

## 초등 수학 교과서의 약분과 통분 및 이분모분수 덧셈과 뺄셈 차시 흐름 및 시각적 표현 분석

강 윤 지 (서울홍연초등학교, 교사)

이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 약분과 통분을 활용하여 분수의 값을 변형시키는 과정을 요구하는 복잡한 과정이다. 따라서 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 필연적으로 밀접한 관련이 있다. 이에 2015 개정 교육과정이 반영된 초등 수학 교과서 국정 1종 및 검정 10종 중 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원을 대상으로 차시 흐름 및 시각적 표현을 분석하여 교수학적 시사점을 도출하고자 하였다. 분석 결과, 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름은 출판사별 차이가 크지 않고 유사하게 구성되어 있었으나 주요 활동 및 교과서 구성에서 차이가 나타났다. 또한, 각 교과서의 특성에 따라 시각적 표현의 종류 및 개수가 다양하게 나타났으며 이에 따른 장단점을 고려하여 수업 방향 및 내용을 구성할 필요가 있다.

### I. 서론

초등 수학에서 이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 단위와 관련하여 다양한 추론을 할 수 있는 중요한 주제이다(이지영, 방정숙, 2016). 자연수와 같은 방법으로 수행할 수 있는 동분모분수의 연산과 달리 이분모분수의 연산에서는 약분이나 통분을 통하여 분모와 분자의 값을 적절하게 변형시켜야 한다. 2015 개정 교육과정에 의한 초등 수학 국정 교과서에서는 약분을 분자와 분모를 공약수로 나누어 간단히 하는 것, 통분을 분수의 분모를 같게 하는 것이라고 설명하며(교육부, 2020) 이러한 과정은 분수의 개념에 대한 이해가 선행되어야 가능하다. 더욱이, 이분모분수의 연산은 분모가 다른 두 분수에서 단위의 크기가 다르기 때문에 자연수와 같은 방법으로 계산할 수 없으며 자연수의 사칙 연산 능력뿐 아니라 분수의 개념 이해까지 필수로 요구한다. 즉, 기준이 되는 단위가 달라지므로 분수 및 약분과 통분의 개념에 대한 이해가 선행되지 않으면 자연수 연산의 숙달만으로는 분수의 연산을 수행하기 어렵다. 약분과 통분 과정을 숙지해야 바르게 문제를 해결할 수 있어 더 어렵고 복잡한 과정이다.

이러한 약분과 통분 및 이분모분수의 연산에서 차시 흐름 및 시각적 표현은 중요한 역할을 한다. 교과서의 차시 흐름은 학습 내용의 전개 방향에 따라 다르게 나타날 수 있으며 어떠한 순서로 조직되는지에 따라 학생의 사고 흐름에 영향을 미칠 수 있다. 시각적 표현은 수학적 개념을 구체적인 이미지나 그림으로 표현함으로써, 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 도와주며 이러한 시각적 표현을 통해 개념을 이해하면 연산 과정을 더욱 쉽게 이해할 수 있다. 분모와 분자의 크기나 비율, 분수의 위치 등을 시각적으로 파악할 수 있으며 직관적으로 수의 크기를 가늠할 수 있어 연산 과정을 더욱 용이하게 이끌기 때문이다. 따라서, 분수에 대한 덧셈과 뺄셈의 교육에서 다양한 형태의 표현을 나타내는 모델과 교재의 사용은 의미 있는 학습의 실현을 위해 매우 중요하다(Kara & Incikabi, 2018). 더욱이, 분수를 여러 모델을 사용하여 표현하는 것은 분수에 대한 학생들의 개념적 이해를 강화한다(Hull, 2005). 2009 개정 및 2015 개정 교육과정 기반의 수학 교과서에서 다양한 도형의 형태를 기반으로 한 영역 모델과 수직선 모델이 사용된 것은 이러한 주장을 뒷받침한다(임미인, 2020). 분수의 계산 과정을 시각적

\* 접수일(2023년 5월 15일), 심사(수정)일(2023년 6월 5일), 게재확정일(2023년 6월 16일)

\* MSC2000분류 : 97U20

\* 주제어 : 약분, 통분, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈, 초등 수학 교과서, 시각적 표현

표현이나 기호적 표현, 언어적 표현으로 다양하게 나타내는 활동이 계산 원리에 대한 보다 의미 있는 이해에 도움이 될 수 있기 때문이다(방정숙, 이지영, 2009). 즉, 다양한 표현은 수학적 개념과 관계에 대하여 학생들의 이해를 지원하며 관련된 수학적 개념을 연계하고 모델링을 통하여 수학을 실제 문제 상황에 적용하게 한다(NCTM, 2000).

수학 교과서는 교사가 수업을 설계하는 데 중요하게 작용한다. 초등 수학 교과서에서 약분과 통분 및 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈의 두 단원이 5학년 1학기의 네 번째, 다섯 번째 단원으로 연이어 등장하는 것은 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈이 상호 밀접하게 관련되어 있다는 것을 보여준다. 그러나 최근에 진행된 이분모분수의 연산과 관련된 선행연구를 살펴보면 약분과 통분과 연계한 연구가 드물며 선행연구(손태권 외, 2020; 황성환 외, 2021; Kara & Incikabi, 2018)는 대부분 교과서의 문제 구성 및 문제해결에 초점을 맞추고 있다. 더욱이 학교 현장에서 사용되고 있는 10종의 초등 수학 검정 교과서에 대한 연구가 부족하여 전체적인 단원의 흐름 및 구성을 살펴볼 필요가 더욱 강조된다.

본 연구는 초등학교 교사들에게 약분과 통분, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 가르치는 데 도움이 될 수 있는 차시 흐름 및 시각적 표현을 분석하고자 하였다. 약분과 통분에서 이분모분수의 연산으로 이어지는 일련의 흐름을 현행 교육과정이 반영된 국정 교과서 1종 및 검정 교과서 10종을 통하여 살펴보고 그러한 분석을 통하여 약분과 통분 및 이분모분수의 연산에 대한 교수학습 지도의 시사점을 제안하고자 하였다.

## II. 연구의 배경

### 1. 이론적 배경

#### 가. 약분과 통분 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 선행연구 분석

연산 수업의 궁극적인 목표는 아동의 연산 기능의 숙달뿐만 아니라 문제해결 상황에서 각각의 연산을 어떤 경우에 적용하는지를 이해시키는 것이다(Reys et al., 2015/2017). 학생들은 분수의 연산에서 선행지식인 분수의 개념이나 원리를 연산과 연결하여 이해하지 못하고 단순 암기에 의한 알고리즘에 의존하여 문제를 해결하려 하며 이는 많은 오류의 원인이 된다(김미영, 백석윤, 2010). 자연수의 연산과 달리 이분모분수의 연산은 분수의 수 개념 및 약분과 통분에 대한 이해를 요구하는 등 더 난도가 높은 활동이다. 약분과 통분 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 연산 과정 및 교과서와 관련된 연구는 다음과 같다.

Kara & Incikabi(2018)의 연구는 분수의 연산에서 수, 모델, 수직선, 언어 등 여러 표현 간 전환을 보여주고 각 표현 유형을 구성하는 학생들의 능력을 분석하였다. 분석 결과, 분수 연산에서 다른 표현을 사용하는 학생들의 성취도는 뺄셈 연산에 비해 덧셈 연산에서 더 높게 나타났다. 덧셈 연산에서는 분모와 분자 결정 단계, 뺄셈 연산에서는 연산을 수행하고 분자를 결정하는 단계에서 더 자주 발생하였다.

이지영, 방정숙(2016)은 이분모분수의 덧셈 및 뺄셈 교육과 관련하여 제4차부터 2009 개정 교육과정에 의한 초등 수학 교과서를 분석하였다. 분석 결과, 전체 단위가 고정되어야 한다는 사실을 암묵적으로 다루며, 통분의 필요성을 동분모분수의 덧셈 과정과 연결하여 제시하였고, 채귀적 분할 방법보다 통분하여 모델을 알고리즘과 유기적으로 연결하는 데 어려움이 나타났다. 이외에도 한국과 싱가포르의 수학 교과서를 비교 분석한 결과, 싱가포르의 분수의 덧셈과 관련하여 점진적이고 체계적으로 지도하고 있으며 다양한 시각적 모델을 제시하여 구체적인 시사점을 제공한다고 하였다(이지영 외, 2017).

손태권 외 연구진(2020)은 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과서와 익힘책을 분석하였다. 분석 결과, 분수의 덧셈은 합병, 분수의 뺄셈은 구간으로 연산의 의미를 제시하는 경우가 대부분이었고 동분모분수인지 이분모

분수인지에 따라 강조되는 수학적 활동이 다르게 나타났다. 한국, 싱가포르, 핀란드의 교과용 도서를 비교 분석한 결과(황성환 외, 2021), 한국은 대분수의 연산, 싱가포르와 핀란드는 진분수의 연산이 가장 큰 비중을 차지하였다. 이외에도 한국은 동분모분수 문제와 이분모분수 문제가 차지하는 비중이 거의 비슷하였지만 싱가포르는 이분모분수 문제, 핀란드는 동분모분수 문제가 차지하는 비중이 컸다.

최근에 진행된 연구 중 약분과 통분을 단독 주제로 다루는 경우는 많지 않았으며 대부분이 이분모분수의 연산을 위한 선행지식으로 접근하고 있다. 분수의 연산에 대하여 다루는 경우 시각적 모델 및 실생활 맥락과 다양한 문제 상황을 강조하는 경향이 나타난다. 본 연구에서는 이러한 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원을 함께 살펴봄으로써 차시 흐름에 대하여 분석하고 시각적 표현의 종류 및 빈도를 살펴봄으로써 교수학적 시사점을 제공할 것이다.

### 나. 분수의 시각적 표현에 대한 선행 연구 분석

학생이 수학적 개념을 올바르게 이해하고 활용하기 위하여 이러한 개념을 구체적으로 표현할 수 있어야 한다. 시각적 표현을 사용하는 것은 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 이해를 높일 뿐만 아니라 형식적 알고리즘을 발견할 기회를 제공할 수 있다(이지영 외, 2017). 구체적인 모델은 분수와 연산에 대한 의미를 형성하도록 도울 수 있으며 분수에 대한 학생들의 이해와 연산을 지원하기 위하여 중요한 역할을 한다(Cramer et al., 2008).

분수 모델은 추상적 개념을 시각적으로 표현하고 조작을 통해 수를 다루기 때문에, 수를 유창하게 다루는 능력인 수감각 수행 수준과 수의 크기를 바르게 도출하는 연산 능력을 측정하거나 향상하는 데 도움을 준다(양현수 외, 2023). 분수 개념을 습득하기 위한 가장 일반적인 모델 중 하나는 영역 모델이다. 영역 모델은 가장 빈번히 사용되고 원이나 직사각형, 정사각형 또는 삼각형 등 어떤 형태로도 나타낼 수 있으며 영역은 전체(단위)이고 부분은 크기와 형태가 동일(합동)하다는 특징을 가진다(Reys et al., 2015/2017). 영역 모델은 부분 전체 분수 해석에 초점을 맞춘 지침에서 일반적으로 사용되며(Morano et al., 2019), 동일한 부분으로 분할되는 전체 단위의 영역에 초점을 맞춘다(Hull, 2005).

학생들이 학교 교육에서 사용하는 대부분의 영역 모델은 학생들이 사용하는 가장 효율적인 전략으로 직접 비교를 촉진할 수 있다(Armstrong & Larson, 1995). 직사각형 모델은 학생들이 그리거나 분할하는데 가장 쉬운 영역 모델로 원 모델보다 전체를 확인하기 어렵지만 등분할하기 쉽다는 장점이 있다(Reys et al., 2015/2017). 원 모델은 가장 일반적인 영역 모델 중 하나이다. 원 모델은 분수에 대한 가장 강력한 표현이며 분수에 대한 부분-전체 모형 및 분수의 상대적 크기의 의미를 이해하는 과정을 돕는다(Cramer et al., 2008).

수직선은 수와 수의 표현 방식, 수 사이의 관련성을 이해하고 수의 크기를 비교하거나 연산 절차를 구조화하기에 유용한 수학적 도구이다(김양권, 홍진곤, 2017). 다만, 수직선은 단위, 등분할 등 개념적 특성의 이해를 요구하여 학생들의 이해가 선행되어야 활용이 가능하다. 학생들의 문제해결 과정을 분석한 결과, 학생들이 영역 모델보다 수직선을 활용한 문제의 수학적 사고 표현을 어려워함을 확인하였다(Tunç-Pekkan, 2015). 국내 연구에서도 영역 모델이나 식으로 해결할 때보다 수직선 모델로 해결하는데 어려움을 겪었으며(김양권, 홍진곤, 2017) 수직선을 활용한 문제해결 과정에서 전반적으로 정답률이 높지 않았고 다양한 오답이 발견되었다(김정원, 2022).

시각적 표현과 관련하여 학생들의 분수 연산 과정을 살펴본 국내외 선행연구는 다음과 같다.

Hull(2005)은 분수 표현의 집합, 영역, 선형 모델의 사용을 통하여 분수 개념과 연산에 대한 학생들의 이해를 검토하였다. 분석 결과, 연구에 참여한 학생들은 분수 개념에 대한 이해가 향상되었으며 여러 종류의 모델을 사용하여 분수를 나타내고 식별하며 분수의 덧셈과 뺄셈을 수행할 수 있었다. Tunç-Pekkan(2015)은 세 가지 시각적 표현(원, 직사각형, 수직선)이 학생들의 분수 지식에 미치는 영향을 확인하였다. 연구 결과, 원 모델과 직사각형 모델보다 수직선의 문제 해결을 더 어려워하는 것으로 나타났다.

Monson 외 연구진(2020)의 연구에서 학생들은 원 영역 모델과 종이를 사용한 구체물, 수직선을 이용한 학습

을 통하여 분수에 관한 이해를 심화하고 단위를 동일하게 분할한 다음 특정한 수만큼 식별하는 과정을 학습하였으며 이러한 결과를 바탕으로 분수의 개념 학습에서 광범위한 모델 사용이 필요하다고 주장하였다. 다른 연구에서는 학생들이 원 모델과 수직선을 바탕으로 분수를 이해하고 활용하는 과정을 통하여 분수 학습의 초기부터 수직선을 강조할 것과 시각적 표현을 다양하게 연결하여 이해할 것을 주장하였다(Morano et al., 2019).

양현수 외 연구진(2023)은 영역 모델과 수직선을 활용한 문제해결 과정에서 분수 지도에 관한 시사점을 도출하고자 하였으며 영역 모델, 구조화된 수직선, 빈 수직선을 기반으로 하는 수 감각 검사지에 대한 초등학생의 반응 및 오답 사례를 분석하였다. 분석 결과, 다양한 종류의 오류와 함께 모델을 활용한 문제해결을 어려워하거나, 기계적으로 문제를 해결하려는 모습이 나타났다. 이를 바탕으로 모델의 의미와 활용 방법을 안내하고, 다양한 분수 모델을 활용할 필요성을 주장하였다.

선행연구에서는 공통으로 분수의 개념 및 연산에 대하여 시각적 표현의 활용이 효과적이라고 언급하고 있으며 시각적 표현의 적극적인 활용을 권장하고 있다. 본 연구에서는 초등 수학 교과서에서 시각적 표현이 분수의 개념 및 연산에 대한 학습을 지원하기 위하여 교과서 내 시각적 표현의 구성을 분석할 것이다.

#### 다. 2015 개정 교육과정에 따른 초등 수학 국정 교과서 분석

2015 개정 수학과 교육과정에서 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에 관련된 성취기준을 찾아보면 다음과 같다(교육부, 2015).

[6수01-05] 분수의 성질을 이용하여 크기가 같은 분수를 만들 수 있다.

[6수01-06] 분수를 약분, 통분할 수 있다.

[6수01-07] 분모가 다른 분수의 크기를 비교할 수 있다.

[6수01-08] 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 원리를 이해하고 그 계산을 할 수 있다.

[6수01-12] 분수와 소수의 관계를 이해하고 크기를 비교할 수 있다.

이러한 성취기준을 바탕으로 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에 관련된 2015 개정 교육과정의 초등 수학 국정 교과서를 분석한 내용은 <표 II-1>과 같다. 차시 흐름과 시각적 표현을 중심으로 분석하였다.

<표 II-1> 2015 개정 교육과정의 초등 수학 국정 교과서 내용 분석(차시 흐름)

	약분과 통분	이분모분수의 덧셈과 뺄셈
1차시	크기가 같은 분수 알기(1)	진분수+진분수=진분수
2차시	크기가 같은 분수 알기(2)	진분수+진분수=대분수
3차시	분수를 간단하게 나타내기	대분수+대분수=받아올림이 있는 대분수
4차시	분모가 같은 분수로 나타내기	진분수-진분수=진분수
5차시	분수의 크기 비교하기	대분수-대분수=받아내림이 없는 대분수
6차시	분수와 소수 크기 비교하기	대분수-대분수=받아내림이 있는 대분수

약분과 통분 단원과 이분모분수의 덧셈 단원은 모두 6차시로 구성되어 있다. 약분과 통분 단원의 경우 크기가 같은 분수 알기-분수를 간단하게 나타내기(약분)-분모가 같은 분수로 나타내기(통분)-분수의 크기 및 분수와 소수의 크기 비교하기의 순서로 진행된다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 경우 (진분수)+(진분수), (대분수+대분수), (진분수)-(진분수), (대분수)-(대분수)의 순서로 구성되어 있으며 덧셈 3차시 후 뺄셈 3차시가 제시된다. 간단한 수에서 복잡한 수, 덧셈에서 뺄셈으로 진행되는 순서이다.

&lt;표 II-2&gt; 2015 개정 교육과정의 초등 수학 국정 교과서 내용 분석(시각적 표현)

	약분과 통분	이분모분수의 덧셈과 뺄셈
1차시	직사각형(선형)	직사각형(선형)
	원	
2차시	직사각형(선형)	직사각형(선형)
	수직선	
3차시	직사각형(선형)	직사각형(선형)
4차시	직사각형(선형)	직사각형(선형)
5차시	직사각형(선형)	직사각형(선형)
6차시	수직선	직사각형(선형)
직사각형(영역)	0(0%)	0(0%)
직사각형(선형)	5(62.5%)	6(100%)
원	1(12.5%)	0(0%)
수직선	2(25%)	0(0%)
계	8(100%)	6(100%)

두 단원에서 사용된 시각적 표현의 개수는 각각 8개, 6개로 나타났다. 약분과 통분 단원에서는 직사각형 모델, 원 모델, 수직선을 활용하였으며 직사각형 모델은 선형 모델만을 제시하였다. 반면, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서는 직사각형(선형) 모델만 사용하는 등 일관성 있게 한 종류의 모델을 활용하였다. 이처럼 한 종류의 표현을 일관되게 사용하는 것은 약분과 통분 단원에서 직사각형 모델뿐 아니라 원 모델과 수직선 모델 등을 다양하게 활용한 것과 대조된다. 이는 직사각형 모델과 수직선 모델의 차이에서 비롯된 것이다. 직사각형 모델은 도형의 넓이를 동일하게 분할하여 해당하는 부분을 색칠하는 형태로 나타나 분수의 크기를 파악하기 용이하다. 반면, 수직선 모델은 길게 늘어난 단일선을 사용하여 나타내기에 직사각형 모델보다 분수의 크기를 직관적으로 파악하기 어려울 수 있다. 이러한 차이를 고려하였을 때 직사각형 모델이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 과정을 시각적으로 보여주기에도 더 용이할 것이라 짐작할 수 있다.

분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 사용하는 시각적 표현의 종류가 이전 단원보다 줄어든 것은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 일관성 있는 형태로 시각적 표현을 제시하며 학생들의 수식화 알고리즘 형성을 돕고자 한 의도가 반영된 것으로 보인다. 학생들은 문제해결 과정의 연산을 설명하기 위해서 자신이 어떠한 모델을 사용하였는지 설명하기에 어려움을 느끼고 실제적인 조작과 함께 기호 알고리즘을 잘 연결하지 못하는 경우가 많다 (Armstrong & Bezuk, 1995). 분수 개념에 대하여 한 가지 모델을 일관성 있게 제시하는 경우 학생들이 분수의 개념과 크기 비교, 덧셈과 뺄셈 등의 연산 과정을 일관되게 학습할 수 있다는 장점이 있다(서동엽, 2005).

## 2. 연구 방법 및 절차

### 가. 연구 대상

본 연구는 2015 개정 교육과정이 반영된 초등 수학 교과서 내 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름과 시각적 표현을 분석하고자 하였다. 이를 위하여 현행 교육과정이 반영된 10종의 초등 검정 수학 교과서 중 5학년 1학기 '약분과 통분' 단원과 '분수의 덧셈과 뺄셈' 단원의 내용을 대상으로 선정하였다. 선행 연구를 위하여 2015 개정 교육과정이 반영된 국정 교과서 1종을 분석하였으며 현재 사용되고 있는 검정 교과서 10종을 분석하였다. 이때, 각 출판사의 이름은 익명으로 표기하였다.

해당 단원의 전체적인 차시 흐름 및 시각적 표현에 대하여 분석하고자 하였으므로, 명확한 분석을 위하여 각

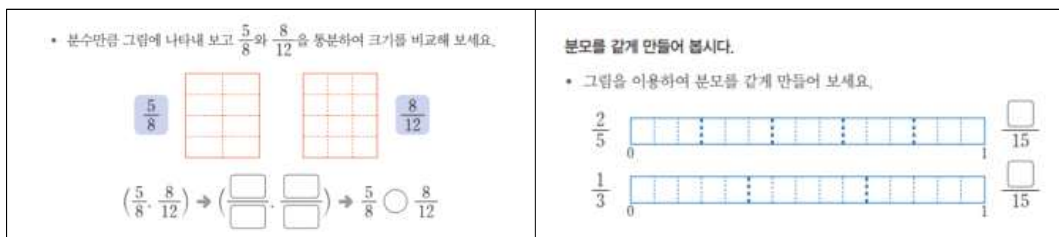
단원의 본 차시를 분석 대상으로 한정하였다. 단원 도입 및 평가 등 특화 차시를 제외한 것은 각 출판사의 의도에 따라 구성이 다르게 나타나는 검정 교과서의 특성을 고려하였을 때 교과서마다 일관되지 않은 흐름이 나타났기 때문이다. 아울러 시각적 표현의 범위 또한 주요 활동에 제시된 것으로 한정하였으며 색종이 등 구체물을 활용한 조작 활동은 대상에서 제외하였고 그림 또는 수직선의 형태로 나타난 시각적 표현으로 대상을 한정하였다. 이는 교과서에 활용된 시각적 표현의 목적에 따른 것으로 학습 내용을 구현하고 있는가에 초점을 맞추기 위함이다. 차시 활동 맥락의 보완 및 확인 문제의 해결을 위한 성격의 시각적 표현은 대상에서 제외하였으며 주요 학습 내용의 구성 및 형식화를 위한 것으로 시각적 표현의 대상을 한정하여 분석하였다.

#### 나. 연구 방법

현행 2015 개정 교육과정이 반영된 초등 수학 검정 교과서 10종 내 5학년 1학기 약분과 통분 단원 및 분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 내용을 분석하였다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원이 4학년 2학기 동분모분수의 연산 단원과 동일한 단원명으로 구성되어 있기 때문에 명료한 구분을 위하여 본 원고에서는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈으로 단원명을 서술하였다.

본 차시의 주요 학습 내용을 확인하기 위하여 차시명과 활동 내용을 살펴보았다. 출판사에 따라 동일한 학습 내용을 다루더라도 차시명이 다르게 서술되는 경우가 있었으나 본 연구의 목적은 차시명의 분석이 아니라 서로 밀접한 관련이 있는 두 단원 내 차시 흐름을 살펴보고자 한 것이므로 각 차시 내 주요 내용을 정리하여 나타내었다. 해당 단원의 일관된 흐름을 살피기 위하여 차시명과 활동 내용을 바탕으로 각 차시의 주요 학습 내용을 추출하였다.

시각적 표현의 경우 선행연구(Cramer et al., 2008; Tunç-Pekkan, 2015)를 참고하여 그림 모델, 수직선으로 종류를 나누어 분석하였다. 그림 모델은 형태를 기준으로 분류하였으며 원 모델과 직사각형 모델로 나누었다. 국정 교과서 1종을 분석하였을 때 원 모델과 직사각형 모델, 수직선의 세 가지 종류를 확인한 것이 시각적 표현의 구분에 영향을 미쳤다. 그중 직사각형 모델은 영역 모델과 선형 모델의 두 종류로 구분하여 분석하였다. 길이 모델은 한 방향으로만 분할되지만, 직사각형 넓이 모델은 가로와 세로 양방향으로 분할되는 등 승수 표현 방법에서 차이를 나타낼 수 있어(이대현, 2020) 분할할 수 있는 방향의 수를 기준으로 영역 모델과 선형 모델을 구분하였다. [그림 II-1]과 같이 두 가지 이상의 방향으로 분할이 가능한 경우를 영역 모델, [그림 II-2]와 같이 단일 방향으로만 분할이 가능한 경우를 선형 모델로 구분하였으며 선형 모델의 경우 가로와 세로를 구분하지 않고 나타내었다.



[그림 II-1] C 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 직사각형 영역 모델의 예시(박만구 외, 2023, p.76)

[그림 II-2] C 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 직사각형 선형 모델의 예시(박만구 외, 2023, p.75)

시각적 표현의 경우 한 차시에 포함된 시각적 표현의 종류를 기준으로 구분하였으며 한 차시에 동일한 유형의 표현이 여러 개 포함된 경우 1개로 구분하였다. 이는 시각적 표현의 개수가 아니라 차시에서 활용된 표현의

등장 빈도 및 종류를 살펴 전체적인 활용 맥락을 확인하고자 하였기 때문이다. 연구 대상의 선정 및 각 차시 중심 내용의 추출, 시각적 표현의 구분 등을 위하여 초등 교육 전문가 2인의 교차 검토를 추가로 진행하였다. 예를 들어, 동일한 내용에 대한 차시명이 ‘약분을 알아봐요’, ‘분수를 간단하게 나타내어 볼까요’, ‘분수를 간단하게 나타낼 수 있어요’ 등 다양하게 나타나는 경우 ‘분수를 간단하게 나타내기’로 결정하되 ‘약분’이라는 용어가 차시명에 등장하는 경우 별도로 용어를 삽입하였다. 이러한 과정에서 초등 교육 전문가 2인의 의견이 일치하지 않은 경우 의견이 일치할 때까지 의논하였다.

### III. 연구 결과 및 논의

#### 1. 약분과 통분 단원의 차시 흐름 및 시각적 표현 분석

##### 가. 약분과 통분 단원의 차시 흐름 분석

초등 수학 검정 교과서 10종을 대상으로 약분과 통분 단원의 차시 흐름을 분석한 결과는 <표 III-1>과 같다. 각 출판사에 따라 단원의 차시를 구성하는 수가 달라지기 때문에 구성되지 않은 차시에는 대각선을 그어 단원의 차시를 구분하여 나타내었다.

<표 III-1> 초등 수학 검정 교과서의 약분과 통분 단원 내 차시 흐름 분석 결과

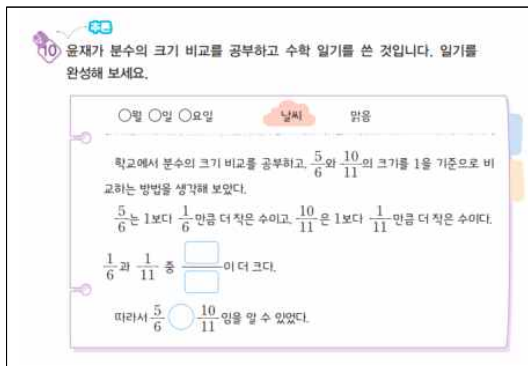
차시	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기	크기가 같은 분수 알기
2	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기	분수를 간단하게 나타내기 (약분)	분수를 간단하게 나타내기 (약분)	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기	크기가 같은 분수 만들기
3	분수를 간단하게 나타내기	분수를 간단하게 나타내기	분수를 간단하게 나타내기	분수를 간단하게 나타내기 (약분)	분수를 간단하게 나타내기 (약분)	분모가 같은 분수로 나타내기 (통분)	분모가 같은 분수로 나타내기 (통분)	분수를 간단하게 나타내기	분수를 간단하게 나타내기	분수를 간단하게 나타내기
4	분모가 같은 분수로 나타내기	분모가 같은 분수로 나타내기	분모가 같은 분수로 나타내기	분모가 같은 분수로 나타내기 (통분)	분모가 같은 분수로 나타내기 (통분)	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분모가 같은 수로 나타내기	분모가 같은 분수로 나타내기	분모가 같은 분수 만들기
5	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기		분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기	분수의 크기 비교하기
6	분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기			분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기	분수와 소수 크기 비교하기

분석 결과, 약분과 통분 단원에서는 공통으로 크기가 같은 분수 알기-분수를 간단하게 나타내기(약분)-분모가 같은 분수 만들기(통분)-분수의 크기 비교하기-분수와 소수의 크기 비교하기의 흐름을 따르고 있다. 출판사별로 차시의 수와 차시명, 세부 구성의 차이가 있으나 전체적인 흐름이 유사하며 이는 국정 교과서의 차시 흐름과도 동일한 방향이다. 여러 교과서에서 이처럼 유사한 흐름이 나타나는 것은 교육과정의 성취기준이 구체적으로 설

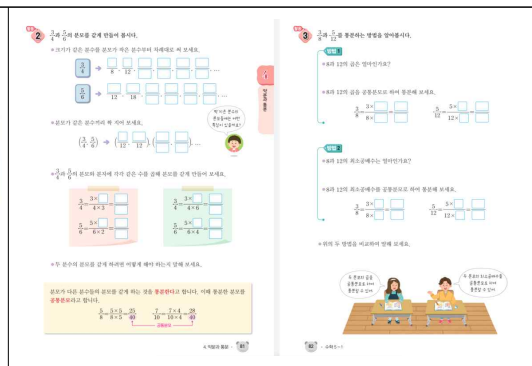
정된 것이 영향을 미친 것으로 보이며 실제로 교육과정에 제시된 성취기준과 유사한 흐름으로 차시가 구성된 것을 확인할 수 있다.

차시명에서 약분 및 통분이라는 용어를 쓴 교과서는 D 교과서와 E 교과서, F 교과서, G 교과서의 2곳이었으며 그 외 교과서는 ‘분수를 간단하게’ 또는 ‘분모가 같은 분수’라는 표현을 활용하였다. 교육과정의 성취기준은 약분과 통분이라는 용어를 명시적으로 사용하고 있으며, 그 외 출판사의 교과서에서는 차시명에서 해당 용어를 사용하지 않았더라도 해당 차시에서는 별도 공간을 할애하여 약분과 통분이라는 용어에 대하여 설명하고 있다.

8개 출판사에서 6차시로 분차시를 구성하고 있으나 F 교과서가 5차시, G 교과서가 4차시로 구성하는 등 타 교과서에 비하여 차시의 수가 적게 나타났다. 이러한 경우 타 출판사의 교과서가 대개 1차시를 2쪽으로 구성하는 것과 달리 [그림 III-1]처럼 교과서 내 활동을 10번까지 제시하고 해당 차시의 쪽수를 4쪽으로 구성하는 등 한 차시의 분량이 타 교과서의 2배에 달하는 양으로 나타났다. 또한, 교과서가 동일하게 6차시로 구성되어 있더라도 집필진의 의도에 따라 [그림 III-2]에서처럼 의도적으로 4쪽을 배당하여 해당 차시의 학습 내용을 자세하게 수록하는 경우가 나타났다. 이는 국정 교과서에서 한 차시당 2쪽을 균일하게 배정하고 있던 것과 다른 방향이다. 동일한 학습 내용을 다루더라도 제시하는 활동의 종류와 수 등이 다양하게 나타났으며 그로 인한 차시의 구성 또한 각각 다르게 나타났다. 이처럼 차시의 흐름이 동일하게 구성되더라도 집필진의 의도에 따라 쪽수 및 활동의 구성 및 개수가 다양하게 나타남을 주목할 필요가 있다.



[그림 III-1] G 교과서 5학년 1학기 약분과 통분 중 활동 10번(신향군 외, 2023, p.77)



[그림 III-2] A 교과서 5학년 1학기 약분과 통분 중 4쪽 구성의 일부(안병근 외, 2023, p.81~82)

나. 약분과 통분 단원의 시각적 표현 분석

초등 수학 검정 교과서 10종을 대상으로 약분과 통분 단원의 시각적 표현을 분석한 결과는 <표 III-2>와 같다. 각 출판사에 따라 단위 내 차시의 개수 및 시각적 표현의 사용 여부가 달라지기 때문에 구성되지 않은 차시에는 대각선을 그어 구분하였다.

분석 결과, 초등 수학 검정 교과서 10종 모두 시각적 표현을 활용하여 나타내었다. 직사각형(선형) 모델이 전체 63건 중 32건(50.79%)으로 가장 빈도가 높았으며 수직선이 18건(28.57%), 직사각형(영역) 모델이 7건(11.11%), 원 모델이 6건(9.52%)의 순서로 나타났다. 이때, 각 교과서에서 활용한 시각적 표현은 약분과 통분 단위 내 최소 2건(H 교과서)에서 11건(D 교과서)으로 활용 빈도의 차이가 크게 나타났다. 시각적 표현의 종류를 살펴보면 1종류의 표현을 일관되게 활용한 교과서(H 교과서)도 있었으며 직사각형(영역), 직사각형(선형), 원, 수직선의 4가지 종류의 표현을 모두 활용한 교과서(D 교과서, G 교과서, J 교과서)도 있었다.

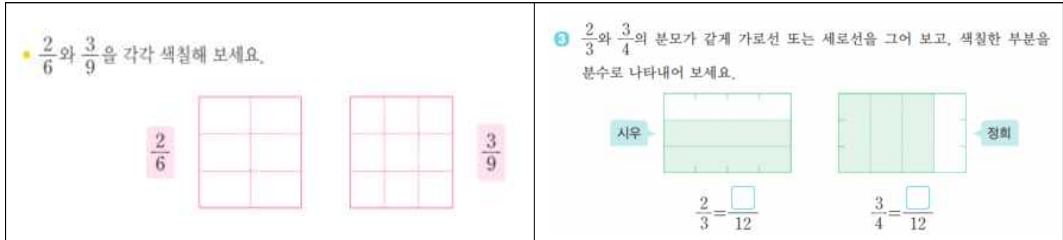


<표 III-2> 초등 수학 검정 교과서의 약분과 통분 단원 내 시각적 표현 분석 결과

차시	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	계
1	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	원	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	-
	수직선	수직선		수직선	수직선	직사각형 (선형)	원		수직선		
2	원	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (영역)		직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	-
	직사각형 (선형)		수직선	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)				수직선	수직선	-
3		직사각형 (선형)	직사각형 (선형)						직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
4	원	수직선	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)		직사각형 (선형)	직사각형 (선형) 수직선		직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	-
5		직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)		수직선	X		직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
	직사각형 (선형)		수직선								
6		수직선	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)		X	X		수직선	수직선	-
	직사각형 (영역)	0(0%)	1(12.5%)	2(18.18%)	1(20%)	0(0%)	1(20%)	0(0%)	1(12.5%)	1(12.5%)	7(11.11%)
	직사각형 (선형)	2(40%)	4(57.14%)	4(36.36%)	2(40%)	2(50%)	2(40%)	2(100%)	4(50%)	4(50%)	32(50.79%)
	원	2(40%)	0(0%)	1(9.09%)	0(0%)	1(25%)	1(20%)	0(0%)	0(0%)	1(12.5%)	6(9.52%)
	수직선	1(20%)	3(42.86%)	1(12.5%)	4(36.36%)	2(40%)	1(25%)	1(20%)	0(0%)	3(37.5%)	18(28.57%)
	계	5(100%)	7(100%)	8(100%)	11(100%)	5(100%)	4(100%)	5(100%)	2(100%)	8(100%)	63(100%)

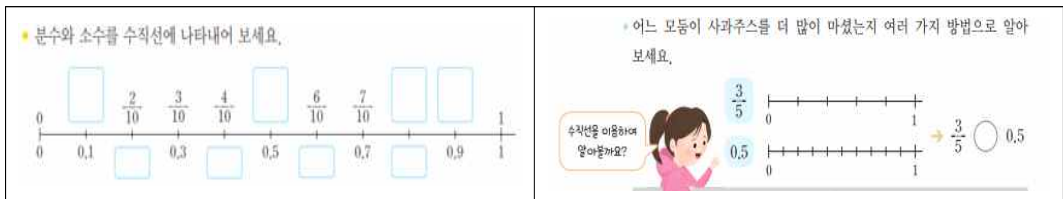
해당 단원의 차시 흐름이 유사하게 나타났음에도 불구하고 학습 내용을 구현하는 과정에서 시각적 표현의 활용이 다양하게 나타나는 것을 관심 있게 살펴볼 필요가 있다. 단원을 구성하는 차시의 개수는 시각적 표현의 활용에 영향을 미치지 않았으며 동일한 차시의 수로 구성되었다라도 사용하는 표현의 종류나 빈도가 다양하게 나타났다기 때문이다. 이는 집필진이 해당 내용을 불특정 다수인 교과서 독자에게 전달하려는 과정에서 어떠한 의도를 가지고 집필하였는지를 반영한다.

구체적으로 살펴보면 단원의 1차시에는 모든 교과서에서 시각적 표현을 삽입하여 나타내고 있으며 한 차시에 3종류의 시각적 표현을 활용하는 경우도 나타났다. 또한, 동일한 종류의 시각적 모델이라 하더라도 각각 다른 형태로 표현되었다. 예를 들어, 직사각형 영역 모델은 직사각형의 형태로 구성되어 있으며 분할하는 방향이 2가지 이상인 것은 동일하지만 분수를 나타내는 형태에 차이가 있다. [그림 III-3]의 경우 점선을 그어 동일한 크기로 분할하여 나타내고 있으나, [그림 III-4]는 학생들이 영역 모델을 직접 분할할 수 있도록 짧은 보조선을 제시하고 있다. 이처럼 유사한 내용을 반영하는 시각적 모델이라 할지라도 출판사마다 형태, 크기, 가로와 세로의 비율, 보조선의 종류 등 세부적인 내용이 다르게 나타나며 한 교과서 내에서도 활동에 따라 그림 모델의 형태가 다양하게 나타나기도 하였다. 이는 한 가지 형태의 모델이 반복적으로 사용되었던 기존의 국정 교과서와 비교하였을 때 더욱 다양한 형태로 그림 모델이 구현되고 있음을 보여준다.



[그림 III-3] I 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 수직선의 예시(강완 외, 2023, p.78) [그림 III-4] J 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 직사각형 영역 모델의 예시(박성선 외, 2023, p.86)

또한, 단원의 마지막 차시인 소수와 분수의 크기 비교를 위하여 [그림 III-5], [그림 III-6]과 같이 수직선을 사용하여 나타내는 경우가 많았다. 수직선에 빈칸을 활용하거나 눈금의 크기를 다르게 설정하는 등 수직선을 활용하는 방법은 다양하게 나타났으나 수직선을 통하여 분수와 소수의 크기 비교를 시각적으로 나타내교자 한 의도는 동일하였다. 이처럼 수직선을 활용하여 나타내는 경우 직관적으로 수의 크기를 비교하기 용이하여 학생들의 크기 비교에 도움을 줄 수 있으며 구체적 조작기 초등학생에게 더욱 의미 있는 경험을 제공할 수 있다.



[그림 III-5] I 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 수직선의 예시(강완 외, 2023, p.90) [그림 III-6] B 교과서 5학년 1학기 4. 약분과 통분 중 수직선의 예시(박교식 외, 2023, p.76)

## 2. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름 및 시각적 표현 분석

### 가. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름 분석

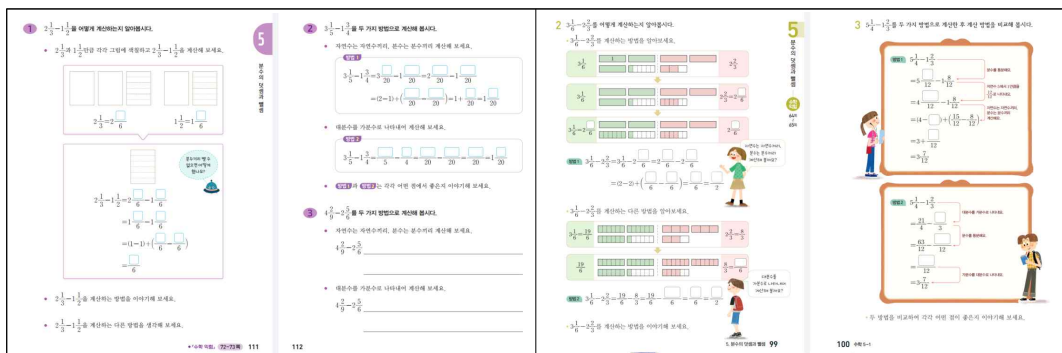
초등 수학 검정 교과서 10종을 대상으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 흐름을 분석한 결과는 <표 III-3>과 같다.

이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단위에서는 (진분수)+(진분수), (대분수+대분수), (진분수)-(진분수), (대분수)-(대분수)의 흐름을 따르고 있다. 진분수에서 대분수, 덧셈에서 뺄셈, 받아올림이 없는 것에서 있는 순서를 유지하는 등 간단한 것에서 복잡한 것의 순서로 이어지는 흐름을 따른다. 9개 출판사가 6개 차시로 해당 단원을 구성하였으며 G 교과서를 제외하면 각각 덧셈 3차시, 뺄셈 3차시로 구성되어 있다. 덧셈 차시가 먼저, 뺄셈 차시가 나중에 오는 것까지 국정 교과서에서 제시한 것과 흐름이 동일하다.

<표 III-3> 초등 수학 검정 교과서의 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원 내 차시 흐름 분석 결과

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)+(진)= (진)	(진)-(진)= (진)
2	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(대)+(대)= 받아올림이 없는 (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)	(진)+(진)= (대)
3	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 없는 (대)	(진)-(진)= (진)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)	(대)+(대)= 받아올림이 있는 (대)
4	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(대)-(대)= 받아올림이 없는 (대)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)	(진)-(진)= (진)
5	(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)	(대)-(대)= (진)	(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)	(대)-(대)= (진)		(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (진)	(대)-(대)= 받아내림이 없는 (대)
6	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (대)	(대)-(대)= 있는 (대)	(대)-(대)= 있는 (대)	(대)-(대)= 있는 (대)		(대)-(대)= (진)	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (대)	(대)-(대)= 받아내림이 있는 (대)

G 교과서의 경우 타 출판사에서 해당 단원을 6차시로 구성한 것과 달리 4차시로 구성하였다. 이는 앞서 약분과 통분 단원에서도 4차시로 구성한 것과 유사한 방향으로 본 차시의 수를 적게 구성하되 한 차시의 분량을 조절하고 있음을 확인할 수 있다. 이러한 경우 수업을 진행하는 교사의 역량에 따라 연차시로 수업을 진행하는 등 다양한 방향으로 활용될 수 있다. 반면 동일하게 6차시로 구성되었다라든 J 교과서, B 교과서와 같이 마지막 차시는 4쪽으로 구성하는 등 초등학생에게 난이도 있는 내용의 경우 본 차시를 서술하는 경우도 나타났다. 이러한 경우 학생들이 수업 중 형식화 과정을 학습하는 상황을 여러 가지 예시를 들어 제시하고 확인 문제를 여러 개 제시하는 등 본 차시를 자세하게 서술하였음이 나타났다. [그림 III-7], [그림 III-8]과 같이 활동에 제시된 식을 여러 개 제시하여 각각 다른 방법으로 해결하는 과정을 통하여 학생들에게 친절하고 자세하게 연산 과정을 설명하려 하였다.



[그림 III-7] J 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 받아내림이 있는 뺄셈 차시의 일부(박성선 외, 2023 p.111~112)

[그림 III-8] B 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 받아내림이 있는 뺄셈 차시의 일부(박교식 외, 2023, p.99~100)

### 나. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 시각적 표현 분석

초등 수학 검정 교과서 10종을 대상으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 시각적 표현을 분석한 결과는 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4> 초등 수학 검정 교과서의 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원 내 시각적 표현 분석 결과

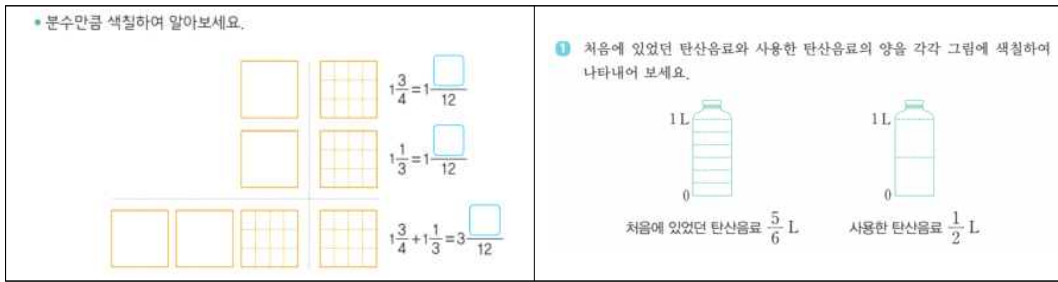
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	계
1	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
2	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	원	원	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
3	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
4	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
5	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)		직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
6	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (영역)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)		직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	직사각형 (선형)	-
직사각형 (영역)	2(33.33%)	0(0%)	0(0%)	6(100%)	0(0%)	1(16.67%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	9(15.52%)
직사각형 (선형)	4(66.66%)	6(100%)	6(100%)	0(0%)	5(83.33%)	4(66.67%)	4(100%)	6(100%)	6(100%)	6(100%)	47(81.03%)
원	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	1(16.67%)	1(16.67%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	2(3.45%)
수직선	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
계	6(100%)	6(100%)	6(100%)	6(100%)	6(100%)	6(100%)	4(100%)	6(100%)	6(100%)	6(100%)	58(100%)

분석 결과, 10종의 초등 수학 검정 교과서 모두 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 시각적 표현을 활용하였다. 전체적으로 살펴보면 직사각형 모델의 활용이 총 58건 중 56건(96.6%)에 달하였으며 원 모델의 경우 2건(3.6%)으로 나타나는 등 직사각형 모델의 선호가 매우 높게 나타났다. 이는 약분과 통분 단원에서 직사각형(선형) 모델에 이어 수직선, 직사각형(영역) 모델, 원 모델의 순서로 나타난 것과 대조된다. 시각적 표현의 활용이 가장 적게 나타난 것은 G 출판사의 교과서로 4건이었으며, 그 외에는 동일하게 6건이 나타났다. 이는 G 출판사의 경우 해당 단원의 차시가 다른 출판사가 6개로 구성된 것과 달리 4개로 구성된 것과 관련이 있다. 매 차시 1 종류의 시각적 표현을 일관되게 사용하는 것이 반영된 것이다.

약분과 통분 단원에서 나타난 것과 달리 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서는 수직선 모델을 사용한 교과서가 나타나지 않는 등 특정 종류의 시각적 표현에 대한 선호가 뚜렷하게 나타났다. 구체적으로 살펴보면 B 교과서, C 교과서, G 교과서, H 교과서, I 교과서, J 교과서에서는 직사각형(선형) 모델, D 교과서에서는 직사각형(영역)만을 사용하는 등 한 종류의 시각적 표현을 일관되게 활용하였으며 그 외 출판사는 직사각형(영역) 모델, 직사각형(선형) 모델, 원 모델 등을 차시에 따라 조합하여 활용하였다. 직사각형 모델의 활용이 높은 이유는 분수의 크기를 시각적으로 표현하기 수월하여 분수의 연산 과정을 더 쉽게 보여줄 수 있기 때문으로 보인다.

또한, 교과서에 제시된 시각적 표현은 색이 칠해져 있거나 분모의 크기에 알맞게 개수가 나누어지는 등 분수의 연산을 위하여 필요한 정보를 포함하고 있다. 이처럼 친절한 형태로 나타내어진 시각적 표현이 학생들의 이해를 도울 수 있겠지만 동일한 형태가 반복적으로 제시된다면 학생들은 시각적 표현의 내용을 통하여 분수의 연산 과정을 파악하기보다 교과서의 안내에 따라 활용할 자료 중 하나로 인식할 수 있다. 교과서의 시각적 표현을 활용하여 색칠 등의 활동을 수행하더라도 [그림 III-9], [그림 III-10]과 같이 분모의 수만큼 모델이 등분할된

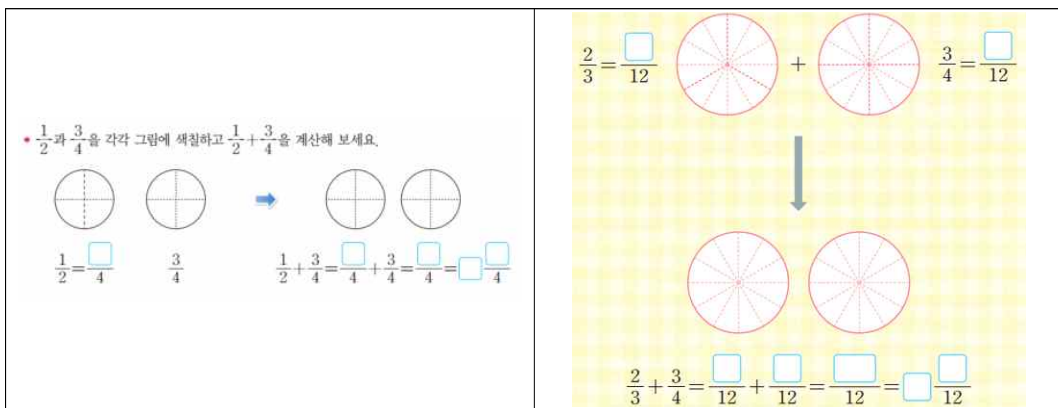
상태로 제공되는 경우가 대부분이다. 이러한 경우 시각적 표현이 학생들의 수행을 용이하게 도울 수 있는 비계 역할을 할 수 있겠으나 학생 스스로 분수의 크기를 가늠하거나 나름의 방법으로 표현할 기회가 생략될 수 있다. 따라서 다양한 측면에서 시각적 표현에 접근하여 적극적인 활동을 유도할 필요가 있다. 또한, 덧셈과 뺄셈의 상황은 무엇을 더하거나 덜어내는 등의 실생활의 맥락과 연결되어 있기 때문에(방정숙 외, 2022) 필요에 따라 [그림 III-10]과 같이 구체물과 유사한 모양으로 나타내는 경우 맥락 이해에 도움을 줄 수 있을 것이다.



[그림 III-9] D 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 직사각형 영역 모델의 예시(한대희 외, 2023, p.96)

[그림 III-10] J교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 직사각형 선형 모델의 예시 (박성선 외, 2023, p.106)

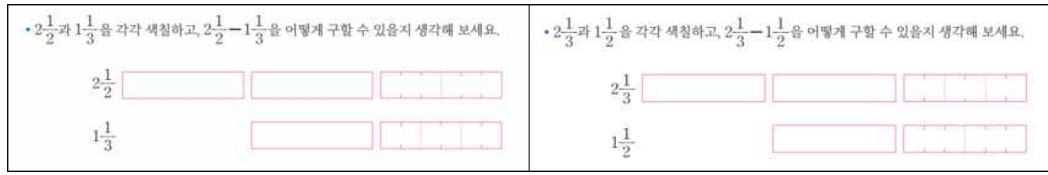
또한, 원 모델은 분수 이해 및 분수의 덧셈 및 뺄셈에 대한 강력한 모형이며(Cramer et al., 2008) [그림 III-11], [그림 III-12]와 같이 (진분수)+(진분수)=(대분수)에 대한 학습 차시에서 원 모델이 활용되었다. 이는 원 모델의 형태가 1을 나타내기에 용이하며 각각의 진분수를 더하였을 때 완성된 원 1개 이상의 값을 나타낸다는 것을 보여주기 수월하기 때문으로 보인다. 그러나, 여러 출판사의 교과서에서 이러한 이점에도 불구하고 원 모델의 사용 빈도가 낮게 나타난 것에 주목할 필요가 있다. E 교과서와 F 교과서를 제외한 8개 출판사가 교과서를 통하여 원 모델을 제시하지 않았으며 직사각형 모델만을 활용하였다. 원 모델은 전체를 인식하기 쉬운 이점이 있지만 학생들이 그리거나 분할하기 쉬운 영역 모델이라는 직사각형 모델의 장점을 능가하기 어렵기 때문에(Reys et al., 2015/2017) 직사각형 모델이 자주 활용된 것으로 짐작된다.



[그림 III-11] E 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 원 모델의 예시(김성여 외, 2023, p.100)

[그림 III-12] F 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 원 모델의 예시(장혜원 외, 2023, p.100)

그 외 출판사는 직사각형 모델을 주로 활용하였으며 이는 직사각형 모델이 가진 고유의 장점을 살리기 위한 것으로 보인다. 타 모델이 비하여 직사각형 모델은 선으로 구성되어 있어 그리기 쉽고 직관적인 파악이 용이하며 학생들에게도 익숙한 형태로 나타난다. [그림 III-13], [그림 III-14]와 같이 서로 다른 식의 연산 과정을 표현하였어도 의도적으로 유사한 형태로 나타낼 수 있으며 이러한 형태의 익숙함은 학생들에게 더 효율적으로 여겨질 수 있다. 또한 원 모형은 항상 동일한 형태를 유지하며 분모의 크기에 따라 부채꼴의 형태가 바뀌지만, 직사각형 모형은 가로와 세로의 길이를 조절할 수 있는 등 이러한 형태의 표현에서 더 유연하게 대처할 수 있어 분모의 통분을 요구하는 이분모분수의 연산에 더 적합하다.



[그림 III-13] H 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 직사각형 선형 모델의 예시 (류희찬 외, 2023, p.116)

[그림 III-14] H 교과서 5학년 1학기 5. 분수의 덧셈과 뺄셈 중 직사각형 선형 모델의 예시 (류희찬 외, 2023, p.118)

이러한 분석을 바탕으로 초등 검정 교과서의 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원 내 시각적 표현을 비교 분석한 결과는 다음과 같다. 지면상 편의를 위하여 왼쪽이 약분과 통분 단원, 오른쪽이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 결과로 건수를 기재하여 나타내었다.

<표 III-5> 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원 내 시각적 표현 비교 분석 결과

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	계											
직사각형(영역)	0	2	0	0	1	0	2	6	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	7	9	
직사각형(선형)	2	4	4	6	6	6	4	0	2	5	2	4	2	4	2	6	4	6	4	6	32	47
원	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	6	2
수직선	1	0	3	0	1	0	4	0	2	0	1	0	1	0	0	0	3	0	2	0	18	0
계	5	6	7	6	8	6	11	6	5	6	4	6	5	4	2	6	8	6	8	6	63	58

분석 결과, 직사각형(선형) 모델이 전체 121건 중 79건(65.30%)에 해당하는 높은 빈도를 나타내었으며 수직선이 18건(14.88%), 직사각형(영역) 모델이 16건(13.22%), 원 모델이 8건(6.61%)의 순서로 나타났다. 약분과 통분 단원보다 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 시각적 표현의 활용이 증가한 교과서는 4종(A 교과서, E 교과서, F 교과서, H 교과서)이며 활용이 감소한 교과서는 6종(B 교과서, C 교과서, D 교과서, G 교과서, I 교과서, J 교과서)으로 나타났다. 전체적으로 시각적 표현을 통하여 기호적 표현으로 형식화하는 흐름이 나타났으며 이는 해당 단원에서의 목표가 시각적 표현의 이해나 활용에서 그치는 것이 아니라 아닌 분수의 개념 및 연산에 대한 이해임을 보여준다.

약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 시각적 표현의 증감을 살펴본 결과 직사각형(영역) 모델, 직사각형(선형) 모델은 활용이 증가하였으며 원 모델과 수직선 모델은 활용이 감소하였다. 두 단원의 시각적 표현을 분석하였을 때 시각적 표현 한 종류의 일관된 사용이 나타나는 교과서는 1종(H 교과서)뿐이었으며 그 외에는 일관된 흐름이 나타나지 않았다. 이러한 시각적 표현의 활용은 각 단원의 집필진이 어떠한 의도를 가지고

집필하였는지와 관련되어 있다. 한 종류의 시각적 표현을 사용하는 경우 분수 개념과 크기 비교, 덧셈과 뺄셈을 일관되게 지도할 수 있으며(서동엽, 2005) 다양한 모델을 활용한 분수 학습은 개념 이해를 도와 분수의 연산 능력을 증진하는 효과를 가져올 수 있다(양현수 외, 2023). 더욱이, 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원은 서로 밀접하게 관련되어 있으므로 교과서 집필 시 분수 개념 학습의 연계성, 학생의 이해 등을 고려하여 더욱 세심하게 시각적 표현을 선택하여야 한다(임미인, 2020).

#### IV. 결론 및 제언

본 연구에서는 초등 수학 검정 교과서에서의 약분과 통분, 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원에 대한 차시 흐름 및 시각적 표현을 분석하여 분수의 개념 및 연산 지도에 대한 시사점을 제시하고자 하였다. 분석 결과를 바탕으로 도출한 구체적인 결론 및 시사점은 다음과 같다.

첫째, 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 차시 구성은 출판사에 따른 영향이 적었으며 국정 교과서의 차시 흐름과 유사하였다. 각 출판사에 따른 차시 내 구성은 다소 차이가 있었지만 단원을 구성하는 차시의 수, 다루는 내용, 순서 등이 유사하게 조직되어 있었다. 여러 출판사에서 각자의 의도를 가지고 집필하였음에도 불구하고 차시 흐름이 유사하게 나타난 것은 약분과 통분 및 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 단원의 학습 내용이 내포하는 위계성 및 계통성이 견고함을 보여준다. 또한, 해당 단원과 관련된 교육과정의 성취기준이 구체적으로 설정된 것 또한 이러한 차시 흐름에 영향을 미친 것으로 보인다. 학생들은 약분과 통분에 대한 기본 개념과 방법을 먼저 습득한 후 복잡한 연산 문제를 다루는 순차적인 흐름에 따라 해당 단원을 학습하게 된다. 약분과 통분 단원에 대한 충분한 이해가 뒷받침되어야 후속 단원의 학습 진행이 가능하기에 이러한 흐름에 유의하고 서로의 연계를 고려하여 수업을 고안하여야 한다.

둘째, 분수의 덧셈과 뺄셈을 탐구하는 과정에서 시각적 표현을 적극적으로 활용할 필요가 있다. 초등 수학 교과서에서 시각적 표현을 나름의 방식으로 구현하여 활용하고 있으며 이는 분수 학습에서 시각적 표현의 중요성을 보여준다. 시각적 표현을 사용하면 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 이해를 높일 뿐만 아니라 형식적 알고리즘을 발견할 기회를 제공할 수 있으며(이지영 외, 2017) 기계적 연산의 숙달에 그치는 것이 아니라 분수의 개념 및 연산에 대한 학습 내용을 깊게 이해할 수 있다. 출판사마다 시각적 표현의 종류, 형태 및 수 등이 다르게 나타났기에 각 교과서의 특성과 시각적 표현의 활용을 연계하여 각 단위 학교 학생에게 알맞은 교과서의 선정에 활용할 수 있다. 한 가지 모델을 이용하는 경우 분수 개념과 관련된 확고한 심상을 길러줄 수 있으며(서동엽, 2005) 다양한 시각적 모델을 제시하면 학생들이 분수의 연산에 대하여 풍부한 경험을 할 수 있어(방정숙, 이지영, 2009) 이러한 장단점을 고려하여야 한다. 또한, 어떠한 시각적 표현을 활용했는지 학생들의 이해 및 문제해결에 영향을 미칠 수 있기에(Cramer et al., 2008) 개별 학생의 수준을 반영한 시각적 표현을 추가로 제시하거나 기존의 시각적 표현을 변형하는 등의 재구성을 고민하여 수업을 설계할 수 있다.

셋째, 분수의 연산 과정에서 학습자 나름의 방법으로 학습 내용을 표현할 기회를 제공하여야 한다. 분석 결과, 여러 교과서에서 시각적 표현의 종류 및 개수가 다양하게 나타났으나 그러한 시각적 표현의 대부분은 이미 완성된 형태로 제공되거나 간단한 색칠이나 분할 등 수동적인 활용에 머물렀다. 시각적 표현은 학습자의 수학적 개념 및 연산에 대한 이해도를 높이는 것은 물론 기호적 표현을 이해하기 어려운 나이 어린 학습자가 연산 과정을 쉽게 이해하고 흥미를 느끼며 깊이 있는 학습을 할 수 있게 도울 수 있다. 따라서 학생들이 교과서의 시각적 표현을 수동적으로 받아들이고 이해하는 것에서 더 나아가 주체적으로 여러 가지 시각적 표현을 고민할 기회를 제공한다면 기호적 표현의 연계로까지 이어져 더욱 효과적인 학습을 이끌 수 있을 것이다. 예를 들어, 제시된 상황을 시각적으로 변환하고 나름의 언어로 설명하거나 시각적 표현을 다른 형태의 표현으로 나타내는 등

시각적 표현을 학생 스스로 구성하거나 변환할 기회를 제공하여 더욱 깊은 입체적인 수업을 이끌 수 있다. 이때, 분수를 시각화하여 나타낼 수 있는 여러 가지 공학 도구를 활용하거나 학생이 생성한 시각적 표현에 대하여 또래 친구 및 교사와 의사소통할 기회를 제공한다면 더욱 효과적인 학습을 이끌 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- 강완 · 백석윤 · 전인호 · 이경화 · 김연 · 이미연 외 15인 (2023). 수학 5-1. 대교출판.
- Kang, W., Baek, S., Jeon, I., Lee, K., Kim, Y., ..., Lee, M. (2023). *Mathematics 5-1*. Daekyo.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].
- Ministry of Education (2015). Mathematics curriculum, Ministry of Education Notice No. 2015-74 [Annex 8]. Retrieved.
- 교육부 (2020). 수학 5-1, 비상교육.
- Ministry of Education (2020). *Elementary school mathematics 5-1*. Visang Education
- 김미영 · 백석윤 (2010). 분수 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. 한국초등수학교육학회지, **14(2)**, 241-262.
- Kim, M., & Paik, S. (2010). An analysis on cognitive obstacles while doing addition and subtraction with fractions. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **14(2)**, 241-262.
- 김성여 · 강연진 · 강요한 · 고창수 · 김보현 · 김영준 외 9인 (2023). 수학 5-1. 아이스크림.
- Kim, S., Kang, E., Kang, Y., Go, C., Kim, B., ..., Kim, Y. (2023). *Mathematics 5-1*. I-Scream.
- 김양권 · 홍진곤 (2017). 초등학생의 수직선 이해와 사용의 어려움. 수학교육논문집, **31(1)**, 85-101.
- Kim, Y., & Hong, J. (2017). Difficulty of understanding and using the number line by Elementary school students. *Communications of Mathematical Education*, **31(1)**, 85-101.
- 김정원 (2022). 초등학교 4 학년 학생들의 수직선 이해 분석: 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로. 초등수학교육, **25(3)**, 213-232.
- Kim, J. (2022). An analysis of elementary students' understanding of number line: Focused on concept of fractions and addition and subtraction of fractions. *Education of Primary School Mathematics*, **25(3)**, 213-232.
- 류희찬 · 유현주 · 이종영 · 조영미 · 탁병주 · 최인숙 외 20인 (2023). 수학 5-1. 금성출판사.
- Lew, H., Yu, H., Lee, C., Cho, Y., Tak, B., ..., Choi, I. (2023). *Mathematics 5-1*. Kumsung.
- 박교식 · 정영옥 · 고정화 · 권석일 · 남진영 · 박진형 외 27인 (2023). 수학 5-1. 두산동아.
- Park, K., Chong, Y., Ko, J., Kwon, S., Nam, J., ..., Park, J. (2023). *Mathematics 5-1*. Bookdonga.
- 박만구 · 강경은 · 김대진 · 김도경 · 김수정 · 김은혜 외 8인 (2023). 수학 5-1. 천재교육.
- Park, M., Kang, K., Kim, D., Lim, D., Kim, S., ..., Kim E. (2023). *Mathematics 5-1*. Chunjae.
- 박성선 · 류성립 · 김상미 · 권성룡 · 김남균 · 강호진 외 11인 (2023). 수학 5-1. YBM.
- Park, S., Ryu, S., Kim, S., Kwon, S., Kim, N., ..., Kang, H. (2023). *Mathematics 5-1*. YBM.
- 방정숙 · 이지영 (2009). 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. 학교수학, **11(4)**, 723-743.
- Pang, J., & Lee, J. (2009). An analysis of the multiplication and division of fractions in elementary mathematics instructional materials. *School Mathematics*, **11(4)**, 723-743.
- 방정숙 · 김리나 · 김소현 (2022). 한국, 싱가포르, 미국, 일본의 초등학교 교과서에 제시된 덧셈과 뺄셈 도입에 대한 비교분석. 수학교육논문집, **36(2)**, 229-252.
- Pang, J., Kim, L., & Kim, S. (2022). A comparative analysis of introducing addition and subtraction in the Korean,



- Singaporean, American, and Japanese elementary textbooks. *Communication of Mathematics Education*, **36(2)**, 229-252.
- 서동엽 (2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. *수학교육학연구*, **15(3)**, 233-249.
- Seo, D. (2005). The historico-genetic instruction on fractions. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, **15(3)**, 233-249.
- 손태권 · 황성환 · 여승현 (2020). 2015 개정교육과정 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 수학 교과서 및 익힘책 분석. *학교수학*, **22(3)**, 489-508.
- Son, T., Hwang, S., & Yeo, S. (2020). An analysis of the 2015 revised curriculum addition and subtraction of fractions in elementary mathematics textbooks. *School Mathematics*, **22(3)**, 489-508.
- 신향균 · 김태환 · 조보영 · 김리나 · 정나영 · 최혜령 외 8인 (2023). *수학 5-1*. 비상교육.
- Shin, H., Kim, T., Cho, B., Kim, L., Jeong, N., ..., Choi, H. (2023). *Mathematics 5-1*. Visang.
- 안병곤 · 나귀수 · 김민경 · 이광호 · 류현아 · 최지선 외 14인 (2023). *수학 5-1*. 두산동아.
- Ahn, B., Na, G., Kim, M., Lee, K., Ryu, H., ..., Choi, J. (2023). *Mathematics 5-1*. Bookdonga
- 양현수 · 김민경 · 김예주 · 최현경 (2023). 다양한 분수 모델에 대한 초등학생의 수감각 및 연산능력에 관한 연구: 영역 모델 및 수직선 모델을 중심으로. *수학교육학연구*, **33(1)**, 173-194.
- Yang, H., Kim, M. K., Kim, Y., & Choi, H. (2023). Children's number sense and arithmetic ability in various models of fraction: Focused on the area model and the vertical line model. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **33(1)**, 173-194.
- 이대현 (2020). 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등수학 교과서에 제시된 분수 연산 내용 분석. *학습자중심교과교육연구*, **20(15)**, 1035-1062.
- Lee, D. (2020). An analysis on the contents of fractional operations in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, Singapore, and U. S. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **20(15)**, 1035-1062.
- 이지영 · 방정숙 (2016). 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고: 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로. *학교수학*, **18(3)**, 625-645.
- Lee, J., & Pang, J. (2016). Reconsideration of teaching addition and subtraction of fractions with different denominators: Focused on quantitative reasoning with unit and recursive partitioning. *School Mathematics*, **18(3)**, 625-645.
- 이지영 · 방정숙 · 서은미 · 김경훈 (2017). 한국과 싱가포르의 초등학교 수학 교과서에 제시된 분수의 덧셈 관련 시각적 표현에 대한 비교 분석. *수학교육학연구*, **27(3)**, 537-555.
- Lee, J., Pang, J., Seo, E., & Kim, K. (2017). A comparative analysis of graphical representations related to addition of fractions in elementary mathematics textbooks of Korea and Singapore. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **27(3)**, 537-555.
- 임미인 (2020). 분수의 단위와 전체에 관한 수학 교과서의 내용 고찰 및 초등학생의 이해 분석. *초등수학교육*, **23(3)**, 117-134.
- Lim, M. (2020). Analysis of elementary mathematics textbooks contents and 3rd graders' understanding on unit and whole of fractions. *Education of Primary School Mathematics*, **23(3)**, 117-134.
- 장혜원 · 서동엽 · 김민희 · 김선 · 김주숙 · 김차명 외 8인 (2023). *수학 5-1*. 미래엔.
- Chang, H., Seo, D., Kim, M., Kim, S., Kim, J., ..., Kim, C. (2023). *Mathematics 5-1*. Mirae-n.
- 한대회 · 고은성 · 이수진 · 조형미 · 한상의 · 신희영 외 11인 (2023). *수학 5-1*. 천재교육.
- Han, D., Ko, E., Lee, S., Cho, H., Han, S., ..., Shin, H. (2023). *Mathematics 5-1*. Chunjae.
- 황성환 · 여승현 · 손태권 (2021). 한국, 싱가포르, 핀란드 수학과 교과용 도서에 제시된 분수의 덧셈과 뺄셈 문제 분석: 내용 및 인지 영역을 중심으로. *한국초등수학교육학회지*, **25(4)**, 417-443.
- Hwang, S., Yeo, S., & Son, T. (2021). An analysis on fraction addition and subtraction problems in mathematics

- instructional materials of Korea, Singapore, and Finland: Focusing on content and cognitive domains. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **25(4)**, 417-443.
- Armstrong, B. E., & Larson, C. N. (1995). Students' use of part-whole and direct comparison strategies for comparing partitioned rectangles. *Journal for Research in Mathematics Education*, **26(1)**, 2-19.
- Armstrong, B. E., & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 85 - 119). State University of New York Press.
- Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **13(8)**, 490-496.
- Hull, L. (2005). *Fraction models that promote understanding for elementary students* [Unpublished master's thesis, University of Central Florida].
- Kara, F., & Incikabi, L. (2018). Sixth grade students' skills of using multiple representations in addition and subtraction operations in fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, **10(4)**, 463-474.
- Monson, D., Cramer, K., & Ahrendt, S. (2020). Using models to build fraction understanding. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, **113(2)**, 117-123.
- Morano, S., Riccomini, P. J., & Lee, J. Y. (2019). Accuracy of area model and number line representations of fractions for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, **34(3)**, 133-143.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Reys, R., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping children learn mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역 (2017). 초등교사를 위한 수학과 교수법 개정판. 경문사.
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, **89(3)**, 419-441.

## **The Analysis of the Flow and Visual Representation of Simplification, Common Denominators, and Addition and Subtraction of Compound Fractions in Elementary Mathematics Textbooks**

**Kang, Yunji**

Seoul Hongyeon Elementary School

E-mail : angie0718@sen.go.kr

The purpose of this study was to analyze and derive pedagogical implications from elementary mathematics textbooks that align with the revised 2015 curriculum. Specifically, the focus was on the chapters related to simplifying fractions, finding a common denominator, and performing addition and subtraction of Fractions with Different Denominators. The analysis revealed that the overall structure of these chapters was similar across the textbooks, but variations existed in terms of the main activities and the textbook organization. Furthermore, different textbooks employed various types and quantities of visual representations. When designing lesson directions and content, it is crucial to consider the strengths and weaknesses of each visual representation.

---

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

\* Key words : simplification, common denominators, addition and subtraction of fractions with different denominators, elementary mathematics textbooks, visual representation