

<인공지능 수학> 교과서의 행렬과 벡터 내용 분석

이 영 미 (연세대학교, 대학원생)
한 채 린 (연세대학교, 겸임교수)
임 용 (연세대학교, 교수)[†]

2015 개정 수학과 교육과정에서는 <인공지능 수학> 과목이 신설되었으며, 행렬과 공간벡터 내용은 2015 개정 수학과 교육과정에서 <고급 수학>을 제외하고는 <인공지능 수학>에만 등장하는 일시적이면서도 특별한 상황에 놓여있다. 본 연구는 2015 개정 수학과 교육과정에 따라 5종으로 출판된 <인공지능 수학> 교과서의 자료의 표현, 자료의 분류, 자료의 처리 단원에서 인공지능을 이해하는데 필수적인 수학 개념이자 관련 학습 요소인 행렬과 벡터에 대한 정의와 관련 하위 개념들이 어떻게 구현되고 있는지를 파악하고, 유사한 개념이 다루어지는 타 교과목과의 연결성을 분석하였다. 그 결과, 행렬의 경우 기본 개념 제시에는 큰 차이가 없었으나 교과서별로 이미지 자료를 처리하는 데 있어 활용한 행렬의 하위 개념 유형이나 이용한 행렬의 연산에는 다소 차이가 있음이 확인되었다. 벡터의 정의와 하위 개념과 관련된 내용은 교과서별로 상이하였고, 벡터의 활용을 전개하는 데에 있어 벡터의 크기, 두 벡터 사이의 거리나 벡터의 내적에 대한 맥락의 수준 및 수학적 해석에는 차이가 있었다. 이를 통해 벡터와 관련된 개념을 수학 교과과의 연계성에 치중하여 설명한 교과서와 수학적 개념과 원리보다는 인공지능과 관련한 지식 학습에 초점을 맞춘 교과서가 식별되었다. 결과를 바탕으로 교육과정과 교과서 개발을 위한 시사점을 제시하였다.

I. 서론

지능정보사회의 핵심 기술인 인공지능의 급격한 발전에 따라 전 세계적으로 융합교육 및 코딩 교육의 중요성이 부각되고, 산업과 교육의 연결이 더욱 강화되었으며, 수학과 컴퓨터 관련 분야의 전문가 육성을 강조하는 등과 같이 교육 방향이 변화하고 있다(김화경, 2019). 특히 인공지능을 개발할 수 있는 인재 양성에 대한 요구는 점점 더 높아지고 있으며, 이에 따라 초·중등 교육에서도 인공지능에 대한 구체적인 교육의 실현이 요구되고 있는 실정이다(김수환, 김성훈, 김현철, 2019).

수학은 인공지능에 필요한 기본적인 개념의 습득을 도울 수 있고 수학적 역량의 상당 부분이 인공지능 교육과 연결된다는 점에서 근래에 쏟아진 인공지능 교육과 관련한 연구들은 수학교육의 역할을 강조한다. 고호경(2020)은 인공지능에 대한 원리를 이해하고 적절히 활용하기 위하여 고등학교 학생들이 경험해야 할 수학 내용으로 행렬, 벡터, 기하, 함수, 확률, 네트워크, 상관관계, 기술통계, 회귀분석, 베이즈 통계, 다변수 함수, 미분, 최적화, 알고리즘 등을 추출하였다. 김홍겸(2021)은 인공지능 교육이 나아갈 방향을 인공지능 리터러시 함양으로 설정하고 인공지능 리터러시 함양을 위해 수학 교과서에서 보충해야 할 내용 요소로 행렬, 공간벡터, 알고리즘, 의사결정과 최적화 그래프 이론을 제시하였다.

* 접수일(2023년 5월 19일), 심사(수정)일(2023년 6월 7일), 게재확정일(2023년 6월 20일)

* MSC2000분류 : 97U20

* 주제어 : 인공지능 수학, 벡터, 행렬, 교과서 분석

[†] 교신저자 : woonglim@yonsei.ac.kr

* 본 논문은 이영미의 석사 학위논문의 데이터를 활용하여 재구성하였음.

이러한 흐름에 맞추어 교육부는 2020년 9월 <인공지능 수학> 과목을 진로 선택 과목으로 개발 및 고시하였다. 해당 과목은 학생이 향후 자신의 진로와 적성, 학습 역량을 고려하여 선택함으로써 학생들의 수학 역량, 인공지능 관련 역량 증진에 기여할 것(한국과학창의재단, 2021)으로 기대되고 있지만 2015 수학과 교육과정과는 별도의 개발 절차를 거쳐 추후에 급하게 신설된 과목인 만큼(이상구 외, 2020), 새롭게 개발된 <인공지능 수학> 교과서들이 교육과정의 취지를 적절하게 반영하고 있는지, 그리고 <인공지능 수학> 과목 외 타 수학 과목과의 내용 구성 및 체제가 연계성을 지니는지, 상호 일관성을 보이는지 등을 분석할 필요성이 있다. 이에 따라 권오남 외(2021)는 <인공지능 수학>에 교육과정의 ‘관련 학습 요소’가 교과서에 반영된 방식을 형식, 범위와 방법, 공학적 도구 활용에 대하여 분석하고 5종의 교과서가 ‘관련 학습 요소’를 기술하는 형식, 수학 개념 및 수학 개념과 관련된 인공지능 맥락 사례, 이용된 공학적 도구의 종류와 컴퓨팅 사고에 있어 상당한 차이가 있음을 보고하였다. 구니영과 최인용(2022)은 <인공지능 수학> 교과서에서 단순 선형 회귀를 이용하여 지도학습 맥락에서 ‘예측과 최적화’의 수학적 원리와 활용되는 공학적 도구를 분석하였는데, 권오남 외(2021)가 보고한 바와 같이 5종의 교과서가 동일한 성취기준에 대한 내용의 범위 및 동일한 개념 및 알고리즘에 대한 정의에서 차이가 있었고, 성취기준의 의도가 명확히 구현되지 않은 부분이 있음을 밝혔다. 또한 이정화, 한채린, 임응(2023)은 <인공지능 수학> 교과서에서 빅데이터 통계 프로젝트 기반 과제를 설계하기 위해 고려해야 할 가이드라인을 제시하고 5종의 인공지능 수학 교과서에 실린 최적화 단원 과제들을 평가하였고, 그 결과 대부분의 교과서가 빅데이터를 정리되고 가공된 형태로 제시하여 학생들의 빅데이터 개념에 대한 오해를 불러일으킬 수 있음을 지적한 바 있다. 그러나 <인공지능 수학> 과목 정착의 중요성 및 시대적 변화를 고려할 때 <인공지능 수학> 교과서를 분석하고 교육과정에 피드백을 제공할 수 있는 연구가 충분히 이루어지고 있다고 보기는 여전히 어려운 실정이다.

한편, 벡터는 인공지능에서 언어와 관련된 여러 가지 처리를 하고 3차원의 세계를 인식하는 데 필수적이며, 행렬은 수학의 중요한 분야의 하나로 수학 분야와 공학 분야에서 데이터를 표현하고 해결하는 유용한 도구로써 인공지능에 대한 이해도를 높이는 데 필수적인 수학적 내용이다(고호경, 2020; 김홍겸, 2021). 특히 벡터와 행렬은 인공지능의 구현에 사용되는 선형대수의 근본이 되는 개념으로써 데이터 표현(예: 특성 벡터, 가중치 행렬, 변환 행렬), 회귀, 신경망(예: 역전파, 컨볼루션 커널), 자연어 처리(예: 임베딩), 주성분 분석, 군집화, 강화학습 등의 인공지능 기능에 유용하다(Zhang, 2020). 이로 인해 공간벡터와 행렬은 내용 경감 차원에서 2015 개정 수학과 교육과정에서 삭제되었지만, 2015 수학과 교육과정을 따르는 <인공지능 수학>에는 다시 포함된 상태이다. 이 두 개념은 기존까지는 전문교과인 <고급 수학 I>에만 편성되어 있어 특수목적고등학교 학생만 학습할 수 있었는데 신설과목인 <인공지능 수학> 교과서에서 다시 편성되었으므로(김화경 외, 2021) 행렬과 공간벡터에 대한 이해가 전무한 채로 <인공지능 수학>을 배우는 학생들에게 이 개념들이 어떻게 도입되고 있으며, 교육과정을 어떤 식으로 반영되었는지 확인할 필요가 있다. 특히 행렬과 공간벡터의 개념 및 연산과 관련한 서술 내용이 융합 교과로써 인공지능 분야나 기존 교육과정의 <고급 수학 I>이나 <기하> 교과와의 연계성을 가지고 제시되었는지, 과제의 수나 유형은 <수학>을 마친 학생들이 해결하기에 그 수준과 범위가 적절한지 분석할 필요가 있다. 이러한 필요성을 반영하여 본 연구에서는 행렬과 공간벡터에 관한 교육과정을 파악하고 이에 따라 5종의 <인공지능 수학> 교과서에 실린 ‘자료와 표현’ 영역 내 행렬과 공간벡터 내용을 분석한다. 본 연구의 연구 문제는 다음과 같다. <인공지능 수학> 교과서에서는 행렬과 공간벡터를 어떻게 정의하고 있으며, 그 내용과 범위는 어떠한가?

II. 연구의 배경

1. 문헌 검토

가. <인공지능 수학>의 개요

<인공지능 수학>은 인공지능 기술을 이해하는 데 필요한 수학의 내용을 다루되, 개념의 이해와 문제 해결을 강조하기보다는 인공지능을 수학적으로 어떻게 구현하는지를 이해하는 데에 중점을 두는 과목이다(이상구 외, 2020). 2015 개정 교육과정 체계 내에서 <인공지능 수학> 과목은 <수학> 또는 <실용 수학>을 이수한 후 선택할 수 있는 6개의 진로 선택 과목 중 하나가 되었다.

<인공지능 수학>의 내용은 실생활에서 자주 접하는 인공지능이 문제를 해결하는 과정에 기반하여 선정되었는데, 실제로 인공지능은 입력된 자료를 분류하고 예측하며 최적화의 절차를 거쳐 문제를 해결한다. 인공지능이 자료를 받아들여 내용을 판별하고 의사결정을 내리기 위해서는 우선 자료를 디지털 정보로 표현하며 컴퓨터가 판단하기 쉬운 형태로 변형해야 한다. 이 과정은 <인공지능 수학>에서 '인공지능과 수학' 영역과 '자료의 표현' 영역으로 설정되었다. 이후 인공지능은 자료와 정보를 바탕으로 패턴과 규칙을 추출하여 새롭게 대상을 분류하거나 대상의 행위를 예측하며 적합한 의사결정 모델을 찾기 위해 목적함수를 만들고 최적화 문제를 해결하게 된다. 이 과정은 <인공지능 수학>에서 '분류와 예측' 영역과 '최적화' 영역으로 설정되었다. 종합하면 <인공지능 수학> 교육과정의 관련된 내용 요소 및 학습 요소는 <표 II-1>과 같다. <인공지능 수학> 과목은 기존의 수학 교과목에서 배우는 '학습 요소'가 아닌, '관련 학습 요소'를 제시하는데, 이는 새로 도입된 과목으로 인한 학습 부담을 줄이는 한편, 수학적 개념이나 원리의 이해보다는 그것들이 어떻게 인공지능에 적용되는지를 중심으로 학습을 수행하기 위함이다(김창일, 전영주, 2021).

<표 II-1> <인공지능 수학>의 체계

인공지능 문제해결 과정	내용 요소	관련 학습 요소	인공지능과 관련된 2015 개정 교육과정의 핵심개념
인공지능 수학	<ul style="list-style-type: none"> 인공지능과 관련된 수학 	<ul style="list-style-type: none"> 진리표 순서도 	<ul style="list-style-type: none"> 고등학교 <수학> 명제 <수학 I> 수학적 귀납법
자료의 표현	<ul style="list-style-type: none"> 텍스트 자료의 표현 이미지 자료의 표현 	<ul style="list-style-type: none"> 벡터 행렬 	<ul style="list-style-type: none"> <기하> 평면벡터 <고급 수학 I> 행렬과 선형변환
분류와 예측	<ul style="list-style-type: none"> 자료의 분류 경향성과 예측 	<ul style="list-style-type: none"> 유사도 추세선 조건부 확률 	<ul style="list-style-type: none"> 고등학교 <수학> 도형의 방정식 중학교 <수학> 함수와 그래프 <확률과 통계> 확률
최적화	<ul style="list-style-type: none"> 최적화와 의사결정 	<ul style="list-style-type: none"> 이차함수의 그래프와 최소·최대 함수의 극한 이차함수의 미분 계수 손실함수 경사하강법 	<ul style="list-style-type: none"> 고등학교 <수학> 방정식과 부등식 <수학 II> 함수의 극한과 연속 <수학 II> 미분 <수학 II> 미분 <수학 II> 미분

한편 <인공지능 수학>은 고등학교 <수학> 학습 후 이수할 수 있도록 설계되었음에도 불구하고 고등학교 <수학>에서는 다루지 않는 행렬, 벡터, 극한, 미분, 조건부 확률이 포함되었다. 교육 당국은 이들 개념은 인공지능과 직접적으로 관련된 내용을 <인공지능 수학>에서 다루되 인공지능에 활용되는 수학적 개념을 소개하는 정도로서, 인공지능을 이해할 수 있는 수준에서 간단하게 다룰 수 있도록 제한하였다. 또한 이들 개념과 관련된 복잡한 계산이 필요한 경우에는 공학적 도구를 이용하여 교수·학습하고 평가할 수 있도록 하였다.

나. <인공지능 수학>과 행렬과 벡터

전술한 바와 같이 <인공지능 수학>에는 고등학교 <수학>에서는 다루지 않음에도 불구하고 인공지능을 이해

하는 데에 행렬과 벡터를 비롯한 몇 가지 수학 개념이 포함되었다. 이러한 맥락을 이해하기 위해서는 인공지능이 처리하는 데이터가 변환되고 다루어지는 방식을 이해해야 한다. 인공지능에서 데이터는 배열의 형태로 나열되는데 이 배열의 방식은 수학의 행렬 및 벡터 개념을 따른다. 예를 들어 이미지와 같은 대규모 데이터를 분석하는 경우 인공지능은 무수히 많은 데이터 중 유의미한 데이터를 추출해 최적의 행렬을 구성한 뒤, 선형대수를 이용해 행렬을 적절하게 다루어 필요한 결과값을 도출하게 된다. 이 과정에서 벡터는 $N \times 1$ 차원의 행렬로 취급되며, 예를 들면 인공지능이 텍스트 자료를 처리하기 위해 텍스트를 나타내는 빈도수 벡터로부터 텍스트의 단어의 상대도수를 구해내는 식이다. 이렇게 데이터를 행렬 및 벡터로 표현하게 되면 인공지능이 데이터로 선형대수의 계산을 실행할 수 있기에 효과적이다. 또한 인공지능이 수행하는 분류(classification)와 예측(prediction)에도 행렬과 벡터가 사용된다는 점에서도 행렬과 벡터 개념은 인공지능을 이해하고 경험하는 데에 필수적인 동시에 인공지능에서 쓰이는 수학의 역할을 보여주는 구체적인 사례라고 할 수 있다.

인공지능 교육에 있어 필수적인 수학적 개념이지만 2015 개정 수학과 교육과정에서는 <고급 수학>과 <인공지능 수학>을 제외하고는 행렬의 내용을 찾아보기 어렵다. 행렬 내용은 3차 교육과정부터 추가되어 2009 개정 교육과정에서 삭제되기 전까지 대다수의 학생이 학습하는 일반 과목의 내용 요소로 다루어져 왔다(박경미 외, 2015). 그러나 행렬이 지닌 독특한 대수적 구조로부터 파생되는 일부 특이한 행렬 연산을 다루는 데 치중하여 행렬 학습의 교육적 의의를 충분히 살리지 못하고 있다는 점과 오랜 시간 동안 대학수학능력시험에서 어려운 합답형 문제로 출제되면서 학생들의 학습 부담을 야기하는 주요 요소로 작용해왔던 점 등을 이유로 2009 개정 수학과 교육과정에서 일반 학생들을 대상으로 하는 내용으로는 삭제되었다(신이섭 외, 2011). 이후 2015 개정 수학과 교육과정에서 다시 한번 행렬 편성을 위한 논의가 이루어졌으나 학생들의 학습 부담 증가 문제와 교육과정 개정의 한 방향인 학습량 감축을 이유로 무산되었다(박경미 외, 2015). 그러나 지능정보화 사회로의 급격한 변화로 인한 디지털 소양, 컴퓨팅 사고 등의 강조 및 실제 대학에서 이공계 분야뿐만 아니라 인문·사회 분야에서도 기초 개념으로 그 필요성이 부각되자 2022 개정 수학과 교육과정에 행렬 영역을 다시 편성하기로 하였다(이경화 외, 2022). 다만 학습 부담을 가중하지 않은 선에서 공통과목인 <공통수학>에서 행렬의 뜻과 사칙연산 정도만 포함하고, 어려운 문항으로 평가하는 것은 제한하도록 하였다. 또한 <공통수학>에서 학습한 기초적인 행렬 내용을 바탕으로 진로 선택 과목인 <인공지능 수학>에서는 이미지 자료를 처리하는 과정에서 행렬을 도구로 사용하게 하였고, <경제 수학>에서는 경제 현상을 이해를 위한 역행렬 및 행렬의 연산 내용을 추가하였다. 이는 미국과 호주는 일반 학생들을 위한 수학과 교육과정에 행렬이 포함되어 있고, 싱가포르는 중학교 수학과 교육과정에 행렬이 포함되어 있으며, 영국은 대학 입학시험에서 행렬을 다루고 있는 상황과도(정영옥 외, 2016) 발맞추고자 하는 것으로 볼 수 있겠다.

공간벡터 또한 2015 개정 수학과 교육과정에서 찾아보기 어려운데, 2015 개정 수학과 교육과정에서 공간벡터를 <고급 수학>으로 이동시켜 사실상 일반 학생들을 대상으로 하는 교육과정에서는 삭제하였기 때문이다. 이는 2009 개정 수학과 교육과정의 <기하와 벡터>가 어렵다는 의견이 많았고, 공간벡터가 <기하> 과목의 다른 소단원의 내용 구성에 영향을 주지 않으며, 내용 계통상 가장 끝 부분에 위치하고 있어 다른 과목과의 연결에도 영향을 주지 않는다는 점과 대학교 교육과정에서도 공간벡터를 다루고 있으므로 대학에 가서 학습할 수 있다는 점에서 비롯되었다(박경미 외, 2015). 그러나 행렬과 마찬가지로 4차 산업혁명이라는 시대적 변화에 대응하고 지능정보화 사회에 대비하기 위해 공간벡터가 필요하다는 의견이 대두되자, 2022 개정 교육과정에서 공간벡터를 다시 편성하기로 하였다(이경화 외, 2022). 다만 <기하>를 배우는 학생들의 학습 부담을 증가시키지 않는 범위 내에서 공간벡터에서 직선의 방정식, 평면의 방정식, 구의 방정식을 학습하는 것으로 개편되었다. 이는 영국, 일본, 호주에서도 고등학교 교육과정에 공간벡터가 포함되어 있음을 고려할 때 국제적인 추세를 따르는 개편 방안이기는 하나(정영옥 외, 2016), 벡터 영역을 포함하는 외국 대학 입학시험을 분석한 박미선(2018)에 따르면 우리나라를 제외하고는 많은 국가에서 공간벡터의 기본 성질 및 연산뿐 아니라 공간벡터의 외적, 삼중곱, 일차독립과

일차종속과 같은 선형대수학의 내용 수준의 문항이 출제되고 있다는 점에 주의를 기울일 필요가 있다.

이렇듯 행렬과 공간벡터는 현재 적용되고 있는 2015 개정 수학과 교육과정에서 <고급수학>을 제외하고는 <인공지능 수학>에만 등장하는 일시적이면서도 특별한 상황에 놓여있다. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 다시 <공통수학>과 <기하>에 포함될 것이기는 하나, 2022 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서가 도입되기 시작할 2025년까지의 기간에는 행렬과 공간벡터에 대한 이해가 전무한 학생들이 <인공지능 수학>에서 해당 개념들을 처음으로 학습하게 된다. 그러므로 행렬과 공간벡터가 <인공지능 수학>에서 새로운 수학 교육과정의 목표와 지향에 부합하면서도 <고급 수학 I>이나 <기하> 교과와의 연계성을 가지고 제시되었는지, 과제의 수나 유형은 <수학>을 마친 학생들이 해결하기에 그 수준과 범위가 적절한지 살펴볼 필요가 있다. 아울러 <인공지능 수학> 5종 교과서에서 '관련 학습 요소'를 기술하는 형식, 수학 개념의 양과 범위에서 상당한 차이가 있었다는 권오남 외(2021)의 보고는 <인공지능 수학> 교육과정이 독자에 의해 해석되는 범위가 크다는 점을 시사한다(구나영, 최인용, 2022). 이 연구에서 시행하는 행렬과 공간벡터와 같은 특정 내용에 초점을 맞춘 세밀한 교과서 분석은 <인공지능 수학>과 같은 신설 과목 교육과정의 수정 및 개선에 필수적인 피드백을 제공할 수 있다.

2. 연구방법 및 절차

이 연구에서는 <인공지능 수학> 교과서의 행렬과 공간벡터 내용을 분석하기 위하여 문헌 분석 방법을 이용하였다. 문헌 분석 방법은 검색, 선택, 평가, 종합의 절차에 따라 문헌을 검토하고 평가하는 연구방법이다(Bowen, 2009). 이를 위해 첫 번째 검색 단계로 2015 개정 수학과 교육과정 전반과 <인공지능 수학> 교육과정을 검토하였다. 두 번째 선택 단계에서는 2015 개정 수학과 교육과정에서는 일반 학생들을 대상으로 하는 수학과목에서는 삭제되었지만 <인공지능 수학> 내용에는 포함된 행렬과 공간벡터를 분석의 대상으로 선택하였다. 세 번째 평가 단계에서는 <인공지능 수학> 교과서에 포함된 행렬과 공간벡터 내용을 <인공지능 수학> 교육과정의 성격 및 목표, 내용 제시, 성취기준 해설을 토대로 평가하였으며, 마지막 종합 단계에서는 <인공지능 수학> 교과서의 행렬과 공간벡터 내용 분석 결과를 <기하>, <고급 수학 I>에 포함된 행렬 및 공간벡터 내용과 비교하여 종합하였다.

가. 분석 대상

이 연구를 위하여 2015 개정 교육과정에 따라 발행된 <인공지능 수학> 교과서 5종을 분석 대상으로 하였다(<표 II-2> 참조). <인공지능 수학> 교과서는 인정도서로 발행되었다. 이 연구에서는 행렬 및 공간벡터 내용에 초점을 맞추므로 <인공지능 수학> 5종 교과서에서 행렬이 제시되는 '자료와 표현' 영역의 '이미지 자료의 표현'과 '이미지 자료의 처리', '분류와 예측' 영역의 '이미지 자료의 분류', 공간벡터를 포함한 벡터가 제시되는 '자료와 표현' 영역에서 '텍스트 자료 표현'과 '텍스트 자료의 처리', '분류와 예측' 영역의 '텍스트 자료의 분류'를 분석하였다. 본 연구의 분석 대상을 단원과 연결하여 도식화하면 [그림 II-1]과 같다.

<표 II-2> 분석 대상 <인공지능 수학> 교과서 목록

코드	분석 단원
A	II. 자료의 표현
	III. 분류와 예측 1. 자료의 분류
B	II. 자료의 표현
	III. 분류와 예측 1. 자료의 분류
C	II. 자료의 표현
	III. 분류와 예측 1. 자료의 분류
D	II. 자료의 표현
	III. 분류와 예측 1. 자료의 분류
E	II. 텍스트자료의 표현과 분류
	III. 이미지자료의 표현과 분류

관련 학습 요소	벡터		행렬	
	내용 요소(중단원)	주요 개념	내용 요소(중단원)	주요 개념
자료의 표현	텍스트 자료의 표현	<ul style="list-style-type: none"> 원-핫벡터, BoW, 빈도수 벡터 벡터 (개념, 기호, 성분, 차원, 기하적인 표현) 	이미지 자료의 표현	<ul style="list-style-type: none"> 행렬 (개념, 성분, $m \times n$행렬)
	텍스트 자료의 처리	<ul style="list-style-type: none"> 벡터의 덧셈과 뺄셈 벡터의 실수배 	이미지 자료의 처리	<ul style="list-style-type: none"> 행렬의 덧셈과 뺄셈 행렬의 실수배 행렬의 곱셈
분류와 예측	텍스트 자료의 분류	<ul style="list-style-type: none"> 유사도 벡터의 크기, 두 벡터사이의 거리, 벡터의 내적 	이미지 자료의 분류	<ul style="list-style-type: none"> 행렬의 곱셈(E) 전치행렬(A)

[그림 II-1] 단원별 벡터와 행렬과 관련된 분석 대상

나. 분석 방법

<인공지능 수학> 교과서 분석을 위해 먼저 2015 개정 수학과 교육과정 인공지능 수학 과목 시안 개발 연구 보고서(이상구 외, 2020)의 <인공지능 수학> 교과서의 편찬 상의 유의점 및 성취기준과 구현 방안과 함께, <인공지능 수학> 교육과정(교육부, 2020)의 관련 학습 요소, 교수·학습 방법 및 유의 사항, 교수학습 방향을 검토하였다. 이를 토대로 <인공지능 수학> 교과서를 분석을 위한 준거(안)을 <표 II-3>과 같이 도출하였다. 본 연구에서는 행렬과 벡터의 정의와 관련 하위개념의 구현은 준거 2, 준거 3을 중심으로 분석하고 분석 결과를 바탕으로 하는 제언은 준거 1을 중심으로 제시하였다.

<표 II-3> <인공지능 수학> 교과서 분석을 위한 준거

분석 준거	
1. 교육과정 에 제시된 내용과 교과서에 제시된 내용의 선정 및 조직의 일관성 분석 준거	1-1. 학교급 간, 과목 간 내용의 연계성을 고려하고 과목의 특성을 반영하여 조직하였는가
	1-2. 교육과정의 <관련 학습 요소>에 제시된 용어와 기호는 인공지능에서 수학이 어떻게 활용되는지 이해할 수 있는 수준에서 다루고 있는가
	1-3. 기초 개념, 원리, 법칙의 도입과 전개는 학생들이 이해하기 쉽고 흥미를 느낄 수 있도록 간략히 구성하며, 수학 지식을 자세히 다루기보다는 다양한 인공지능에 포함된 수학적 개념을 소개하는 수준으로 조직하였는가
	1-4. 공학적 도구 또는 코딩, 교구 등을 효율적으로 이용할 수 있는 교수·학습 상황을 적절하게 제시하고 있는가
2. 행렬과 관련된 서술 내용 분석 준거	2-1. 행렬에 대한 설명은 수학과 교육과정 위계를 고려하여 수를 행과 열을 가진 직사각형에 배열하여 표현하는 것으로 간단히 도입한다.
	2-2. 이미지 자료를 수, 벡터, 행렬의 연산을 이용하여 목적에 맞게 변형하여 사용할 수 있음을 제시한다.
	2-3. 수, 벡터, 행렬로 표현된 이미지 자료에 확대, 축소, 회전, 평행이동을 나타내는 행렬과 색상, 밝기, 선명도를 변화하는 행렬을 곱하여 결과를 확인하는 활동을 제시한다.
	2-4. 벡터나 행렬의 유사도와 관련하여 해밍 거리나 다른 유사도를 제시한다.
3. 벡터와 관련된 서술 내용 분석 준거	3-1. 텍스트 자료는 단어들의 집합으로 표현하거나, 등장하는 단어의 빈도수를 벡터로 표현할 수 있음을 설명한다.
	3-2. 벡터의 설명은 수학과 교육과정의 위계를 고려하여 수를 성분으로 나열하여 표현하는 것으로 간단히 도입하고, 벡터의 기호, 성분, 차원, 서로 같은 벡터, 기하학적 표현 등에 대해 제시한다.
	3-3. 텍스트 자료의 처리를 위해 벡터의 덧셈과 뺄셈, 벡터의 실수배를 제시한다.
	3-4. 텍스트를 분류하는 수학적 방법인 유사도를 학습하기 위해 벡터의 크기, 두 벡터 사이의 거리, 벡터의 내적에 대해 제시한다.

<인공지능 수학>의 행렬과 관련된 서술 내용을 분석하는 경우, 준거 2-1부터 2-4를 바탕으로 <고급 수학 I> 교과서의 행렬 관련 내용과 비교하여 행렬의 정의와 이미지 자료를 표현하고 분류하는데 이용한 행렬의 하위 개념들의 제시 범위와 서술 내용을 분석하였다. 또한 행렬로 표현된 이미지 자료의 유사도를 확인하기 위한 MNIST (Modified National Institute of Standards and Technology database), 해밍 거리(Hamming Distance), 인공신경망과 퍼셉트론의 제시 여부 및 서술 내용에 대하여 분석하고, 행렬과 관련된 개념 이해 및 확인을 위한 문항 수와 공학적 도구의 활용에 대하여 기술하였다.

<인공지능 수학>의 벡터와 관련된 서술 내용을 분석하는 경우, 준거 3-1부터 3-4를 바탕으로 <고급 수학 I> 과 <기하>교과서의 내용과 비교하여 <인공지능 수학> 교과서의 벡터의 정의와 하위 개념들의 제시 범위 및 서술 내용을 분석하였다. 또한 텍스트 자료를 벡터로 표현하는 방법인 원-핫벡터, BoW (Bag of Words)의 개념과 제시 형태를 포함하여 벡터를 활용하는 유사도의 제시 형태에 대하여 분석하였고, 벡터와 관련된 개념 이해 및 확인을 위한 문항 수와 공학적 도구의 활용에 대하여 기술하였다.

III. 연구 결과 및 논의

이 절에서는 연구 질문인 <인공지능 수학> 교과서에서는 행렬과 공간벡터를 어떻게 정의하고 있으며, 그 내용과 범위는 어떠한가에 대하여 교과서의 행렬과 벡터의 기초 개념 및 관련 하위 개념들의 도입과 전개를 중심으로 분석하였다. 해당 내용들은 교과서에서 소단원 단위의 자료의 표현, 자료의 처리, 자료의 분류 순으로 제시

되고 있으므로 여기에서도 각 소단원을 중심으로 서술하되, 행렬은 이미지 자료의 표현, 이미지 자료의 처리, 이미지 자료의 분류 순으로, 벡터는 텍스트 자료의 표현, 텍스트 자료의 처리, 텍스트 자료의 분류 순으로 제시한다. 또한 교과서별로 행렬 벡터와 관련한 수학적 개념에 비중을 두고 있는지 또는 이를 활용한 원리에 중점을 두고 있는지 확인하고자 행렬과 벡터 관련 문항의 수를 비교하였다.

1. 행렬 관련 내용에 대한 분석 결과

가. 이미지 자료의 표현

이미지 자료의 표현과 관련한 성취기준은 '[12인수02-03] 수와 수학기호를 이용하여 실생활의 이미지 자료를 목적에 맞게 표현할 수 있다' 이다. 교육과정과 시안 개발 연구 보고서에서는 [12인수02-03]의 구현방안으로 이미지 자료는 벡터와 행렬을 이용하여 나타낼 수 있음을 설명하고 행렬에 대한 설명은 수학과 교육과정 위계를 고려하여 수를 행과 열을 가진 직사각형에 배열하여 표현하는 것으로 간단히 도입하도록 강조한다. 이에 5종의 교과서는 이미지 자료를 표현하는 방법으로 행렬을 도입하고 있다. 이 중 4종의 교과서는 행렬을 수나 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것으로 정의하고, 1종은 직사각형 모양으로 순서 있게 나열한 것으로 정의하고 있다(<표 III-1> 참조). 고등학교 <고급 수학 I>에서도 행렬은 수나 문자를 직사각형 형태로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것으로 정의하고 있음을 고려해볼 때, <인공지능 수학> 교과서 5종은 <고급 수학 I>과 유사하게 행렬을 정의하고 있는 것으로 볼 수 있다.

<표 III-1> 교과서에 제시된 행렬의 정의

구분	행렬의 정의
A	수나 문자를 행과 열을 가진 직사각형 형태로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것
B	수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것
C	직사각형 모양으로 수나 문자를 괄호로 묶어 나타낸 것
D	어떤 이미지를 숫자로 나타낼 때, 직사각형 모양의 숫자 배열을 만든 것 수 또는 변수 등 일련의 개체들을 행과 열에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 나열한 것
E	여러 개의 수 또는 문자를 직사각형 꼴로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것
고급수학	수나 문자를 직사각형 형태로 배열하여 괄호로 묶어 나타낸 것

고호경(2020)과 이상구 외(2020)의 선행연구에 따르면 인공지능과 관련된 핵심 수학 내용 중 행렬과 관련된 하위 개념은 행렬의 연산, 행렬식, 역행렬, 선형변환, 고윳값, 고유벡터, 행렬의 대각화 등이다. 이와 관련하여 <인공지능 수학> 교과서들은 행렬 연산에 중점을 두었으며, 교육과정에 포함되지 않은 행렬식, 역행렬, 고윳값, 고유벡터, 그리고 행렬의 대각화와 같은 개념들은 다루지 않았다(<표 III-2> 참조). 반면에, <고급 수학 I>은 이러한 개념들을 모두 다루고 있다. 이는 <고급 수학 I>이 <인공지능 수학>의 선수 과목 혹은 병행 과목으로써 중요한 역할을 할 수 있는 가능성을 시사한다. 따라서, <인공지능 수학>에 필요한 학교수학의 수준에 대한 교육적 결정에 있어서, '교육 내용의 적정화'(Gim, 2003)의 '학습량 경감'의 담론을 극복할 수 있는 묘안에 대한 학계의 지속적인 논의가 필요하다. <고급 수학 I>이 <인공지능수학>의 병행과목의 역할을 한다고 가정할 때, 같은 내용도 과목에 따라 다르게 서술되는 모습을 주목할 필요가 있다. 예를 들어, 선형변환의 경우, <고급 수학 I>에서는 선형변환과 선형변환을 나타내는 행렬을 먼저 정의하고 선형변환의 유형으로써 대칭변환, 닮음변환, 회전변환을 구분하여 정의하고 이에 대응하는 행렬을 제시하였으나, <인공지능 수학> 교과서는 선형변환, 대칭변환, 닮음변환, 회전변환이라는 용어를 제시하고 사용하는 대신 이미지의 대칭이동, 평행이동, 회전, 확대·축소에 필요한 행렬을 간단히 제시하고 행렬의 곱셈을 활용하여 이미지를 변환하는 활용에 중점을 두고 설명하였다.

<표 III-2> 교과서별 행렬 관련 개념 제시 여부

구분	A	B	C	D	E	고급 수학 I
행렬의 개념	○	○	○	○	○	○
행렬의 덧셈과 뺄셈	○	○	○	○	○	○
행렬의 실수배	○	○	○	○	○	○
행렬의 곱셈	X	○	○	○	○	○
행렬의 상등	X	X	○	X	○	○
전치행렬	○	X	X	X	X	○
행렬식	-	-	-	-	-	○
역행렬	-	-	-	-	-	○
선형변환	-	-	-	-	-	○
고윳값	-	-	-	-	-	○
고유벡터	-	-	-	-	-	○
행렬의 대각화	-	-	-	-	-	○

보다 구체적으로 살펴보면, <인공지능 수학> 교과서 B는 평행이동과 대칭이동을 위한 행렬을 제시하고 이를 기존 이미지의 행렬에 곱하여 이미지를 변환할 수 있는 것으로 설명하였고, C는 닮음변환과 관련하여 이미지의 확대 또는 축소하기 위해 이미지 행렬에 가로와 세로의 비율이 적용된 행렬의 곱에 의해 변환이 가능하다고 서술하였고 이미지를 회전시키기 위한 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 을 소개하였다. D는 이미지의 확대와 축소에 대하여 좌표평면에서 점 (x,y) 를 점 (ax,by) 로 이동시키는 과정을 행렬의 곱으로 나타내고 a,b 가 1보다 크면 확대가 되고 1보다 작은 양수이면 축소가 됨을 설명하였다. 평행이동을 시키는 행렬을 예시로 들어 행렬의 곱으로 표현하여 설명하면서, C와 동일하게 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 이 이미지를 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 회전시킨다고 서술하였다.

<표 III-3>은 교과서별 행렬의 연산이 제시된 소단원을 정리한 것이다. 4종(A, B, C, E)의 교과서는 이미지 자료의 처리 단원에서 이미지 자료를 합성하거나 변환, 변형하는 방법을 설명하기에 앞서 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배를 다루었지만, 1종(D)은 이미지 자료의 표현 단원에서 행렬의 개념에 이어서 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배에 대해서 서술하였다. 행렬의 곱셈의 경우, 1종(A)은 아예 다루지 않았으며, 3종(B, C, D)은 이미지 자료의 처리 단원에서 다루었고, 나머지 1종(E)은 이미지 자료의 분류에서 다루고 있었다.

<표 III-3> 교과서별 행렬 관련 개념이 제시된 소단원

구분	이미지 자료의 표현	이미지 자료의 처리	이미지 자료의 분류
행렬의 개념	A, B, C, D, E	-	-
행렬의 덧셈과 뺄셈	D	A, B, C, E	-
행렬의 실수배	D	A, B, C, E	-
행렬의 곱셈	-	B, C, D	E

교육과정 시안 개발 연구 보고서에서는 <인공지능 수학>의 이미지 자료는 가로와 세로를 잘게 분할하여 격자로 나눈 다음 흑백 이미지의 경우 각 격자의 색을 0~255까지의 수로 나타내고 컬러 이미지의 경우 빛의 삼원색인 빨강, 초록, 파랑의 정도를 각각 0~255까지 나타내어 표현하게 할 것을 주문하였다. 이에 따라 4종의 교과

서는 흑백 이미지와 컬러 이미지의 표현에 대해 모두 제시하였으나 1종(D)의 경우 컬러 이미지가 표현되는 방식은 제시하지 않고 있었다.

나. 이미지 자료의 처리

이미지 자료의 처리와 관련한 성취기준은 ‘[12인수02-04] 수와 수학 기호로 표현된 이미지 자료를 처리하는 수학 원리를 이해한다’이다. 교육과정과 시안 개발 연구 보고서에서는 [12인수02-04]의 구현 방안으로 이미지 자료를 확대/축소, 회전, 이동을 나타내는 행렬과 색상, 밝기, 선명도를 변화시키는 행렬을 곱하여 그 결과를 확인하는 활동을 통하여 이미지 자료를 수와 벡터 또는 행렬로 표현하면 연산을 이용하여 목적에 맞게 변형하여 사용할 수 있음을 학습할 수 있다고 하였다.

각 교과서별로 제시한 이미지 자료의 변형과 이미지 변형에 이용된 행렬의 연산은 <표 III-4>와 같다. 5종의 교과서에서 제시한 이미지 자료의 처리에 이용한 유형을 이미지의 합성, 색상, 밝기, 선명도, 확대/축소, 회전, 대칭이동, 평행이동 등 8가지로 구분하여 분석한 결과, 교과서별로 다루는 유형과 각 유형별로 이용한 행렬의 연산의 종류가 상이하였다. 이미지의 합성은 3종(A, B, C)의 교과서에서만 제시하였으며 색상변경은 B, E 2종의 교과서에서만 다루었고 이미지의 밝기는 B, C, E 3종의 교과서에서만 제시하였다. 선명도(이미지 흐리기)를 다루는 교과서는 1종(A)이었다. 이미지의 확대/축소와 회전은 2종(C, D)만 다루었으며 이 교과서들은 이미지를 회전시키는 행렬로 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 을 제시하였다. 대칭이동의 경우, 교과서 A는 전치행렬을 이용하고 교과서 B는 행렬의 곱셈을 이용하였고, 교과서 E는 소단원이 마무리되는 AI공작소 코너에서 좌우대칭이동을 다루면서 행렬의 연산을 이용하는 대신 열의 성분의 위치를 바꾸는 것으로 제시하였다. 평행이동은 2종(B, D)의 교과서에서 다루었다. 5종의 교과서가 모두 이미지 자료의 처리 단원에서 행렬의 덧셈과 뺄셈을 다루었지만, 행렬의 곱셈은 4종의 교과서(B, C, D, E)가 이미지 자료의 처리 단원에서 다루었고, 3종은 이미지 자료의 처리 단원에서 다루고 있었다. 교과서 E의 경우 이미지 자료의 분류 단원에서 행렬의 곱셈을 제시하여 교과서별로 행렬의 곱셈을 전개하는 시기가 상이함을 알 수 있다.

<표 III-4> 이미지 자료의 처리에 이용된 행렬의 연산

구분	이미지 합성	색상	밝기	선명도	확대/축소	회전	대칭이동	평행이동	유형 수
A	덧셈, 뺄셈, 실수배	-	-	덧셈, 뺄셈, 실수배	-	-	전치행렬	-	3
B	덧셈, 뺄셈	덧셈, 실수배	실수배	-	-	-	곱셈	곱셈	5
C	덧셈, 실수배	-	덧셈, 뺄셈, 실수배	-	곱셈	곱셈	-	-	4
D	-	-	-	-	곱셈	곱셈	-	곱셈	3
E	-	덧셈, 실수배	덧셈, 실수배	-	-	-	-	-	2

다. 이미지 자료의 분류

이미지 자료의 분류와 관련한 성취기준은 ‘[12인수03-02] 인공지능을 이용하여 이미지를 분류하는 수학적 방법을 이해한다’이다. 교육과정과 시안 개발 연구 보고서에서는 [12인수03-02]의 구현방안으로 개와 고양이의 사진을 구별하거나, MNIST 데이터의 사례와 함께 손글씨 숫자를 유사도를 이용하여 판별하는 활동, 해밍 거리나

다른 유사도를 사용하는 활동을 강조하였다.

각 교과서별로 제시한 이미지 자료의 분류에 이용된 행렬의 관련 개념은 <표 III-5>와 같다. 교과서 A, C, E는 직접 MNIST 개념을 소개하였고, 교과서 D는 MNIST를 간단히 언급하였으나 구체적으로 설명하지는 않았으며 교과서 B는 전혀 언급하지 않았다. 해밍 거리의 개념은 교과서 4종(A, B, C, D)이 본문이나 책의 날개단에서 제시하였고 1종(E)은 해밍 거리에 대해서 언급하지 않았으나, 단원 마무리의 AI 공작소에서 손글씨를 행렬로 표현하고, 각 행렬에 대응하는 성분의 차들의 합을 구하는 문항을 제시함으로써 해밍 거리의 개념을 교과서에서 포함하고 있었다.

인공신경망에서 입력값에 가중치를 곱하여 다음 층의 출력값이 되는 모델은 5종의 교과서가 모두 제시하고 있었다. 인공신경망에서 정보를 전달하는 기본 단위인 퍼셉트론을 명시적으로 소개한 것은 B와 C 교과서)였다. 인공신경망을 행렬의 곱셈과 직접 연관하여 서술한 교과서는 1종(E)이었다. 교과서 E는 인공신경망의 알고리즘에 따라 컴퓨터는 최적화된 가중치를 스스로 구하며, 이 과정에서 행렬의 연산, 함수의 최대·최소, 미분 등의 수학 개념이 사용된다고 서술하면서 이전 층의 인공 뉴런이 출력하는 값과 가중치, 다음 층의 입력되는 값들을 행렬로 표현하는 문항을 제시하였다. 교과서 B는 입력값 행렬과 가중치 행렬의 성분을 일렬로 나열하고 이를 각각 곱하여 합한 것으로 표현하고 있었다.

<표 III-5> 이미지 자료의 분류 단원에 포함된 인공지능 관련 개념

분류	MNIST	해밍거리	인공신경망	퍼셉트론
A	○	○	○	X
B	X	○	○	○
C	○	○	○	○
D	○	○	○	X
E	○	X	○	X

2. 벡터 관련 내용에 대한 분석 결과

가. 텍스트 자료의 표현

텍스트 자료의 표현과 관련한 성취기준은 ‘[12인수02-01] 수와 수학기호를 이용하여 실생활의 텍스트 자료를 목적으로 알맞게 표현할 수 있다’이다. 교육과정과 시안 개발 연구보고서에서는 [12인수02-01]의 구현 방안으로 텍스트 자료를 단어들의 집합이나 단어의 빈도수를 세어 수학기호인 벡터로 표현할 수 있음을 설명하고 벡터는 수를 성분으로 나열하여 표현하는 것으로 간단히 도입하도록 강조한다. 이는 고등학교 수학 <기하>와 <고급 수학 I> 교과서는 벡터를 크기와 방향을 함께 가지는 양으로 정의하고, 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내며, 좌표평면상에서 단위벡터를 이용하여 위치벡터를 나타낸 후에 벡터의 성분의 개념을 전개함으로써 벡터를 표현하고 탐구하는 방법으로 화살표를 이용한 기하적 방법과 좌표를 이용한 대수적 방법을 모두 제시하는 것과는 차이가 있다.

<표 III-6>에 따르면 4종(A, B, C, E)의 교과서는 벡터를 자료를 순서대로 나열한 것 또는 순서쌍으로 정의하고 있었고, 교과서 C의 경우 본문에서는 벡터를 수를 성분으로 나열하여 표현하는 것으로 간단히 도입한 점에서는 타 교과서와 동일하였으나 크기와 방향을 갖는 양이라는 내용을 책의 날개단에 추가로 제시한 것은 다른 교과서들과 차별점을 보였다. 교과서 D는 벡터의 정의와 그 표현의 예를 구분하지 않고 벡터를 0과 1과 쉼표를 사용하여 표현한 (0, 0, 0, 0, 1) 으로 선제시한 후에 크기와 방향을 함께 갖는 양이라고 재정의하였다. 또한 벡터

1) 진리표와 순서도와 연관된 개념으로 퍼셉트론 사례를 다루는 교과서는 A, B, C이다(권오남 외, 2021).

를 선분에 화살표로 방향을 표시하여 나타내고, 선분의 길이는 벡터의 크기를 나타내며 화살표의 방향은 벡터의 방향을 나타낸다고 표현하였고, 벡터의 시점과 종점, 벡터의 크기, 벡터의 성분, 벡터의 차원, 벡터의 표현에 대해 제시하였다. 교과서 D의 이러한 구성 방식은 고등학교 <고급 수학 I>이나 <기하>와 가장 유사하다고 볼 수 있으며 다른 교과서가 하나 또는 여러 개의 수를 차례대로 나열한 순서쌍으로 벡터를 정의한 것과 차별점을 보였다.

<표 III-6> 교과서에 제시된 행렬의 벡터의 정의

구분	위치	벡터의 개념
A	본문	여러 개의 자료를 순서쌍의 형태로 표현한 것
B	내용정리단	n 개의 수 x_1, x_2, \dots, x_n 을 괄호 속에 순서대로 나열하여 나타낸 $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
C	본문	하나 또는 여러 개의 수를 차례대로 나열한 순서쌍으로 표현한 것
	날개단	벡터는 속도, 가속도, 힘과 같이 크기와 방향을 갖는 양이다 0과 1과 쉼표를 사용하여 표현한 (0,0,0,0,1)을 '벡터'라 한다.
D	본문	길이, 넓이, 부피, 속력 등은 그 양을 하나의 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 속도나 가속도, 물체에 작용하는 힘 등은 그 양을 크기뿐만 아니라 방향도 함께 나타내어야 한다. 이와 같이 크기와 방향을 함께 갖는 양을 '벡터(vector)'라고 한다.
E	본문	순서를 정하여 수를 나열한 것 크기와 방향을 함께 가지는 양
고급 수학	본문	화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내며, 좌표평면 상에서 단위벡터를 이용하여 위치벡터를 나타낸 후에 벡터의 성분의 개념을 전개한다.

본 연구의 자료 분석 과정에서는 수학 개념의 본질(ontology)과 해당 개념의 응용 및 이해(epistemology)의 다양한 형태와 그 차이를 극복하기 위한 실질적인 논의의 근거를 마련하고자 고호경(2020)과 이상구 외(2020)의 선행연구에서 제안한 인공지능과 관련된 핵심 수학 내용 중 벡터와 관련된 하위 개념과 2015 개정 수학과 교육과정에서 <고급 수학 I>에 포함된 벡터 관련 주요 하위 개념들을 종합하여 22가지를 추출하고 반영 여부를 검토하였다(<표 III-7> 참조). 그 결과 <인공지능 수학> 교과서들은 대부분 벡터의 개념을 수의 성분으로 나열한 것으로 제시하고 있었다. 벡터를 크기와 방향을 갖는 양으로도 함께 정의한 교과서(C, D)는 벡터를 유향선분이나 화살표로 표현할 수 있음을 명시하여 문자 a 위에 있는 화살표가 뜻하는 바에 대한 직관적인 이해를 도왔지만, 벡터의 표현에 대한 설명 없이 벡터 기호를 \vec{a} 로 약속한 교과서(A, B, E)에서는 학생들이 문자 a 위에 있는 화살표가 뜻하는 바나 연관성을 직관적으로 인지하기 어려울 수 있음이 파악되었다. 이는 <고급 수학 I>이 벡터의 표현에 대하여 점 A에서 점 B로 향하는 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타내고 기호로 \vec{AB} 와 같이 나타낸다고 서술한 점이나, <기하>가 벡터를 나타내는 표현 방법으로 방향이 주어진 선분을 이용하여 나타낼 수 있고 점 A에서 점 B로 향하는 방향이 주어진 선분 \overline{AB} 를 벡터 \vec{AB} 라 하고 기호로 \vec{AB} 와 같이 나타낸다고 진술한 것과는 대조된다.

<표 III-7> 교과서별 벡터 관련 개념 제시 여부

구분		A	B	C	D	E	기하	고급수학I
벡터의 개념	방향과 크기를 이용	X	X	○	○	X	○	○
	수의 성분으로 나열한 것	○	○	○	△*	○	-	-
벡터의 기호		X	○	○	○	○	○	○
벡터의 성분		○	○	○	○	○	○	○
벡터의 차원		○	X	○	○	X	-	-
단위벡터		-	-	-	-	-	○	○
평면벡터		-	-	-	-	-	○	○
공간벡터		-	-	-	-	-	-	○
영벡터		-	-	-	-	-	○	○
서로 같은 벡터		X	X	○	X	○	○	○
벡터의 기하적 표현		X	X	○	○	○	○	○
벡터의 덧셈과 뺄셈		X	X	○	○	○	○	○
벡터의 덧셈에 대한 연산법칙 (교환, 결합법칙)		X	X	○	X	X	○	○
벡터의 실수배		X	X	○	○	○	○	○
벡터의 실수배에 대한 연산법칙 (결합/분배법칙)		-	-	-	-	-	○	○
벡터의 평행		-	-	-	-	-	○	○
위치벡터		-	-	△	△	-	○	○
벡터의 크기		○	X	○	○	○	○	○
두 벡터 사이의 거리		X	X	○	X	○	○	○
벡터의 내적		○	X	○	○	X	○	○
벡터의 내적의 성질		-	-	-	-	-	○	○
두 벡터가 이루는 각		-	○	○	○	-	○	○
벡터의 외적 및 관련 개념		-	-	-	-	-	-	○

*△는 관련 개념을 일부 예를 들어 제한적으로 제시하거나, 용어를 명시적으로 나타내지 않은 경우 표시함.

벡터의 성분은 모든 교과서가 제시하였는데, 제시하는 시점에는 다소 차이가 있다. <인공지능 수학>은 벡터의 정의를 수의 성분의 나열로 제시함으로써 벡터의 정의 후에 벡터의 성분을 정의한 반면, <고급 수학 I>과 <기하>는 유향선분으로 벡터를 도입하고 벡터의 연산을 소개하고 나서 중단원을 달리하여 위치벡터의 개념을 도입하고 벡터를 좌표에 대응시킨 후에 벡터를 성분으로 표현할 수 있고, 벡터의 성분을 이용한 벡터의 연산으로 전개한다. <인공지능 수학> 교과서 중에서 위치벡터라는 용어를 직접적으로 제시하고 사용한 교과서는 없으나 교과서 C는 벡터의 기하적 표현으로 2차원 벡터를 좌표평면 위의 점으로 나타낼 수 있음을 설명하면서 2차원 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 는 좌표평면에서 원점에서 시작하여 점 $A(a_1, a_2)$ 로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분으로 생각하여 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 로 나타낸다고 설명하였는데, 이것이 곧 위치벡터를 의미한다고 볼 수 있다.

벡터의 차원은 <인공지능 수학> 교과서 3종이 제시하였고, <고급 수학 I>과 <기하>는 제시하지 않았다. 이는 <기하>의 경우 2차원 벡터인 평면벡터만 다루고 <고급 수학 I>은 2차원인 평면벡터와 3차원인 공간벡터만 다루기 때문에 벡터의 차원에 대한 설명이 필요하지 않은 것에 기인한다고 볼 수 있다. 따라서 각 교과서에서

다루고 있는 벡터의 차원이 정해져 있는 <기하>는 평면벡터라는 용어를 사용하고 <고급 수학 I>는 평면벡터와 공간벡터라는 용어를 모두 사용하며, <인공지능 수학>은 텍스트 자료에 따라 다차원의 벡터를 표현하므로 n 차원 벡터의 개념을 제시하였다. <고급 수학 I>과 <기하>에서 제시한 단위벡터나 영벡터에 대해서 <인공지능 수학>은 제시하지 않았다.

이 외의 벡터 관련 개념의 포함 여부는 교과서마다 상이하였다. 서로 같은 벡터는 2종의 교과서(C, E)에만 포함되었고, 벡터의 기하적 표현 및 덧셈과 뺄셈, 실수배는 3종의 교과서(C, D, E)에 포함되었다. 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙을 제시한 교과서는 C뿐이었고, 벡터의 실수배에 대한 연산법칙과 평행을 포함하는 교과서는 하나도 없었다. 또, 벡터의 크기는 1종(B 교과서)을 제외한 모든 교과서에서 제시하였고, 두 벡터 사이의 거리는 2종의 교과서(C, E)가 제시하였다. 벡터의 내적에 대한 정의는 3종의 교과서(A, C, D)가 제시하였으며 내적에 대한 성질을 제시한 <인공지능 수학> 교과서는 없었다. 두 벡터가 이루는 각에 대하여 서술한 교과서는 <인공지능 수학> 3종(B, C, D)이었고, 벡터의 외적과 외적에 대한 성질을 기술한 교과서는 없었다.

한편, <인공지능 수학> 교과서에서는 실생활의 텍스트 자료를 수와 수학기호로 표현하기 위해 단어를 집합으로 표현하는 방법, 각 단어를 0과 1로 표현된 벡터로 나타내는 방법인 원-핫벡터로 표현하는 방법, 단어 집합에 고유한 값을 부여한 다음 빈도수 벡터의 성분으로 표현하는 방법을 사용하나 교과서마다 원-핫벡터, 원-핫인코딩 등의 구체적인 용어를 사용하기도 하고 또는 별도의 용어를 사용하지 않는 등 다루는 방법이 상이하였다. 교과서별 원-핫 벡터 개념 제시 방법을 정리한 결과는 <표 III-8>과 같다. 교과서 A, C는 원-핫벡터 의미를 정의하고 사용하였으며, 교과서 B는 단어의 속성을 정해 놓고 차례로 그 단어가 해당 속성을 가지면 1, 갖지 않으면 0을 벡터의 성분으로 나타내는 것이라고 설명하였으나 원-핫 벡터라는 용어를 명시하지는 않았다. 교과서 E는 각 단어가 단어사전 U에 속하면 1, 속하지 않으면 0으로 나타내는 식으로 문장으로 된 텍스트 자료를 수로 이루어진 벡터로 나타내는 방법을 서술하였고, 교과서 B와 마찬가지로 직접적으로 원-핫벡터라는 용어를 사용하지는 않았다. 교과서 D는 n 개의 단어를 n 차원의 벡터로 표시할 때 표현하고자 하는 단어에 해당하는 차원만 1로 나타내고 나머지는 모두 0으로 나타내는 표현방식을 원-핫 인코딩(one-hot encoding)이라고 책의 날개단에 명시하였으며, 이미지 자료의 표현에서 원-핫 인코딩 벡터라는 용어를 사용하였다.

<표 III-8> 교과서별 원-핫 벡터 개념 제시 방법

구분	용어 제시	개념 정의 또는 표현
A	원-핫벡터	단어 집합의 원소의 개수를 벡터의 차원으로 하여, 표현하고 싶은 단어에 1을 부여하고, 그 이외의 단어에는 0을 부여하는 단어 벡터의 표현 방식
B	-	단어의 속성을 정해 놓고 차례로 그 단어가 해당 속성을 가지면 1, 갖지 않으면 0을 벡터의 성분으로 나타내는 것
C	원-핫벡터	벡터의 성분에서 하나의 성분을 1로 놓고, 나머지 모든 성분을 0으로 하는 벡터
D	원-핫 인코딩	n 개의 단어를 n 차원의 벡터로 표시할 때 표현하고자 하는 단어에 해당하는 차원만 1로 나타내고 나머지는 모두 0으로 나타내는 표현방식
E	-	각 단어가 단어사전 U에 속하면 1, 속하지 않으면 0으로 나타낸 것

텍스트 자료의 출현 횟수를 성분으로 하는 벡터로 표현하는 방법인 단어주머니²⁾나 빈도수 벡터의 용어 제시와 관련하여 3종의 교과서(A, B, C)는 관련 용어를 구체적으로 정의하고 사용하였으며, 교과서 2종(D, E)은 관련 용어의 제시 없이 의미 그대로 풀어서 사용하거나 관련 용어와 내용을 모두 제시하지 않았다. 텍스트 자료의 표현과 관련하여 3종(A, C, E)의 교과서만이 텍스트 자료의 표현 마무리에 공학적 도구를 이용한 활동을 제시하

²⁾ Bag of Words, 줄여서 BoW라고 표현하며 단어의 출현 순서를 고려하지 않고, 그 단어가 출현한 횟수를 성분으로 가지는 벡터를 이용하여 표현하는 방식을 의미한다.

고 있었다. 교과서 A는 단어집합과 단어주머니를 구할 때 공학적 도구를 사용하면 문서의 상위 빈도수를 쉽게 구할 수 있음을 기술하면서 Word Counter 사이트(<https://wordcounter.net/>)를 소개하였다. 교과서 B는 중단원 마무리 코너인 AI 공간소에서 비정형화된 텍스트를 분석하여 의미있는 내용을 추출하기 위한 형태소 분석 사례를 소개하고 한국어 형태소 분석기를 이용해보도록 하였다. 교과서 C는 인공지능을 사용하는 프로그램 중 하나인 구글 코랩을 이용하여 학생들이 스스로 텍스트 자료를 집합과 벡터로 표현해보도록 구성하고 있었다.

나. 텍스트 자료의 처리

텍스트 자료의 처리와 관련한 성취기준은 '[12인수02-02] 수와 수학 기호로 표현된 텍스트 자료를 처리하는 수학 원리를 이해하고 자료를 시각화할 수 있다'이다. 교육과정과 시안 개발 연구보고서에서는 [12인수02-02]의 구현 방안으로 수와 벡터와 같은 수학기호로 표현된 텍스트 자료를 벡터의 성분 구하거나 연산을 이용하여 목적에 맞게 변형할 수 있고, 다양한 그래프 표현을 이용하여 시각화하는 활동을 강조한다.

인공지능이 텍스트 자료를 처리할 때 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배가 사용되는데, 5종 중 3종의 교과서(C, D, E)는 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배에 대해서 서술하였으나 2종(A, B 교과서)은 이를 제시하지 않았다. 벡터의 연산을 제시한 교과서 중 2종(C, E)은 텍스트 자료의 처리 단원에서 벡터의 덧셈과 뺄셈을 함께 서술한 반면, 1종(D)은 텍스트 자료의 표현 단원의 본문에서는 벡터의 덧셈과 실수배에 대해서만 서술하고 텍스트 자료의 처리 단원에서 문장에서 단어의 빈도를 벡터로 나타내는 것을 학습할 때 책의 날개단에 n 차원 벡터의 합, 차, 실수배를 기호로 제시하였다. 3종의 교과서(C, D, E) 모두 벡터의 덧셈과 뺄셈을 두 벡터의 성분끼리의 합 또는 차로 소개하고 벡터의 실수배는 실수 k 를 벡터의 각 성분에 곱하는 것으로 서술함으로써 벡터의 성분에 의한 연산으로 다루고 있었다. 이는 <고급 수학 I>이 유향선분을 이용하여 벡터의 덧셈을 설명하는 삼각형법³⁾을 먼저 제시한 후 평행사변형법⁴⁾을 설명하고, 내용정리단을 활용하여 삼각형법⁵⁾을 정리하고, 평행사변형법을 이용하여 벡터의 덧셈의 교환법칙이 성립함을 설명하는 것과는 구별되며, <기하> 또한 마찬가지이다. 이들 교과서에서는 벡터의 연산에 있어 대수적 표현과 기하학적 표현을 모두 사용하였다. 반면 <인공지능 수학>은 벡터의 개념을 여러 개의 자료나 수를 순서쌍으로 표현한 것으로 정의하였기에 벡터의 연산이 대수적 표현에 한정될 수밖에 없었던 것으로 보인다.

다. 텍스트 자료의 분류

분류는 의사결정 활동의 일환으로 인공지능이 이를 수행하기 위해서는 자료와 정보를 바탕으로 패턴과 규칙을 추출하여 새롭게 주어진 대상을 판별하고 분류할 수 있어야 한다. 이때 벡터와 행렬, 확률, 통계 등의 여러 가지 수학적 방법이 활용된다. 텍스트 자료의 분류와 관련한 성취기준은 '[12인수03-01] 인공지능을 이용하여 텍스트를 분류하는 수학적 방법을 이해한다'이다. 교육과정과 시안 개발 연구 보고서는 [12인수03-01]의 구현방안으로 댓글, 기사 등의 텍스트 자료를 나타내는 벡터를 비교하고 벡터 사이의 거리를 구하여 인공지능이 텍스트를 분류하는 수학적 방법을 이해하며, 행렬로 나타낸 이미지 자료를 서로 비교하고 분류하여 인공지능이 이미지 자료를 분류하는 인공지능경망의 수학적 방법을 이해할 수 있음을 강조한다.

텍스트 자료를 분류하는 대표적인 방법은 감성분석(sentiment analysis)과 두 텍스트 사이의 유사한 정도를 수치로 나타내고 분석하는 유사도 분석이다. 분석 대상인 5종의 교과서 중 4종(A, B, C, E)은 감성분석과 유사

3) 두 벡터 $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$ 일 때, \vec{AC} 로 나타내어지는 \vec{c} 를 두 벡터의 합이라 한다(고급 수학 I).
4) 두 벡터 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ 에 대하여 사각형 OACB가 평행사변형이 되도록 C를 잡으면 $\vec{OB} = \vec{AC}$ 이므로 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$ 이다(고급 수학 I).
5) $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$ 일 때, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (고급 수학 I)

도를 모두 제시하였고, 1종(교과서 D)은 유사도만 제시하고 있었다. 유사도를 설명하기 위해 이용된 벡터와 관련된 하위 개념은 벡터의 크기, 두 벡터 사이의 거리, 벡터의 내적의 3가지로, 교과서 별로 제시한 3가지 학습 내용 현황과 유사도의 유형 분석 결과는 <표 III-9>와 같다. 교과서 별로 텍스트 자료의 분류를 지도할 때 벡터와 관련된 개념을 유기적으로 연계시켜 설명하기도 하고 수학적 개념과 원리보다는 인공지능과 관련한 지식을 학습하는 것에 초점을 맞춘 교과서가 있다는 것이 확인되었다.

벡터의 크기를 제시한 교과서는 4종이었는데, 이 중 3종(교과서 A, C, E)은 자료의 분류 단원에서 벡터의 크기를 제시하였고, 1종(교과서 D)은 자료의 표현 단원에서 벡터의 개념을 처음 도입할 때 벡터의 크기를 설명하였다. 교과서 B는 벡터의 크기를 언급하지 않았다. 유클리디안 유사도를 다룰 때 이용하는 두 벡터 사이의 거리 개념은 2종의 교과서(C, E)가 직접적으로 명시하였으며, 교과서 A와 B는 두 벡터 사이의 거리 대신 두 점 사이의 거리를 이용하였다. 교과서 A는 두 점 사이의 거리를 피타고라스의 정리를 이용하여 설명하였고, 교과서 B는 유클리드 유사도를 '두 텍스트 P와 Q를 나타내는 벡터가 각각 $\vec{P}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\vec{Q}=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 일 때, P와 Q의 유클리드 유사도를 기호로 $L(P, Q)$ 와 같이 나타내고 $L(P, Q)=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+\dots+(q_n-p_n)^2}$ 과 같이 정한다고 하며 이는 두 점 사이의 거리와 같다고 설명하였으나 두 벡터 사이의 거리로 확장하지는 않았다. 교과서 D는 유클리디안 유사도 자체를 언급하지 않았기에 두 벡터 사이의 거리 개념을 도입하지 않았다. 코사인 유사도에 이용되는 벡터의 내적 개념은 5종 중 3종의 교과서(A, C, D)가 제시하였으며, 교과서 B는 코사인 유사도를 도입하면서 이를 벡터의 내적과 연관시키지 않았고 교과서 E는 코사인 유사도를 제시하지 않았다.

<표 III-9> 텍스트 자료의 분류에 이용한 벡터의 개념

구분	벡터의 크기	두 벡터 사이의 거리	벡터의 내적	유사도
A	○	×	○	유클리디안 유사도 코사인 유사도
B	×	×	×	자카드 유사도 유클리드 유사도 코사인 유사도
C	○	○	○	자카드 유사도 유클리디안 유사도 코사인 유사도
D	○	×	○	자카드 유사도 코사인 유사도 거리에 기반한 단어 임베딩
E	○	○	×	유클리디안 유사도

3. 행렬과 벡터 관련 문항 수 비교

<인공지능 수학>에서는 관련 학습 요소인 벡터와 행렬의 개념과 연산을 적용하고 연습할 수 있는 문항뿐만 아니라 이를 이해하고 적용한 인공지능 관련 문항들이 포함되어 있다. 예를 들어 주어진 문서나 문장에서 주제어 찾기, 단어구름 만들어보기 등의 문항을 들 수 있다. 교과서에서 행렬과 관련한 수학적 개념에 비중을 두고 있는지 또는 이를 활용한 원리에 중점을 두고 있는지 확인하기 위해 행렬과 관련한 문항과 그 외의 문항으로 구분하여 각 교과서에서 제시하고 있는 문항 수를 비교하면 <표 III-10>과 같다. 행렬과 관련한 문항을 가장 많이 제시하고 있는 교과서는 B, E, D 순이었고, 교과서 2종(A, C)은 행렬의 개념과 관련한 문항을 2개 이하로 제시하였다. 행렬 외 인공지능과 관련한 문항을 많이 제시한 교과서는 A, E, B 순이었다.

<표 III-10> 교과서별 이미지 자료 관련 문항의 수

단원	이미지 자료의 표현		이미지 자료의 처리		이미지 자료의 분류		합계		
	행렬	행렬 외	행렬	행렬 외	행렬	행렬 외	행렬	행렬 외	총 문항 수
A	1	3	1	1	0	2	2	6	8
B	4	0	8	0	2	4	14	4	18
C	2	0	3	0	1	1	6	1	7
D	4	0	4	0	0	0	8	0	8
E	5	4	5	0	2	1	12	5	17

벡터와 관련한 문항과 그 외의 문항으로 구분하여 각 교과서에서 제시하고 있는 문항 수를 비교한 결과는 <표 III-11>과 같다. 이는 학습한 개념에 대한 개념 확인 또는 적용 문항을 비교한 것으로 단원 마무리에서 제시된 문항이 있는 경우는 제외하였다. 벡터와 관련한 문항을 가장 많이 제시하고 있는 교과서는 D, E, C 순이며, 3종(교과서 A, B, C)은 벡터의 개념과 관련한 문항이 2개 이하였다. 벡터 외 인공지능과 관련한 문항을 많이 제시한 교과서는 A, D 그리고 B 순이었다. 교과서 A는 행렬 및 벡터와 관련한 문항보다 인공지능과 관련한 활용에 더 초점을 두었다는 것을 문항 수에서 확인할 수 있다.

<표 III-11> 교과서별 텍스트 자료 관련 문항의 수

단원	텍스트 자료의 표현		텍스트 자료의 처리		텍스트 자료의 분류		합계		
	벡터	벡터 외	벡터	벡터 외	벡터	벡터 외	벡터	벡터 외	총 문항 수
A	0	4	0	2	3	2	3	8	11
B	2	2	0	3	2	1	4	6	10
C	2	0	3	0	3	1	8	1	9
D	9	2	1	4	6	2	16	8	24
E	6	1	2	2	2	1	10	4	14

IV. 결론 및 제언

이 연구는 미래 세대들의 인공지능 역량 함양을 위하여 2015 개정 수학과 교육과정에서 새롭게 도입된 <인공지능 수학> 과목의 교과서 분석 연구로, 인공지능이 자료를 표현하고 분류하는데 이용하는 행렬과 벡터를 중심으로 인공지능과 관련한 용어와 수학 개념들의 정의와 서술방식에 대해 분석하였다. 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 행렬의 기본 개념에는 큰 차이가 없었으나 하위 개념과 관련해서는 교과서별로 차이가 있었다. 이미지 자료를 표현하고 처리하고 분류하는데 이용되는 행렬의 정의는 5종의 교과서가 모두 수 또는 문자를 직사각형 모양으로 배열하여 괄호로 묶은 것이라고 유사하게 서술하였으며, 행렬의 성분, 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배 역시 5종의 교과서 모두 제시하였다. 행렬의 곱셈에 대하여, 3종(B, C, D)의 교과서는 이미지 자료의 처리 단원에서 제시하였고, E는 이미지 자료의 분류 단원에서 인공지능경망의 인공 뉴런에서 이미지를 분류할 때 행렬의 곱셈으로 나타낸다고 제시함으로써 수학이 인공지능에서 어떻게 활용되는지 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였다. 교과서 1종(A)은 행렬의 곱셈은 언급하지 않았으나, 5종의 교과서 중 유일하게 이미지 자료의 처리에서 전치행렬에 대해 설명하였다. 서로 같은 행렬에 대해 언급한 교과서는 2종(C, E)이며, 인공지능에서 필요한 행렬과 관련

된 개념 중 행렬식, 역행렬, 고윳값, 고유벡터를 다룬 <인공지능 수학> 교과서는 없었다.

둘째, 교과서별로 이미지 자료의 변형에 이용한 행렬의 연산의 종류와 방법에 차이가 있었다. 각 교과서는 인공지능이 이미지 자료를 변형하는데 이용하는 행렬의 연산을 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배, 곱셈으로 제시하였고, 이미지 자료의 처리 유형을 이미지의 합성, 색상변환, 밝기 조절, 선명도 조절, 확대/축소, 회전, 대칭이동, 평행이동 등 8가지로 구분하였을 때 교과서별로 다루는 유형과 각 유형 별로 이용한 행렬의 연산 방법에는 다소 차이가 있었다. 예를 들어 이미지 밝기의 조절 시, 교과서 B는 행렬의 실수배를 활용하여 0과 1 사이의 실수를 곱하면 이미지가 어두워지고, 1보다 큰 실수를 곱하면 이미지가 밝아진다고 하였다. 교과서 C는 이미지의 밝기 조절 시 행렬의 덧셈과 뺄셈, 실수배를 활용한 예를 모두 제시하였고 교과서 E는 행렬의 덧셈과 실수배를 이용하여 원본 이미지 행렬 A 와 모든 성분이 1인 J 행렬에 실수 t 를 곱한 값 $(A+tJ)$ 로 제시하였다. 또한 이미지의 확대/축소와 회전은 2종의 교과서(C, D)만 다루었으며 이 교과서들은 이미지를 회전시키는 행렬로 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 을 제시하였다. 대칭이동의 경우, 교과서 A는 전치행렬을 이용한 반면 교과서 B는 행렬의 곱셈을 이용하였고, 교과서 E는 소단원 마무리 코너에서 좌우대칭이동을 다루면서 열의 성분의 위치를 바꾸는 것으로 제시하였다. 행렬의 곱셈은 4종의 교과서(B, C, D, E)에서 다루었는데, 교과서별로 행렬의 곱셈을 전개하는 시기가 상이하였다.

셋째, 벡터의 개념에 대한 설명은 성분을 이용한 대수적 표현에 한정하여 제시한 교과서와 유향선분을 이용한 기하적 표현을 포함하여 제시한 교과서로 구분할 수 있었으며 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배의 제시 여부가 교과서별로 상이하였다. 5종의 교과서는 모두 벡터를 자료를 순서대로 나열한 것 또는 자료를 순서대로 나열한 순서쌍으로 정의하고 있었고, 그중 2종 교과서(C, D)는 벡터 개념인 크기와 방향을 갖는 양이라는 내용을 본문이나 날개단에서 제시하였다. 특히 교과서 D는 벡터에 대해 학습할 수 있는 고등학교 <기하>나 <고급 수학 I> 교과서와 유사하게 벡터를 정의하고 벡터의 시점과 종점, 벡터의 크기, 벡터의 성분, 벡터의 차원, 벡터의 표현에 대해 서술하고 있었다. 교과서 5종 중 3종(C, D, E)은 벡터를 대수적 표현과 더불어 기하학적 표현을 제시하고 벡터의 덧셈과 뺄셈, 실수배를 제시한 반면, 교과서 2종(A, B)은 벡터의 기하학적 표현과 덧셈과 뺄셈, 실수배는 언급하지 않았다. 이는 <인공지능 수학>이 수학 개념과 원리를 이해하기보다는 활용 중심으로 탐구하는 과목이라는 취지에 따라 벡터와 관련된 수학적 학습 내용보다 인공지능에 초점을 맞춘 내용을 구성한 것으로 보인다.

넷째, 교과서별로 벡터의 활용을 전개하는 데에 있어 벡터의 크기, 두 벡터 사이의 거리, 벡터 내적의 제시 여부와 정의하는 방법에 차이가 있었다. 벡터의 크기를 제시한 교과서는 4종이었고, 1종(B)은 벡터의 크기를 언급하지 않았다. 교과서에서 제시한 유사도의 종류의 경우, 3종의 교과서(B, C, D)는 자카드 유사도, 유클리디안 유사도, 코사인 유사도를 모두 제시하였고, 1종은 유클리디안 유사도와 코사인 유사도를 제시하고, 1종(E)은 유클리디안 유사도만 다루고 있었다. 또, 교과서 C와 E는 유클리디안 유사도를 다룰 때 이용한 두 벡터 사이의 거리라는 설명을 명시하였으며, 교과서 A의 경우 두 점 사이의 거리를 피타고라스의 정리를 이용하여 설명하였고, 교과서 B는 유클리드 유사도를 두 벡터의 성분끼리의 차의 제곱의 합의 제곱근으로 직접 도입하고 이것이 두 점 사이의 거리와 같다고 설명하였으나 이를 두 벡터 사이의 거리로 확장하지는 않았다. 교과서 D는 유클리디안 유사도를 언급하지 않아 두 벡터 사이의 거리 개념을 도입하지 않았다. 코사인 유사도에 이용되는 벡터의 내적의 개념은 5종 중 3종(A, C, D)이 제시하였고, 교과서 B는 코사인 유사도를 도입하면서 이를 벡터의 내적과 연관시키지 않았으며, 교과서 E는 코사인 유사도를 제시하지 않았다. 이를 통해 교과서 별로 텍스트 자료의 분류를 다룰 때 벡터와 관련된 개념을 유기적으로 연계시켜 설명하기도 하고 수학적 개념과 원리보다는 인공지능과 관련한 지식을 학습하는 것에 초점을 맞춘 교과서가 있다는 것을 확인할 수 있었다.

이상의 연구 결과를 바탕으로 <인공지능 수학>과 관련하여 제언하고자 하는 바는 다음과 같다.

첫째, 분석 준거 1-1과 1-2와 관련하여, 수학적 용어와 인공지능 관련 용어에 대한 제시와 개념 설명에 있어

어느 정도의 일관성이 필요하다. 김혜경과 고영구(2003)는 초등학교 사회 교과서의 자연지리 분야 관련 용어와 과학 교과서의 지구과학 분야 관련 용어의 관련성 연구에서 사회 교과서에서는 동일한 뜻을 가지는 용어이면서 다중으로 표현된 용어가 사용되고 있음을 확인하고, 같은 의미의 용어들이 다중으로 사용되는 것은 이들 분야의 교육과정 구성에 있어서 하나의 용어가 일관된 의미로 사용되도록 고려가 필요함을 언급하였고, 김혜정, 장지은, 김희백(2010)은 고등학교 생물 과목의 개념을 중심으로 물리, 화학, 지구과학 과목에서 중복으로 제시되는 개념을 추출하고 그것이 학생의 학습에 주는 영향을 분석하였는데 결국 중복되는 개념은 반복을 통해 학생의 기억과 이해를 도울 수 있지만, 과목 간 상이한 관점이나 서술로 인해 학생에게 혼란을 주거나 학습을 방해할 수 있다고 보고하였다. 인정도서로 지정된 <인공지능 수학> 교과서가 발행사별로 특색을 지니고 다양한 접근을 갖게 될 것은 당연하나, 동일한 수학 용어에 대해 상이한 설명을 하거나, 같은 내용에 대해 서로 다른 용어를 사용할 경우 학생들의 후속 수학 학습에 혼란이 생길 수 있다. 따라서 교육과정 차원에서 <인공지능 수학> 교과서에서 활용될 필수 수학 개념과 관련한 용어 사용의 가이드라인을 제공할 필요가 있다. 또한 교과서에서도 하나의 개념은 하나의 용어로 관점이나 서술 방법에 일관성을 가지고 제시하거나 서로 다른 용어를 사용할 경우, 그것이 같은 개념임을 지도할 필요가 있다.

둘째, 분석 준거 1-3과 관련하여, <인공지능 수학> 교과서에서 관련한 수학적 개념과 원리를 충분히 연습할 수 있는 내용정리 또는 적용 문제를 제시할 필요가 있다. 교과서 별로 이미지 자료를 표현, 처리, 분류하는 것과 관련한 행렬 관련 문항 수는 가장 많은 교과서와 가장 적은 교과서가 7배 가량 차이가 나으며, 벡터의 경우 5배 이상 차이를 보였다. 예를 들어 행렬의 개념을 소개하고 행렬에 대해 익숙해질 수 있도록 행렬이 몇 행 몇 열인지, 행렬의 성분은 무엇인지, 서로 같은 행렬은 무엇인지를 확인하는 문제가 차근차근 제시되는 교과서가 있었던 반면, 행렬과 관련한 수학적 문제를 전혀 제시하지 않는 교과서도 있었다. 수학 과제는 학교 교실 수업에서 학생들이 무엇을 배우고 학습해야 하는지를 결정 및 구성하여 학생들의 학습에 영향을 주며(김미희, 김구연, 2013) 학생들의 수학적 아이디어를 논리적 구조로 발전시키고 연결시킬 수 있도록 자극한다는 점에서(NCTM, 2000) 교과서에서 행렬과 벡터의 개념과 원리 등의 의미를 이해하고 탐구할 수 있는 과제를 적절히 배치할 필요가 있다. 2022 개정 교육과정에서도 <인공지능 수학>에 앞서 <공통수학>에서 다루는 행렬 관련 내용이 기초적인 수준에 불과하고, 벡터 내용이 실린 <기하> 과목을 <인공지능 수학>의 선수 과목으로 보기는 어려우므로, <인공지능 수학> 교과서에서 행렬과 벡터 관련 수학적 기초에 해당하는 예제와 문제를 적절히 제시하여 학생들의 학습을 촉진하고, 의미 있는 수학 학습의 기회를 제공할 필요가 있다.

아울러, 인공지능에서 활용될 수 있는 수학적 개념과 원리에도 초점을 맞출 필요가 있다. 고희경(2020)은 인공지능의 원리와 개념을 더 잘 이해하기 위한 수학교육을 위해 현 교육과정에 없는 선형대수, 수치해석, 확률과 통계를 새롭게 개발하는 것이 필요하며 특히 행렬의 덧셈과 뺄셈, 행렬의 곱셈, 역행렬, 선형변환, 고윳값과 고윳벡터, 벡터의 노름, 상관계수, 선형회귀, 공분산과 같은 내용이 다루어질 필요가 있고 아울러 수학 내용에 대한 깊은 지식과 문제해결을 위한 교과로 개발하기보다는 인공지능에서 필요한 부분을 통합적으로 아는 것이 더 중요하다고 하였다. 이는 앞서 언급한 수학 교과목 간에서 수학 개념의 본질(ontology)과 응용 및 활용에 대한 지식의 이해(epistemology) 간의 차이점에 대한 논의와 연결되는 지점이다. 실제로, 첫 번째 제안에서 언급된 '일관성'에 대한 필요성은 본질과 응용 사이의 간극을 줄이려는 노력으로 해석될 수 있다. 이러한 관점에서, 본질과 활용 사이에 어느 영역에 초점을 맞출 것인지, 또는 그 균형을 어떻게 유지할 것인지에 대한 교육적 판단은 학계에서 중요한 연구 영역이라고 할 수 있다. 관련하여 <인공지능 수학>은 인공지능에서 활용되는 수학적 개념이나 원리를 자세히 다루기보다 인공지능에서 어떻게 활용되는지에 중심을 맞추는 데 따라(이상구 외, 2020) 이러한 내용을 교과서별로 수학적 내용을 축소하거나 생략하였는데, 이로 인해 인공지능에서 필요한 중요한 수학적 개념을 놓치게 될 수 있음을 주목할 필요가 있다. 단적인 예로 벡터를 크기와 방향을 갖는 양으로 정의해도 학생들이 어렵지 않게 수용할 수 있음에도 불구하고 하나 또는 여러 개의 수를 차례대로 나열한 순서쌍으로 벡

터를 정의함으로써 학생들에게 벡터 개념의 수학적 연결성을 경험할 기회를 제한하게 될 수도 있다. 따라서 인공지능과 관련한 수학적 개념이나 원리를 일괄적으로 축소하거나 변형하기보다는 타 교과와의 연결성을 고려하면서 기본에 충실하게 내용을 제시하는 것이 필요하다.

셋째, 분석 준거 1-4와 관련하여, <인공지능 수학>을 지도하는데 사용될 수 있는 공학적 도구에 대한 구체적인 가이드라인이 필요하다. 교육과정에서는 생활 주변에서 인공지능 사례를 실제로 살펴보면서 인공지능에 쓰이는 수학 개념과 원리를 경험해보는 것이 중요하므로 프로젝트형 교수·학습 및 평가를 공학적 도구를 사용할 수 있는 환경에서 구현할 수 있는 방안을 제시하도록 하였지만 실제 교과서에서 텍스트 자료나 이미지 자료를 처리하는 데 사용되는 공학적 도구는 제한적이었다. 5종의 교과서 중 2종(C, D)은 코랩을 이용하여 다양한 활동을 제시하려고 했으나 1종(교과서 A)은 스프레드시트나 워드프로세서에 한정하여 학습 상황에 제시하였고, 1종(교과서 E)은 자료를 표현하고 처리하는 활동을 지원하는 웹페이지 정보를 제공하는 것에 그쳤으며, 다른 1종(교과서 B)은 공학적 도구를 활용한 교수·학습 상황을 거의 제시하지 않았다. 우리나라 수학 교사들은 수업을 준비하고 실행하며 학생의 평가에 이르기까지 학습 전반적인 부분에서 교과서를 적극적으로 활용하며(김민혁, 2013), 수업을 실행하는 과정은 교과서의 내용과 구성을 그대로 따라서 답습하는 형태로 구현됨을 고려할 때(김구연, 전미현, 2017), 실제 인공지능 수학 교실에서 공학적 도구를 소극적으로 활용될 가능성이 우려된다. 그렇다고 해서 인공지능 수학 교실에서 공학적 도구의 사용 진작이 교사의 부담만을 증가시키는 방향이어서도 안될 것이다. 한 예로, 교과서 E의 교사용 지도서에는 ‘단어 임베딩에는 워드투벡 이외에도 LSA, GloVe, FastText 등이 있음을 알게 한다’라고 명시되어 있는데 이러한 지침은 교사로 하여금 교과서에서 제시된 임베딩 방법 외에도 여러 방법에 대한 연구 및 자료 준비를 과다하게 요구할 수 있다. 학생들이 다양한 공학적 도구를 경험할 수 있도록 하되, 그 방법을 개별 교사의 몫으로 남겨둘 것이 아니라 교육과정 차원에서도 공학적 도구 사용의 가이드라인을 제공하는 동시에 교사 공동체에서 공학적 도구를 활용한 교수·학습 지도 방안을 협력적으로 개발하고 공유할 수 있는 전문성 개발 프로그램을 장려할 필요가 있다.

본 연구는 수학 교과목 간의 본질과 응용에 대한 하나의 연구 사례로서, 인공지능의 구현에 필요한 수학 개념과 원리를 (1)일관성 있는 틀 내에서 다양한 맥락과 표상을 활용하고 (2)수학 교육의 핵심 가치를 유지하는 방향으로 제시하는 방안을 모색하고자 하였다. 교육과정 개정에 이어 교과서 개정을 앞두고 있는 현 시기적 측면을 고려해볼 때, 본 연구에 이어 2022 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서의 행렬, 공간벡터에 대한 교수·학습 요소 및 내용 요소에 대한 보다 심도 있는 분석도 후속하여 이루어질 필요가 있다. 교육 및 사회 전 분야에서 인공지능에 대한 논의가 활발하게 진행되고 있는 현 상황에서 인공지능과 관련한 수학 교육 분야의 유의미한 기초 연구가 지속적으로 이어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 고호경 (2020). 인공지능 (AI) 역량 함양을 위한 중고등학교 수학 내용 개선 방안 연구. 한국학교수학회논문집, **23(2)**, 223-237.
- Ko, H. (2020). A study on development of school mathematics contents for Artificial Intelligence (AI) capability. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **23(2)**, 223-237.
- 구나영 · 최인용 (2022). <인공지능 수학> 교과서의 예측 및 최적화 내용 분석. 수학교육학 연구, **32(2)**, 125-147.
- Ku, N. & Choi, I. (2022). An analysis of the <Artificial Intelligence Mathematics> textbook: Focusing on forecast and optimization. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **32(2)**, 125-147.
- 교육부 (2020). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2020-236호 [별책8].

- Ministry of Education (2020). *Mathematics curriculum*. No. 2020-236.
- 권오남 · 이경원 · 오세준 · 박정숙 (2021). <인공지능 수학> 교과서의 '관련 학습 요소' 반영 내용 분석. 수학교육 논문집, **35(4)**, 445-473.
- Kwon, O., Lee, K., Oh, S., & Park, J. (2021). An analysis of 'related learning elements' reflected in <Artificial Intelligence Mathematics> textbooks. *Communications of Mathematical Education*, **35(4)**, 445-473.
- 김구연 · 전미현 (2017). 중학교 수학교과서가 학생에게 제공하는 함수 학습기회 탐색. 학교수학, **19(2)**, 289-317.
- Kim, G. Y. & Jeon, M. (2017). Exploring how middle-school mathematics textbooks on functions provide students an opportunity-to-learn. *School Mathematics*, **19(2)**, 289-317.
- 김미희 · 김구연 (2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. 학교수학, **15(1)**, 37-59.
- Kim, M. & Kim, G. Y. (2013). The analysis of mathematical tasks in the high school mathematics. *School Mathematics*, **15(1)**, 37-39.
- 김민혁 (2013). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. 학교수학, **15(3)**, 503-531.
- Kim, M. (2013). Secondary mathematics teachers' use of mathematics textbooks and teachers' guide. *School Mathematics*, **15(3)**, 503-531.
- 김수환 · 김성훈 · 김현철 (2019). 해외 인공지능 교육동향과 학습도구 분석. 한국컴퓨터교육학회 학술발표대회논문집, **23(2)**, 25-28.
- Kim, So., Kim, Se., & Kim, H. (2019). Analysis of international educational trends and learning tools for artificial intelligence education. *The Korean association of Computer Education conference proceeding*, **23(2)**, 25-28.
- 김재춘 (2003). 국가 교육과정 개정 담론의 비교 분석(I): 제4차에서 제7차에 걸친 '교육 내용이 적정화' 담론을 중심으로. 교육과정연구, **21(2)**, 105-122.
- Gim, C. (2003). A comparative study on the reduction discourses of educational content in the 4th to 7th National Curriculum R & D reports. *The Journal of Curriculum Studies*, **21(2)**, 105-122.
- 김창일 · 전영주 (2021). 수학과 인공지능(AI) 핵심 개념과 <인공지능 수학> 내용 체계 분석. 한국학교수학회 논문집, **24(4)**, 391-405.
- Kim, C., & Jeon, Y. (2021). The core concepts of mathematics for AI and an analysis of mathematical contents in the <AI Mathematics> textbook. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **24(4)**, 391-405.
- 김혜경 · 고영구 (2003). 초등학교 사회교과서의 자연지리 분야 관련 용어와 과학교과서의 지구과학 분야 관련 용어의 관련성. 한국지리환경교육학회지(구 지리환경교육), **11(2)**, 41-49.
- Kim, H.-G. & Koh, Y.-K. (2003). Mutual relationship between physical geographic vocabularies in 'social studies' and earth science vocabularies in 'science', elementary school textbooks. *Journal of the Korea Association of Geographic and Environmental Education*, **11(2)**, 41-49.
- 김혜경 · 장지은 · 김희백 (2010). 고등학교 과학 교과서의 중복 개념에 대한 분석: 생물 과목의 주요 개념을 중심으로. 생물교육(구 생물교육학회지), **38(3)**, 476-491.
- Kim, H.-J., Chang, J.-E., & Kim, H.-B. (2010). Analysis of overlapping concepts in science subjects in high school : Focusing on the key concepts of biology. *Biology Education*, **38(3)**, 476-491.
- 김홍겸 (2021). 인공지능 리더러시를 위한 고등학교 수학 교육내용 개정 방향 연구. 교육문화연구, **27(3)**, 245-264.
- Kim, H.-K. (2021). A study on the revision direction of high school mathematics education for artificial intelligence literacy. *Journal of Education & Culture*, **27(3)**, 245-264.
- 김화경 (2019). 컴퓨팅 사고력과 수학교육. 수학교육철학연구, **1(1)**, 17-28.
- Kim, H. K. (2019). Computational thinking and mathematics education. *Journal for Philosophy of Mathematics Education*, **1(1)**, 17-28.

- 김화경·송창근·이화영·임해미·정종식·최인용·이경화. (2021). 고교학점제 도입에 따른 고등학교 수학과 교육과정 1차 재구조화. 학교수학, **23(2)**, 291-315.
- Kim, H. K., Song, C. G., Lee, H., Rim, H., Jung, J., Choi, I., & Lee, K.-H. (2021). Restructuring high school mathematics according to the credit system-based curriculum framework: An initial suggestion. *School Mathematics*, **23(2)**, 291-315.
- 박경미 외 43명 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 개정 시안 개발 연구 II. 한국과학창의재단 연구보고서 BD15120005.
- Park, K. et al. (2015). *A development of a draft II for the 2015 revised mathematics curriculum*. KOFAC Report BD15120005.
- 박미선 (2018). 대학 입학시험 국제 비교 분석-수학 과목의 행렬과 벡터 영역을 중심으로. 서울대학교 석사학위논문.
- Park, M. S. (2018). *A comparative study on mathematics exams for the college entrance in several countries-focusing on the matrix and vector domain* [Master dissertation, Seoul National University].
- 신이섭 외 18명 (2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단.
- Shin, E. et al. (2011). *A development of a draft for the 2009 revised mathematics curriculum*. KOFAC.
- 이경화 외 44명. (2022). 2022 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구. 한국과학창의재단.
- Lee, K. et al. (2022). *A development of a draft for the 2022 revised mathematics curriculum*. KOFAC.
- 이상구·고호경·김영록·박정숙·송석리·오세준·유연주·이재화·이종욱·이화영·최인용·홍옥수 (2020). 2015 개정 수학과 교육과정 <인공지능 수학> 과목 시안 개발 연구. 한국과학창의재단 연구보고서 BD20100001.
- Lee, S., Ko, H., Kim, Y., Park, J., Song, S., Oh, S., ... & Hong, O. (2020). *2015 revision mathematics curriculum <Artificial intelligence mathematics> development research*. KOFAC Report BD20100001.
- 이정화·한채린·임웅. (2023). 인공지능 수학 교육을 위한 빅데이터 프로젝트 과제 가이드라인. 수학교육, **62(2)**, 289-302.
- Lee, J., Han, C., & Lim, W. (2023). Guidelines for big data projects in artificial intelligence mathematics education. *The Mathematical Education*, **62(2)**, 289-302.
- 정영욱 외 10인. (2016). 수학 교육과정 국제 비교 분석 연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중학교와 고등학교 교육과정을 중심으로. 수학교육학연구, **26(3)**, 371-402.
- Chung, Y. O. et al. (2016). A comparative study of mathematics curriculum among the United States, Singapore, England, Japan, Australia and Korea. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **26(3)**, 371-402.
- 한국과학창의재단 (2021). 2015 개정 교육과정 교수·학습 자료 <인공지능 수학>. 한국과학창의재단.
- Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity [KOFAC] (2021). *2015 revised curriculum teaching and learning materials <Artificial Intelligence Mathematics>*. KOFAC.
- Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative Research Journal*, **9(2)**, 27-40.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization [UNESCO] (2019). *Planning education in the AI era: Lead the leap*. Proceeding of International Conference on Artificial Intelligence and Education. Retrieved from <https://en.unesco.org/themes/ict-education/ai-education-conference-2019>
- Zhang, X. D. (2020). *A matrix algebra approach to artificial intelligence*. Springer Singapore.

Analysis of Artificial Intelligence Mathematics Textbooks: Vectors and Matrices

Lee, Youngmi

Graduate School of Education, Yonsei University
E-mail : mathliker@naver.com

Han, Chaereen

Graduate School of Education, Yonsei University
E-mail : hanchaereen@gmail.com

Lim, Woong[†]

Graduate School of Education, Yonsei University
E-mail : woonglim@yonsei.ac.kr

This study examines the content of vectors and matrices in Artificial Intelligence Mathematics textbooks (AIMTs) from the 2015 revised mathematics curriculum. We analyzed the implementation of foundational mathematical concepts, specifically definitions and related sub-concepts of vectors and matrices, in these textbooks, given their importance for understanding AI. The findings reveal significant variations in the presentation of vector-related concepts, definitions, sub-concepts, and levels of contextual information and descriptions such as vector size, distance between vectors, and mathematical interpretation. While there are few discrepancies in the presentation of fundamental matrix concepts, differences emerge in the subtypes of matrices used and the matrix operations applied in image data processing across textbooks. There is also variation in how textbooks emphasize the interconnectedness of mathematics for explaining vector-related concepts versus the textbooks place more emphasis on AI-related knowledge than on mathematical concepts and principles. The implications for future curriculum development and textbook design are discussed, providing insights into improving AI mathematics education.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key words : artificial intelligence mathematics, vector, matrix, textbook analysis

[†] corresponding author