

# 탄성영역이 없는 $J_2$ -경계면 소성모델

신호성\* · 오세봉\*\* · 김재민\*\*\*

Shin, Hosung\*, Oh, Seboong\*\*, Kim, Jae-min\*\*\*

## $J_2$ -bounding Surface Plasticity Model with Zero Elastic Region

### ABSTRACT

Soil plasticity models for cyclic and dynamic loads are essential in non-linear numerical analysis of geotechnical structures. While a single yield surface model shows a linear behavior for cyclic loads,  $J_2$ -bounding surface plasticity model with zero elastic region can effectively simulate a nonlinearity of the ground response with the same material properties. The radius of the yield surface inside the boundary surface converged to 0 to make the elastic region disappear, and plastic hardening modulus and dilatancy define plastic strain increment. This paper presents the stress-strain incremental equation of the developed model, and derives plastic hardening modulus for the hyperbolic model. The comparative analyses of the triaxial compression test and the shallow foundation under the cyclic load can show stable numerical convergence, consistency with the theoretical solution, and hysteresis behavior. In addition, plastic hardening modulus for the modified hyperbolic function is presented, and a methodology to estimate model variables conforming 1D equivalent linear model is proposed for numerical modeling of the multi-dimensional behavior of the ground.

**Keywords** :  $J_2$ -bounding surface plasticity model, Cyclic load, Modified hyperbolic model, FEM

### 초록

반복하중이나 동적하중에 대한 지반의 소성모델은 지반구조물의 비선형 수치해석에 매우 중요하다. 단일 항복면 모델은 반복하중에 대해 선형적 거동을 보이는 반면, 개발된 탄성영역이 없는  $J_2$ -경계면 소성모델은 동일한 물성치로 효과적으로 지반의 비선형성을 모사할 수 있다. 경계면 내부 항복면의 반경을 0으로 수렴시켜 탄성영역이 사라지도록 수식화하고, 소성경화 계수와 팽창률을 이용하여 소성변형 증분을 정의하였다. 개발된 모델의 응력-변형률 증분식을 제시하고, 쌍곡선 모델에 대한 소성경화 계수를 유도하였다. 삼축압축조건과 얇은기초의 반복하중에 대한 비교해석은 개발된 모델의 안정적인 수렴성, 이론식과의 일치성, 그리고 이력경로를 보여 주었다. 또한, 수정된 쌍곡선함수에 대한 소성경화 계수를 제시하여, 1차원 등가선형모델에 부합하는 모델변수 산정법을 제안하여 지반의 다차원 거동을 모델링할 수 있도록 하였다.

**검색어** :  $J_2$ -경계면 소성모델, 반복하중, 수정쌍곡선 모델, 유한요소법

## 1. 서론

유사 연속체(pseudo-continuum)에 해당하는 토사지반은 개별 입자의 집합으로, 대부분의 변형률 범위에서 비선형적인 응력-변형률 거동을 보인다(Kramer, 1996). 지반의 역학적 거동을 모사하기 위한 단일 항복면(single yield surface) 모델은 응력 공간을 탄성과

소성영역을 분리하며, 과도한 탄성영역과 탄소성 경계에서 급격한 강성 변화를 발생시키는 문제가 있다. 또한 응력 전환(stress reversal)이 발생하는 반복하중(cyclic load)에 대한 지반의 복잡한 거동을 모델링하기 어렵다(Yu, 2006).

지반의 비선형적 응력-변형률 관계를 모사하기 위하여 제안된 경계면 소성모델(bounding surface plasticity model)은 경계면에

\* 종신회원 · 교신저자 · 울산대학교 건설환경공학부 교수 (Corresponding Author · University of Ulsan · shingeo@ulsan.ac.kr)

\*\* 종신회원 · 영남대학교 건설시스템공학과 교수 (Yeungnam University · sebungoh@yu.ac.kr)

\*\*\* 종신회원 · 전남대학교 토목공학과 교수 (Chonnam National University · jm4kim@jnu.ac.kr)

Received January 19, 2023/ revised March 30, 2023/ accepted May 10, 2023

대한 항복면의 상대적인 위치로부터 경화함수를 산정하여 매끄러운(smooth) 응력-변형을 곡선을 재현할 수 있다(Dafalias and Popov, 1975; Dafalias and Taiebat, 2016; Yu, 2006). 따라서, 교통하중, 지진, 바람 및 파동 등과 같은 반복하중에 대한 토사지반의 비선형적인 응력-변형을 이력(hysteretic) 거동을 재현할 수 있다(Yu et al., 2007).

입상(granular)의 지반은 극도로 제한된 변형을 범위에서만 탄성 거동을 보이므로, 응력공간에서 항복면의 크기를 0으로 수렴시켜 탄성영역을 사라지게 하면서 항복면을 현재의 응력점으로 축소하는 연구가 수행되었다(Borja and Amies, 1994; Dafalias and Popov, 1977). 하지만 대부분의 연구는 요소 레벨의 단순 응력공간에서 전단변형에 대한 수식화만을 제시하고, 다차원적인 수치해석에 적용한 사례는 부족하다(Borja et al., 1999; Pisanò and Jeremić, 2014; Restrepo and Taborda, 2018).

본 논문에서는  $J_2$ -소성모델에 탄성영역이 없는 경계면 개념을 도입하고 실용적인 등방응력 의존적응력-변형을 증분 관계식을 제시한다. 그리고 제안된 소성모델의 이론식에 대한 검증과 알은기 초에 작용하는 반복하중에 대한 예제해석을 수행하고자 한다.

## 2. 경계면 소성모델의 수식화

### 2.1 탄성영역이 없는 $J_2$ -경계면 소성모델

$J_2$  소성모델은 편차응력 텐서에 대한 응력 불변량(stress invariant)  $J_2$ 를 변수로 항복면을 정의한다. 경계면 소성모델에서 항복면(yield surface)와 경계면(bounding surface)는 편차응력에 대한  $\pi$  평면에서 원(circle)으로 표현된다(Fig. 1). 그리고 경계면은 등방응력  $p$ 에 대하여 선형적으로 의존적이다.

$$\text{Yield surface } f = \|\underline{\sigma}' - \underline{\alpha}\| - r = 0$$

$$\text{Bounding surface } B = q - (a \cdot p + b) = 0 \quad (1)$$

여기서  $\underline{\sigma}$ 는 유효응력(effective stress)이고,  $\underline{1} = \delta_{ij}$ 는 Kronecker's delta tensor이다.  $\underline{\sigma}'$ 는 편차응력(deviatoric stress) 텐서(tensor)이며  $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - p\underline{1}$ 이다.  $\pi$  평면에서  $\underline{\alpha}$ 는 항복면의 중심에 대응하는 응력 텐서이며,  $r$ 은 항복면의 반경이다.  $J_2$  응력 불변량은  $\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \frac{1}{2}\underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' = \frac{1}{2}\|\underline{\sigma}'\|^2$ 이며,  $q$ 는 편차응력 불변량

으로  $q = \sqrt{3/2}\|\underline{\sigma}'\| = \sqrt{3}J_2$ 과 같다. 그리고 경계면에 대한 강도정수  $a$ 와  $b$ 는 지반의 마찰각( $\phi$ )과 점착력( $c$ )으로  $a = \frac{6\sin(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$ ,  $b = \frac{6 \cdot c \cdot \sin(\phi)}{3 - \sin(\phi)}$ 와 같이 산정할 수 있다.

항복면의 반경  $r$ 을 0으로 수렴시키면, 탄성영역이 사라지고 편차응력과 항복면 중심응력의 방향은 편차 단위 텐서(deviatoric unit tensor)  $\underline{n}$ 으로 동일하다(Borja and Amies, 1994).

$$\frac{\underline{\sigma}'}{\|\underline{\sigma}'\|} = \frac{\underline{\alpha}}{\|\underline{\alpha}\|} = \underline{n} \quad (2)$$

Prager(1955)가 제안한 운동경화(kinematic hardening) 규칙을 Eq. (1)의 항복면에 적용하면, 편차응력 증분의 방향텐서는 편차 단위텐서  $\underline{n}$ 과 일치하게 된다.

$$\frac{\dot{\underline{\sigma}}'}{\|\dot{\underline{\sigma}}'\|} = \underline{n} \quad (3)$$

역학적 소성변형 증분은 소성흐름법칙(plastic flow rule)과 항복면에 대한 일관성 조건(consistency condition)으로부터 산정할 수 있다.

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \frac{1}{H}(\underline{n} : \dot{\underline{\sigma}}) \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (4)$$

여기서  $H$ 는 소성경화 계수(plastic hardening modulus)로 정의한

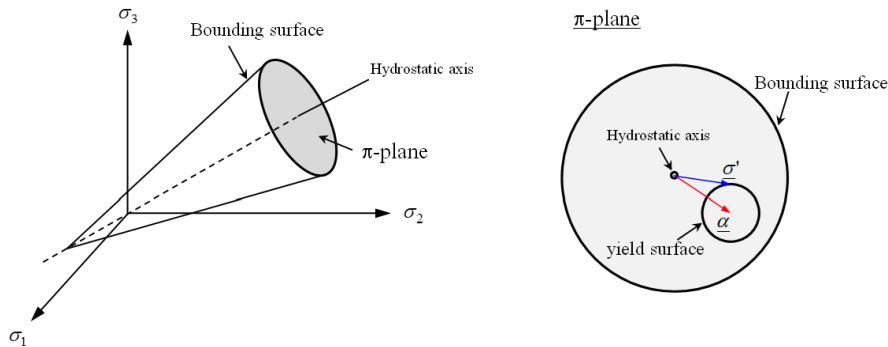


Fig. 1.  $J_2$ -Bounding Surface and Yield Surface in Principal Stress Space and on the  $\pi$ -Plane

다. 소성 포텐셜 함수(plastic potential function)  $g$ 는  $g = q + d \cdot p = 0$ 이며, 팽창률(dilatancy,  $d = \tan(\delta)$ )은 팽창각(dilatancy angle,  $\delta$ )으로 표현된다. 셰립도의 팽창률은 편차응력비(Roscoe and Schofield, 1963)로부터 산정하고, 조립도는 상태변수(state parameter)로부터 산정할 수 있다(Been and Jefferies, 1985).

### 2.2 응력 변형률 증분 관계

역학적 변형률 증분은 다음과 같이 탄성과 소성 증분의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}^e + \dot{\underline{\epsilon}}^p = \underline{D}^e : \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{\epsilon}}^p \quad (5)$$

여기서 탄성 강성 텐서(elastic stiffness tensor)는  $\underline{D}^e = K \underline{1} \otimes \underline{1} + 2G(\underline{I} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1})$ 이다. 그리고  $K$ 는 체적탄성계수(elastic bulk modulus)이고,  $G$ 는 전단탄성계수(elastic shear modulus)이다.

Eq. (4)와 Eq. (5)에 대한 수학적 변형으로부터 다음식을 산정할 수 있다.

$$\underline{n} : \dot{\underline{\sigma}} = \frac{2G\underline{n} : \dot{\underline{\epsilon}}}{1 + \sqrt{6} G/H} \quad (6)$$

탄성영역이 없는  $J_2$ -경계면 소성모델에 대한 응력-변형률 증분식은 다음과 같다.

$$\dot{\underline{\sigma}} = \left[ \underline{D}^e - \frac{2G}{H + \sqrt{6} G} (Kd \underline{1} \otimes \underline{1} + \sqrt{6} G \underline{n} \otimes \underline{n}) \right] : \dot{\underline{\epsilon}} \quad (7)$$

Eq. (7)을 편차응력과 변형률 관계에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{3G}{1 + \frac{\sqrt{6} G}{H}} \dot{\epsilon}_q \quad (8)$$

여기서 편차 변형률은  $\epsilon_q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\epsilon}'\|$ 이다.

### 2.3 쌍곡선(hyperbolic) 모델에 대한 소성경화 계수 $H$

점토와 모래의 비선형 응력-변형률 관계에 사용되는 쌍곡선(hyperbolic) 모델식은 다음과 같다(Hardin and Dmievich, 1972; Kondner, 1963).

$$q = \frac{\epsilon_q}{\frac{1}{3G_{\max}} + \frac{\epsilon_q}{q_u}} \quad (9)$$

여기서  $G_{\max}$ 는 초기 전단탄성계수(initial elastic shear modulus)이고,  $q_u$ 는 축차 전단강도이다.

Eq. (9)의 쌍곡선 모델을 응력-변형률 관계를 다음과 같은 증분형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{q} = 3G_{\max} \left( 1 - \frac{q}{q_u} \right)^2 \dot{\epsilon}_q \quad (10)$$

Eq. (8)과 Eq. (10)으로부터 쌍곡선 응력-변형률 관계에 대한 소성경화 계수를 산정할 수 있다.

$$H = \sqrt{6} G_{\max} \frac{(q_u - q)^2}{q(2q_u - q)} \quad (11)$$

개발된 탄성영역이 없는  $J_2$ -경계면 소성모델은 토사지반과 절리 암반의 Thermo-Hydro-Mechanical 연계해석을 위하여 개발된 Geo-COUS(Geo-COUpled Simulator) 유한요소 프로그램과 결합하였다(Shin, 2011; Shin and Santamarina, 2019).

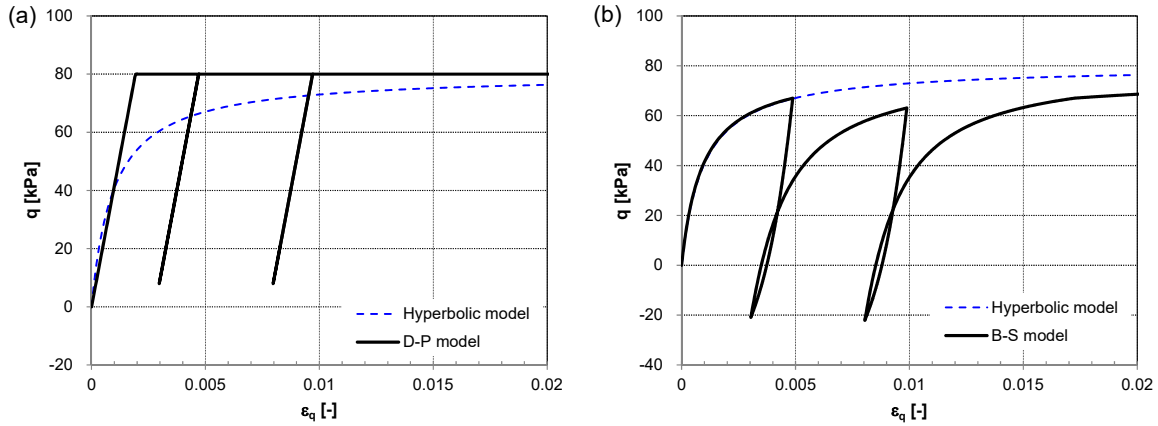
## 3. 개발된 소성모델의 예제 해석

### 3.1 반복 삼축실험(cyclic tri-axial test)

단일항복면의 Drucker-Prager 모델("D-P 모델")과 개발된 탄성영역이 없는 Bounding Surface 모델("B-S 모델")을 반복삼축압축 조건에 대하여 비교하였다. D-P 모델은 항복면과 파괴면이 동일하며, B-S 모델의 경계면을 항복면으로 사용한다. 그리고 D-P 모델은 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)에 의한 내재적 응력적분(implicit stress integration)을 사용하여 2차수렴(quadratic convergence)한다(Simo and Taylor, 1985).

D-P 모델(Fig. 2a)은 항복면(yield surface)과 파괴포락선(failure envelope)이 동일하여, 항복면 내에서 선형탄성 거동을 보인다. 그리고 역재하/재재하(unload-reload)시 응력이 항복면 내에 위치하여 탄성변형만을 유발한다. Eq. (9)의 쌍곡선 모델(hyperbolic model)은 전단변형이 무한히 커지면 축차응력은 전단강도에 수렴하는 것을 알 수 있다.

본 연구에서 개발한 탄성영역이 없는 B-S 모델은 D-P 모델과 동일한 물성치를 사용하였다. Fig. 2b에서 초기하중 재하시 응력-변형률 관계는 쌍곡선 모델과 동일하며, 반복하중에 대하여 소성변형이 누적되는 전형적인 이력(hysteresis) 곡선을 보인다. 개발된 모델의 반복하중에 대한 이력(hysteresis) 곡선은 쌍곡선 모델에 대한 Masing rule(Masing, 1926)을 따른다.



**Fig. 2.** Cyclic Behavior under Tri-axial Condition: (a) Drucker-Prager Model with Hyperbolic Model, (b) Bounding-Surface with Hyperbolic Model. Material Properties:  $G_{max} = 27$  MPa ( $V_s = 200$  m/s,  $\gamma_t = 1.8$  g/cm<sup>3</sup>),  $\nu = 0.3$ ,  $\tau_{max} = c_u = 40$  kPa ( $q_u = 80$  kPa), Dilatancy Angle  $\delta = 0^\circ$

### 3.2 반복하중에 대한 얇은기초의 거동

개발된 모델의 거동특성을 분석하기 위하여 반복하중을 받는 얇은기초(shallow foundation)에 대한 예제해석을 수행하였다. 수치해석은 2차원 평면변형률 조건으로 40,000개의 8절점 요소와 121,001개의 절점을 이용하였다. Table 1은 수치해석에 사용된 지반의 물성치와 하중 재하폭  $B = 10$  m에 대한 얇은기초의 극한 지지력(bearing capacity)을 나타내고 있다(Terzaghi, 1943). D-P 모델과 B-S 모델을 이용하여 전단강도가 구속압에 무관한 점성토 지반과 구속압에 비례하여 증가하는  $c-\phi$  지반에 대하여 비교해석을

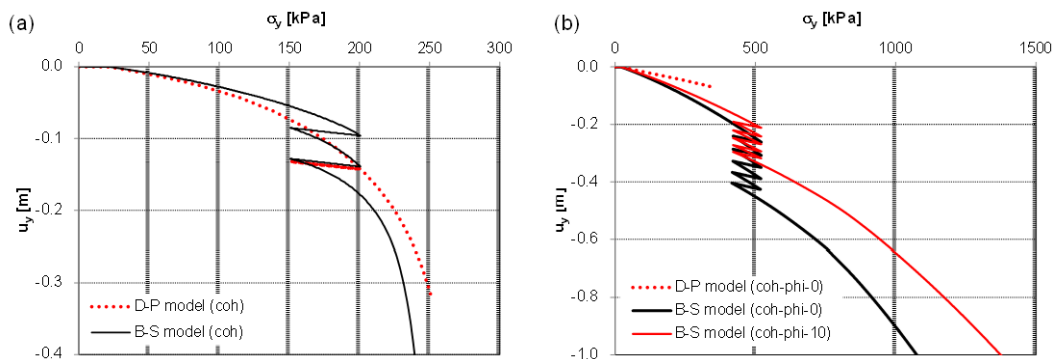
수행하였다.

Fig. 3은 연직 반복하중에 의한 연성기초 증상의 변위를 나타내고 있다. Fig. 3a(점성토 지반)에서 D-P 모델은 50 kPa의 반복하중에 의한 응력변화가 항복면 내부로 극한되어 선형적인 응력-침하량 거동을 보인다. 반면, B-S 모델은 반복하중에 의한 소성침하량의 누적과 역재하시(unloading)에 재재하시(reloading)보다 변위의 변화가 작게 나타났다.

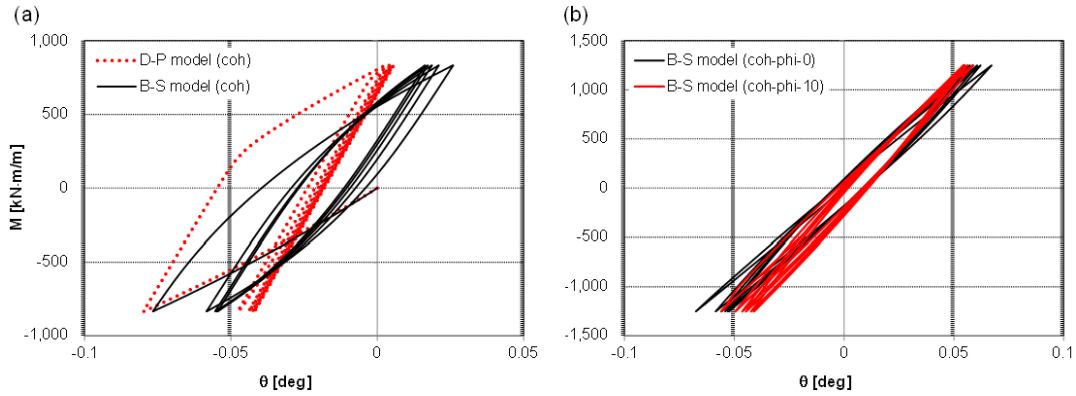
Fig. 3b( $c-\phi$  지반)에서 일관된 점선계수를 사용하는 D-P 모델은 수렴성이 저하되어 발산하였다. B-S 모델을 이용하여 팽창각

**Table 1.** Material Properties and Bearing Capacity of Shallow Foundation for Fig. 3 and 4

Model		Material properties	Bearing capacity(B = 5m)
D-P model	"coh"	$G_{max} = 27$ MPa, $\nu = 0.3$ , $\gamma_t = 15$ kN/m <sup>3</sup> $c = 40$ kPa, $\phi = 0^\circ$ , $\delta = 0^\circ$	248 kPa
	"coh"		
B-S model	"coh-phi- $\delta$ "	$G_{max} = 27$ MPa, $\nu = 0.3$ , $\gamma_t = 15$ kN/m <sup>3</sup> $c = 10$ kPa, $\phi = 30^\circ$ , $\delta = 0^\circ$ or $10^\circ$	2,228 kPa



**Fig. 3.** Behavior of Shallow Foundation under Vertical Cyclic Load with Drucker-Prager and Developed Bounding-Surface Model: (a) Vertical Load-Settlement of the Foundation on Cohesive Soil, (b) Vertical Load-Settlement of the Foundation on Cohesive-Frictional Soil under 5 Cyclic Loads



**Fig. 4.** Behavior of Shallow Foundation under 5 Cyclic Moments with Drucker-Prager and Developed Bounding-Surface Model: (a) Moment-Rotation Curve of the Foundation on Cohesive Soil, (b) Moment-Rotation Curve of the Foundation on Cohesive-Frictional Soil

$\delta = 0^\circ, 10^\circ$ 에 대하여 100 kPa의 반복하중에 대한 수치해석을 수행하였다. 팽창각이 커질수록, 소성전단변형에 의한 체적팽창으로 얇은기초의 반응강성이 커지면서 소성침하량이 감소하였다.

Fig. 4는 얇은기초에 반복 모멘트 재하시 연성기초의 평균 회전각의 변화를 나타내고 있다. Fig. 4a(점성토 지반)는 얇은기초에 150 kPa의 연직응력을 재하한 후, 모멘트(800 kN·m/m)를 반복적으로 재하하였다. 반복하중단계에서 D-P 모델은 기초의 선형탄성적인 거동을 보이고, B-S 모델은 기초의 회전(rocking)에 대한 강성이 점차적으로 증가하면서 수렴하였다. Fig. 4b(c- $\phi$  지반)는 얇은기초에 500 kPa의 연직응력을 재하한 후, 반복 모멘트(1,250 kN·m/m)를 작용시켰다. 반복하중단계에서 기초의 회전반응 강성이 점차적으로 증가하면서 수렴하였다. 팽창각  $\delta$ 가 증가하면, 전단변형에 의한 체적팽창성의 증가로 연직소성 침하량이 감소하고, 얇은 기초의 회전반응 강성이 증가하였다.

### 3.3 반복하중에 대한 동적특성 평가

지반지진공학에서 지반의 동적하중에 대한 거동을 모사하는 역학적 모델은 매우 중요하다. 주로 정규 전단할선계수( $G/G_{max}$ , normalized secant shear modulus)와 감쇠비(D, material or hysteretic damping ratio)에 의한 1차원 등가선형모델(equivalent linear model)을 이용하여 주파수영역 해석을 수행하고 있다. 하지만, 1차원 모델은 지반의 비가역적(irreversible) 소성변형, 간극수압의 영향, 축차변형과 연계된 체적변형, 그리고 비정규적인(irregular) 동적하중 등을 고려할 수 없다. 또한 반복 전단변형률에 따른 정규 전단할선계수와 감쇠비로 표현되는 1차원 등가선형모델은 다차원 시간이력해석을 할 수 없다. 따라서, 일반적인 응력장에서 정의되는 탄소성 모델에 대한 연구가 지속적으로 진행되고 있으며, 실제 문제에 활용하는데 있어서 많은 갯수의 물성치는 문제점으로 인식되고 있다(Pisanò and Jeremić, 2014).

Eq. (9)의 쌍곡선 모델에 Masing rule을 적용한 반복 전단변형률에 대한 응력이력곡선으로부터 전단할선계수( $G/G_{max}$ )와 감쇠비(D)를 산정할 수 있다(Ishihara, 1996).

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \gamma/\gamma_r}$$

$$D = \frac{4}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{\gamma/\gamma_r} \right) \left[ 1 - \frac{\ln(1 + \gamma/\gamma_r)}{\gamma/\gamma_r} \right] - \frac{2}{\pi} \quad (12)$$

여기서  $\gamma_r$ 은 기준변형률(reference strain)으로  $\tau_{max}/G_{max}$ 이다.

Fig. 5는 다양한 크기의 반복 전단변형률에 대하여 초기 하중재하 후 5번의 역재하-재재하에 대한 전단응력-전단변형률의 경로를 보여주고 있다. 초기 경로는 쌍곡선 모델(hyperbolic model)과 일치함을 알 수 있다. 전단 변형률이 작으면, 선형에 근사한 응력-변형률의 관계를 보이면서  $G/G_{max} \approx 1.0$ , 감쇠비  $D \approx 0$ 에 근접한다. 실내 실험결과에서 매우 작은 전단 변형률에서 발생하는 최소 감쇠비( $D_{min}$ )는 공극내 유체의 점성(viscosity)과 지반의 크리프(creep)에 의하여 발생하므로(d'Onofrio et al., 1999), 시간이력해석(time history analysis)에서 최소 감쇠비  $D_{min}$ 을 감쇠력에 직접 적용할 수 있다. 반복 전단변형률이 커질수록, 전단할선계수  $G/G_{max}$ 는 감소하고 감쇠비 D는 점차적으로 커지는 것을 알 수 있다(Kramer, 1996).

Fig. 6a와 6b는 반복 전단변형률의 크기에 따른  $G/G_{max}$ 와 D의 변화를 나타내고 있다. 개발된 B-S모델에 대한 수치해석 결과는 Eq. (12)의 이론적과 매우 일치함을 알 수 있다. 다만, 반복 전단변형률이 매우 큰 경우에는 감쇠비에 대한 수치적인 오차가 발생함을 알 수 있다(Anastasopoulos et al., 2011).

중추곡선(backbone curve)에 Masing rule을 적용한 반복하중

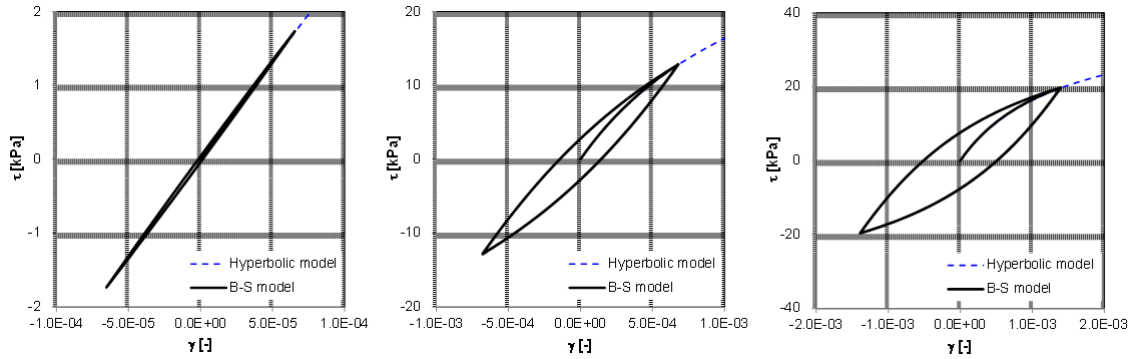


Fig. 5. Cyclic Stress-Strain Paths at Different Shear Stress Levels. Material Properties:  $G_{max} = 27$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\tau_{max} = 40$  kPa, Dilatancy Angle  $\delta = 0^\circ$

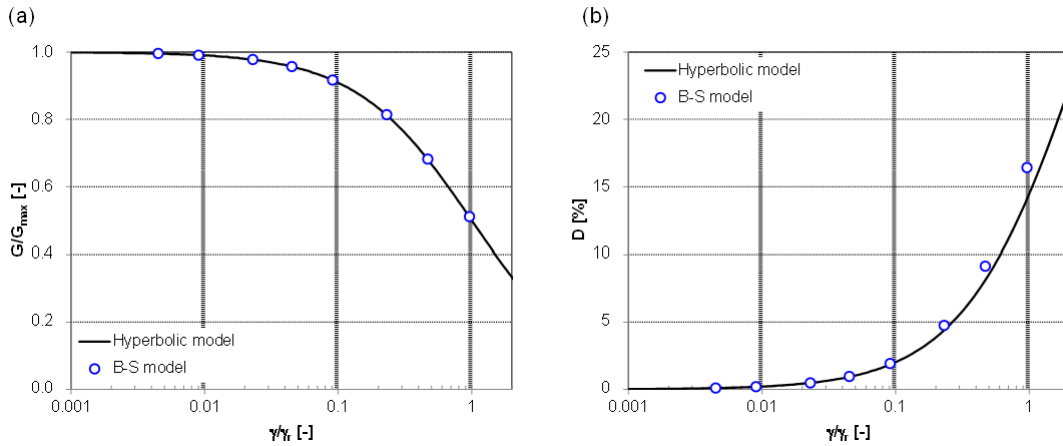


Fig. 6. (a) Comparison of  $G/G_{max}$  from B-S model and Hyperbolic Model, (b) Comparison of Damping Ratio from B-S Model and Hyperbolic Model. Material Properties:  $G_{max} = 27$  MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\tau_{max} = 40$  kPa, Dilatancy Angle  $\delta = 0^\circ$

에 대한 이력(hysteric) 응력경로는 실험결과에 비하여 큰 변형률에서 감쇠비를 과대 산정하여 동적하중에 대한 지반의 반응을 과소평가하는 경향이 있다(Stewart et al., 2008). 이러한 문제점을 해결하기 위하여, 1) 수정된 쌍곡선 모델(Yang et al., 2022)을 중추곡선으로 사용하여 새로운 소성경화 계수를 제시하였다.

$$q = \frac{\epsilon_q}{\left[ \left( \frac{1}{3G_{max}} \right)^\chi + \left( \frac{\epsilon_q}{q_u} \right)^\chi \right]^{1/\chi}}$$

$$H = \sqrt{6} G_{max} \frac{(1 - (q/q_u)^\chi)^{1+1/\chi}}{(1 - (1 - (q/q_u)^\chi)^{1+1/\chi})} \quad (13)$$

여기서  $\chi = 1$ 이면 기존의 쌍곡선 함수와 소성경화 계수와 동일하다.

2) 역하중(unloading)에 의한 응력전환(stress reversal)이 응력 경로에 미치는 영향을 고려하여 추가적인 소성계수  $H_1$ 을 도입하였

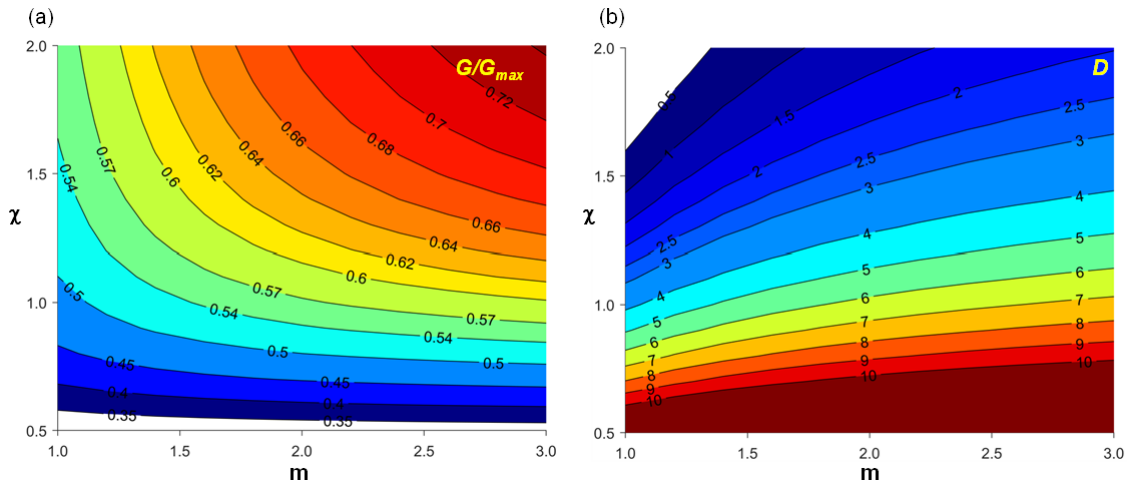
다. 따라서, 새롭게 정의되는 소성 경화계수  $H^*$ 은 수정된 쌍곡선 모델에 대한 경화계수(Eq. (13))와 추가로 도입된 경화계수  $H_1$ 의 직렬(serial) 조합으로 산정할 수 있다.

$$H_1 = m \sqrt{6} G \frac{1}{(q_0/q_u)^n}$$

$$H^* = \frac{1}{\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}} \quad (14)$$

여기서,  $q_0$ 는 최종 응력전환(stress reversal)시의 축차응력이다.  $H_1$ 이 무한히 커지면, 새로운 경화계수  $H^*$ 는  $H$ 로 수렴하게 된다.

1차원 등가선형모델에서 전단변형률  $\gamma$ 에 대한  $G/G_{max}$ 와  $D$ 의 관계가 주어질 때, Eq. (13)과 Eq. (14)의 모델변수들을 결정하기 위하여 매개변수 해석을 수행하였다. Fig. 7은 전단변형률  $\gamma/\gamma_r = 0.5$ 에서 모델변수  $m$ 과  $\chi$ 에 따른  $G/G_{max}$ 와  $D$ 의 변화를 보여주고 있다. 기존의 쌍곡선 모델에서  $\gamma/\gamma_r = 0.5$ 에 대한



**Fig. 7.** Parametric Chart on Model Parameters ( $m$  and  $\chi$ , Fixed  $n = 0.5$ ) at Deviatoric Strain Level  $\gamma/\gamma_r = 0.5$ : (a) Normalized Secant Shear Modulus,  $G/G_{max}$ , (b) Damping Ratio,  $D$

$G/G_{max} = 2/3$ ,  $D = 8.6\%$ 이다(Eq. (12)).  $m$ 과  $\chi$ 가 증가하면 반복응력경로의  $G/G_{max}$ 는 증가하고, 감쇠비는  $\chi$ 이 증가하면 점차 감소하였다. 다양한 지반의 실내실험 결과에 대하여 모델변수들을 결정하기 위한 추가적인 연구가 필요하다.

#### 4. 결론

반복하중이나 동적하중에 대한 지반의 역학적 소성모델은 지반 구조물의 다차원 비선형 수치해석에서 매우 중요하다. 단일 항복면 소성모델은 반복하중에 대해 선형적 거동을 보이고, 기존의 경계면 소성모델은 복잡한 응력변형을 관계를 묘사할 수 있지만 구성모델을 구현하기 위하여 많은 물성치가 필요하다. 본 논문의 탄성영역이 없는  $J_2$ -경계면 소성모델은 단순한 물성치로 효과적으로 지반의 비선형성을 묘사할 수 있다.

- 개발된 경계면 소성모델은  $\pi$  평면에서 항복면의 반경을 0으로 수렴시켜 탄성영역이 사라지도록 수식화하고, 소성경화 계수와 팽창률을 이용하여 소성변형 증분을 정의하였다. 탄성영역이 없는  $J_2$ -경계면 소성모델의 응력-변형을 증분식을 제시하고, 쌍곡선 모델에 대한 소성경화 계수를 유도하였다.
- 반복 삼축실험조건에서 기존의 단일 항복면 소성모델(D-P 모델)과 개발된 소성모델(B-S 모델)의 거동특성을 비교 분석하였다. D-P 모델과 동일한 물성치를 사용하는 B-S 모델은 초기하중 재하시 쌍곡선 모델과 일치하였으며, 반복하중에 대한 지반의 이력현상을 묘사할 수 있었다. 얇은기초의 거동해석에서 일관된 접선계수를 이용하는 D-P 모델보다 안정적인 수렴성을 보였다. 그리고 팽창각  $\delta$ 의 증가는 연직주축 침하량을 감소시키고 회전반응 강성을 증가시켰다.

- B-S 모델을 이용한 반복 전단변형률에 수치해석 결과는 쌍곡선 모델에 Masing rule을 적용한 이론식과 일치하였다. 다만, 쌍곡선 모델에 의한 반복이력경로는 큰 변형률에서 감쇠비를 과대하게 산정한다. 따라서, 수정된 쌍곡선함수에 대한 소성경화 계수를 제시하고, 역하중 응력전환 응력을 고려한 새로운 소성계수를 제안하였다. 그리고 제시된 1차원 등가선형모델에 부합하도록 다차원 거동을 모델링할 수 있는 모델변수 산정법을 제안하였다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국연구재단 중견연구자지원사업(NRF-2022R1A2C200823612)과 한국수력원자력(주) 해오름동맹출연사업(원전지역 특화연구)의 지원으로 수행되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

#### References

Anastasopoulos, I., Gelagoti, F. and Kourkoulis, R. (2011). "Simplified constitutive model for simulation of cyclic response of shallow foundations: Validation against laboratory tests." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol. 137, No. 12, pp. 1154-1168, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000534](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000534).

Been, K. and Jefferies, M. G. (1985). "A state parameter for sands." *Geotechnique*, ICE, Vol. 35, No. 2, pp. 99-112, <https://doi.org/10.1680/geot.1985.35.2.99>.

Borja, R. I. and Amies, A. P. (1994). "Multiaxial cyclic plasticity model for clays." *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 9, pp. 1051-1070, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE))

- 0733-9410(1994)120:6(1051).
- Borja, R. I., Chao, H. Y., Montáns, F. J. and Lin, C. H. (1999). "Non-linear ground response at Lotung LSST site." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 3, pp. 187-197, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1999\)125:3\(187\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1999)125:3(187)).
- Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. (1975). "A model of nonlinearly hardening materials for complex loading." *Acta Mechanica*, Springer, Vol. 21, No. 3, pp. 173-192.
- Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. (1977). "Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region." *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, Vol. 41, No. 2, pp. 293-302, [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(77\)90117-0](https://doi.org/10.1016/0029-5493(77)90117-0).
- Dafalias, Y. F. and Taiebat, M. (2016). "SANISAND-Z: Zero elastic range sand plasticity model." *Géotechnique*, ICE, Vol. 66, No. 12, pp. 999-1013, <https://doi.org/10.1680/jgeot.15.P.271>.
- d'Onofrio, A., Silvestri, D. and Vinale, F. (1999). "Strain rate dependent behavior of a natural stiff clay." *Soils and Foundations*, Elsevier, Vol. 39, No. 2, pp. 69-82, [https://doi.org/10.3208/sandf.39.2\\_69](https://doi.org/10.3208/sandf.39.2_69).
- Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972). "Shear modulus and damping in soils-design equations and curves." *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 98, No. 7, pp.667-692, <https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.0001760>.
- Ishihara, K. (1996). *Soil behaviour in earthquake geotechnics*, Oxford science publications, South East England, UK.
- Kondner, R. L. (1963). "Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils." *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 89, No. 1, pp. 115-143, <https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.0000479>.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical earthquake engineering*, Prentice-Hall.
- Masing, G. (1926). *Eignespannungen und Verfestigung beim Messing*, 2nd International Congress on Applied Mechanics, Switzerland, pp. 332-335.
- Pisanò, F. and Jeremić, B. (2014). "Simulating stiffness degradation and damping in soils via a simple visco-elastic-plastic model." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, Vol. 63, pp. 98-109, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2014.02.014>.
- Prager, W. (1955). "The theory of plasticity - A survey of recent achievements." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 169, No. 1, pp. 41-57, [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1955\\_169\\_015\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1955_169_015_02).
- Restrepo, D. and Taborda, R. (2018). "Multiaxial cyclic plasticity in accordance with 1D hyperbolic models and Masing criteria." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley, Vol. 42, No. 17, pp. 2095-2108, <https://doi.org/10.1002/nag.2845>.
- Roscoe, K. H. and Schofield, A. N. (1963). "Mechanical behaviour of an idealized 'wet' clay." *Proceedings of 3rd European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Wiesbaden, Germany, Vol. 1, pp. 47-54.
- Shin, H. (2011). "Formulation of fully coupled THM behavior in unsaturated soil." *Journal of the Korean Geotechnical Society*, KGS, Vol. 27, No. 3, pp. 75-83, <https://doi.org/10.7843/kgs.2011.27.3.075> (in Korean).
- Shin, H. and Santamarina, J. (2019). "An implicit joint-continuum model for the hydro-mechanical analysis of fractured rock masses." *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Elsevier, Vol. 119, pp. 140-148, <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2019.04.006>.
- Simo, J. C. and Taylor, R. L. (1985). "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, Vol. 48, No. 1, pp. 101-118, [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2).
- Stewart, J. P., Kwok, A. O. L., Hashash, Y. M. A., Matasovic, N., Pyke, R., Wang, Z. L. and Yang, Z. (2008). *Benchmarking of non-linear geotechnical ground response analysis procedures*, Pacific earthquake engineering research center.
- Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley.
- Yang, B., He, M., Zhang, Z., Zhu, J. and Chen, Y. (2022). "Experimental investigation and empirical model on damping properties of rock under multistage cyclic loading." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier, Vol. 163, 107557, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107557>.
- Yu, H. S. (2006). *Plasticity and geotechnics*, Springer.
- Yu, H. S., Khong, C. and Wang, J. (2007). "A unified plasticity model for cyclic behaviour of clay and sand." *Mechanics Research Communications*, Elsevier, Vol. 34, No. 2, pp. 97-114, <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2006.06.010>.