제 해결에 효과적인 ChatGPT의 프롬프트를 작성할 때 이를 활용할 수 있을 것이다. 또한 폴리야의 ‘계획 실행’ 단계와 ‘반성’ 단계의 발문들도 수학 문제 해결을 위한 프롬프트를 설계할 때 의미 있게 활용할 수 있을 것이다.

나. 이차방정식과 이차함수

2015 수학과 교육과정에서 이차방정식과 이차함수 단원의 성취기준은 3개로 구체적으로는 ‘[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.’, ‘[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.’, ‘[10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.’이다. 전수경과 조정수(2015)는 이차방정식과 이차함수 단원의 수학교과서의 텍스트와 교사 설명담화를 비교·분석하여 수학교과서는 구체적인 예시로부터 일반화하도록 구성되어 있음을 확인하였다. 예시를 통해 이차방정식과 이차함수의 관계를 일반화시키도록 교과서가 서술되어 있기에 이 단원의 예제와 문제 풀이는 중요하다. 성취기준 [10수학01-09]와 [10수학01-10]에 해당하는 교과서의 예제의 예시는 [그림 II-1]과 같다.

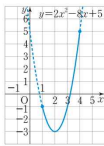

성취 기준	[10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
교과서 예제	 <p>다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하시오.</p> <p>(1) $y = x^2 - 2x + 3$ (2) $y = -2x^2 + 3x + 2$</p> <p>☞ (1) 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$의 판별식 D는 $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$ 따라서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.</p> <p>(2) 이차방정식 $-2x^2 + 3x + 2 = 0$의 판별식 D는 $D = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 25 > 0$ 따라서 이차함수 $y = -2x^2 + 3x + 2$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.</p> <p>Ⓢ (1) 만나지 않는다. (2) 서로 다른 두 점에서 만난다.</p> <p>(박교식, 2018, p.60)</p>	 <p>이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$의 그래프와 직선 $y = x - 2$의 위치 관계를 조사하시오.</p> <p>이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 조사하는 방법은 무엇인가?</p> <p>이차방정식의 판별식을 이용하여 위치 관계를 확인한다.</p> <p>이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 직선의 방정식을 이차함수의 식에 대입하여 얻은 이차방정식의 판별식의 부호로 조사할 수 있다.</p> <p>$y = x - 2$를 $y = x^2 + 3x - 4$에 대입하면 $x^2 + 3x - 4 = x - 2$ $x^2 + 2x - 2 = 0$ 이 이차방정식의 판별식 D는 $D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12 > 0$ 따라서 이차함수 $y = x^2 + 3x - 4$의 그래프와 직선 $y = x - 2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.</p> <p>Ⓢ 서로 다른 두 점에서 만난다.</p> <p>(권오남, 2018, p.64)</p>

[그림 II-1] 성취기준 [10수학01-09]와 [10수학01-10]에 해당하는 교과서의 예제의 예시

두 성취기준 모두 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계와 관련되어 있으며, 학생들은 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해할 수 있어야 한다. 이와 관련된 수학 문제를 해결하기 위해서 이차함수와 직선을 이차방정식으로 변환하고, 판별식을 이용하여 이차방정식의 해의 개수를 구한 후, 그 결과를 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수로 대응시켜 해석할 수 있어야 한다. 하지만 일부 학생들은 방정식과 함수의 관계를 이해하지 못하고 고도 기계적 계산만으로도 문제를 해결하는 경향이 있었다. 특히, 학생들에게 이차함수 문제를 이차방정식으로 제시한 경우보다 이차방정식 문제를 이차함수로 제시하였을 때, 정답률이 낮았다(박정미, 이정권, 2013). 또한 국가 수준 학업 성취도 평가 결과에서도 “이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.”는 성취기준과 관련된 문제의 정답률은 48.11%였으며, 우수학력 학생과 보통학력 학생의 정답률 차이는 57.11%였다(김성경, 2018).

이 단원의 세 번째 성취기준 [10수학01-11]은 “이차함수의 최대, 최소와 관련된 문제를 해결할 수 있다”이며,

[그림 II-2]의 왼쪽과 같이 제한된 범위에서 최대 최소를 구하는 문제를 제시하고 있다. 이는 2015년 수학 교육 과정에서 교수·학습 방법 및 유의 사항을 통해 이차함수의 최댓값과 최솟값을 실수 전체의 범위뿐만 아니라 제한된 범위($a \leq x \leq b$)에서도 구하게 하고 있기 때문이다.

관련 문제	제한된 범위에서 최댓값과 최솟값 구하기	실생활과 관련된 문장제 문장
교과서 예제	<p>제한된 범위에서의 이차함수의 최댓값과 최솟값</p> <p>2 $1 \leq x \leq 4$일 때, 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 5$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.</p> <p>풀이 $y = 2x^2 - 8x + 5 = 2(x-2)^2 - 3$ 이고, $1 \leq x \leq 4$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 값의 범위에 속하므로 $x=1$일 때 $y=-1$ $x=2$일 때 $y=-3$ $x=4$일 때 $y=5$ 따라서 최댓값은 5이고 최솟값은 -3이다. 답 최댓값은 5, 최솟값은 -3</p>  <p>(배중수, 2018, p.60)</p>	<p>예제 2</p> <p>오른쪽 그림과 같이 길이가 30 m인 철망으로 직사각형 모양의 정원을 가능한 한 넓게 만들려고 한다. 이때 만들 수 있는 정원의 최대 넓이를 구하시오. (단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.)</p>  <p>정원의 가로 길이를 x m라고 하면 세로의 길이는 $(30-x)$ m이다. 정원의 넓이를 y m²라고 하면 $y = x(30-x) = -x^2 + 30x = -(x-15)^2 + 225$ 이때 $0 < x < 30$이므로 정원의 최대 넓이는 $x=15$일 때 225 m²이다. (김원경, 2018, p.66)</p>

[그림 II-2] 성취기준 [10수학01-11]에 해당하는 교과서 예제 예시

[그림 II-2]의 오른쪽과 같이 모든 교과서는 실생활과 관련된 문장제 문제를 통해서 수학적 지식을 실생활에 적용하여 문제를 해결할 수 있게 구성되어 있다. 국가 수준 학업성취도 평가에서 이 성취기준과 관련된 문제의 정답률은 31.75%였으며, 우수학력 학생과 보통학력 학생의 정답률 차이가 69.12%로 전체 문제 중에서 가장 크게 나타나고 있었다(김성경, 2018). 문장제 문제의 해결에 있어 핵심적인 요소는 문제의 이해이지만, 학생들은 종종 문제에서 주어진 정보를 임의로 해석하고 사용하는 경향이 있다(박장희, 유시규, 이준권, 2012). 이에 문장제 문제에 대해서 ChatGPT의 풀이와 답을 확인하고, ChatGPT를 문장제 문제 해결의 보조교사로 활용할 수준이 되는지 확인하는 것이 필요하다.

다. ChatGPT의 원리

ChatGPT는 Open AI가 개발한 자연어처리 AI 모델로, 여기서 GPT는 Generative Pretrained Transformer의 약자이다. 이 모델은 대량의 텍스트 데이터를 학습하여 문맥을 이해하고 텍스트를 생성하는 데 사용된다. ChatGPT를 생성(Generative), 사전학습(Pretrained), 트랜스포머(Transformer) 3가지 관점에서 정리해보면 다음과 같다. 생성 모델은 데이터의 확률 분포를 학습하여 새로운 데이터를 생성하는 모델이다. ChatGPT는 기존 텍스트를 기반으로 다음에 올 단어 또는 문장을 예측하는 생성 모델이며, 확률론적 언어모델을 사용하여 주어진 단어나 문장 시퀀스가 주어지면 다음 단어의 확률 분포를 예측한다. 한편 텍스트를 생성하기 위하여 ChatGPT는 사전학습을 한다. 사전학습은 대량의 데이터를 이용하여 인공지능 모델을 미리 학습시키는 과정으로 자연스러운 텍스트를 인공지능이 학습할 수 있다. 구체적으로는 대량의 텍스트 데이터에서 하나의 문장에 두 단어가 함께 등장할 확률을 계산한다. 예를 들어 하나의 문장에 ‘비’와 ‘우산’이 함께 등장하는 확률은 ‘비’와 ‘부채’가 함께 등장하는 확률보다 더 클 것이다. 또한, 두 텍스트가 등장하는 순서도 확률적으로 계산하며, 이 때 조건부 확률을 활용한다. 예를 들어 ‘비가 내린다’에서 ‘비가’라는 텍스트 다음에 ‘내린다’라는 텍스트가 올 확률을 조건부 확률로 계산하는 것이다. 이 확률은 ‘내린다’라는 텍스트 다음에 ‘비가’라는 텍스트가 올 확률보다 높을 것이다. 이처럼 ChatGPT는 사전학습을 통해서 자연스러운 텍스트를 학습해나간다. 사전학습된 인공지능 모델은 특정한 목적에 맞게 미세 조정될 수 있으며, 이를 통해 학습 효율성과 성능이 향상됨이 확인되었다.

트랜스포머는 Vaswani 외(2017)의 ‘Attention is All You Need’ 논문에서 처음 소개되었으며, 현재 딥러닝 기

반의 자연어처리 모델의 기본 구조 중 하나로 간주된다. 트랜스포머는 인코더와 디코더로 구성되며, 텍스트를 key, query, value로 각각 표현하기 위해 가중치 행렬을 곱한다. 트랜스포머의 주요 특징 중 하나는 셀프 어텐션으로, 입력된 텍스트의 각 단어와 다른 단어와의 관계를 잘 파악할 수 있게 하는 인공지능 방법이다. 셀프 어텐션은 텍스트를 컴퓨터가 처리할 수 있는 벡터로 표현할 때, 문장 내의 다른 텍스트와의 관계를 고려하도록 설정된 수학적 연산 규칙이다. 예를 들어 “비가 내릴 것 같으니 우산을 챙겨야겠다”라는 문장이 있을 때, ‘비’라는 단어를 문장 내 다른 텍스트 ‘내린다’, ‘우산’, ‘챙긴다’와의 연관성을 포함할 수 있도록 ‘내린다’, ‘우산’, ‘챙긴다’를 의미하는 벡터와 아래와 같은 수식을 사용하여 일차결합으로 표현할 수 있다.

$$Z_{비} = 0.3 V_{내린다} + 0.5 V_{우산} + 0.2 V_{챙긴다}$$

예를 들어 $Z_{비}$ 는 ‘비’를 의미하는 텍스트를 다른 텍스트와 연관하여 벡터로 표현한 것이고, $V_{내린다}$, $V_{우산}$, $V_{챙긴다}$ 는 각각 ‘내린다’, ‘우산’, ‘챙긴다’의 텍스트를 의미하는 값(value) 행렬이다. 텍스트 데이터의 일반적인 처리 방법은 불용어를 제거하고, 의미 단위로 나눈 후, 단어들의 집합인 단어 사전(Bag of Words)을 기준으로 원-핫 벡터 혹은 빈도수 벡터로 표현하는 것이다. 이러한 방법에 비교하면 트랜스포머는 다른 단어와의 관계를 파악할 수 있으므로 인공지능 모델이 자연어를 처리하는 성능은 크게 향상되었다.

라. ChatGPT와 프롬프트

프롬프트(prompt)는 사용자가 입력하는 명령어나 질문을 의미한다. 인공지능 언어모델은 프롬프트로 입력받은 내용을 확률적으로 분석하여 가장 적합한 응답을 도출해낸다. 따라서, 사용자가 원하는 결과를 얻기 위해서는 적절한 프롬프트의 입력이 중요하다. 생성형 인공지능에서 사용자가 기대하는 답변을 얻기 위해 적절한 프롬프트를 구성하는 일련의 과정을 프롬프트 엔지니어링이라고 부른다(Bull, Kharrufa, 2023). 프롬프트는 인공지능 모델의 반응 및 출력을 결정하는 중요한 요소로 간주되며, 프롬프트의 구조와 내용이 모델의 정확도와 반응 속도에 큰 영향을 미친다는 것이 확인(Raposo et al., 2022)되었으며, 이에 프롬프트는 인공지능 모델의 성능과 효율성을 최대화하는 데 중요한 역할을 한다(Zamfirescu-Pereira et al., 2023).

프롬프트 엔지니어링은 특정 목적을 위해 프롬프트를 최적화하는 과정으로, 대규모 언어모델(LLM)을 효과적으로 활용하기 위해 프롬프트를 개발하고 최적화하는 데 중점을 두는 비교적 최근 연구되고 있는 분야이다(Giray, 2023; Raposo et al., 2022). Liu와 Chilton (2021)은 텍스트를 이미지로 변환하는 생성 모델에 대한 프롬프트 작성 가이드라인을 제시하였다. 이 연구에서는 주제와 스타일 키워드를 포함한 프롬프트의 구조를 연구하였으며, 이러한 프롬프트를 입력하여 인공지능 모델이 원하는 결과를 도출하는지 분석하였다.

프롬프트는 제로샷 프롬프트(Zero-Shot Prompts), 퓨샷 프롬프트(Few-Shot Prompts), 반복적 프롬프트(Iterative Prompts), 구조화된 프롬프트(Structured Prompts) 등으로 구분할 수 있다(Giray 2023; Heston & Khun, 2023). 제로샷 프롬프트는 인공지능 모델이 특별히 학습하지 않은 데이터에 대해 질문을 하는 프롬프트를 의미한다. 예를 들어, “함수에 대해 설명해주세요”는 제로샷 프롬프트이다. 퓨샷 프롬프트는 인공지능 모델이 특정 질문이나 작업을 위해 특별히 훈련되지 않았지만, 프롬프트에 예제가 포함된 경우이다. 예를 들어 “함수에 대해 설명해주세요”는 제로샷 프롬프트이지만, “수학시간에 언급되는 함수에 대해 설명해주세요”는 퓨샷 프롬프트이다. 반복적 프롬프트는 인공지능 모델이 프롬프트를 생성하는 데 도움을 주는 프롬프트로 프롬프트 작성을 위한 프롬프트를 의미한다. 구조화된 프롬프트는 인공지능 모델이 좋은 결과를 일관되게 얻기 위해 제안된 방법의 하나이다. Giray(2023)는 ChatGPT를 활용한 글쓰기 연구에서 구조화된 프롬프트로 ‘지시’, ‘내용’, ‘입력데이터’, ‘출력 형식’으로 구성된 프롬프트를 제안하였다. 구조화된 프롬프트는 OpenAI API를 사용한 프롬프트 엔지니어링 모범 사례 8개(Shieh, 2023)와 ChatGPT로부터 더 나은 답변을 얻기 위한 6가지 전략(OpenAI, 2023b)에서도 <표

II-2>와 같이 확인할 수 있다.

<표 II-2> OpenAI reveals how to write effective prompts(OpenAI, 2023b; Shieh, 2023)

Best practices for prompt engineering with OpenAI API	Six strategies for getting better results
<ol style="list-style-type: none"> 1. 최신 모델을 사용한다. 2. 프롬프트 시작 부분에 명령을 입력하고, ### 또는 " " " 를 사용하여 명령과 컨텍스트를 구분한다. 3. 원하는 컨텍스트, 결과, 길이, 형식, 스타일 등에 대해 가능한 구체적이고 상세하게 작성한다. 4. 예제를 통해 원하는 출력 형식을 표현한다. 5. 제로샷으로 시작한 다음 퓨샷을 적용하고, 둘 다 작동하지 않는다면 과인튜닝한다. 6. 모호하고 불명확한 설명을 줄인다. 7. 하지 말라고 하지 말고, 해야할것을 말한다. 8. 코드 생성 관련 - "리딩 어휘"를 사용하여 특정 패턴이 나오도록 유도한다. 이었다. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 명확한 지침을 작성한다. <ul style="list-style-type: none"> - 관련성 높은 답변을 얻으려면 요청사항에 세부 정보를 포함한다. - 모델에게 페르소나 채택을 요청한다. - 구분 기호를 사용하여 입력의 고유한 부분을 명확하게 표시한다. - 예시를 제공한다. - 원하는 출력 길이를 지정한다 2. 참조 텍스트를 제공한다. <ul style="list-style-type: none"> - 모델이 참조 텍스트를 사용하여 대답하도록 지시한다. - 참조 텍스트에서 인용하여 대답하도록 모델에 지시한다. 3. 복잡한 작업을 더 간단한 하위 작업으로 분할한다. <ul style="list-style-type: none"> - 의도 분류를 사용하여 사용자 요청과 가장 관련성이 높은 지침을 식별한다. - 대화가 매우 길 경우 이전 대화를 요약하거나 필터링 한다. - 긴 문서를 부분별로 요약하고 다시 합쳐서 전체 이야기를 이해한다. 4. ChatGPT에게 생각할 시간을 준다. <ul style="list-style-type: none"> - 성급하게 결론을 내리기 전에 모델이 스스로 해결할 수 있도록 지시한다. - 내면의 독백 또는 일련의 쿼리를 사용하여 모델의 추론 과정을 숨긴다. - 모델이 이전 과정에서 놓친 것이 있는지 물어본다. 5. 외부 도구를 사용하여 ChatGPT의 약점을 보완한다. <ul style="list-style-type: none"> - 임베딩기반 검색을 사용하여 효율적인 지식 검색을 구현한다. - 코드 실행을 사용하여 보다 정확한 계산을 수행하거나 외부 API를 호출한다. - 모델이 특정 기능에 접근 할 수 있는 액세스권한을 부여한다. 6. 변경 사항을 체계적으로 테스트한다. <ul style="list-style-type: none"> - 표준 답변을 참조하여 모델 결과를 평가한다.

프롬프트를 작성할 때는 원하는 컨텍스트, 결과, 길이, 형식, 대답할 내용과 대답하지 않아야 할 내용 등을 명확히 해야 하며, 예제 및 참조 텍스트를 통해 출력 형식을 구체적으로 안내할 필요가 있다. 이때, 각 항목에 대해 ###, ""와 같은 구분 기호를 사용하여 예시, 참조 텍스트, 형식 등의 항목을 구분할 필요가 있다. 또한 ChatGPT 모델에 페르소나인 특정 역할을 부여하는 것도 추천하는 프롬프트 작성 방법이다. 본 연구에서 개발한 프롬프트는 역할 부여, 예제, 원하는 결과, 참조 테스트 등을 구분기호로 구분하여 구성하였다. 특히 예시, 참조 텍스트 제공은 폴리아의 문제 해결 단계 중 '계획 수립'에서 제안한 유사한 문제를 상기하는 발문과 비슷한 측면이 있다.

ChatGPT와 관련된 교육분야 연구(권오남 외, 2023; 신동광 외, 2023; 오규설, 2023; 오선경, 2023; 왕감경, 2023; 유재진, 2023)에서 활용한 프롬프트는 대부분 제로샷 프롬프트였다. 국외 교육 연구 중 Beghetto(2023)는 ChatGPT를 창의성 교육에 활용할 수 있도록 프롬프트를 수정하였다. 한편 수학교과에서 ChatGPT를 활용한 연구(권오남 외, 2023; 손태권, 2023; Patel et al., 2023)도 제로샷 프롬프트의 형태였으며, 수학 문제 해결을 위한 구조화된 프롬프트에 대한 수학교육 연구는 찾아보기 어려웠다. 수학 뿐 아니라 다양한 교과에서 ChatGPT를 활용하는 연구가 2023년 활발히 진행되고 있었지만, 교육에 활용할 수 있는 프롬프트에 대한 연구는 찾을 수 없었다. 이에 본 연구에서는 수학 문제 해결에서 효과적인 프롬프트를 제시하고자 한다.

2. 연구방법 및 절차

이 연구는 수학 문제 해결에서 효과적인 ChatGPT의 프롬프트를 고찰하기 위해 수행된 사례 연구(Stake, 1995)로 ChatGPT로 수학 문제를 풀이한 선행연구인 권오남 외(2023)가 제시한 연구방법을 활용하였다. ChatGPT의 프롬프트에 이차방정식과 이차함수의 단원의 교과서 예제와 문제를 입력하고, 이에 대한 답변을 분석하였다. 이 연구에서 다룰 수학 문제의 범위를 설정하고, ChatGPT의 답변에 대해 분석의 기준을 근거로 분석함으로써 수학 문제 해결에 효과적인 ChatGPT의 프롬프트를 구체적으로 서술할 것이다.

가. 연구대상의 선정

ChatGPT는 대규모 언어모델이다. 본 연구를 위해 연구자는 수학언어가 많이 나타나는 단원이 연구에 적합하다고 판단하였다. 이차함수와 이차방정식 단원은 여러 학교급별 수학 단원 중에서 설명담화를 많이 사용(전수경, 조경수, 2015)하며, 학교수학에서 함수는 다양한 표상을 사용(Tall, 2003)하고 있다. 또한 김성경(2018)에 의하면 국가 수준 학업 성취도 평가에서 성취기준 ‘이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.’, ‘이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다’와 관련된 문제가 우수학력 학생과 보통학력 학생의 정답률 차이가 크게 나타난 것으로 확인되었다. 수학 문제 해결에서 효과적인 구조화된 프롬프트를 설계할 수 있다면, ChatGPT는 보조교사로 학업 성취 수준이 낮은 학생들의 개별화 교육에 도움이 될 수 있을 것이다. 이에 ‘이차방정식과 이차함수’ 단원의 문제를 프롬프트에 입력하고 ChatGPT의 답을 분석대상으로 선정하였다.

개발된 구조화된 프롬프트가 수학 문제 해결에서 효과적인 확인하기 위하여 고등학교 1학년 <수학> 교과서 ‘이차방정식과 이차함수’ 단원의 문제를 활용하였다. 2015 고등학교 1학년 <수학> 교과서는 <표 II-3>과 같이 9종이 있다.

<표 II-3> <수학> 교과서 목록

분류	출판사	대표저자
A	교학사	권오남
B	금성	배종숙
C	동아출판	박교식
D	미래엔	황선옥
E	비상교육	김원경
F	좋은책신사고	고성은
G	지학사	홍성복
H	천재교과서	류희찬
I	천재교육	이준열

구조화된 프롬프트를 구성할 때, 참조 텍스트 혹은 예제를 제시하고 문제를 질문하는 것이 ChatGPT로부터 더 좋은 답변을 얻기 위한 방법(OpenAI, 2023b; Shieh, 2023)이었다. 또한, 폴리아도 수학 문제 해결을 위하여 이전에 풀이본 문제를 떠올릴 것을 제안한 바 있다. 이에 본 연구에서도 ChatGPT가 예제풀이를 참고하여 문제를 풀도록 프롬프트를 구성하였다. 이에 ChatGPT에 입력할 문제도 9종의 수학 교과서의 ‘예제’ 다음에 제시된 ‘문제’로 한정하였다. 교과서별 이차방정식과 이차함수 단원에서 ‘예제’ 다음에 제시된 ‘문제’의 수는 <표 II-4>와 같다.

<표 II-4> 교과서별 이차방정식과 이차함수 단원의 문제 수

소단원	교과서별 예제와 연관된 문제 수(그림이 있는 문제 수)									
	A 출판사	B 출판사	C 출판사	D 출판사	E 출판사	F 출판사	G 출판사	H 출판사	I 출판사	총
이차함수의 그래프와 직선의 위치관계	3(0)	2(0)	3(0)	4(0)	3(1)	2(0)	5(0)	1(0)	2(0)	25(1)
이차함수의 최대 최소	2(1)	3(1)	5(1)	4(1)	2(0)	4(2)	3(0)	2(1)	3(0)	28(7)
총	5(1)	5(1)	8(1)	8(1)	5(1)	6(2)	8(0)	3(1)	5	53(8)

이차방정식과 이차함수 단원은 교과서별로 차이가 있었지만, 대부분 2개의 소단원 ‘이차함수의 그래프와 직선의 위치관계’, ‘이차함수의 최대, 최소’로 구성되어 있었다. ‘이차함수의 그래프와 직선의 위치관계’ 단원의 예제는 ‘이차방정식의 판별식과 이차함수의 그래프 관계’, ‘이차함수 그래프와 직선의 위치관계’로 구성되어 있었으며, ‘이차함수의 최대, 최소’단원의 예제는 ‘이차함수의 최댓값과 최솟값’, ‘제한된 범위에서의 이차함수의 최댓값과 최솟값’, ‘이차함수의 최댓값과 최솟값의 활용’ 등으로 분류할 수 있었다. 예제와 관련된 문제는 대부분 1개였지만, 2개 제시된 교과서도 있었다. 또한, 이차함수의 최대, 최소와 관련하여 문장제 문제가 모든 교과서에 포함되어 있었으며, 이때 그림이 제시된 문제도 있었다. 9종의 수학 교과서에서 이차방정식과 이차함수 단원에서 ‘예제’ 다음에 제시된 ‘문제’는 <표 II-3>과 같이 총 53문제였다. 53문제에 대한 ChatGPT의 답변이 이 연구의 분석대상이었다.

나. 자료 수집과 분석

ChatGPT에는 LaTeX를 활용하여 수식을 입력할 수 있다. 이에 교과서 예제와 문제를 LaTeX를 활용하여 변환이 필요하며, 이를 위해 크롬 확장 프로그램인 Equatio를 사용하였다. Equatio는 PDF나 이미지, 사진에 있는 문제와 수식을 읽어와서 LaTeX로 변환할 수 있는 도구이다. LaTeX로 변환된 문제는 구조화된 프롬프트에 입력하기 위하여 CSV 파일로 저장되었다. 그림이 있는 문제는 교과서 PDF파일에서 그림을 캡처하여 이미지 파일로 저장하였다.

수학 문제 해결에서 효과적인 ChatGPT 프롬프트를 설계하기 위하여 3가지 종류의 ChatGPT모델에 53문제를 각각 입력하였으며, ChatGPT의 답변을 3가지 종류의 모델별로 분리하여 정리하였다. OpenAI에서 제공하는 ChatGPT의 모델 중 GPT3은 ‘gpt-3.5-turbo-16k-0613’, GPT4는 ‘gpt-4-0613’ 모델에 53문제를 채로샷 프롬프트로 입력하고 그 결과를 모델별로 정리하였다. 이 때, 연구의 신뢰도를 높이기 위하여 하나의 문제를 ChatGPT에 입력하고 결과를 도출한 뒤 ChatGPT를 초기화한 후 새로운 문제를 입력하는 과정을 반복하였다. 반복적인 과정은 [그림 II-3]과 같이 OpenAI에서 제공하는 API를 활용하여 파이썬으로 수행하였다. [그림 II-3]의 왼쪽처럼 LaTeX 으로 변환된 문제를 ChatGPT에 단순히 입력(채로샷 프롬프트)하고 ChatGPT의 답변을 수집하였다.

한편 확장기능을 활성화한 GPT4모델에 구조화된 프롬프트를 입력한 결과는 따로 정리하였다. 2023년 3월 14일에 GPT4가 출시되면서 플러그인(PLUG-IN) 기능이 추가되었다. 플러그인은 ChatGPT의 기능을 확장하는 데 사용되는 추가적인 프로그램을 의미하며, 수학 문제 해결에서 효과적인 플러그인으로는 울프람이 있다. 복잡한 계산을 오류 없이 수행할 수 있는 울프람은 수학적 문제 해결에 활용되고 있다. 이에 구조화된 프롬프트를 [그림 II-3]의 오른쪽처럼 울프람으로 계산할 수 있도록 하였다. 또한, GPT4는 Advanced Data Analysis를 이용하여 그림을 입력하고 처리할 수 있었다. 이에 그림이 있는 문제는 GPT4와 Advanced Data Analysis 모델을 이용하여 그림을 입력하고 ChatGPT의 답변을 수집하였다. 3가지 종류의 GPT모델에서 수집된 답변을 교과서에서 제시한 정답과 같은지 확인하였으며, 연구자는 2일 간격으로 3번에 걸쳐 ChatGPT의 답변이 교과서 정답과 같은지를 확인하였다.

<pre>import openai import csv # API 키 설정 openai.api_key = '' # 실제 API 키로 교체 # 시종 모달을 설정합니다. chat GPT는 gpt-3.5-turbo를 사용합니다. MODEL = "gpt-3.5-turbo-16k-0613" def simulate_api_call(content): response = openai.ChatCompletion.create(model=MODEL, messages=[{"role": "system", "content": "You are a helpful assistant."}, {"role": "user", "content": content},], temperature=0,) return response['choices'][0]['message']['content'] data = [] # CSV 파일을 읽습니다. with open("./coding_0824 이미지 수정_0825.csv", 'r', encoding='utf-8') as csvfile: reader = csv.reader(csvfile) headers = next(reader) # 첫 번째 행을 헤더로 읽습니다. data.append(headers + ['응답']) # '응답' 컬럼을 추가합니다. for row in reader: content = row[5] # '문제' 컬럼이 3번째 컬럼이라고 가정합니다. print(content) response = simulate_api_call(content) print(response) data.append(row + [response]) # '응답' 컬럼에 저장된 응답들을 csv 파일에 저장합니다. with open("./updated_file_0825_gpt3.csv", 'w', encoding='utf-8', newline='') as output_file: writer = csv.writer(output_file) writer.writerows(data) output_filepath = "./updated_file_0825_gpt4.csv" output_filepath</pre>	<pre>def call_openai_api_with_prompt(example, problem): # Construct the prompt prompt = f""" ##당신은 고등학교를 가르치는 수학 선생님이다. <규칙>을 준수하고 <예제 풀이>를 참고로 주어진 <문제>를 다음과 같은 <과정>으로 해결하고 답을 서술하시오.## <규칙> 1. User가 제공한 <문제>는 오류가 없고, 반드시 답이 존재하는 문제이다. 2. 문제를 풀다가 모든 조건에 맞지 않는 경우가 나타나면 잘못 풀은 것으로 수정한다. 3. User가 이해하기 쉽게 고등학교의 눈높이에 맞추어 설명한다. 4. 풀이에 사용한 개념들을 <사용된 개념>이라는 목록으로 따로 분류하여 정리해 둔다. 5. 문제를 풀다가 더 이상 나아갈 방법이 없는 경우 처음부터 다시 시작한다. </규칙> <예제 풀이> {example} </예제 풀이> <문제> {problem} </문제> <과정> 1. <문제>를 해결하기 위해 단계별 계획을 최대한 짚게 나누어 출력한다. 2. <문제>에서 구해야 하는 것을 먼저 식으로 표현한다. 3. 경우를 나누어야 하는 문제라면 모든 경우에 대한 결과를 출력한다. 4. <문제>를 해결하는 풀이과정과 답을 제시한다. </과정> """ # Call the OpenAI API using the chat endpoint response = openai.ChatCompletion.create(model=MODEL, messages=[{"role": "system", "content": "You are a helpful assistant."}, {"role": "user", "content": prompt}]) return response['choices'][0]['message']['content'].strip()</pre>
<p>제로샷 프롬프트 코드</p>	<p>구조화된 프롬프트 코드</p>

[그림 II-3] 수학적 성능을 분석하기 위한 ChatGPT 활용 파이썬 코드

III. 연구 결과 및 논의

1. 수학 문제 해결에서 효과적인 구조화된 프롬프트

대규모 언어모델의 능력을 최대한 활용할 수 있는 프롬프트 엔지니어링의 중요성이 강조되고 있다. Wei 외(2021)는 FLAN(Finetuned Language Models Are Zero-Shot Learners)을 활용하여 프롬프트를 구조화하였으며, 그 결과 제로샷 프롬프트에 비해 구조화된 프롬프트가 인공지능 모델의 성능 향상에 도움이 됨을 입증하였다. Wei 외(2022)는 생각의 사슬(Chain-of-Thought)이라는 구조화된 프롬프트 방식을 소개하였으며, 생각의 연속성을 기반으로 단계적으로 프롬프트를 연결하여 산술, 일반 지식, 그리고 상징적 추론 작업에서 더 나은 결과를 얻을 수 있음을 밝혔다. 이는 Shieh(2023)의 복잡한 작업을 하위 작업으로 분할하여 단계적으로 제시하는 프롬프트와 유사한 방법이다.

수학 문제 해결에서 효과적인 구조화된 프롬프트는 Shieh(2023)와 OpenAI(2023b)의 프롬프트 엔지니어링 토대로 ‘역할-규칙-예제풀이-문제-과정’으로 구성하였다. Shieh(2023)와 OpenAI(2023b)의 프롬프트 엔지니어링은 Giray(2023)의 ChatGPT를 활용한 글쓰기 교육 연구에서 이미 효과성이 입증된 바 있다. Giray(2023)는 구조화된 프롬프트를 ‘지시(규칙)-내용(예제)-입력데이터(문제)-출력 형식(과정)’으로 구성하였다. 하지만 Shieh(2023)는 ChatGPT의 ‘역할’도 중요함을 강조하였기에 본 연구에서는 ‘역할’까지 포함하여 구조화된 프롬프트를 구성하였다.

‘역할’은 여러 학문 분야에서 같은 단어를 활용하는 경우에 더욱 유용하다. 예를 들어 ‘변수’라는 단어는 컴퓨터 공학과 수학교과에서 모두 활용된다. [그림 III-1]의 왼쪽과 같이 역할 부여 없이 프롬프트를 입력하면 프로

그래밍과 관련된 ‘변수’에 대해 설명한다. 하지만 수학교사라는 역할을 부여하면 수학교과와 맥락에서 ‘변수’를 설명한다.

<p>변수는 프로그래밍에서 매우 중요한 개념입니다. 변수는 데이터를 저장하는 메모리의 위치를 참조하는 이름입니다. 이 이름은 프로그램에서 사용되는 데이터를 식별하는 데 사용됩니다.</p> <p>변수는 다음과 같은 특징을 가지고 있습니다:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 변수 이름: 각 변수는 고유한 이름을 가지며, 이를 통해 프로그램 내에서 참조됩니다. 2. 데이터 타입: 변수는 특정 데이터 타입을 가집니다. 이 데이터 타입은 변수가 저장할 수 있는 데이터의 종류와 크기를 결정합니다. 예를 들어, 정수형 변수는 정수, 문자열 변수는 문자열을 저장할 수 있습니다. 3. 값: 변수는 특정 값을 저장합니다. 이 값은 프로그램 실행 중에 변경될 수 있습니다. 이러한 특성 때문에 이를 ‘변수’라고 부릅니다. 4. 스코프: 변수의 스코프는 변수가 접근 가능한 프로그램의 영역을 정의합니다. 일부 변수는 특정 함수 내에서만 접근 가능하며, 일부 변수는 프로그램 전체에서 접근 가능할 수 있습니다. <p>변수는 프로그램의 상태를 추적하고, 입력을 저장하며, 계산 결과를 저장하는 데 사용됩니다. 변수를 사용하면 프로그램의 동작을 유연하게 조정할 수 있습니다.</p>	<p>물론이죠, 그럼 수학적 관점에서 변수에 대해 설명하겠습니다.</p> <p>수학에서 변수는 알려지지 않은 값을 대표하는 기호입니다. 이는 일반적으로 알파벳 문자로 표현되며, 수식이나 방정식에서 특정 값을 대표하는 데 사용됩니다.</p> <p>변수는 크게 두 가지 유형으로 나눌 수 있습니다:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 독립 변수: 이는 함수의 입력값을 대표하는 변수입니다. 예를 들어, 함수 $f(x) = x^2$에서 x는 독립 변수입니다. 독립 변수의 값은 자유롭게 선택할 수 있으며, 이에 따라 함수의 출력값이 결정됩니다. 2. 종속 변수: 이는 함수의 출력값을 대표하는 변수입니다. 위의 예에서 함수 $f(x) = x^2$의 결과는 종속 변수입니다. 종속 변수의 값은 독립 변수의 값에 의해 결정됩니다. <p>변수는 수학적 표현을 일반화하는 데 중요한 역할을 합니다. 예를 들어, $x + 2 = 4$라는 방정식에서 x는 변수입니다. 이 경우, x는 2라는 특정 값을 가지지만, 변수 x를 사용함으로써 이 방정식은 모든 가능한 숫자에 대해 “어떤 수에 2를 더하면 4가 된다”는 일반적인 개념을 표현할 수 있습니다.</p> <p>따라서 변수는 수학적 문제를 일반적이고 유연하게 표현하고 해결하는 데 필수적인 도구입니다.</p>
<p>역할 부여 없이 제로샷 프롬프트로 “변수의 개념을 설명해주세요” 라는 질문에 대한 ChatGPT의 답변</p>	<p>수학교사라는 역할 부여하고 “변수의 개념을 설명해주세요” 라는 질문에 대한 ChatGPT의 답변</p>

[그림 III-1] ‘역할 부여’에 대한 ChatGPT의 답변의 차이

‘규칙’은 수학 문제에 대한 ChatGPT의 답변을 확인하는 단계를 통해 추가되었다. 권오남 외(2023)에 따르면, ChatGPT는 할루시네이션(Hallucination)으로 잘못된 답을 자신 있게 제시하기도 하며, 계산 오류가 많거나, 도출이 가능한 답을 도출하지 않는 경우가 다수 있다. 실제 본 연구의 GPT3.5 모델에 제로샷 프롬프트를 입력하면 답을 도출하지 않거나, 문제가 오류라고만 답변한 경우도 있었다. 이에 “<문제>는 오류가 없고 답이 존재하며, 풀이 과정에서 조건에 맞지 않으면 잘못 풀이한 것으로 수정하고, 문제를 풀다가 더 이상 나아갈 방법이 없는 경우에는 다시 시작한다.”라는 조건을 [그림 III-2]의 왼쪽처럼 추가하였다.

한편 폴리아의 ‘반성’ 단계의 발문을 참고하여 “User가 이해하기 쉽게 고등학생의 눈높이에 맞추어 설명하고, 풀이에 사용된 개념들을 <사용된 개념>이라는 목록으로 따로 분류하여 정리해 둘 것”을 [그림 III-2]의 오른쪽처럼 규칙에 추가하였다. <사용된 개념>은 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 때에 도움이 될 수 있을 것이며, ChatGPT를 보조교사로 활용할 가능성도 커질 것이다. ChatGPT는 이 규칙을 인식하고, 수학 문제를 풀이한 이후 사용된 개념을 정리할 수 있었다.

<p>이차방정식을 풀면, $a^2 - 4a + 8 = 0$입니다.</p> <p>이차방정식의 판별식을 이용하여 근의 개수를 확인하면, $SD = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16$입니다. 판별식이 음수이므로, 이차방정식은 실근을 가지지 않습니다. 따라서, 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$의 그래프와 접하고 기울기가 음수인 직선이 점 $(0,4)$를 지날 수 없습니다.</p>	<p>사용된 개념:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 직사각형의 넓이 계산: 길이 \times 너비 2. 이차함수의 꼭짓점 형태: $a(x - h)^2 + k$ 3. 이차함수의 꼭짓점 좌표 계산: $h = -\frac{b}{2a}$ <p>이 문제를 풀이하는 동안 제공된 예제 문제 풀이와 비슷한 접근 방식을 사용하여 문제를 해결하였습니다. 예제 문제는 이차함수의 꼭짓점 형태를 사용하여 최댓값과 최솟값을 찾는 것에 중점을 둔 반면, 이 문제는 도형의 넓이와 이차함수의 꼭짓점을 연결하여 문제를 해결하였습니다.</p>
<p>끝까지 풀이한다는 ‘규칙’을 추가하지 않아 ChatGPT가 답변을 중단한 경우</p>	<p><사용된 개념> ‘규칙’을 추가한 이후 ChatGPT의 답변</p>

[그림 III-2] ‘규칙’에 대한 ChatGPT의 답변의 차이

또한 계산은 ChatGPT가 하지 않고 올프람을 활용하도록 하였다. 올프람은 메스메티카의 웹 버전으로 수학에 여러 문제를 해결할 수 있는 도구이지만, 메스메티카 언어로 프로그래밍이 필요하다. ChatGPT에 올프람을 불러 그인 하고, 문제 풀이 전략은 ChatGPT가 수립하게 하였으며, 풀이 전략에 맞게 메스메티카 언어로 프로그래밍 하여 그 답을 도출하도록 하였다. 따라서 ChatGPT가 풀이 전략을 정확하게 수립하고, 메스메티카 언어의 프로그래밍에 오류가 없다면 ChatGPT의 수학 문제 풀이는 오류 없이 정확할 것이다.

한편 ChatGPT에게 더 좋은 답변을 얻기 위하여 ‘참고 텍스트’, ‘예제’ 등을 제시하는 것이 중요(OpenAI, 2023b; Shieh, 2023)하다. 이는 폴리아의 문제 해결을 위한 ‘계획 수립’ 단계의 발문 중 ‘관련된 문제를 알고 있는가?’와 연관이 있다. 이에 ChatGPT에게 교과서 예제풀이를 제공하여 관련된 문제를 활용할 수 있게 하였다. 제로샷 프롬프트를 입력하여 문제를 풀 경우, [그림 III-3]과 같이 현재 교육과정 이외의 방법으로 풀이를 전개하기도 하였다. [그림 III-3]의 왼쪽은 1학년 수학 이차함수의 최대 최소 문제를 미분으로 해결하는 ChatGPT의 답변이다. 퓨어샷 프롬프트를 ChatGPT모델에 입력할 때, 최대 최소 문제를 미분으로 해결하는 것을 자주 관찰할 수 있었다. 하지만 ‘예제풀이’가 추가된 구조화된 프롬프트를 입력하면, ChatGPT는 이차함수의 꼭짓점을 이용하여 최대 최소 문제를 해결하였다.

<p>주어진 이차함수들의 최댓값 또는 최솟값을 구하려면 완전제곱법, 미분 등의 방법을 사용할 수 있습니다. 여기서는 각 함수에 대해 미분을 통한 방법으로 최댓값 또는 최솟값을 구해보겠습니다.</p> <p>(1) 함수: $y = -2x^2 + 8x + 1$</p> <p>먼저 함수를 미분하여 최댓값 또는 최솟값이 나타나는 x 값을 찾습니다. 미분한 함수: $y' = -4x + 8$</p> <p>미분한 함수를 0으로 놓고 x 값을 구합니다. $-4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$</p> <p>이제 $x=2$ 값을 원래 함수에 대입하여 y 값을 구합니다. $y = -2(2)^2 + 8(2) + 1 = -8 + 16 + 1 = 9$</p> <p>따라서 이 함수의 최솟값은 (2, 9)입니다.</p>	<p>1. 계획 세우기</p> <ul style="list-style-type: none"> • 문제의 주요 내용을 파악한다. • 주어진 함수의 형태와 특성을 확인한다. • 함수의 최대값을 구하기 위한 방법을 결정한다. <p>2. 문제에서 구해야 할 것 표현하기</p> <ul style="list-style-type: none"> • 스키 선수의 가장 높이 날아올랐을 때의 높이 y와 그때까지 걸린 시간 x를 구해야 한다. • 주어진 함수 $y = -5x^2 + 6x + 1$의 최대값을 구하면 된다. <p>3. 함수의 최대값 구하기</p> <ul style="list-style-type: none"> • 주어진 함수는 2차 함수이므로 꼭짓점을 이용하여 최대값을 구할 수 있다. • 꼭짓점의 x 좌표는 $x = -\frac{b}{2a}$로 구할 수 있다. 여기서 $a = -5$ 및 $b = 6$이다. • 꼭짓점의 y 좌표는 주어진 함수에 x 좌표를 대입하여 구한다. <p>4. 답 제시하기</p> <ul style="list-style-type: none"> • 꼭짓점의 x와 y 좌표를 제시하여 스키 선수의 가장 높이 날아올랐을 때의 높이와 그때까지 걸린 시간을 답한다.
<p>예제를 추가하기 전 ChatGPT의 답변</p>	<p>이차방정식과 이차함수 단원의 예제를 추가한 이후 ChatGPT의 답변</p>

[그림 III-3] 예제풀이를 추가한 프롬프트

‘과정’에서는 구하는 것을 식으로 표현하게 하였다. 이는 폴리아의 문제 해결 단계 중 ‘문제 이해’에 속하며 ‘미지의 것은 무엇인가?’라는 발문과 관련되어 있다. 한편 Wei 외(2022)는 수학 문제 해결과 관련된 부분에서 생각의 사슬 형태의 프롬프트를 입력하면 원하는 답변을 얻을 수 있도록 모델의 성능이 향상되는 것을 확인하였다. 폴리아도 ‘계획 실행’ 단계에서 풀이 계획을 실행하고 매 단계를 점검하도록 제안하고 있다. 이를 통해 수학 문제 해결에서 단계적 계획을 수립하고, 풀이하는 것은 유용한 방법임을 확인할 수 있었으며, 이를 구조화된 프롬프트에 설계할 때 반영하였다. 또한, 경우를 나누어서 생각해야 하는 문제는 경우를 나눌 수 있게 하였다. 이렇게 제시된 프롬프트의 예시는 [그림 III-4]의 왼쪽과 같으며, ChatGPT는 오른쪽과 같이 답변을 제시한다. 답변에는 문제 풀이 계획을 명시하고, 문제를 푸는 과정을 자세하게 설명하고, 사용한 개념을 정리하였다.

<p>###당신은 고등학생을 가르치는 수학 선생님이다. <규칙>을 준수하고 <예제풀이>을 활용하여 <문제>를 다음과 같은 <과정>으로 해결하시오.###</p>	<p><과정></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <문제>를 해결하기 위해 단계별 계획을 최대한 잘게 나누어 출력한다. 2. <문제>에서 구해야 하는 것을 먼저 식으로 표현한다. 3. 방정식으로 문제를 해결하기 전에 <개념>의 공식공식에서 식을 변형하여 해결하려고 시도한다. 4. 경우를 나누어야 하는 문제라면 모든 경우에 대한 결과를 출력한다.
<p><규칙></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. User가 제공한 <문제>는 오류가 없고, 반드시 답이 존재하는 문제이다. 2. 문제를 풀다가 모든 조건에 맞지 않는 경우가 나타나면 잘못 풀은 것이므로 수정한다. 3. User가 이해하기 쉽게 고등학생의 눈높이에 맞추어 설명한다. 4. 풀이에 사용된 개념들을 <사용된 개념>이라는 목록으로 따로 분류하여 정리해 둔다. 5. 문제를 풀다가 더 이상 나아갈 방법이 없는 경우 처음부터 다시 시작한다. 6. 계산은 ChatGPT가 하지 않고, 유포랩이 하게 한다. 	<p>단계별 계획</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 각 이차함수의 꼭짓점을 찾는다. 2. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다. 3. 범위 내에서의 함수의 값을 계산하여 최댓값과 최솟값을 찾는다. <p>(1) $y = x^2 - 8x + 2 (0 \leq x \leq 5)$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 꼭짓점을 찾기 위해 이차함수를 완전제곱식으로 변형한다. 2. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다. 3. 범위 내에서의 함수의 값을 계산하여 최댓값과 최솟값을 찾는다. <p>(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 10 (-1 \leq x \leq 2)$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 꼭짓점을 찾기 위해 이차함수를 완전제곱식으로 변형한다. 2. 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하는지 확인한다. 3. 범위 내에서의 함수의 값을 계산하여 최댓값과 최솟값을 찾는다.
<p><예제풀이></p> <p>{예제풀이}</p> <p></예제 문제 풀이></p> <p><문제></p> <p>{문제}</p> <p></문제></p>	<p>이제 각 문제에 대해 위의 단계별 계획을 따라 해결을 시작하겠습니다.</p> <p>(1) $y = x^2 - 8x + 2 (0 \leq x \leq 5)$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 꼭짓점을 찾기 위해 이차함수를 완전제곱식으로 변형한다. <p>이차함수의 일반형은 $y = ax^2 + bx + c$입니다. 꼭짓점의 x좌표는 $x = -\frac{b}{2a}$로 주어집니다.</p> <p>이 문제에서 $a = 1, b = -8$이므로 꼭짓점의 x좌표는 $x = -\frac{-8}{2(1)} = 4$입니다.</p> <p>이제 y값을 구하기 위해 $x = 4$를 원래의 이차함수에 대입합니다.</p> $y = 4^2 - 8(4) + 2$
<p><과정></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <문제>를 해결하기 위해 단계별 계획을 최대한 잘게 나누어 출력한다. 2. <문제>에서 구해야 하는 것을 먼저 식으로 표현한다. 3. 경우를 나누어야 하는 문제라면 모든 경우에 대한 결과를 출력한다. 4. <문제>를 해결하는 풀이과정과 답을 제시한다. 	<p>이제 이 값을 계산하겠습니다.</p> <p><사용된 개념></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 이차함수의 꼭짓점: $x = -\frac{b}{2a}$ 2. 완전제곱식 변형 3. 이차함수의 최댓값과 최솟값 <p>이제 문제를 모두 해결했습니다. 문제의 조건과 주어진 과정에 따라 해결하였으며, 사용된 개념들도 정리하였습니다.</p>

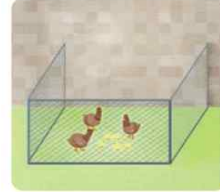
수학 문제 해결에서 효과적인 ChatGPT의 구조화된 프롬프트 예시

구조화된 프롬프트를 입력한 ChatGPT의 답변 예시

[그림 III-4] 수학 문제 해결에서 효과적인 프롬프트의 예시와 결과

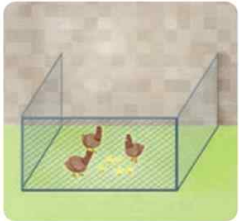
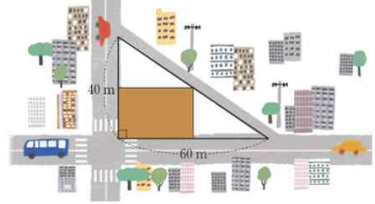
한편 수학 문제를 ChatGPT에게 풀게한 권오남 외(2023)의 연구에서는 그림이 있는 문제는 분석대상에서 제외하였다. 권오남 외(2023)의 연구에 활용한 GPT 모델은 GPT3.5로 당시에는 GPT에 텍스트만 입력할 수 있었다. 하지만 GPT4가 출시되면서 Advanced Data Analysis를 통해서 이미지 파일도 입력이 가능해졌다. 이에 본 연구에서는 이미지 입력 여부에 따른 ChatGPT의 답변 차이를 분석하였다. 예를 들어 [그림 III-5]와 같은 교과서 문제는 텍스트만 읽어서는 울타리를 만들 때, 벽이 1면만 있는지, 2면에 있는지 알 수 없다.

오른쪽 그림과 같이 벽면을 활용하여 길이가 20 m인 철망으로 울타리를 만들었다. 울타리 안쪽의 땅은 직사각형 모양이고 그 넓이가 최대일 때, 이 땅의 가로와 세로의 길이를 구하시오. (단, 울타리의 두께는 무시하고 가로의 길이는 세로의 길이보다 길다.)



[그림 III-5] 교과서 그림(권오남, 2018, p.76)

ChatGPT가 그림을 이해할 수 있다면 정답률이 올라갈 것으로 예상할 수 있다. 이에 그림을 입력받으면 그림을 활용하여 문제를 풀도록 구조화된 프롬프트를 수정하였다. GPT4의 울프람 플러그인 상태에서는 이미지를 ChatGPT에 입력할 수 없었다. 이미지 입력은 GPT4와 Advanced Data Analysis 상태에서 가능하였지만, 이때는 울프람 플러그인을 활용할 수 없었다. 계산을 ChatGPT가 할 경우 오류가 많기 때문에 Advanced Data Analysis의 파이썬 프로그래밍을 이용하여 계산하도록 하였다. 이미지를 입력할 때는 구조화된 프롬프트의 제일 첫 문장을 “###당신은 고등학생을 가르치는 수학 선생님이다. <규칙>을 준수하고 <예제>를 활용하여 <문제>를 다음과 같은 <과정>으로 해결하시오. 이미지를 입력받았다면 이미지도 문제풀이에 함께 활용하세요. ###”으로 수정하여 그림을 활용하여 문제를 풀 수 있게 안내하였다. 그 결과 [그림 III-6]의 왼쪽과 같이 울타리는 3개의 면에만 설치되어 있음을 ChatGPT가 확인하고 이를 이용하여 문제를 해결하였다. 그림이 있는 다른 문제에 대해서도 그림 속의 직각삼각형, 직각사각형 등을 인지하고 문제를 풀이하고 있음을 [그림 III-6]의 오른쪽처럼 확인할 수 있었다. 이는 다음절에서 다루게 되는 ChatGPT의 수학적 성능의 차이로 나타났다.

 <p>먼저, 주어진 이미지를 바탕으로 문제를 이해하고 분석한 후 단계별 계획을 세워보겠습니다.</p> <p>1. 단계별 계획</p> <ul style="list-style-type: none"> 1. 울타리의 구조를 이해하고, 그림에서 주어진 정보를 기반으로 문제를 단순화한다. 2. 직사각형의 넓이가 최대가 되는 조건을 이해하고, 이를 바탕으로 문제를 식으로 표현한다. 3. 주어진 정보와 조건을 바탕으로 방정식을 세운다. 4. 방정식을 통해 문제의 답을 도출한다. <p>이제, 위 계획을 바탕으로 문제를 해결해보겠습니다.</p> <p>2. 문제 단순화</p> <p>울타리는 벽면을 활용하여 만들었으므로, 울타리의 하나의 변은 벽에 붙어 있다. 이를 바탕으로 울타리의 구조를 단순화하면, 울타리의 가로 길이를 x m라고 가정하면, 세로의 길이는 $20 - 2x$ m가 될 것입니다. 이는 울타리의 길이가 총 20m이고, 양쪽에 x m씩 사용되므로 나머지 길이가 세로의 길이가 됨을 의미합니다.</p> <p>이제 이 직사각형의 넓이를 x에 대한 함수로 표현해보겠습니다.</p>	<p>먼저 이미지를 확인해야 합니다. 주어진 이미지를 불러와 봅시다.</p> <p>Finished working Show work ▼</p>  <p>이 이미지에 따르면, 땅은 직각삼각형 모양이며, 그 땅에 지을 건물은 직사각형 모양입니다. 건물의 두 변은 각각 두 도로에 접하게 되어 있습니다. 우리의 목표는 건물의 밑넓이의 최댓값을 구하는 것입니다.</p> <p>이 문제를 해결하기 위해 다음과 같은 단계별 계획을 세울 수 있습니다:</p> <p>단계별 계획</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 건물의 밑면을 직사각형 $ABCD$라고 이름 붙이고, 건물의 두 변이 접하는 도로의 길이를 x와 y로 놓는다. 2. 직각삼각형의 두 변의 길이와 직사각형의 두 변의 길이를 연관시켜 관계식을 세운다. 3. 건물의 밑넓이를 $f(x)$로 나타내고, 이차함수 형태로 표현한다. 4. 이차함수의 최댓값을 구하기 위해 꼭짓점 형태로 변형한다. 5. 꼭짓점의 x 좌표와 주어진 x 범위를 통해 건물의 밑넓이의 최댓값을 구한다.
<p>그림이 있는 교과서(권오남, 2018, p.67) 문제에 대한 ChatGPT+Advanced Data Analysis 답변</p>	<p>그림이 있는 교과서(배종숙, 2018, p.76)에 문제에 대한 ChatGPT+Advanced Data Analysis 답변</p>

[그림 III-6] 그림이 주어진 문제에 대한 ChatGPT+Advanced Data Analysis 답변

2. 개발된 구조화된 프롬프트의 효과성

9종의 고등학교 수학 교과서의 이차방정식과 이차함수 단원에서 ‘예제’ 아래에 있는 ‘문제’ 53개를 제로샷 프롬프트 형태로 GPT3.5와 GPT4에 입력하고, ChatGPT의 답변이 교과서 정답과 일치하는지 확인하였다. 또한, 53개의 문제를 구조화된 프롬프트의 형식으로 GPT4+Advanced Data Analysis(혹은 올프람 플러그인)에 입력하고 ChatGPT의 답변이 교과서 정답과 일치하는지 확인하였으며 그 결과는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 프롬프트와 모델별 정답률

소단원	제로샷 프롬프트		구조화된 프롬프트 GPT4 +Advanced Data Analysis (혹은 올프람 플러그인)
	GPT3.5	GPT4	
이차함수의 그래프와 직선의 위치관계	56%	52%	96%
최댓값과 최솟값	21%	36%	86%
전체	38%	43%	91%

제로샷 프롬프트에서 GPT3.5 모델의 정답률은 38%이며, GPT4 모델의 정답률은 43%였다. GPT4는 GPT3.5 보다는 모델의 성능이 개선되었지만, 한국의 수학교과서와 수학 문제를 학습하지 않았기 때문에 성능의 큰 차이는 없었다. 구조화된 프롬프트를 올프람 플러그인(혹은 Advanced Data Analysis)된 GPT4모델에 입력하여 얻은 답변의 정답률은 91%로 제로샷 프롬프트를 GPT3.5모델과 GPT4모델에 입력한 결과에 비해 정답률이 크게 상승한 것으로 나타났다. 이를 통해 수학 문제 풀이에서 ChatGPT를 사용하려면 최신 GPT모델을 활용하는 것도 중요하지만, 구조화된 프롬프트가 더 중요한 것을 확인할 수 있었다. 권오남 외(2023)에 의하면 국가수준 학업 성취도 평가 문제의 오류 유형중 식 오류는 46%의 비율을 차지하였다. 이 오류는 ChatGPT가 식을 세우고, 풀고, 전개하고, 해석할 때 발생하는 오류였다. 이러한 오류의 해결방법은 폴리아의 문제 해결 단계 중 ‘계획 수립’의 ‘관련된 문제를 알고 있는가?’와 같은 유사한 문제를 제시하는 것이었다. ChatGPT에게 예제풀이를 제시하면 ChatGPT는 예제풀이를 바탕으로 주어진 문제의 풀이전략을 수립하고 문제를 풀었다. 그 결과 ChatGPT의 수학 문제 풀이 전략에서 오류가 감소한 것을 확인할 수 있었다.

한편 권오남 외(2023)에서 제시한 ChatGPT의 오류 유형중 계산 오류는 24.64%였다. 구조화된 프롬프트에서 ‘수학 문제에 대한 계산은 올프람 플러그인 혹은 Advanced Data Analysis에서 계산을 하도록 한다’고 명시하면 [그림III-7]과 같이 단순 계산 실수도 줄 수 있음을 확인하였다. [그림III-7]의 왼쪽은 GPT4가 판별식을 계산하는 과정에서 (-9)를 곱하지 않고 9를 곱하는 오류가 있었지만, [그림III-7]의 오른쪽처럼 올프람이 플러그인된 GPT4를 활용하면 그 오류가 해결됨을 확인할 수 있었다.

<p>(1) $y = -x^2 + 5x - 3, y = -x + 6$</p> <p>1. 직선의 방정식을 이차함수에 대입한다. $-x^2 + 5x - 3 = -x + 6$ $-x^2 + 6x - 9 = 0$</p> <p>2. 이 이차방정식의 판별식 D는 $D = 6^2 - 4 \times (-1) \times 9 = 72 > 0$</p> <p>따라서 이차함수 $y = -x^2 + 5x - 3$의 그래프와 직선 $y = -x + 6$은 서로 다른 두 점에서 만난다.</p>	<p>(2) $y = -x^2 + 5x - 3, y = -x + 6$</p> <p>1. 직선의 방정식을 이차함수에 대입한다. $-x^2 + 5x - 3 = -x + 6$</p> <p>2. 이를 정리하면 다음과 같은 이차방정식을 얻는다. $-x^2 + 6x - 9 = 0$</p> <p>3. 이 이차방정식의 판별식 D는: $D = 6^2 - 4(-1)(-9)$</p>
<p>판별식 계산 과정의 오류가 있는 GPT4의 답변</p>	<p>판별식 계산 과정에서 오류가 없는 GPT4+올프람의 답변</p>

[그림 III-7] 올프람 플러그인(혹은 Advanced Data Analysis)를 이용하여 계산 결과 비교

구조화된 프롬프트를 GPT4와 Advanced Data Analysis(혹은 올프람 플러그인)에 입력하였을 때, 정답률이 높은 이유 중 하나는 이미지를 입력하였기 때문이었다. 폴리아는 문제 이해 단계에서 그림을 그려보는 것도 권하고 있으며, 실제 그림을 고려하여 문제를 해결하면 <표 III-2>와 같이 정답률이 증가함을 확인할 수 있다.

<표 III-2> 그림이 있는 문제의 정답률

	제로샷 프롬프트		구조화된 프롬프트 GPT4 +Advanced Data Analysis (혹은 올프람 플러그인)
	GPT3.5	GPT4	
그림 있는 문제	0%	25%	62.5%

그림을 입력하지 않을 때는 GPT3.5 답변의 정답률은 0%, GPT4 답변의 정답률은 25%였지만 그림을 입력하고 구조화된 프롬프트를 활용할 경우 정답률이 62.5%로 향상된 것을 관찰할 수 있었다.

한편 이차방정식과 이차함수 단원은 ‘이차함수의 그래프와 직선의 위치관계’, ‘이차함수의 최대 최소’와 같이 대부분 교과서가 2개의 소단원으로 구성하였다. 이 소단원에 해당하는 문제에서 ChatGPT 답변의 정답률 차이는 <표 III-1>과 같이 GPT3.5는 35퍼센트 포인트, GPT4는 26퍼센트 포인트였다. 이 결과를 통해 단원의 특성에 따라 프롬프트의 미세조정(Fine Tuning)이 필요한 것을 확인할 수 있었다. 하지만, 구조화된 프롬프트를 GPT4와 Advanced Data Analysis(혹은 올프람 플러그인)에 입력할 경우 소단원의 정답률의 차이는 10퍼센트 포인트로 감소한 것을 확인할 수 있었다. 이를 통해 구조화된 프롬프트, 특히 예제풀이를 참고하는 것이 단원의 차이를 줄이는 미세조정의 하나의 방법이 될 수 있다는 것을 확인하였다.

이번 절에서는 수학 문제 해결에서 효과적인 ChatGPT의 구조화된 프롬프트로 ‘역할-규칙-예제풀이-문제-과정’을 제안하였다. 이 구조화된 프롬프트의 형식으로 이차방정식과 이차함수 단원의 교과서 문제를 입력한 결과 ChatGPT의 답변의 정답률이 90% 이상인 것을 확인할 수 있었으며, 이를 통해 수학 문제 해결에서 구조화된 프롬프트의 효과성을 검증할 수 있었다.

IV. 결론 및 제언

인공 지능(AI)은 현대 기술의 핵심 분야로 발전해 왔으며, 그 중요성은 계속해서 증가하고 있다. 특히 대화형 언어모델은 AI의 중요한 부분으로 자리 잡았다. OpenAI에서 개발한 ChatGPT는 이러한 대화형 언어모델의 대표적인 예로, 자연어처리를 사용하여 텍스트 기반의 사용자 요청을 수행한다. ChatGPT는 2022년 11월에 출시되었으며, 그 이후로 교육, 연구 및 실무 등 다양한 응용 분야에서 활용 가능성이 논의되었다.

본 연구에서는 Shieh(2023)와 OpenAI(2023b)의 프롬프트 엔지니어링을 토대로 수학교육에서 활용할 수 있는 ChatGPT의 구조화된 프롬프트에 대해서 제안하였다. 구조화된 프롬프트는 ‘역할-규칙-예제풀이-문제-과정’으로 구성하였으며, 폴리아의 문제 해결의 4단계와 관련된 발문을 활용하였다. ‘역할’은 수학전문가, 수학교사 등으로 설정하였으며, ‘규칙’은 모든 계산은 ChatGPT가 하지 않고, 올프람 플러그인(혹은 Advanced Data Analysis)을 이용하도록 하였다. GPT3.5, GPT4 모두 사칙연산에서 계산실수와 부등호를 처리할 때 방향과 부호의 실수가 잦았다. 하지만, 계산을 올프람이 담당하게 하면, 이와 같은 실수가 해결될 수 있었다. 또한, 답이 있는 문제이지만, 풀다가 포기하는 때도 있어서 끝까지 풀 수 있게 규칙을 추가하고, ‘예제풀이’를 제공하여 문제풀이의 가이드 라인을 제공하였다. 이는 이차방정식과 이차함수의 내용으로 문제를 풀이하게 하는 효과가 있었다. ‘과정’에서는 ChatGPT가 문제 풀이 전략에서 실수하지 않도록 문제에서 구할 것을 먼저 식으로 표현하게 하고, 풀이전략을 수립하여 단계적으로 문제를 풀도록 하였다.

그림이 있는 문제의 경우에는 GPT4와 Advanced Data Analysis를 활용하여 그림을 입력받고 문제 풀이에 그림을 활용하도록 하였다. 따라서 본 연구에서 제안하는 수학 문제 해결에서 효과적인 구조화된 프롬프트는 2가지이다. 그림이 없는 문제는 GPT4와 올프람을 활용할 수 있도록 개발되었으며, 그림이 있는 문제는 GPT4와 Advanced Data Analysis를 활용하도록 하였다. 아쉽게도 GPT4와 올프람 플러그인에서는 그림을 입력할 수 없었으며, GPT4와 Advanced Data Analysis에는 플러그인 기능을 활용할 수는 없었다.

이차방정식과 이차함수 단원의 문제를 ChatGPT에 입력하고 정답을 확인하였다. 그 결과 제로샷 프롬프트의 형식으로 입력된 문제에 대한 GPT3.5와 GPT4 답변의 정답률은 각각 38%와 43%로, 50%를 넘지 못하고 있었다. 하지만 구조화된 프롬프트 형식으로 GPT4와 올프람 플러그인 혹은 Advanced Data Analysis에 입력된 문제에 대한 정답률은 91%였다. 이를 통해 본 연구에서 개발한 구조화된 프롬프트는 수학 문제 해결에서 효과적인 것을 확인할 수 있었다. 대규모 인공지능 언어모델은 ChatGPT는 학습한 데이터에 의해서 그 성능이 좌우된다. OpenAI(2023a)는 미국 SAT 수학 문제에 대한 ChatGPT 답변은 800점 만점에 700점이며 이는 상위 11%에 해당하는 결과라고 하였다. 하지만 한국 수학능력시험 문제에 대한 ChatGPT 답변의 정답률은 30% 내외이다(권오남 외, 2023). 이러한 결과는 시험의 형식과 학습데이터의 차이 때문으로 분석할 수 있다. 미국 SAT는 문제는 행 방식으로 출제된다. 문제를 모두 암기하여 풀이하는 학생처럼 ChatGPT는 사전학습한 데이터에서 출제된 문제는 잘 해결할 수 있다. 이에 비해 한국의 수학능력시험에 대한 문제는 학습한 적이 없기에 낮은 정답률을 보인다. 하지만 수학은 기본 개념을 바탕으로 응용이 필요한 과목이다. 개념을 응용하여 문제를 해결할 때는 제로샷 프롬프트보다는 구조화된 프롬프트를 활용하는 것이 필요할 것이다.

이에 연구 결과에 대한 시사점 및 제언은 제시하면 다음과 같다.

본 연구에서 제안한 구조화된 프롬프트를 활용하면 개별화 교육, 맞춤형 교육을 위한 지능형 시스템 구축을 앞당길 수 있다. 권오남 외(2023)에서 확인된 정답률은 30% 내외였기에 ChatGPT를 교수·학습 상황에서 활용하는 것은 조심스러웠다. 하지만 본 연구의 구조화된 프롬프트를 ChatGPT에 입력하여 얻은 정답률은 90% 이상이었다. 이에 이차방정식과 이차함수 단원의 교수·학습 상황에서 구조화된 프롬프트가 입력된 ChatGPT는 보조교사로 활용할 가능성이 증가하였다. 구체적으로는 '제3차 수학교육 종합계획'에서 논의되고 있는 인공지능 기술을 활용한 개별화 맞춤형 수업 지원시스템 구축에 ChatGPT가 활용될 수 있을 것이다. 구조화된 프롬프트는 목적에 맞게 수정할 수 있기에 개별화 교육에 활용 가능성은 더욱 증가할 것이다. 예를 들어 단원의 개념을 처음 배우는 학생들에게는 복잡한 설명보다는 짧고 간단한 답변을 얻을 수 있는 프롬프트가 유용할 수도 있을 것이며, 학습을 마무리할 학생들에게는 상세한 답변을 얻기 위한 프롬프트도 필요할 것이다(Liu, Chilton, 2021). 이미 소프트웨어 공학 교육에서는 ChatGPT와 같은 생성 AI의 잠재력을 탐구하고 있으며, 이를 통해 학생들에게 개인화된 피드백을 제공하는 가능성을 강조하고 있다(Daum, Brings, 2023).

ChatGPT는 학습한 것만 실행하는 약인공지능 단계에서 언어와 관련된 대부분 문제를 해결할 수 있는 강인공지능의 단계로 성장하고 있다. 본 연구에서는 이차방정식과 이차함수 단원의 수학 문제에 대해서만 확인하였지만, 추후 연구를 통해 다른 수학 단원 혹은 다른 수학 교과목(미적분, 확률과 통계, 기하)의 문제에도 적용 가능한 프롬프트를 개발하고 그 효과성을 확인할 수 있을 것이다. 수학 문제 해결에서 ChatGPT를 활용할 뿐만 아니라 수학 교과목의 교수·학습 상황에서 ChatGPT를 활용할 수 있는 지능형 시스템 구축도 가능할 것이다.

한편 ChatGPT의 답변에서 오류가 학생이 보이는 오류와 유사한지에 대한 후속연구가 필요(권오남 외, 2023)할 것이다. 만약 ChatGPT의 답변 오류가 학생이 보이는 오류와 유사한 것이 확인된다면, ChatGPT를 교사가 학생의 풀이와 반응을 예측할 때도 활용할 수 있다. 문혜영과 김응환(2011)은 고등학교 1학년 학생들의 문제 해결 과정에서 발생하는 오류를 분석하고 이를 예방하는 방법에 대해 논의하면서 교사가 오류를 연구하고 예방하는 방안을 찾는 것을 강조하였다. 박장희 외(2012) 또한 교사는 학생들이 문제 해결 과정에서 경험할 오류를 미리 파악하고, 적절한 교수·학습 방법을 통해 오류를 예방하며 효과적인 학습을 이끌어내는 것이 중요하다고 하였다.

이에 ChatGPT의 답변을 통해 학생들이 경험할 오류를 예측하고 수업 준비에 활용할 수 있다. 수학 문제를 제로 샷 프롬프트 형태로 ChatGPT에 입력하여 의도적으로 낮은 정답률을 보이는 답변을 수집하고, 오류를 분석하여 오류 예방을 위한 방안을 준비할 수 있다. 한편 구조화된 프롬프트를 활용하여 90% 이상의 정답률을 보이는 답변을 수집하고, 이때 발생하는 오류도 함께 분석하여 학생의 성취 수준별 예상되는 오류를 분석하고 예방책을 찾는 방향으로 활용하는 것도 가능하다.

또한, ChatGPT를 서·논술형 평가 채점에도 활용할 수 있을 것이다. 오선경(2023)은 ChatGPT를 국어과 평가에 활용 가능함을 역설하였으며, 평가를 위한 데이터 구축이 필요함을 주장하였다. 수학교과에서도 구조화된 프롬프트를 이용하면 ChatGPT를 서·논술형 평가 채점에도 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 강동훈 (2023). 챗지피티(ChatGPT)의 등장과 국어교육의 대응. *국어문학*, **82**, 469-496.
- Kang, D. (2023). The advent of ChatGPT and the response of Korean language education. *Korean Language and Literature*, **82**, 469-496.
- 권오남 · 오세준 · 윤정은 · 이경원 · 신병철 · 정원 (2023). ChatGPT의 수학적 성능 분석: 국가수준 학업성취도 평가 및 대학수학능력시험 수학 문제 풀이를 중심으로. *수학교육 논문집*, **37(2)**, 233-256.
- Kwon O., Oh S., Yoon J., Lee K., Shin B., & Jung W. (2023). Analyzing mathematical performances of ChatGPT: Focusing on the solution of national assessment of educational achievement and the college scholastic ability test. *Communication of Mathematical Education*, **37(2)**, 233-256.
- 권오남 · 신준국 · 전인태 · 김미주 · 김철 · 김태홍 · ... · 홍성문 (2018). *고등학교 수학*. 교학사.
- Kwon, O., Shin, J., Jun, I., Kim, M., Kim, C., Kim, T., ..., & Hwang, S. (2019). *High school mathematics*. Kyohaksa.
- 김원경 · 조민식 · 방금성 · 윤종국 · 신재홍 · 임석훈 · ... · 정재훈 (2018). *고등학교 수학*. (주)비상교육.
- Kim, W., Cho, M., Bang, G., Yoon, J., Shin, J., Im, S., ..., & Jung, J. (2018). *High school mathematics*. Visang.
- 고성은 · 이진호 · 이승우 · 차순규 · 김윤희 · 오택근 · 조성철 (2018). *고등학교 수학*. (주)좋은책신사고.
- Ko, S., Lee, J., Lee, S., Cha, S., Kim, Y., Oh, T., & Cho, S. (2018). *High school mathematics*. Seoul: Sinsago.
- 교육부 (2015). *제2차 수학교육 종합계획*. 교육부 보도자료(2015-03-16). Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&lev=0&statusYN=C&s=moe&m=020402&opType=N&boardSeq=58701>
- Ministry of Education (2015). *The 2nd comprehensive plan for mathematical education*. Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&lev=0&statusYN=C&s=moe&m=020402&opType=N&boardSeq=58701>
- 교육부 (2020a). *제3차 수학교육 종합계획*. 교육부 보도자료(2020-05-26). Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&lev=0&statusYN=W&s=moe&m=020402&opType=N&boardSeq=80718>
- Ministry of Education. (2020a). *The 3rd comprehensive plans for mathematics education*. Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&lev=0&statusYN=W&s=moe&m=020402&opType=N&boardSeq=80718>
- 교육부 (2020b). *수학과 교육과정*. 교육부 고시 제2020-236호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education. (2020b). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2020-236[Annex 8]. Ministry of Education.

- 교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education. (2022). *Mathematics curriculum*. Proclamation of the Ministry of Education #2022-33[Annex 8]. Ministry of Education.
- 김남희 (2002). 수업아이디어: '문제 해결'관점에서의 GSP 활용. 학교수학, **4(1)**, 111-125.
- Kim N. (2002). A study on the GSP in the viewpoint of problem solving. *School Mathematics*, **4(1)**, 111-125.
- 김남희 (2006). 문제 해결력 신장을 위한 Cabri3D의 교육적 활용. 수학교육학연구, **16(4)**, 345-366.
- Kim N. (2006). Using the Cabri3D program for enhancing problem solving ability. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **16(4)**, 345-366.
- 김성경 (2018). 2016년 국가수준 학업성취도 평가 결과에서 나타난 고등학생의 수학 학업 특성 분석. 교육과정 평가연구, **21(4)**, 151-176.
- Kim, S. K. (2018). Analysis of high school students' learning characteristic appeared in the 2016 National Assessment of Educational Achievement. *The Journal of Curriculum Evaluation*, **21(4)**, 151-176.
- 김홍겸 · 박창수 · 정시훈 · 고호경 (2018). 미래교육에서의 인간 교사와 인공지능 교사의 상호보완적 관계에 대한 소고. 교육문화연구, **24(6)**, 189-207.
- Kim H., Park C., Jeong S., & Ko H. K. (2018). A view on complementary relation of human teacher and AI teacher in future education. *Journal of Education & Culture*, **24(6)**, 189-207.
- 류희찬 · 선우하식 · 신보미 · 조정묵 · 이병만 · 김용식 · ... · 정성윤 (2018). 고등학교 수학. 천재교과서.
- Ryu, H., Sunwoo, H., Shin, B., Cho, J., Lee, B., Kim, Y., ..., & Jung, S. (2018). *High school mathematics*. Chunjae.
- 문혜영 · 김응환 (2011). 고등학교 1학년 함수단원 문제 해결에서의 오류에 대한 분석. 한국학교수학회논문집, **14(3)**, 281-297.
- Mun, H. Y., & Kim, Y. (2011). An analysis of errors in problem solving of the function unit in the first grade highschool. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **14(3)**, 281-297.
- 박교식 · 이종희 · 김진환 · 남진영 · 김남희 · 임재훈 · ... · 양정은 (2018). 고등학교 수학. 동아출판(주).
- Park, K., Lee, J., Kim, J., Nam, J., Kim, N., Im, J., ..., & Yang, J. (2018). *High school mathematics*. Donga.
- 박장희 · 유시규 · 이종권 (2012). 실생활 문장제의 해결과정에 나타나는 오류유형의 분석. 한국학교수학회논문집, **15(4)**, 699-718.
- 박장희, 유시규, & 이종권 (2012). The analysis of mathematics error type that appears from the process of solving problem related to real life. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **15(4)**, 699-718.
- 박정미 · 이종권 (2013). 동일한 수학적 상황에서 문제 해결 능력 분석 연구-방정식 · 부등식과 함수를 중심으로. 한국학교수학회논문집, **16(4)**, 883-898.
- Park J. M., & Lee J. K. (2013). An analysis of students' problem solving ability on the equivalent mathematics situations -Focused on equations, inequalities, and functions-. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **16(4)**, 883-898.
- 배종숙 · 여태경 · 조보관 · 김민경 · 천화정 · 조성현, 변도열 (2018). 고등학교 수학. (주)금성출판사.
- Bae, J., Yeo, T., Cho, B., Kim, M., Chun, H., Cho, S., & Byun, D. (2018). *High school mathematics*. Geumsung.
- 변정호 · 권용주 (2023). 생성적 인공지능의 교육적 활용 방안 탐색: 생물학을 위한 ChatGPT 활용을 중심으로. Brain, Digital, & Learning, **13(1)**, 1-17.
- Byun, J., & Kwon, Y. (2023). An investigation of generative AI in educational application: Focusing on the usage of ChatGPT for learning biology. *Brain, Digital, & Learning*, **13(1)**, 1-17.
- 부덕훈 (2021). 수학 사사과정에서 공학도구를 이용한 창의력 증진. 수학교육논문집, **35(1)**, 119-136.
- Boo D. (2021). Improvement of the mathematical creativity using engineering tools in mathematics mentorship program. *Communication of Mathematical Education*, **35(1)**, 119-136.

- 손태권 (2023). ChatGPT의 수학교육 활용 가능성 탐색: 분수 문제에 관한 학생의 산출물과 예비교사의 담화 사례를 중심으로. 초등수학교육, **26(2)**, 99-113.
- Son, T. (2023). Exploring the possibility of using ChatGPT in mathematics education: Focusing on student product and pre-service teachers' discourse related to fraction problems. *Education of Primary School Mathematics*, **26(2)**, 99-113.
- 신동광 · 정혜경 · 이용상 (2023). 내용중심 영어 교수 학습의 도구로서 ChatGPT의 활용 가능성 탐색. 영어교과교육, **22(1)**, 171-192.
- Shin, D. K., Jung, H. K., & Lee, Y. S. (2023). Exploring the potential of using ChatGPT as a content-based English learning and teaching tool. *Journal of the Korea English Education Society*, **22(1)**, 171-192.
- 신동조 (2020). 초·중등교육에서 인공지능: 체계적 문헌고찰. 수학교육학연구, **30(3)**, 531-552.
- Shin, D. (2020). Artificial intelligence in primary and secondary education: A systematic review. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **30(3)**, 531-552.
- 오규설 (2023). 생성형 인공지능이 국어교육에 미치는 영향과 대응 방안 - ChatGPT는 국어교육의 도구인가, 위협인가?. 국어교육연구, **82**, 143-189.
- Oh, K. (2023). The impact of generative artificial intelligence on Korean education and response strategies - ChatGPT: A tool or threat for Korean education?. *The Journal of Korean Language and Literature Education*, **82**, 143-189.
- 오선경 (2023). 대학 교양 글쓰기에서의 챗GPT 활용 사례와 학습자 인식 연구. 교양교육연구, **17(3)**, 11-23.
- Oh, S. (2023). A study on the case of using ChatGPT & learners' perceptions in college liberal arts writing. *Korean Journal of General Education*, **17(3)**, 11-23.
- 왕감경 (2023). AI 기반 챗봇 한국어 텍스트의 자연어 분석 및 한국어 교육 활용 모색 - 챗GPT(ChatGPT)와 뉴빙(New-Bing)을 중심으로 -. 문화와융합, **45(5)**, 01-17.
- Wang, G. (2023). Natural language analysis of Korean texts of AI-based chatbots and exploration of Korean education utilization - Focusing on ChatGPT and New-Bing. *Culture & Convergence*, **45(5)**, 01-17.
- 유인근 · 박형용 (2023). 초등 국어과 글쓰기 교육을 위한 AI 문장 생성 웹 서비스 개발. 교과교육학연구, **27(2)**, 210-221.
- Yu, I., & Park, H. (2023). Developing an AI-based sentence-generating web service for writing activities in elementary language education. *Journal of Research in Curriculum & Instruction*, **27(2)**, 210-221.
- 유재진 (2023). 인공지능을 활용한 지리교육 연구 - ChatGPT 기반 질의·응답을 중심으로. 한국사지리지리학회지, **33(1)**, 162-173.
- Yu, J. (2023). Application of artificial intelligence for geography education - Focusing on question answering on ChatGPT -. *Jornal of Photo Geography*, **33(1)**, 162-173.
- 이종희 · 이진향 · 김부미 (2003). 중학생들의 유추에 의한 수학적 문제 해결 과정: 사상의 명료화를 중심으로. 수학교육논문집, **16(0)**, 245-267.
- Lee, J., Lee, J. H., & Kim, B. (2003). Middle school students' mathematical problem solving process through analogy: Focusing on clarity of thought. *Communication of Mathematical Education*, **16(0)**, 245-267.
- 이준열 · 최부림 · 김동재 · 이정례 · 전철 · 장희숙 · ... · 김미영 (2018). 고등학교 수학. (주)천재교육.
- Lee, J., Choi, B., Kim, D., Lee, J., Jeon, C., Chang, H., ..., & Kim, M. (2018). *High school mathematics*. Chunjae.
- 이지혜 · 허난 (2018). 수학교육의 변화와 인공지능과의 연관성 탐색. 수학교육논문집, **32(1)**, 23-36.
- Huh N., & Ee J. H. (2018). A study on the relationship between artificial intelligence and change in mathematics education. *Communication of Mathematical Education*, **32(1)**, 23-36.
- 전수경 · 조경수 (2015). 고등학교 수학교과서의 설명텍스트와 교사 설명담화에 대한 체계기능언어학적 비교 분석: '이차함수와 이차방정식의 관계'를 중심으로. 수학교육학연구, **25(4)**, 525-547.

- Jeon, S. K., & Cho, C. (2015). A study on the written texts of a high school mathematics textbook and teacher's classroom discourse - A focus on 'The relationship between quadratic functions and quadratic equations' -. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **25**(4), 525-547.
- 차민영 · 임희주 (2023). 챗GPT의 영어 교육적 활용가능성에 대한 대학 교수자 인식 연구. *문화와융합*, **45**(5), 109-118.
- Cha, M., & Im, H. (2023). A Study on university professors' perception on educational applicability of ChatGPT in English classes. *Culture & Convergence*, **45**(5), 109-118. 10.33645/cnc.2023.05.45.05.109
- 한보경 (2023, June, 2). 미 기업, 5월 AI로 4천 명 해고...“해고 이유에 AI 첫 등장”. *KBS*. <https://news.kbs.co.kr/news/pc/view/view.do?ncd=7690005>. 2023. 9. 15. 검색
- Han, B. K. (2023, June, 2). US companies laid off 4,000 people due to AI in May... “AI appears for the first time in reasons for dismissal. *KBS*. Retrieved from <https://news.kbs.co.kr/news/pc/view/view.do?ncd=7690005>.
- 한세호 · 장경운 (2009). 고등학교 수학 문제 해결에서 CAS의 도구발생. *학교수학*, **11**(3), 527-546.
- Han, S. H. & Chang, K. Y. (2009). Instrumental genesis of Computer Algebra System(CAS) in mathematical problem solving among high school students. *School Mathematics*, **11**(3), 527-546.
- 홍성복 · 이종권 · 신태교 · 이채형 · 이병하 · 신용우 · ... · 강인우 (2018). *고등학교 수학*. ㈜지학사.
- Hong, S., Lee, J., Shin, T., Lee, C., Lee, B., Shin, Y., ..., & Kang, I. (2018). *High school mathematics*. Jihaksa.
- 황선욱 · 강병개 · 윤갑진 · 이광연 · 김수영 · 이문호 · ... · 박상의 (2018). *고등학교 수학*. 미래엔.
- Hwang, S., Kang, B., Yoon, G., Lee, K., Kim, S., Lee, M., ..., & Park, S. (2018). *High school mathematics*. Miraen.
- Beghetto, R. A. (2023). A new horizon for possibility thinking: A conceptual case study of Human × AI collaboration. *Possibility Studies & Society*, 1(3), 324 - 341.
- Bull, C., & Kharrufa, A. (2023). Generative AI assistants in software development education. *arXiv preprint arXiv:2303.13936*.
- Daun, M., & Brings, J. (2023, June). How ChatGPT will change software engineering education. In *Proceedings of the 2023 Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education*, **1**, 110-116,
- Drijvers, P. (2003). Algebra on screen, on paper, and in the mind. In J. Fey, A. Cuoco, C. Kieran, L. McMullin & R.M. Zbiek (Eds.), *Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education* (pp. 241 - 267). NCTM.
- Giray, L. (2023). Prompt engineering with ChatGPT: A guide for academic writers. In *Annals of Biomedical Engineering* (pp.1-5).
- Heston, T. F., & Khun, C. (2023). Prompt engineering in medical education. *International Medical Education*, **2**(3), 198-205.
- Lester, K. (1980). Research on problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Liu, V., & Chilton, L. B. (2022, April). Design guidelines for prompt engineering text-to-image generative models. In *Proceedings of the 2022 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 1-23).
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.
- OpenAI (2023a). GPT4 technical report. *arXiv:2303.08774* [cs.CL]
- OpenAI (2023b). *Six strategies for getting better results*. <https://platform.openai.com/docs/guides/gpt-best-practices>

- Patel, N., Nagpal, P., Shah, T., Sharma, A., Malvi, S., & Lomas, D. (2023). Improving mathematics assessment readability: Do large language models help?. *Journal of Computer Assisted Learning*, **39**(3), 804-822.
- Polya, G. (1973). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Raposo, G., Ribeiro, R., Martins, B., & Coheur, L. (2022, April). Question rewriting? Assessing its importance for conversational question answering. In *European Conference on Information Retrieval* (pp. 199-206). Springer International Publishing.
- Sallam, M. (2023, March). ChatGPT utility in healthcare education, research, and practice: systematic review on the promising perspectives and valid concerns. *In Healthcare*, **11**(6), 887.
- Shieh, J. (2023). *Best practices for prompt engineering with OpenAI API*. OpenAI, February <https://help.openai.com/en/articles/6654000-best-practices-for-prompt-engineering-with-openai-api>.
- Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. *Historia e tecnologia no Ensino da Matemática*, **1**, 1-28
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, **9**, 281-307.
- Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., ... & Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **30**.
- Wei, J., Bosma, M., Zhao, V. Y., Guu, K., Yu, A. W., Lester, B., ... & Le, Q. V. (2021). Finetuned language models are zero-shot learners. *arXiv preprint arXiv:2109.01652*.
- Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Xia, F., Chi, E., ... & Zhou, D. (2022). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **35**, 24824-24837.
- Zamfirescu-Pereira, J. D., Wong, R. Y., Hartmann, B., & Yang, Q. (2023, April). Why Johnny can't prompt: how non-AI experts try (and fail) to design LLM prompts. In *Proceedings of the 2023 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 1-21). Association for Computing Machinery.

Effective ChatGPT Prompts in Mathematical Problem Solving : Focusing on Quadratic Equations and Quadratic Functions

Oh, Se Jun

Ewha Womans University High School

E-mail : sejunoh2016@gmail.com

This study investigates effective ChatGPT prompts for solving mathematical problems, focusing on the chapters of quadratic equations and quadratic functions. A structured prompt was designed, following a sequence of 'Role-Rule-Example Solution-Problem-Process'. In this study, an artificial intelligence model combining GPT-4, Wolfram plugin, and Advanced Data Analysis was utilized. Wolfram was used as the primary tool for calculations to reduce computational errors. When using the structured prompt, the accuracy rate for problems from nine high school mathematics textbooks on quadratic equations and quadratic functions was 91%, showing higher performance compared to zero-shot prompts. This confirmed the effectiveness of the structured prompts in solving mathematical problems. The structured prompts designed in this study can contribute to the development of intelligent information systems for personalized and customized education.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U99

* Key words : chatGPT, prompt, prompt engine, quadratic equations and quadratic functions