韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2023.26.3.181
2023. 7. 제 26권, 제 3호, 181-197

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
July. 2023, Vol. 26, No. 3, 181-197

초등학교 4학년 학생들의 이분모 분수 크기 비교에 나타나는 추론 분석

윤채린(서울강덕초등학교, 교사)
장혜원(서울교육대학교, 교수)†

이분모 분수의 크기를 비교하기 위해 통분을 이용한 형식화된 절차적 방법이 아니라 분수 개념 및 수 감각을 바탕으로 하는 추론 과정을 따르는 것의 중요성이 다수의 연구에서 주목되어 왔다. 본 연구에서는 통분을 학습하지 않은 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 이분모 분수 크기 비교 검사지를 활용한 조사연구를 실시하여 8가지 문제 유형별 정답자 및 오답자의 추론 관점을 분석하였다. 분석한 결과, 동치분수 및 통분을 학습하기 이전의 학생들도 분수 감각을 바탕으로 한 추론을 통해 이분모 분수 크기를 비교할 수 있었다. 이분모 분수의 크기 비교를 위해 가장 많은 학생들이 선택한 관점은 '부분-전체 관점'이며, 이는 분수의 크기 비교 시 추론이 학생 자신이 학습한 분수의 개념에 크게 의존함으로 보여준다. 또한 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 학생들은 분수의 크기에 대한 양감의 부족으로 이어져 이분모 분수의 크기 비교 추론에 어려움을 보이는 것으로 나타났다. 연구 결과를 바탕으로 이분모 분수 크기 비교 시 통분 없이 분수 개념 및 수 감각에 기초한 추론 지도를 위한 교수학적 시사점을 도출하였다.

I. 서론

초등학교 수학에서 수 개념은 자연수에서 시작하여 분수와 소수로 그 범위를 확장하게 된다. 분수는 전체-부분, 관계, 측정, 몫, 비, 연산자 등의 여러 하위 개념을 가지기 때문에 학생들은 분수 개념의 이해 자체를 어려워한다(정은실, 2006). 학생들이 분수 하위 개념들 사이의 상호 관련성까지 이해할 때 온전한 분수 개념이 발달하므로 분수의 하위 개념을 이해할 수 있도록 하는 다각도의 접근이 필요하다(신준식, 1996; 홍은숙, 강완, 2008; Kieren., 1976 등). 그러나 지난 수학과 교육과정에서의 분수 개념에 대한 다양한 접근에도 불구하고 다수의 학생들이 분수의 개념을 제대로 이해하지 못한 상태에서 분수 연산에 대한 절차적인 지식을 기계적으로 익히고 있다(권성룡, 1997; 김옥경, 1997).

분수 개념의 온전한 발달을 위해 권성룡(1997)과 홍은숙, 강완(2008)은 양감의 발달 즉, 분수의 크기에 대한 인식이 중요함을 강조하였다. 분수가 나타내는 양에 대한 이해를 바탕으로 한 분수의 크기에 대한 인식은 동치분수 개념을 이해하고, 분수의 크기를 비교하며, 분수의 연산을 의미 있게 이해하는 능력의 기초가 된다는 점에서 중요하다(Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984). 한편 강완, 강태석(2003)은 역으로 분수의 크기 비교에 대한 지식을 확인해보는 것이 학생들의 분수 개념 습득 여부를 판단할 수 있는 도구가 될 수 있다고 보았다. 즉, 분수의 크기를 비교할 수 있다는 것은 분수의 개념을 이해하고 있다는 의미이다.

초등학교 수학에서 다루는 분수 크기 비교를 지도 내용과 방법 측면에서 살펴볼 수 있다. 지도 내용 면에서는 1차 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 이르기까지 교과서에서 분수의 형태적 특징(Smith, 1995)을 고려한 크기 비교보다는 분수의 종류에 따른 정형화된 방식의 크기 비교가 제시되어 왔다. 학년에 따라 동분모 분수의 크기 비교, 단위분수의 크기 비교, 이분모 분수의 크기 비교 순으로 구분하여 교과서가 구성되어 있다. 한편 지도 방법 면에서는 3학년에서 시각적 모델을 이용하여 크기를 비교하는 방법을 지도하고, 5학년에서는 통분하여 크기를 비교하는 방법을 주로 지도하여 왔다. 이로 인해 학생들은 분수의 특징을 고려한 다양한 방식의 크기 비교 경험을 갖기 어려우며 해당 차시에서 학습한 제한된 방식으로만 분수 크기 비교를 하게 된다(이대현, 2018). 실제로, 김유경, 황현미(2016)가 이러한 교과서의 흐름에 따라 학습한 초등학교 3~6학년 학생들을 대상으로 분수 크기 비교 문제에 대한 풀이 전략을 알아본 결과, 학생 대부분이 이분모 분수 크기 비교에서 양감보다는 통분을 이용하여 문제를 해

* 접수일(2023년 6월 22일), 심사(수정)일(2023년 7월 7일), 게재확정일(2023년 7월 16일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 이분모 분수 크기 비교, 오류, 초등 수학, 추론
† 교신저자 : hwchang@snue.ac.kr

결하였다. 김옥경(1997)의 연구에서 분수 수업 시 분수의 양에 대한 고려가 거의 없기 때문에 분수의 크기 비교가 기계적으로 다루어지고 있다고 한 것도 같은 맥락에 있다.

2022 개정 교육과정에서 5~6학년군 수와 연산 영역 성취기준 '[6수01-07] 분모가 다른 분수의 크기를 비교하고 그 방법을 설명할 수 있다.'의 성취기준 적용 시 고려 사항으로 '분모가 다른 분수의 크기를 비교할 때 수 감각을 이용하여 추론하고 토론하는 활동을 하게 한다(교육부, 2022, p.26).'가 제시된다. 이는 2009 개정 교육과정에서부터 꾸준히 강조되었던 사항으로, 학생들이 이분모 분수 크기 비교 방법의 형식화에 치중하기보다 다양한 추론 및 토론 활동을 통해 그 원리를 다양한 방법으로 탐구할 것을 제안한다(교육과학기술부, 2012; 교육부, 2015). 즉, 분수의 크기에 대한 양감을 바탕으로 추론하고 토론하는 활동을 통해 교육과정에서 의도한 수 감각을 신장하는 경험을 학생들에게 제공해야 할 필요성이 있다. Clark & Winkelman(2018)은 추론 활동이 분수 크기 비교에 중요한 역할을 한다고 주장하며, 추론을 통해 학생들은 수학적 이해, 문제 해결 능력, 추상적 사고력을 향상시킬 수 있다고 하였다. 즉, 추론 활동은 학생들이 분수의 크기를 비교하고 이해하는 데 도움을 주며, 수학적 능력의 발전을 촉진시키는 중요한 요소로 간주된다. Smith(1995) 또한 학생이 분수의 크기를 비교할 때, 교과서에서 학습한 일반적이고 표준적인 전략을 바탕으로 분수의 형태적 특징을 고려하여 자신만의 전략을 생각해낼 수 있다면 유능하게 추론하는 것이라고 하였다. 즉, 분수의 크기 비교를 유능하게 추론한다는 것은 학습한 분수 지식을 기반으로 주어진 분수의 특징에 적합하게 학생 스스로 전략을 구성해내는 것을 의미하며, 이는 수 감각을 기반으로 할 때 가능한 것이다.

위와 같이 선행연구에 제시된 분수의 크기 비교에 대한 인식의 중요성과 교육과정에 제시된 추론 활동의 필요성을 종합할 때, 통분을 통한 형식화된 방식의 분수 크기 비교가 아닌 학생들의 수 감각을 바탕으로 한 분수 크기 추론에 대한 연구가 필요하다. 구성주의 맥락에서 학생들로 하여금 아직 학습하지 않은 이분모 분수의 크기 비교를 위한 추론을 해봄으로써, 학생들은 분수 지식을 바탕으로 그동안 생각해보지 않았던 관점에서 문제를 해결하고 추론 역량을 강화할 기회를 갖는다. 이에 본 연구에서는 통분을 학습하지 않은 초등학교 4학년 학생들이 8가지 유형의 이분모 분수 크기 비교 과제에 대하여 어떻게 접근하는지, 어떠한 논리적 추론 과정을 통해 비교하는지 분석하였다. 분석한 결과를 바탕으로 이분모 분수 크기 비교시 추론 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수의 크기 비교를 위한 추론 관점

분수의 크기를 비교할 때 추론 관점은 학생들이 분수 크기 비교 문제를 해결할 때 주목한 관계 유형을 기반으로 분류되며, 연구자마다 분류 방식은 다양하다 (Behr et al., 1984; Moss & Case, 1999; Wenrick, 2003; Cramer & Wyberg, 2007 등). 추론 관점은 학생들이 문제를 해결하는 데 사용한 추론 과정을 파악하는 것을 넘어 학생들이 분수에 대해 어떻게 인식하고 있는지도 파악할 수 있게 한다. 본 연구에서는 학생들의 추론 관점을 분석하기 위한 틀로서 Wenrick(2003)의 분류를 이용하고자 한다. 포함된 추론 관점의 다양성으로 인해 이분모 분수 크기 비교 과정에서 이루어지는 추론의 특성을 보다 상세히 구조적으로 이해할 수 있을 것으로 기대되기 때문이다.

Wenrick(2003)은 Smith(1995)의 연구를 확대하여 학생들이 분수의 크기를 비교할 때 사용하는 관점을 8가지(제한된 관점, 조각 관점, 부분 - 전체 관점, 단위분수 관점, 분수 내 관점, 분수 간 관점, 동치분수 관점, 변환 관점)로 분류하였다. Wenrick(2003)에 의하면 추론 관점은 학생이 문제를 해결하는 데 사용한 전략과는 다르며, 문제를 해결하면서 분수를 어떻게 인식하고 처리하였는지를 식별한다. 분수 크기 비교 추론에 관한 Wenrick(2003)의 관점 분류 틀은 [표 1]과 같다.

'제한된 관점'을 가진 학생들은 분수를 비교하는 데 필요한 분수에 대한 이해력이 약하고 자연수 관계에 기초하여 분수를 비교하려고 하여 문제해결에 도움이 되는 분수 관계를 식별하고 활용하는 능력이 없다. '조각 관점'을 가진 학생들은 조각과 전체의 크기와의 관계를 파악하지 않고 특정 분수를 특정한 모양과 크기로 인식한다. '부분–전체 관점'을 가진 학생들은 부분과

전체 사이의 관계에 중점을 둔다. 전체를 기반으로 시작하여 분모를 이용해 전체가 몇 개의 부분으로 나누어졌는지를 확인한다. ‘단위분수 관점’을 가진 학생들은 전체에서 나누어진 조각의 수가 단위분수의 크기를 결정한다는 핵심적인 관계를 인식한다. ‘분수 내 관점’을 가진 학생들은 분자와 분모 간의 관계에 초점을 맞춘다. ‘분수 간 관점’을 가진 학생들은 분자 간 또는 분모 간의 관계에 초점을 맞춘다. ‘동치분수 관점’을 가진 학생들은 알고 있던 지식과 제시된 자료의 분수 간의 관계를 바탕으로 크기가 같은 동치분수를 찾는다. ‘변환 관점’을 가진 학생들은 이분모 분수의 분모를 공통분모로 변환하는 절차를 사용하여 분수를 비교한다. ‘제한된 관점’에서 시작하여 ‘변환 관점’으로 갈수록 더 높은 수준의 추론 관점이며 각 관점마다 학생들이 분수의 상대적인 크기를 어떻게 추론하였는지 알 수 있는 중요 관계가 식별된다.

2. 교과서에 제시된 분수의 크기 비교 추론 활동

이분모 분수의 크기 비교를 가르칠 때, 수 감각을 이용하여 추론하고 토론하는 활동을 하도록 교육과정에서 강조한 것은 2009 개정 교육과정부터이다. 이전까

[표 1] 분수 크기 비교 추론에 대한 Wenrick(2003)의 분류

관점	설명	중요 관계	예
제한된 관점 (Limited Perspective)	분수를 비교하는 데 필요한 분수에 대한 이해력이 없다.		
조각 관점 (Pieces Perspective)	전체와 독립적인 조각으로서의 분수에 초점을 맞춘다.	- 분수의 크기는 절대량으로 간주된다. - 조각과 전체의 관계는 언급되지 않았거나 명백하지 않다. - 조각 자체의 크기는 고려되지 않고 개수만 고려된다.	$\frac{2}{8}$는 2개의 조각이다.
부분-전체 관점 (Part-Whole Perspective)	전체의 일부로서의 분수에 초점을 맞춘다.	- 분모를 통해 전체를 몇 개의 부분으로 나눌지 안다. - 초기 관계는 반복적인 절반 나누기를 통해 유도된다. - 알고 있던 지식을 사용하여 분수 관계를 유지하면서 전체를 동일한 크기의 조각으로 나눈다.	$\frac{10}{12}$은 전체 12조각 중 10조각이고 $\frac{4}{6}$는 전체 6조각중 4조각이므로 $\frac{10}{12}$이 더 크다.
단위분수 관점 (Unit Fraction Perspective)	단위분수에 초점을 맞춘다.	- 단위분수는 전체를 몇 개의 부분으로 나누는지에 기반한다. - 단위분수가 몇 개 모여 분수를 구성하는지 확인한다.	$\frac{1}{5}$이 $\frac{1}{3}$보다 더 많은 부분으로 나누어지기 때문에 작다.
분수 내 관점 (Within -Fraction Perspective)	분자와 분모 간의 관계에 초점을 맞춘다.	- 분자는 분모의 절반, $\frac{1}{2}$과 같다. - 분자와 분모가 같으면, 1 전체와 같다. - 0, $\frac{1}{2}$, 1과 비교하여 근사한 관계를 설정하여 비교할 수 있다.	$\frac{2}{8}$와 $\frac{3}{12}$에서 2는 8의 $\frac{1}{4}$이고, 3은 12의 $\frac{1}{4}$이므로 두 분수의 크기는 같다.
분수 간 관점 (Between Fraction Perspective)	분자 간 또는 분모 간의 관계에 초점을 맞춘다.	- 분자 간 또는 분모 간의 관계를 파악한다. - 관계는 덧셈적 또는 곱셈적일 수 있다.	5는 10의 반이고 1는 4의 반이 안 되기 때문에 $\frac{1}{5}$이 $\frac{4}{10}$보다 작다.
동치분수 관점 (Equivalence Perspective)	동치분수 간의 관계에 초점을 맞춘다.	- 제시된 자료 내의 분수 간의 관계를 인식한다, - 제시된 분수 이외의 크기가 같은 분수를 인식한다.	$\frac{1}{2}$은 $\frac{3}{6}$과 같은데, $\frac{3}{6}$은 $\frac{1}{6}$보다 크기 때문에 $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{6}$보다 크다.
변환 관점 (Transform Perspective)	규칙을 사용하여 분수를 비교하고 순서를 매기는 것에 중점을 둔다.	변환 규칙을 설명하는 다른 관점을 활용한다.	$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$의 크기를 비교하기 위해 공통분모 12로 통분한다.

지는 교육과정에서 언급되지 않았고 그에 따라 7차 교육과정기까지는 3학년의 단위 분수 비교나 5학년 이분모 분수에서 시각적 모델을 이용한 직관적 비교 외에는 교과서에서 관련 활동이 구현되지 않았음을 강태석(2001)의 연구 결과에서 확인할 수 있다. 이에 2007 개정 교육과정기 이후 2015 개정 교육과정기까지 교과서에 제시된 이분모 분수 크기 비교 추론 활동을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 이분모 분수 크기 비교를 위한 추론이 교과서 활동으로 등장한 것은 2007 개정 교육과정의 교과서부터이다. 2007 개정 교육과정에서는 수 감각을 활용한 추론 활동의 필요성이 교육과정 상 제시되지는 않았지만, 2007 개정 교과서 3-1에서 단위분수의 크기를 추론하는 활동과 교과서 5-1에서 기준 분수를 이용하여 이분모 분수의 크기를 추론하는 차시가 구현되었다.

둘째, 교육과정에서 수 감각을 이용한 추론 활동을 언급한 2009 개정 교육과정 이후로 더 많은 차시에서 추론 활동이 제시된다. 2007 개정 교육과정을 바탕으로 개정된 2009 개정 교육과정기의 교과서에는 보다 확대된 형태로 추론 활동이 제시되어 있다. 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서에 이분모 분수 크기 비교 추론 활동은 적어도 두 개 차시 이상에서 제시된다.

셋째, 이분모 분수 크기 비교 추론 활동은 지도 순서에 있어서 동치분수 및 통분 학습 이후 차시에서 제시된다. 2007 개정 교과서 3-1 및 2009 개정 교과서 3-1에서는 단위분수의 크기 비교 학습 차시에 수 감각을 활용한 추론 활동이 제시된 것에 반해, 2015 개정 교과서 3-1에는 해당 차시 학습에는 추론 활동이 제시되지 않고 단원의 마무리 차시인 문제해결 차시에서 추론 활동이 제시되었다. 5학년의 경우, 교육과정에서 수 감각을 이용한 추론 및 토론 활동을 강조하고 있는 2009 개정 교과서 5-1 및 2015 개정 교과서 5-1조차 이분모 분수 크기 비교 학습 차시에는 추론 활동을 제시하지 않았다. 동치분수 및 통분 학습 이후, 단원의 후반인 특화 차시에서 수 감각을 이용한 추론 활동이 제시되었다. 이는 통분 학습 이후에 추론 활동이 제시되면 수 감각만으로 충분히 추론할 수 있는 이분모 분수 크기 비교 시에도 학생들이 통분을 이용하여 문제를 해결한다는 서민정(2020)의 연구 결과를 고려할 때 재고의 여지가 있다. 분수 감각을 길러주고자 하는 추론 활동의 의도와 달리 학생들은 기계적이고 효율적인 방법인 통분을 사용하는 경향이 있기 때문에 통분 학습 이전에 추론 활동을 제시할 필요가 있다.

수 감각을 활용한 추론 활동의 필요성이 교육과정에 제시된 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서의 이분모 분수 크기 비교 추론 활동을 Wenrick(2003)의 추론 관점으로 분류해보면 [표 2]와 같다.

[표 2] 교과서에 제시된 추론 활동

교과서	차시	활동	관점
2009 개정 3-1	분수의 크기를 비교할 수 있어요(2) 8/14차시	길이 모델에 단위분수 표현	부분-전체 관점
2009 개정 5-1	공부를 잘했는지 알아봅시다 8/10차시	1보다 단위분수만큼 부족한 이분모 분수 영역 모델에 표현	부분-전체 관점 단위분수 관점
	문제해결 9/10차시	통분이 복잡한 이분모 분수 크기 비교를 위해 두 개씩 짝지어 크기 비교 추론 및 토론	분수 간 관점
2015 개정 3-1	생각수학 10/13차시	전체의 크기가 다른 단위분수 크기 비교 추론 및 토론	부분-전체 관점 단위분수 관점
2015 개정 5-1	도전수학 8/10차시	기준 분수를 이용한 이분모 분수 크기 비교 추론	분수 내 관점
	탐구수학 9/10차시	1보다 단위분수만큼 부족한 이분모 분수 영역 모델에 표현	부분-전체 관점 단위분수 관점

2009 개정 교과서에 제시된 추론 활동은 ‘부분-전체 관점’, ‘단위분수 관점’, ‘분수 간 관점’을 다루고 있으며, 2015 개정 국정 교과서에 제시된 추론 활동은 ‘부분-전체 관점’, ‘단위분수 관점’, ‘분수 내 관점’을 다루고 있다. 6가지의 추론 활동 중 5가지의 활동에서 ‘부분-전체 관점’을 다루고 있음을 확인할 수 있다.

3. 선행연구

분수는 학생들이 어려워하는 개념이기 때문에 연구가 다수 이루어진 데 반해 분수 크기 비교에 관한 연구는 비교적 많지 않았다. 김옥경(1997)이 초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 실태를 진단한 결과, 학생들은 전체-부분 개념을 이해하고 있지만 분수의 크

기에 대한 양감이 부족하여 분수의 크기 개념으로 발전시키지 못하였다. 또한 분수의 크기 비교 수업 시 양에 대한 고려보다는 절차적인 방법에 의해 기계적으로 다루어지고 있다고 하였다. 김유경, 황현미(2016)는 초등학교 3~6학년 학생들에게 다양한 유형의 분수 크기 비교 문항을 제시하고, 학생들이 어떤 문제해결 관점을 활용하는지 분석하였다. 학생들의 풀이 과정을 Wenrick(2003)의 분류 틀에 따라 구분한 결과, 5~6학년 학생들은 이분모 분수의 크기 비교에서 분수의 형태적 특징과 관계없이 통분을 이용해 분수의 크기를 비교하는 변환 관점을 가장 많이 사용하였다. 서민정(2020)은 4학년, 6학년 학생들이 분수 크기 비교 추론에서 보이는 차이점을 분석하였다. 4학년 학생들은 분수의 크기를 비교할 때 대부분 전체를 기준으로 부분의 크기를 비교하는 방식을 사용하였으나, 6학년 학생들은 통분하여 비교하는 방식을 주로 사용했다. 이는 통분 학습 전후에 비교 방식의 차이를 보여준다.

국외 연구로, Hiebert & Lefevre(1986)는 수학적 추론 능력과 이분모 분수 크기 비교 사이의 관련성에 초점을 두고 학생들이 분수의 크기를 비교할 때 수학적 추론 능력이 어떻게 작용하는지 탐구하였다. 추론 능력은 분수의 크기를 예상하고 적절한 비교 기준을 설정하는 것과 관련되고, 추론 능력은 분수의 크기를 비교하는 경험을 통해 발전되며 이러한 추론 활동을 통해 학생들은 분수의 크기를 더 잘 이해하고 비교할 수 있게 된다. DeWolf et al.(2014)는 성인들도 분수, 소수, 정수에서의 크기 비교 중에서 분수의 크기 비교를 가장 어려워한다는 것을 확인하였다. 소수, 정수에서의 크기 비교는 자릿수 개념에 근거한 추론 과정을 거쳐 처리하는 유사성을 보인 반면, 분수의 크기 비교는 개념적으로나 형식적으로나 소수, 정수와는 그 특성에서 분명한 차이가 존재하므로 크기 비교 추론 과정에서도 차이점이 있었다. 분수의 크기 비교는 분모, 분자의 숫자 및 분수의 형태가 크기 비교 추론에 영향을 미친다는 것을 확인할 수 있다.

분수 크기 비교에 관한 국내외 관련 선행 연구는 공통적으로 분수의 크기에 대한 양감을 바탕으로 한 분수 크기 인식의 중요성을 시사하며 학생들의 분수 크기 추론의 필요성을 주장한다. 본 연구는 통분을 학습하지 않은 학생들의 이분모 분수의 형태적 특징에 따른 추론을 분석한다는 점에서 선행연구와 차별점이 있다. 이에 학생들이 다양한 관점에서 탐구할 수 있도록 이분모 분수 크기 비교 문항 유형을 세분화화여 제시함으로써 학생들이 분수의 형태적 특징에 적합한 추론 관점을 취해 크기를 비교하는지, 추론 오류를 보였다면 그 배경은 무엇인지 분석하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 참여자

본 연구의 참여자는 서울특별시의 강동구에 위치하는 G초등학교 4학년 학생 63명이다. 이분모 분수의 크기 비교 검사를 G초등학교 4학년 4개 학급 학생 96명에게 실시하였고, 그중 통분을 학습한 33명을 제외하고 통분을 학습하지 않은 학생 63명을 연구 참여자로 선정하였다. 연구 참여자를 이와 같이 선정한 이유는 동치분수, 약분, 통분 및 이분모 분수의 크기 비교를 아직 학습하지 않은 학생들이 기존에 알고 있던 분수에 대한 이해와 수 감각을 바탕으로 이분모 분수의 크기를 비교하는 추론 관점을 분석하고자 하기 때문이다.

2. 검사지

본 연구에서 개발한 이분모 분수 크기 비교 검사지는 서민정(2020)의 검사지 및 국내외 분수 관련 선행연구를 참고하여 연구자가 연구 목적에 맞게 재구성하여 제작한 것이다. 검사지 문항 내용은 문항별로 두 개의 이분모 분수가 제시된다. 학생들은 제시된 분수의 크기를 비교하여 등호 또는 부등호로 표시하고 추론 과정을 문장 또는 그림으로 자세히 설명하도록 하였다. 서민정(2020)의 검사지에서 본 연구의 목적에 맞게 수정한 사항은 다음과 같다. 첫째, 동분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항은 삭제하였다. 둘째, 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항(5번)을 추가하였다. $\frac{9}{12}$와 $\frac{10}{13}$과 같이 분자, 분모의 차이가 같은 분수는 부분-전체 관점으로 시각적 모델에 표현하기 어려울 것이라는 연구자의 판단에 따라 학생들이 단위분수 관점에서 추론할 수 있을 것으로 기대되기 때문이다. 셋째, 기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항

(6번)을 수정하였다. 선행연구에서 $\frac{17}{40}$과 $\frac{62}{81}$의 크기를 비교하는 문항의 오답률이 가장 높다는 연구 결과를 바탕으로 $\frac{3}{8}$과 $\frac{2}{3}$로 분수를 변경하였다. 원래 문제의 분모가 커서 학생들이 기준 분수 $\frac{1}{2}$을 떠올리기 어려웠을 것으로 추측했기 때문이다. 넷째, $\frac{17}{40}$과 $\frac{61}{80}$과 같이 분모가 두 배 관계인 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항(8번)을 추가하여 분수 간 관점으로 추론하는지 분석하고자 하였다.

결과적으로 총 8가지 유형의 이분모 분수 크기 비교 문항을 제작하여 최종 검사지를 완성하였으며 각 유형별로 학생들에게 기대하는 추론 관점을 [표 3]과 같이 정리할 수 있다.

[표 3] 검사지 문항 유형 및 기대하는 추론 관점

번호	문항 유형	문항 내용	기대하는 추론 관점
1	단위분수	$\frac{1}{5} \bigcirc \frac{1}{4}$	부분-전체 관점 단위분수 관점
2	이분모 동치분수	$\frac{4}{8} \bigcirc \frac{3}{6}$	부분-전체 관점 분수 내 관점
3	분자가 같은 이분모 분수	$\frac{2}{7} \bigcirc \frac{2}{11}$	부분-전체 관점 단위분수 관점
4	1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수	$\frac{21}{22} \bigcirc \frac{6}{7}$	부분-전체 관점 단위분수 관점
5	분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수	$\frac{9}{12} \bigcirc \frac{10}{13}$	부분-전체 관점 단위분수 관점
6	기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수	$\frac{3}{8} \bigcirc \frac{2}{3}$	부분-전체 관점 분수 내 관점
7	가분수와 진분수	$\frac{7}{6} \bigcirc \frac{2}{3}$	부분-전체 관점 분수 내 관점
8	분모가 두 배 관계인 이분모 분수	$\frac{17}{40} \bigcirc \frac{61}{80}$	부분-전체 관점 분수 내 관점 분수 간 관점

검사 문항의 타당성 확보를 위해 연구 참여자와 동일 학교의 4학년 1개 학급에 예비 검사를 실시하였다. 예비 검사 결과, 학생들의 응답은 문항 제작 의도에 맞게 기대하는 추론 관점을 다양하게 활용한 것으로 나타났다.

3. 자료 수집 및 분석

자료 수집은 2023년 3월에 연구 참여자인 4학년 4개 학급 학생을 대상으로 40분 동안 이분모 분수 크기 비교 검사를 시행함으로써 이루어졌다. 학생들이 응답하여 제출한 96장의 검사지 결과 중 통분을 학습하지 않은 학생 63명의 검사지가 본 연구의 분석 대상이다.

자료 분석을 위해 63명의 검사지 응답을 채점하여 정답과 오답으로 구분하였다. 이분모 분수의 크기 비교 문제는 우연에 의해 답이 맞는 경우가 있기 때문에 답이 맞다고 하더라도 이유를 설명하지 않았거나 추론 과정이 타당하지 않은 경우에는 오답으로 분류하였다.

정오 분류 후, 문항 유형별로 정답자의 추론 관점과 오답자의 추론 관점을 '동치분수 관점'과 '변환 관점'을 제외한 Wenrick(2003)의 분류 틀([표 1])에 따라 분석하였다. 두 가지 관점을 제외한 이유는 통분을 학습한 이후에 활용 가능한 '동치분수 관점'과 '변환 관점'은 통분을 배우기 이전의 학생들의 추론을 분석하는 연구의 목적에 맞지 않는다고 판단하였기 때문이다. 추론 관점 중 '조각 관점'은 전체와 부분의 관계를 인식하지 않고 전체와 독립적인 조각으로서의 분수에 초점에 맞추는 관점이므로 동분모 분수 크기 비교 상황에서는 조각의 수를 비교하는 '조각 관점' 추론이 정당하지만, 이분모 분수 크기 비교 상황에서는 전체와 부분의 관계를 인식하는 것이 필수적이기 때문에 이분모 분수 크기 비교 검사지에서 '조각 관점'을 활용한 학생의 응답은 오답으로 처리하였다. 학생의 답변 중 두 가지 이상의 관점이 혼재하는 경우 Wenrick(2003)의 분류 틀에서 더 높은 수준의 관점으로 구분하였다. 예를 들어, $\frac{4}{8}$와 $\frac{3}{6}$의 크기를 비교하는 문항에서 학생이 '전체-부분을 나타낸 그림'으로 표현하고, '$\frac{4}{8}$는 8개 중 4개로 절반이고 $\frac{3}{6}$은 6개 중 3개로 절반이다.'라고 설명했다면 '부분-전체 관점'보다 더 높은 수준인 '분수 내 관점'으로 분류하였다.

문항 유형에 따라 정답자는 어떤 추론 관점을 가장 많이 활용하였는지 구분하고 정답자가 사용한 타당한 추론을 사례와 함께 상세히 분석하였다. 또한 유형별로 오답자가 가장 많이 사용한 추론 관점을 구분하고 추론 과정에서 나타난 추론 오류 분석을 통해 오류가 나

오게 된 배경 이유를 해석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 문항 유형별 정답률

연구 참여자 63명의 문항 유형별 정답률을 분석한 결과는 [표 4]와 같으며 정답률은 소수 둘째 자리에서 반올림하였다.

[표 4] 문항 유형별 정답률

문항 유형	문항 내용	4학년 학생(N=63)	
		정답자 (%)	오답자 (%)
단위분수	$\frac{1}{5} \bigcirc \frac{1}{4}$	30 (47.6)	33 (52.4)
이분모 동치분수	$\frac{4}{8} \bigcirc \frac{3}{6}$	20 (31.7)	43 (68.3)
분자가 같은 이분모 분수	$\frac{2}{7} \bigcirc \frac{2}{11}$	27 (42.9)	36 (57.1)
1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수	$\frac{21}{22} \bigcirc \frac{6}{7}$	19 (30.2)	44 (69.8)
분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수	$\frac{9}{12} \bigcirc \frac{10}{13}$	12 (19.0)	51 (81.0)
기준 분수 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 작은 이분모 분수	$\frac{3}{8} \bigcirc \frac{2}{3}$	21 (33.3)	42 (66.7)
가분수와 진분수	$\frac{7}{6} \bigcirc \frac{2}{3}$	17 (27.0)	46 (73.0)
분모가 두 배 관계인 이분모 분수	$\frac{17}{40} \bigcirc \frac{61}{80}$	11 (17.5)	52 (82.5)

유형별 정답률은 단위분수, 분자가 같은 이분모 분수, 기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수, 이분모 동치분수, 1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수, 가분수와 진분수, 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수, 분모가 두 배 관계인 이분모 분수 순으로 높게 나타났다. 단위분수의 크기를 비교하는 유형은 3학년 1학기 과정에서 단위분수의 크기 비교를 학습하였기 때문에 63명의 학생 중 거의 절반인 30명의 학생이 정당한 추론을 통해 문제를 해결하였다. 분자가 같은 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형은 학생들이 아직 학습하지 않은 내용임에도 불구하고 27명의 학생이 자신만의 논리적 추론을 통해 문제를 해결하였다. 반면 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형과 분모가 두 배 관계인 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 경우, 정답률이 10%대로 낮았으며 많은 학생이 문제해결 과정에서 추론 오류를 보였다.

2. 문항 유형별 추론 분석

유형별로 정답자와 오답자의 추론을 Wenrick(2003)의 관점에 따라 분류하여 분석한 결과, 모든 유형의 정답자 중 가장 많은 학생이 취한 관점은 ‘부분-전체 관점’이었다. 문항 유형 및 기대하는 추론 관점과 관계없이 학생들은 영역 모델, 길이 모델 등의 시각적 모델을 이용하여 분수를 표현하고 크기를 비교하는 ‘부분-전체 관점’을 가장 많이 이용하였다. 오답자의 추론을 분석한 결과, 가장 많은 학생이 취한 관점은 ‘제한된 관점’으로 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 경우였다. 분모와 분자의 크기가 모두 크면 분수의 크기가 더 크다고 추론한다던가, 분모와 분자의 합이 더 크면 분수의 크기가 더 크다고 추론하는 등 분수 개념에 대한 이해가 부족해 추론 오류를 보인 경우가 많았다. 다음은 유형별 정답자 및 오답자의 추론을 분석한 결과와 학생들의 응답 예시이다.

가. 단위분수

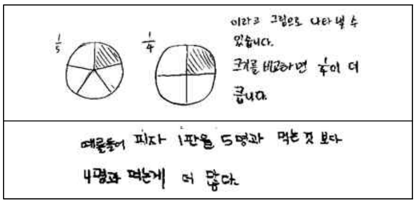
[표 5]에서 보듯이 정답자 중 가장 많은 학생이 사용한 추론 관점은 ‘부분-전체 관점’으로 영역 모델, 길이 모델 등을 이용하여 전체를 다섯 부분으로 나누었을 때 한 조각의 크기와 네 조각으로 나누었을 때 한 조각의 크기를 그림으로 표현하여 비교하였다. 나머지 학생들은 ‘단위분수 관점’을 활용해 추론하였는데 ‘분자가 1일 때에는 분모가 작은 분수가 더 크다.’는 일반화된 내용을 바탕으로 추론하거나 전체를 나누는 조각의 수를 비교하여 단위분수의 크기를 비교하였다.

오답자 중 대부분은 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 ‘제한된 관점’을 보였다. 단위분수의 크기를 비교하는 상황에서 자연수의 크기 비교와 같이 분모의 숫자만을 비교하는 오류가 가장 많았는데 이는 분수 하위 개념인 전체-부분 개념에 대한 이해가 부족하기 때문인 것으로 보인다. ‘조각 관점’을 취한 학생은 분모와 분자의 수를 전체와 독립적인 조각의 수로 생각해

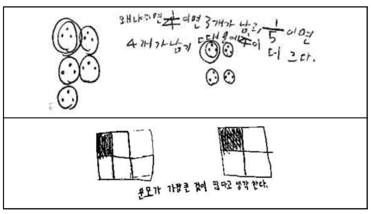
분모와 분자의 조각 수 차이로 크기를 비교하는 특징을 나타냈다. 이 학생은 분수의 크기를 비교할 때 전체에 대한 이해 없이 각 부분을 동등한 조각으로 취급하였다. ‘부분-전체 관점’을 보인 학생들은 부분-전체를 그림으로 나타내는 과정에서 전체의 크기를 동일하게 표현하지 않거나 다른 크기의 부분들로 나누는 오류를 보였다. 단위분수 크기 비교 문항에 대한 정·오답자의 추론 사례는 [그림 1], [그림 2]와 같다.

[표 5] 단위분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다.	17	30
	단위분수 관점	- 분자가 1일 땐 분모가 작을수록 크다. - 5개 중 1개보다 4개 중 1개가 더 크다. - 피자 1판을 5명이 나누어 먹는 것보다 4명이 나누어 먹는 것이 더 많다.	13	
오	제한된 관점	- $\frac{1}{5}$과 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{5}$이 밑에 있는 숫자가 더 크기 때문이다. - $\frac{1}{5}$은 5개 묶음이 1개 있고 $\frac{1}{4}$는 4개 묶음이 1개 있는 것이다.	24	33
	조각 관점	- $\frac{1}{5}$이면 5개 중 4조각이 남고 $\frac{1}{4}$이면 4개 중 3조각이 남기 때문에 $\frac{1}{4}$이 더 크다.	1	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다. - 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 등분할 하지 않고 나타낸다.	8	



[그림 1] 정답자 추론 예시(부분-전체 관점, 단위분수 관점)



[그림 2] 오답자 추론 예시(조각 관점, 부분-전체 관점)

나. 이분모 동치분수

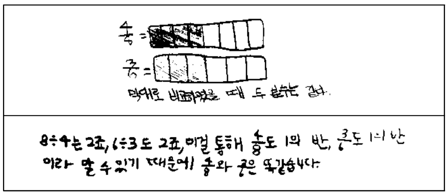
[표 6]에서 보듯이 정답자 중 가장 많은 학생이 사용한 추론 관점은 ‘부분-전체 관점’으로 $\frac{4}{8}$와 $\frac{3}{6}$을 시각적 모델에 표현하여 크기를 비교하였다. 나머지 학생들은 ‘분수 내 관점’을 취했는데 ‘$\frac{4}{8}$는 8개 중 4개로 절반이고, $\frac{3}{6}$도 6개 중 3개로 절반이라 크기가 같다.’와 같이 분모를 기준으로 하여 분자를 고려한 경우다.

[표 6] 이분모 동치분수 크기 비교 문항 추론 분석

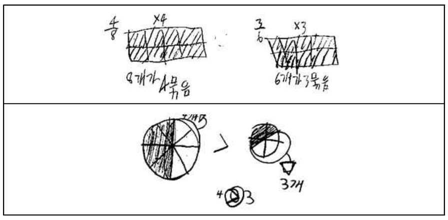
	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다. - $\frac{4}{8}$는 1의 절반이고, $\frac{3}{6}$도 1의 절반이다.	16	20
	분수 내 관점	- $\frac{4}{8}$는 8개 중 4개로 절반이고, $\frac{3}{6}$도 6개 중 3개로 절반이라 크기가 같다. - 8을 4로 나누면 2이고, 6을 3으로 나누면 2이다.	4	
오	제한된 관점	- $\frac{4}{8}$가 $\frac{3}{6}$보다 분모와 분자 모두 크다. - 분자가 1이 아닌 분수를 비교할 때는 분모의 크기를 비교한다. - $\frac{4}{8}$는 8개씩 4묶음이고 $\frac{3}{6}$는 6개씩 3묶음이다. - 4+8이 3+6보다 크기 때문에 $\frac{4}{8}$이 더 크다.	29	43
	조각 관점	- $\frac{4}{8}$는 4조각이고 $\frac{3}{6}$은 3조각이어서 조각 수가 많은 $\frac{4}{8}$가 더 크다.	4	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다. - 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 등분할하지 않고 나타낸다.	9	
	단위분수 관점	- $\frac{4}{8}$보다 $\frac{3}{6}$이 전체를 분모로 나눈 한 조각의 크기가 더 커서 $\frac{3}{6}$이 더 크다.	1	

오답자의 대부분은 ‘제한된 관점’을 취했다. ‘조각 관점’을 취한 학생들은 전체에 대한 이해 없이 각 부분을 동등한 조각으로 취급하여 4조각과 3조각의 크기를 비교하는 오류를 보였다. ‘부분-전체 관점’을 보인 학생들은 단위분수 크기 비교 문항의 오답자와 마찬가지로 부분-전체를 그림으로 나타내는 과정에서 전체의 크기를 동일하지 않게 표현한다던가 전체를 등분할하지 않고 부분의 개수를 나누는 오류를 보였다. ‘단위분수 관점’을 취한 학생은 $\frac{4}{8}$와 $\frac{3}{6}$에서 전체를 분모로 나눈 한 조각의 크기를 바르게 비교하였으나, 조각의 개수 즉,

분자의 크기를 비교하지 않았다. 이분모 동치분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 3], [그림 4]와 같다.



[그림 3] 정답자 추론 예시(부분-전체 관점, 분수 내 관점)



[그림 4] 오답자 추론 예시(제한된 관점, 조각 관점)

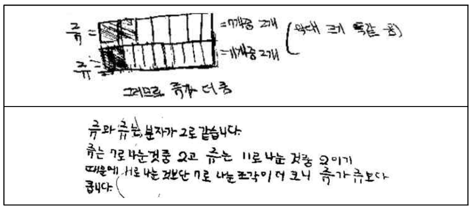
다. 분자가 같은 이분모 분수

정·오답자가 취한 관점과 추론 내용은 [표 7]과 같다. 정답자 중 절반 정도의 학생이 '부분-전체 관점'을 취하여 $\frac{2}{7}$와 $\frac{2}{11}$의 크기를 그림으로 표현하여 비교하였다. 나머지 절반 정도의 학생이 '단위분수 관점'을 취하였는데, '분자가 같을 때 분모가 작은 분수가 크다.'는 일반화된 내용을 바탕으로 추론하였다. 일부 학생은 단위분수의 정의를 바탕으로 하여 '$\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 2개인 분수이고 $\frac{2}{11}$는 $\frac{1}{11}$이 2개인 분수인데 $\frac{1}{7}$이 $\frac{1}{11}$보다 크기 때문이다.'라는 논리적인 추론을 보이기도 했다.

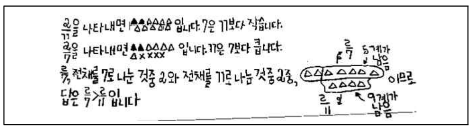
오답자 대부분이 '제한된 관점'을 취했다. '조각 관점'을 취한 학생의 경우, $\frac{2}{7}$과 $\frac{2}{11}$의 크기를 비교할 때 전체에 대한 이해 없이 분모, 분자의 숫자에 따라 조각의 수를 세는 모습을 보였다. 전체-부분 관계를 이해하지 못해 분자를 동일하게 2조각으로 생각하여 전체에서 모자란 조각 수가 적은 $\frac{2}{7}$가 더 크다고 추론하거나 분모, 분자 조각 수의 차이가 많은 $\frac{2}{11}$가 더 크다는 오류를 보이기도 했다. '부분-전체 관점'을 취한 학생은 앞의 문항에서와 마찬가지로 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그리는 오류를 보였다. 분자가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 5], [그림 6]과 같다.

[표 7] 분자가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다. - 7개 중 2개가, 11개 중 2개보다 크기 때문이다.	14	27
	단위분수 관점	- 분자가 같을 땐 분모가 작을수록 크다. - 같은 양을 7개로 나눈 것이 11개로 나눈 것보다 크다. - 전체를 더 많은 부분으로 나눈 단위분수의 크기가 더 작다. - $\frac{2}{7}$는 $\frac{1}{7}$이 2개인 분수이고 $\frac{2}{11}$는 $\frac{1}{11}$이 2개인 분수인데 $\frac{1}{7}$이 $\frac{1}{11}$보다 크기 때문이다.	13	
오	제한된 관점	- 11를 2로 나누면 7을 2로 나눈 것보다 크기 때문이다. - 7은 11보다 작기 때문이다. - 2과 11을 곱하면 22, 2과 7을 곱하면 14이다.	27	36
	조각 관점	- $\frac{2}{7}$는 2조각이고 $\frac{2}{11}$도 2조각인데 $\frac{2}{7}$는 5조각이 모자라고, $\frac{2}{11}$는 9조각이 모자라기 때문에 $\frac{2}{7}$가 더 크다. - $\frac{2}{7}$는 5조각이 남고 $\frac{2}{11}$는 9조각이 남기 때문에 $\frac{2}{11}$가 더 크다.	2	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다.	7	



[그림 5] 정답자 추론 예시(부분-전체 관점, 단위분수 관점)



[그림 6] 오답자 추론 예시(조각 관점)

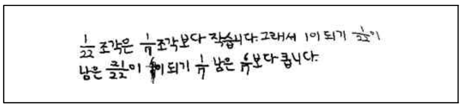
라. 1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수

[표 8]과 같이, 정답자 중 대부분의 학생이 '부분-전체 관점'을 취해 $\frac{21}{22}$과 $\frac{6}{7}$을 시각적 모델에 표현하여 크기를 비교하였다. 나머지 학생들은 두 분수 모두 1에서 단위분수만큼 모자라다는 사실을 발견하고 '단위분수 관점'으로 접근하여 논리적으로 추론하였다.

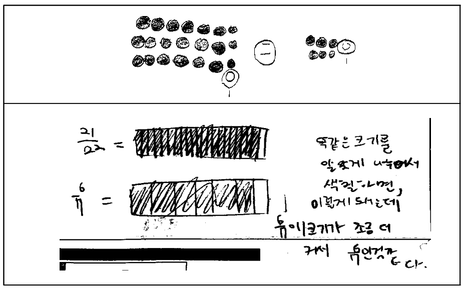
[표 8] 1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다.	13	19
	단위분수 관점	- 분모와 분자의 차이가 같을 때 분모가 큰 것이 더 크다. - $\frac{1}{22}$은 $\frac{1}{7}$보다 크기가 작기 때문에 1보다 더 적게 모자란 $\frac{21}{22}$이 더 크다.	6	
오	제한된 관점	- 부분-전체를 그림으로 올바르게 나타내지 못한다. - $\frac{21}{22}$이 $\frac{6}{7}$보다 분모와 분자 모두 크다. - $\frac{21}{22}$이 $\frac{6}{7}$보다 분모가 훨씬 크다. - 22조각 중 21조각은 90%이고 7조각 중 6조각도 90%이다. - 21+22가 6+7보다 크기 때문에 $\frac{21}{22}$이 더 크다.	32	44
	조각 관점	- $\frac{21}{22}$은 1조각이 부족하고 $\frac{6}{7}$도 1조각이 부족하기 때문에 크기가 같다.	5	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다.	4	
	단위분수 관점	- $\frac{21}{22}$은 전체를 22로 나누면 1이 더 작을 것 같기 때문에 $\frac{6}{7}$이 더 크다. - $\frac{21}{22}$보다 $\frac{6}{7}$이 전체를 분모로 나눈 한 조각의 크기가 더 커서 $\frac{6}{7}$가 더 크다.	3	

오답자 중 대부분은 '제한된 관점'을 취했으며, '조각 관점'으로 접근한 학생들은 모두 전체 조각 중 한 조각씩이 모자라기 때문에 두 분수의 크기가 같다고 응답하는 오류를 보였다. 이전 문항들과의 차이점은 '부분-전체 관점'으로 접근한 학생이 4명 밖에 되지 않았다는 점이다. $\frac{21}{22}$이 분모의 숫자가 크기 때문에 이전의 문항들과 같이 시각적 모델에 등분할하여 비교하는 방법을 선호하지 않았을 것으로 추측할 수 있다. '단위분수 관점'으로 접근한 학생의 경우 $\frac{21}{22}$보다 $\frac{6}{7}$에서 한 조각의 크기가 더 크다는 것은 이해하였으나, 단위분수의 크기를 비교하는 것이 아니라 1에서 단위분수만큼 모자란 양을 비교하는 추론 과정에서 오류를 보였다. 1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 7], [그림 8]과 같다.



[그림 7] 정답자 추론 예시(단위분수 관점)



[그림 8] 오답자 추론 예시(조각 관점, 단위분수 관점)

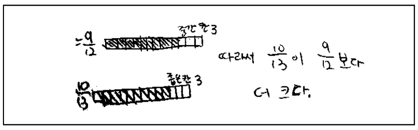
마. 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수

연구자는 그림으로 비교하기 어려운 분수가 주어졌을 때 학생들이 '부분-전체 관점'보다는 '단위분수 관점'을 떠올려 문제를 해결하게 하려는 의도로 문항을 구성하였다. 그러나 [표 9]에 제시된 분석 결과와 같이, 정답자 중 '부분-전체 관점'을 취한 학생이 9명으로 더 많았으며, 연구자가 기대한 '단위분수 관점'으로 추론한 학생은 단 3명 뿐이었다. 이를 통해 학생들은 분수의 형태적 특징을 고려하여 추론하기보다 익숙한 방식의 시각적 모델을 활용하는 경향이 있다는 것을 알 수 있다. '단위분수 관점'을 활용한 학생들은 $\frac{9}{12}$와 $\frac{10}{13}$이 1에서 모자란 양이 각각 $\frac{3}{12}$과 $\frac{3}{13}$이므로 3번 문항과 같이 분자가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항으로 바꾸어 $\frac{10}{13}$이 더 크다고 추론하였다.

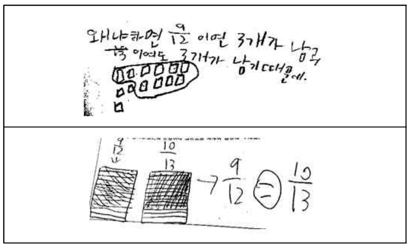
[표 9] 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다.	9	12
	단위분수 관점	- 분모와 분자의 차이가 같을 때 분모가 큰 것이 더 크다. - $\frac{9}{12}$는 1에서 $\frac{3}{12}$이 부족하고 $\frac{10}{13}$은 1에서 $\frac{3}{13}$이 부족한데, $\frac{1}{12}$이 $\frac{1}{13}$보다 크기 때문에 $\frac{3}{12}$이 $\frac{3}{13}$보다 커서 $\frac{9}{12}$이 더 작다.	3	
오	제한된 관점	- 분자와 분모의 차이가 같기 때문에 두 분수의 크기가 같다. - $\frac{10}{13}$이 $\frac{9}{12}$보다 분모가 크다. - $\frac{10}{13}$이 $\frac{9}{12}$보다 분자가 크다. - 9+12보다 10+13이 크기 때문에 $\frac{10}{13}$이 더 크다.	35	51
	조각 관점	- $\frac{9}{12}$도 1이 되려면 3조각이 부족하고 $\frac{10}{13}$도 1이 되려면 3조각이 부족하기 때문에 크기가 같다.	3	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다. - 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 등분할하지 않고 나타낸다.	10	
	단위분수 관점	- $\frac{10}{13}$보다 $\frac{9}{12}$이 전체를 분모로 나눈 한 조각의 크기가 더 커서 $\frac{9}{12}$가 더 크다. - 전체를 12로 나눈 것이 13으로 나눈 것보다 작기 때문에 $\frac{9}{12}$가 더 작다.	3	

오답자의 대부분은 ‘제한된 관점’으로 추론 과정에서 오류를 보였다. ‘조각 관점’으로 접근한 학생의 경우 전체-부분 관계를 이해하지 못하고 두 분수 모두 전체 조각 중 세 조각씩 모자라기 때문에 두 분수의 크기가 같다고 추론하는 오류를 보였다. ‘부분-전체 관점’을 취한 많은 학생이 추론 과정에서 오류를 보였다. 이 문항은 비교하는 분수의 분모 모두 크지 않은 숫자이지만 두 분수의 분모 간, 분자 간 숫자가 비슷하며 시각적 모델에 13등분하여 표현하기 어렵기 때문에 추론 오류를 보였을 것으로 추측된다. ‘단위분수 관점’으로 접근한 학생의 경우 $\frac{10}{13}$보다 $\frac{9}{12}$에서 한 조각의 크기가 더 크다는 것은 이해하였으나, 단위분수의 크기를 비교하는 것이 아니라 1에서 단위분수만큼 모자란 양을 비교하는 과정에서 오류를 보였다. 분자와 분모의 차이가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 9], [그림 10]과 같다.



[그림 9] 정답자 추론 예시(단위분수 관점)



[그림 10] 오답자 추론 예시(조각 관점, 부분-전체 관점)

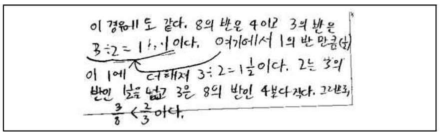
바. 기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수

[표 10]과 같이, 정답자 중 대부분이 ‘부분-전체 관점’을 취하여 $\frac{3}{8}$과 $\frac{2}{3}$의 크기를 비교하였다. 나머지 학생들은 ‘분수 내 관점’으로 접근하여 분모와 분자 사이의 양에 초점을 맞추어 분모가 분자의 두 배보다 큰지 작은지 비교하여 추론하였다.

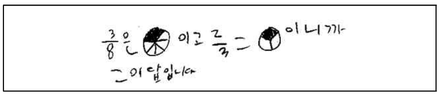
오답자 중 앞의 문항들과 마찬가지로 ‘제한된 관점’으로 접근한 학생이 가장 많았다. ‘조각 관점’으로 접근한 학생의 경우 우연히 정답은 맞았으나 추론 과정에서 전체의 크기를 고려하지 않고 조각의 수만을 비교하는 추론 오류를 보였기 때문에 오답으로 처리하였다. ‘단위분수 관점’으로 접근한 학생의 경우, $\frac{1}{8}$과 $\frac{1}{3}$의 크기를 비교하는 단위분수 크기 비교 과정에서 추론 오류를 보여 오답을 낳게 되었다. 기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 11], [그림 12]와 같다.

[표 10] 기준 분수 $\frac{1}{2}$보다 크거나 작은 이분모 분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다. - 3조각으로 나눈 것 중 2조각이, 8조각으로 나눈 것 중 3조각보다 크기 때문이다.	17	21
	분수 내 관점	- $\frac{3}{8}$에서 3은 8의 절반인 4보다 작고, $\frac{2}{3}$에서 2는 3의 절반인 1.5보다 크므로 $\frac{2}{3}$가 더 크다. - 3은 8의 절반이 안돼서 $\frac{1}{2}$보다 작고, 2는 3의 절반이 넘어서 $\frac{1}{2}$보다 크기 때문에 $\frac{2}{3}$이 더 크다.	4	
오	제한된 관점	- $\frac{3}{8}$이 $\frac{2}{3}$보다 분모, 분자가 모두 크기 때문이다. - 3+8이 2+3보다 크니까 $\frac{3}{8}$이 더 크다.	33	42
	조각 관점	- $\frac{3}{8}$도 1이 되려면 5조각이 부족하고 $\frac{2}{3}$는 1이 되려면 1조각이 부족하기 때문에 $\frac{2}{3}$가 더 크다.	1	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다. - 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 등분할하지 않고 나타낸다.	7	
	단위분수 관점	- $\frac{1}{8}$이 $\frac{1}{3}$보다 크기 때문에 $\frac{1}{8}$이 3개인 $\frac{3}{8}$이, $\frac{1}{3}$이 2개인 $\frac{2}{3}$보다 크다	1	



[그림 11] 정답자 추론 예시(분수 내 관점)



[그림 12] 오답자 추론 예시(부분-전체 관점)

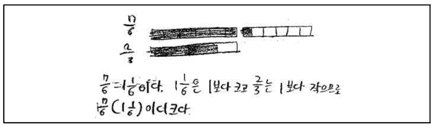
사. 가분수와 진분수

'분수 내 관점'으로 접근해서 가분수와 진분수의 크기 비교로 추론하거나 $\frac{7}{6}$을 $1\frac{1}{6}$로 바꾸어 대분수와 진분수의 크기 비교로 바꾸어 추론할 것이라는 연구자의 예상과 달리, [표 11]에서 보듯이 정답자의 대부분이 '부분-전체 관점'을 취하여 $\frac{7}{6}$와 $\frac{2}{3}$의 크기를 비교하였다. 5명의 학생만이 '분수 내 관점'으로 접근하여 1보다 큰 분수와 1보다 작은 분수로 구분하여 크기를 비교하였다. 이를 통해 학생들이 분수의 크기 비교를 추론할 때 분수의 형태적 특징을 고려하기보다 기존에 정형화된 방식의 추론 방법을 선호한다는 것을 알 수 있다.

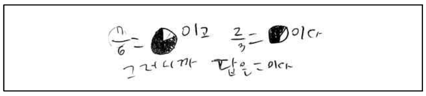
오답자의 경우, 앞의 문항들과 마찬가지로 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 까닭에 '제한된 관점'을 보이는 학생이 대부분이었다. 특히 '$\frac{7}{6}$이 가분수이기 때문에 작다.'라고 응답한 학생의 경우, 가분수와 진분수를 구분할 수는 있지만 가분수의 크기에 대한 양감이 부족하여 가분수가 1 이상이라는 사실과 가분수가 진분수보다 항상 크다는 사실을 이해하고 있지 않다는 것을 추측할 수 있다. 가분수와 진분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 13], [그림 14]와 같다.

[표 11] 가분수와 진분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다.	12	17
	분수 내 관점	- $\frac{7}{6}$은 분자가 분모보다 커서 1보다 크고 $\frac{2}{3}$는 분자가 분모보다 작아서 1보다 작다.	5	
오	제한된 관점	- $\frac{7}{6}$이 가분수이기 때문에 작다. - $\frac{7}{6}$이 $\frac{2}{3}$보다 분모, 분자가 더 크기 때문이다. - 전체를 6으로 나눈 것이 3으로 나눈 것보다 작기 때문에 $\frac{2}{3}$가 더 크다. - 7+6이 2+3보다 크니까 $\frac{7}{6}$이 더 크다.	42	46
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다.	4	



[그림 13] 정답자 추론 예시(전체-부분 관점, 분수 내 관점)



[그림 14] 오답자 추론 예시(부분-전체 관점)

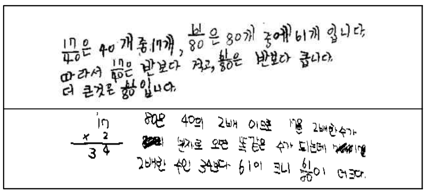
아. 분모가 두 배 관계인 이분모 분수

연구자는 학생들이 분모가 두 배 관계인 이분모 분수에서 분자 사이의 관계를 비교해봄으로써 분수의 크기를 추론하는 '분수 간 관점'을 취해 문제를 해결하게 하려는 의도로 문항을 구성하였다. 그러나 정답자의 추론 내용 분석 결과([표 12]) '부분-전체 관점'을 취한 학생이 6명으로 가장 많았으며 '분수 내 관점'과 '분수 간 관점'으로 접근한 학생은 2명씩 있었다. '분수 내 관점'을 취한 학생의 추론 내용 중 '$\frac{17}{40}$은 1에서 $\frac{23}{40}$이 모자라고 $\frac{61}{80}$은 1에서 $\frac{19}{80}$가 모자라는데, 그림과 같이 $\frac{23}{40}$이 $\frac{19}{80}$보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 더 크다.'와 같이 분자와 분모 사이의 관계를 바탕으로 추론 후 부분-전체 관점을 활용하는 과정을 거쳐 논리적으로 추론한 학생이 있었다. 또 한 가지 주목할 만한 점은 연구자가 학생들에게 기대했던 추론 관점 이외의 관점을 보인 학생이 있었다는 점이다. 이 학생은 '단위분수 관점'으로 추론하였는데, 1보다 단위분수만큼 작은 이분모 분수의 크기를 비교하는 문항에서와 같이 1에서 부족한 양을 비교하는 방법으로 추론하였다. 이 학생의 경우 단위분수를 기준으로 분수의 크기를 추론하는 것을 선호하는 것으로 해석된다.

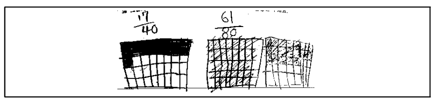
앞의 문항들과 마찬가지로 오답자의 대부분이 '제한된 관점'을 보였다. '조각 관점'으로 접근한 학생의 경우, 1에서 모자란 양을 비교할 때 단위분수의 크기를 비교하는 것이 아니라 조각의 수를 비교하는 추론 오류를 보였다. 분모가 40과 80으로 매우 큰 분수이기 때문에 전체-부분의 양을 나타낸 시각적 모델로 비교하기 어려워 다른 문항과 달리 '부분-전체 관점'을 취한 학생은 6명으로 매우 적었다. '단위분수 관점'으로 접근한 학생의 경우, 분자와 관계없이 분모의 크기만을 기준으로 단위분수 조각의 크기를 비교하는 추론 오류를 보였다. 분모가 두 배 관계인 이분모 분수 크기 비교 문항에 대한 정답자와 오답자의 추론 사례는 [그림 15], [그림 16]과 같다.

[표 12] 분모가 두 배 관계인 이분모 분수 크기 비교 문항 추론 분석

	관점	추론 내용	학생수	
정	부분-전체 관점	- 부분-전체를 나타낸 그림으로 설명한다. - 80조각으로 나눈 것 중 61조각이, 40조각으로 나눈 것 중 17조각보다 더 크다.	6	11
	단위분수 관점	- $\frac{17}{40}$은 1에서 $\frac{23}{40}$이 모자라고 $\frac{61}{80}$은 1에서 $\frac{19}{80}$가 모자라는데, $\frac{1}{40}$은 $\frac{1}{80}$보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 크다.	1	
	분수 내 관점	- $\frac{17}{40}$은 1에서 $\frac{23}{40}$이 모자라고 $\frac{61}{80}$은 1에서 $\frac{19}{80}$가 모자라는데, 그림과 같이 $\frac{23}{40}$이 $\frac{19}{80}$보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 더 크다. - $\frac{17}{40}$에서 17은 40의 절반보다 작고, $\frac{61}{80}$에서 61은 80의 절반인 40보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 더 크다.	2	
	분수 간 관점	- 80은 40의 두 배이고, 61은 17의 두 배인 34보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 더 크다.	2	
오	제한된 관점	- $\frac{61}{80}$이 $\frac{17}{40}$보다 분자가 훨씬 더 크기 때문이다. - $\frac{61}{80}$이 $\frac{17}{40}$보다 분모, 분자가 모두 크기 때문이다. - 17+40이 61+80보다 작으니까 $\frac{61}{80}$이 더 크다.	42	52
	조각 관점	- $\frac{17}{40}$은 1이 되려면 23조각이 부족하고 $\frac{61}{80}$은 1이 되려면 19조각이 부족하기 때문에 $\frac{61}{80}$이 더 크다.	2	
	부분-전체 관점	- 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 전체의 크기를 다르게 그린다. - 부분-전체를 그림으로 나타낼 때 등분할하지 않고 나타낸다.	6	
	단위분수 관점	- $\frac{17}{40}$은 1을 40조각으로 나누고 $\frac{61}{80}$은 1을 80조각으로 나누기 때문에 $\frac{17}{40}$이 한 조각의 크기가 더 크다.	2	



[그림 15] 정답자 추론 예시(분수 내 관점, 분수 간 관점)



[그림 16] 오답자 추론 예시(부분-전체 관점)

V. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 분수 이해 및 수 감각을 바탕으로 한 이분모 분수의 크기 비교에 대한 학생들의 추론을 분석하여 이분모 분수의 크기 비교 추론 지도에 관한 시사점을 도출하는 데 있다. 이분모 분수 크기 비교 검사의 8가지 문항별 정답자 및 오답자의 추론을 Wenrick(2003)의 관점에서 분석한 결과를 토대로 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다.

첫째, 동치분수 및 통분을 학습하기 이전의 학생 중 다수가 분수 감각을 바탕으로 한 추론을 통해 다양한 수준에서 이분모 분수 크기를 비교할 수 있다는 결과는 통분 없이 추론을 통한 이분모 분수 크기 비교의 교수·학습 가능성을 보여준다. 이분모 분수 크기 비교 검사지의 8개 문항 중에서 정답률이 30%가 넘는 문항이 5개였다. 정답률이 가장 낮은 문항의 정답률은 17.5%였으나, 김유경, 황현미(2016)와 서민정(2020)과 달리 본 연구의 참여자는 통분을 아직 학습하지 않았음을 감안한다면 초등학교 4학년 학생들에게 분수 감각을 활용하여 분수의 크기를 비교하는 수학적 추론 능력이 있음을 알 수 있다. 특히, 비교적 낮은 수준의 ‘부분-전체 관점’과 ‘단위분수 관점’을 넘어서 분수 내에서 분모, 분자의 자연수로서의 관계에 초점을 맞춰야 하는 ‘분수 내 관점’과 분모 간, 분자 간 관계에 초점을 맞춰야 하는 ‘분수 간 관점’과 같이 비교적 높은 수준의 추론 관점을 취한 학생들이 확인되었다. 또한 학생들 중 분수의 형태적 특징을 관찰하고 문항 유형에 적합한 추론 관점을 취하여 8개 문항을 해결하는 데에 3가지 이상의 추론 관점을 보인 학생들도 있었다. 분모가 두 배 관계인 이분모 분수의 크기 비교를 추론하는 문항의 경우, 연구자가 학생들에게 기대한 추론 관점은 ‘부분-전체 관점’, ‘분수 내 관점’, ‘분수 간 관점’이었다. 그러나 학생들의 추론 내용을 분석한 결과, 연구자가 기대한 추론 관점 이외의 관점을 보인 학생이 1명 있었다. 이 학생은 ‘단위분수 관점’으로 문제에 접근하였는데 ‘$\frac{17}{40}$은 1에서 $\frac{23}{40}$이 모자라고 $\frac{61}{80}$은 1에서 $\frac{19}{80}$가 모자라는데, $\frac{1}{40}$은 $\frac{1}{80}$보다 크기 때문에 $\frac{61}{80}$이 크다.’고 응답하였다. 이 학생은 분수의 크기를 비교할 때 단위분수 크기 인식을 중요하게 여겨 단위분수를 기준으로 분수의 크기를 비교하는 추론 과정을 거쳤음을 알 수 있었다. 이와 같이 연구자가 예상한 방법 이외의 방법으로도 자신만의 분수 감각을 활용해 분수의 크기를 추론하였다.

둘째, 이분모 분수 크기 비교 추론 과정에서 학생들이 가장 선호한 관점은 ‘부분-전체 관점’이었다. 서민정(2020)의 연구 결과와 마찬가지로 이분모 분수 크기 비교에서 대부분의 학생이 ‘부분-전체 관점’을 취해 문제를 해결하고자 했으며 ‘분수 내 관점’, ‘분수 간 관점’과 같이 높은 수준의 추론 관점을 활용한 학생의 수는 비교적 적었다. 학생들이 연구자의 문항 선정 의도 및 문항 유형에 관계없이 전체-부분으로서의 분수 개념에 근거한 ‘부분-전체 관점’으로 문제에 접근하였다. 이는 학생들이 문항 유형에 따라 추론 관점을 취하기보다 자신이 선호하는 추론 관점을 바탕으로 문항에 접근하는 것으로 해석된다. 즉, 학생들은 분수 개념 도입 시 부분-전체로서 학습하였기 때문에 익숙하지 않은 문제에 대해 분수 개념 이해 시 토대가 되었던 부분-전체로서의 분수와 같은 맥락의 관점을 취한 것으로 해석된다. 더욱이 동일한 관점이라도 추론의 적절성은 사용한 시각적 표현에 의존함을 확인하였다. ‘부분-전체 관점’을 취한 경우, 주어진 이분모 분수의 크기 비교를 추론하는 데 활용한 시각적 모델의 적합 여부에 따라 정답과 오답이 나뉘는 것으로 확인되었다. 시각적 모델에서 나타낸 영역의 크기에 따라 분수의 크기를 비교하게 되는데, 전체의 크기나 등분할과 같은 요소의 적합 여부에 따라 정오답이 갈리게 되는 것이다. ‘부분-전체 관점’을 취한 오답자의 경우, 전체-부분으로서의 분수 개념에 대한 이해가 부족하여 분수를 시각적 모델에 표현하는 과정에서 전체를 부분으로 등분할하지 않는 오류를 보였다. 한편 학생들은 3학년 1학기 과정에서 단위분수 크기를 비교하는 방법을 학습하였음에도 이분모 분수의 크기를 비교할 때 ‘단위분수 관점’을 취한 경우가 드물었다. 단위분수의 크기를 비교하는 유형의 문항과 분자가 동일한 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항과 같이 ‘단위분수 관점’으로 추론하는 것이 가장 효율적인 문항에서조차 많은 학생이 ‘부분-전체 관점’을 취했다. 이를 통해 이분모 분수 크기 비교 추론 시, 학생들은 분수의 형태적 특징을 고려하기보다 교과서에 많이 제시되어 익숙한 시각적 모델을 활용해 추론한다는 것을 알 수 있다.

셋째, 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 학생들

은 분수의 크기에 대한 양감이 부족하여 이분모 분수의 크기 비교 추론에 어려움을 보였다. 모든 문항에서 가장 많은 오답자가 보인 관점은 '제한된 관점'이다. '제한된 관점'은 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 관점으로, 분모와 분자의 크기 모두 크면 분수의 크기가 더 크다던가, 분모와 분자의 합이 더 크면 분수의 크기가 더 크다 등의 답변이 해당한다. 이와 같이 분수를 비교하는 데 필요한 개념적 이해가 부족한 학생은 분모, 분자의 자연수 각각을 바탕으로 하여 분수 크기 비교를 자연수 크기 비교로 환원하는 오류를 보였다. 이분모 분수 크기 비교 검사에서 단위분수, 이분모 동치분수, 분자가 같은 이분모 분수의 크기를 비교하는 유형의 문항은 분수에 대한 개념적인 이해를 바탕으로 '부분-전체 관점'으로 접근한다면 비교적 쉽게 추론이 가능한 문항이었다. 비교적 낮은 수준의 추론을 요구하는 단위분수 크기 비교 문항 또는 이분모 동치분수 크기 비교 문항 또는 분자가 같은 이분모 분수 크기 비교 문항만을 틀린 학생은 없었으며, 세 문항에서 추론 오류를 보인 학생은 전체 문항에서 오류를 보인 경우가 대부분이었다. 이를 통해 분수에 대한 개념적인 이해가 부족한 학생들은 분수의 크기에 대한 양감이 부족할 수 밖에 없으며 이분모 분수 크기 비교 추론에 어려움을 보인다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 이분모 분수 크기 비교 검사지의 가분수와 진분수의 크기를 비교하는 문항에서 '$\frac{7}{6}$이 가분수이기 때문에 작다.' 라고 응답한 학생이 있었는데, 이 학생은 $\frac{7}{6}$이 가분수임은 구분할 수 있지만 가분수와 진분수의 크기에 대한 양감이 부족하여 추론에 오류를 보였다는 것을 알 수 있다.

본 연구 결과에 대한 논의를 토대로 이분모 분수 크기 비교 추론 지도를 위한 제언을 하고자 한다. 첫째, 이분모 분수 크기 비교 추론 지도를 위해 학습의 전개 방식 및 내용 배열의 재구성을 고려할 필요가 있다. 2009 개정 교육과정부터 2022 개정 교육과정에 이르기까지 분모가 다른 분수의 크기 비교를 가르칠 때, 수 감각을 이용한 추론 및 토론 활동을 교육과정에서 강조하고 있다. 그러나 2015 개정 교육과정기까지 교과서를 분석한 결과, 이분모 분수 크기 비교 추론 활동은 지도 순서에 있어서 동치분수 및 통분 학습 이후 차시에서 제시된다. 이 경우 학생들은 분수 개념 및 감각만으로 충분히 추론할 수 있는 이분모 분수의 크기 비교도 통분에 의존할 수밖에 없게 된다(서민정, 2020). 본 연구 결과, 학생들은 통분과 같은 정형화된 방법 이외에 분수 감각을 활용한 수학적 추론을 통해 이분모 분수의 크기를 충분히 비교해낼 수 있었다. 따라서 동치분수 및 통분 학습 이전에 이분모 분수의 크기를 비교하는 추론 활동을 제시함으로써 학생들의 분수 감각을 신장시킬 필요가 있다.

둘째, 이분모 분수 크기 비교 추론 지도를 위해 다양한 유형의 이분모 분수 크기 비교 활동을 고안하여 적용할 필요가 있다. 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서에 제시된 추론 활동을 Wenrick(2003)의 관점에 따라 분류해보면 6개의 추론 활동 중 5개의 추론 활동에서 '부분-전체 관점'을 활용한다. '부분-전체 관점'과 함께 '단위분수 관점', '분수 내 관점', '분수 간 관점'도 혼합되어 제시되어 있지만 '부분-전체 관점'의 비중이 크다는 사실을 알 수 있다. 더욱이 이분모 분수 크기 비교 검사 결과 역시 학생들이 활용한 관점 또한 '부분-전체 관점'에 국한되고 '분수 내 관점', '분수 간 관점'과 같이 정교한 추론 관점을 활용한 학생의 수는 비교적 적다는 점에서 다양한 추론 관점 지도의 필요성이 제기된다. 또한 이분모 분수 크기 검사에서 유형별로 선호되는 관점이 상이하므로 문항 구성 시 다양한 요인을 고려할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강완, 강태석(2003). 분수의 크기 비교 지도 방법의 교수학적 변환 분석. 한국초등교육, 14(1), 35-64.

강태석(2001). 초등학교 수학 교과서에 나타난 분수의 크기 비교 지도 방법에 관한 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육과학기술부(2012). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2011-361호.

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호.

교육부(2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호.

권성룡(1997). 측정 활동을 통한 분수 학습 프로그램의 효과에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사

학위논문.
김옥경(1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업방안에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
김유경, 황현미(2016). 초등학생들의 분수의 크기 비교 전략 분석. 수학교육학 연구, 26(4), 663-682.
서민정(2020). 분수의 크기 비교에 대한 초등학교 4학년과 6학년 학생들의 문제해결 전략과 오류 분석. 광주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.
신준식(1996). 실제적 접근 방법에 의한 분수 교수-학습에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.
이대현(2018). 한국, 일본, 싱가포르, 미국, 핀란드의 수학 교과서에 제시된 분수 지도 내용의 비교·분석. 한국수학교육학회지, 21(2), 111-130.
정은실(2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. 학교수학, 8(2), 123-138.
홍은숙, 강완(2008). 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식. 한국초등수학교육학회지, 12(1), 59-78.
Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.
Clark, D. M., & Winkelman, N. W. (2018). The benefits of inferential reasoning in learning fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 49(1)*, 66-103.
Cramer, K. & Wyberg, T. (2007). When getting the right answer is not always enough: Connecting how students order fractions and estimate sums and differences. In W. G. Martin & M. E. Strutchens (Eds.), *The learning of mathematics, 69th Yearbook of the NCTM* (pp. 205-220). NCTM.
DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 40(1)*, 71-82.
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1 - 27). Lawrence Erlbaum Associates.
Kieren, T. E. (1976). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard(Eds.), *Numbers and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-150). ERIC/SMEAC.
Moss, J., & Case, T. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-148.
Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction, 13*(1), 3-50.
Wenrick, M. R. (2003). *Elementary students' use of relationships and physical models to understand order and equivalence of rational numbers* [Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas].

An Analysis on Reasoning of 4th-Grade Elementary School Students in Comparing Unlike Fraction Magnitudes

Yoon, Chaerin
Seoul Gangdeok Elementary School
E-mail : yund0121@sen.go.kr

Chang, Hyewon†
Seoul National University of Education
E-mail : hwchang@snue.ac.kr

The importance of reasoning processes based on fractional concepts and number senses, rather than a formalized procedural method using common denominators, has been noted in a number of studies in relation to compare the magnitudes of unlike fractions. In this study, a unlike fraction magnitudes comparison test was conducted on fourth-grade elementary school students who did not learn equivalent fractions and common denominators to analyze the reasoning perspectives of the correct and wrong answers for each of the eight problem types. As a result of the analysis, even students before learning equivalent fractions and reduction to common denominators were able to compare the unlike fractions through reasoning based on fractional sense. The perspective chosen by the most students for the comparison of the magnitudes of unlike fractions is the 'part-whole perspective', which shows that reasoning when comparing the magnitudes of fractions depends heavily on the concept of fractions itself. In addition, it was found that students who lack a conceptual understanding of fractions led to difficulties in having quantitative sense of fraction, making it difficult to compare and infer the magnitudes of unlike fractions. Based on the results of the study, some didactical implications were derived for reasoning guidance based on the concept of fractions and the sense of numbers without reduction to common denominators when comparing the magnitudes of unlike fraction.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : comparing of unlike fraction magnitudes, elementary school mathematics, error, reasoning
† Corresponding Author