韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2023.37.2.135
제 37집 제 2호, 2023. 6. 135–157

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 37, No. 2, Jun. 2023. 135–157

이중 척도 모델에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 분석: 분수의 나눗셈을 중심으로

방 정 숙 (한국교원대학교, 교수)
곽 기 우 (한국교원대학교 대학원, 학생)†
김 소 현 (대전 가양초등학교, 교사)

2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에 이중 척도 모델이 본격적으로 도입되었지만, 학생들이 이중 척도 모델을 어떻게 이해하거나 활용하고 있는지 자세히 조사한 연구는 드물다. 이에 본 연구에서는 이중 척도 모델이 포함된 교과서로 분수의 나눗셈을 학습한 6학년 학생 154명을 대상으로 교과서에 제시된 형태의 이중 척도 모델을 어떻게 이해하고 있는지 분석하였다. 그 결과 학생들은 모델의 구성 요소는 비교적 잘 탐색하는 경향이 있었으나 예외적으로 아래에 놓인 수직선의 단위나 의미를 탐색하는 데는 어려움을 드러냈다. 또한 이중 척도 모델을 활용해 계산 과정을 완성하고 계산 원리를 설명하는 데에는 많은 어려움이 있었다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 이중 척도 모델을 활용한 지도에 관한 시사점을 제시하였다.

Ⅰ. 서론

수학 학습에서 시각적 모델은 중요하다. 시각적 모델 중 이중 척도 모델은 위와 아래에 서로 다른 척도를 갖는 모델로서(정영옥, 2015), 비와 비율, 수와 연산 등 다양한 영역의 수학 학습에서 활용할 수 있다(장혜원 외, 2018; Küchemann et al., 2011; Orrill & Brown, 2012). 실제 이미 여러 나라의 수학 교과서에서 이중 척도 모델을 활발하게 활용하고 있다. 예를 들어 살펴보면, 일본에서는 3~6학년의 수학 교과서에 이중 척도 모델을 점진적으로 제시하는데, 주로 곱셈 및 나눗셈, 비율 단원에서 활용하고 있다(서은미 외, 2019). 대만에서는 3학년 자연수의 나눗셈 학습에서부터 이중수직선을 도입하고 6학년에서는 배(倍)와 관련된 학습을 할 때 띠와 수직선이 결합 된 모델을 제시하며, 싱가포르에서도 6학년에서 백분율을 도입할 때 띠와 수직선이 결합 된 모델을 제시한다(장혜원 외, 2018).

우리나라에서도 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 국정 교과서[이하 2015 개정 교과서] 개발 시기에 이중 척도 모델의 도입 가능성을 탐색하기 위한 몇 가지 연구들이 수행되었다. 이러한 연구에서는 이중 척도 모델을 도입하는 것이 타당한지, 도입하기에 적합한 시기와 내용 영역, 제시 방법은 무엇인지에 대한 탐색이 있었다(김양권, 2017; 서은미, 2019; 장혜원 외, 2018). 또한 이중 척도 모델을 실제 수업에 적용하여 학생들의 반응을 분석함으로써 이중 척도 모델의 구현 가능성을 탐색한 연구도 있었다(서은미 외, 2017; 장혜원 외, 2018; 조지원, 신항균, 2018). 결과적으로, 2015 개정 교과서에서는 소수의 곱셈, 소수의 나눗셈, 분수의 나눗셈 단원과 비와 비율, 비례식과 비례배분 단원에 이중 척도 모델이 제시되었고, 학교 현장에서는 2019년부터 이중 척도 모델이 제시된

* 접수일(2023년 5월 8일), 심사(수정)일(2023년 6월 9일), 게재확정일(2023년 6월 21일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 이중 척도 모델, 분수의 나눗셈, 계산 원리, 학생 이해
† 교신저자 : giwoo9292@naver.com

교과서가 사용되기 시작하였다.

이중 척도 모델을 도입한 이후 특히 분수의 나눗셈 학습에서 이중 척도 모델과 관련된 논의가 있었다. 예를 들어, 이중 척도 모델을 활용하여 분수의 나눗셈을 지도한 경험이 있는 현장 교사의 인식을 살펴본 연구가 있었는데(김정하, 2020; 서동엽, 2021), 주로 이중 척도 모델이 어떤 측면에서 효과적인지, 교수·학습 과정에서 활용할 때 겪는 어려움이 무엇인지를 탐색하였다. 반면 이중 척도 모델로 분수의 나눗셈을 학습한 학생들의 이해를 살펴본 연구는 거의 없었는데, 예외적으로, 방정숙 외(2022)는 분수의 나눗셈과 관련한 학생들의 시각적 표현에 대한 이해를 살펴보았으나, 이 연구에서는 수학적 의사소통 능력의 한 하위요소로 시각적 표현을 다루고 있어서 이중 척도 모델 자체에 대한 학생들의 이해도를 자세히 알기는 어렵다.

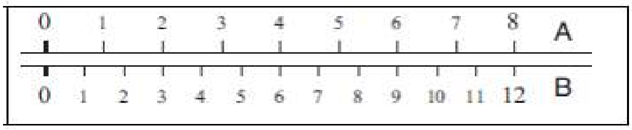
이와 같은 연구 배경을 바탕으로, 본 연구에서는 분수의 나눗셈을 중심으로 이중 척도 모델에 대한 학생들의 이해를 알아보고 시사점을 제시하고자 한다. 최근 2022 개정 수학과 교육과정의 공포로 교과서 개발이 한창 진행되고 있으므로 교과서에 새로 도입된 이중 척도 모델에 대해서 학생들이 어떻게 이해하고 있는지 분석하는 것은 시기적절하다고 생각된다. 또한 분수의 나눗셈이라는 특정 주제와 관련하여 학생들이 이중 척도 모델을 어떻게 이해하고 활용하는지를 분석하는 것은, 수학 내용을 가르치는 데 있어서 이중 척도 모델의 적절한 활용에 관한 시사점을 도출하는 데 도움이 될 것으로 기대된다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 이중 척도 모델의 특성 및 제시 목적

이중 척도 모델에는 비표, 이중수직선, 막대모델, [그림 Ⅱ-2]에서와 같이 띠 또는 영역 모델과 수직선이 결합된 형태 등 다양한 형태가 있으나 본고에서는 2015 개정 교과서에서 제시하고 있는 이중수직선, 띠 또는 영역 모델과 수직선이 결합 된 형태를 중심으로 살펴보고자 한다. 이중 척도 모델의 형태는 여러 가지이지만 각 측정 공간에서 서로 대응하여 표시된 수들의 비례 관계가 일정하다는 속성은 모두 동일하게 지니고 있다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-1]에서와 같이 수직선 A에 표시된 0~8의 수들은 각각 아래의 수직선 B에 표시된 0~12에 정렬되어 '×1.5'라는 일정한 비례 관계를 갖는다. Küchemann et al.(2011)은 이중수직선의 이러한 속성이, 학생들이 덧셈적으로 사고하는 것에서 곱셈적으로 사고하는 것으로 전환하는 데 효과적임을 주장하였다.



[그림 Ⅱ-1] 위아래에 대응하는 수들이 일정한 비례 관계를 갖는 이중수직선의 예(Küchemann et al., 2011, p. 328)

이렇듯 두 측정 공간 사이에서의 비례 관계는 물론, 한 측정 공간 내에서도 수들을 곱셈적으로 변화시켜 수직선을 늘이거나 줄일 때 비례 관계가 일정하게 유지된다(Orrill & Brown, 2012). 이처럼 양들 사이의 관계를 분명히 나타낼 수 있는 장점을 바탕으로 2015 개정 교과서에서 분수의 나눗셈 단원에 이중수직선이 적극적으로 도입되었다.

한편, 장혜원 외(2018)는 초등 수학 지도 시 이중수직선의 활용 가능성을 탐색하였는데 구체적으로 차시를 도입할 때 계산 결과를 어림하거나 개념 및 연산의 원리를 이해하고, 문장제 해결에서 식을 세우기 전 문제 상황을 파악하는 것으로 제안하였다. 서은미(2019)는 장혜원 외(2018)를 확장하여 초등 수학 교수·학습 과정에서 이중 척도 모델을 어떠한 목적으로 제시할 수 있는지를 <표 Ⅱ-1>과 같이 추출하였다.

<표 Ⅱ-1> 학년군별 이중 척도 모델의 제시 목적

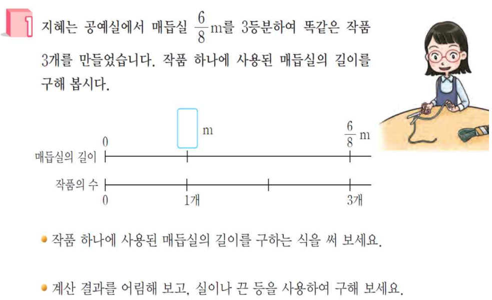
3~4학년군	5~6학년군
①문제 구조의 이해	①문제 구조의 이해
②두 양 사이의 관계 강조	②두 양 사이의 관계 강조
③양에 대한 어림	③양에 대한 직관적인 어림
④식을 세우기 위한 참조 모델	④식을 세우기 위한 참조 모델
	⑤조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색

서은미(2019)가 추출한 이중 척도 모델의 제시 목적을 5~6학년을 중심으로 요약하여 설명하면 다음과 같다. 먼저 '문제 구조의 이해'란 이중 척도 모델의 구성 요소를 탐색하여 두 양 사이의 관계를 파악하고, 두 양이 각 측정 공간에서 어떻게 곱셈적으로 공변하는지를 확인하여 문제에서 구해야 하는 양이 무엇인지 이해하는 것을 뜻한다. '두 양 사이의 관계 강조'란 이중 척도 모델이 제시하는 두 측정 공간 사이의 곱셈적인 관계를 파악하고, 이를 바탕으로 각 측정 공간 내에 위치한 양들이 서로 공변하는 관계임을 파악하는 것을 뜻한다. 특히 나눗셈 학습에서는 아래 수직선의 1에 대응하는 위 모델의 양을 확인함으로써 단위량당 크기를 강조하여 지도할 수 있다. 두 양 사이의 관계를 강조하는 것은 문제의 곱셈적인 구조를 이해하는 것과 문제 해결에 필요한 식을 세우는 데에도 도움이 된다. '양에 대한 직관적인 어림'은 문제에 제시된 곱하는 수 또는 나누는 수를 이중 척도 모델에 직접 표시하여 구하는 양의 크기를 직관적으로 어림하는 것을 뜻한다. 문제에서 곱하는 수나 나누는 수를 모델에 제공한 상태에서 양을 어림하도록 하는 3~4학년에서와 달리 5~6학년에서는 모델을 통해 양감을 활용한다는 점이 다르다. '식을 세우기 위한 참조 모델'은 이중 척도 모델에서 두 양의 공변을 탐색함으로써 문제 해결에 필요한 연산의 종류를 결정하고, 이를 바탕으로 식을 세우는 것을 뜻한다. 식을 세운 후 식에 등장한 각 수가 무엇을 의미하는지 파악하는 과정에서 두 양 사이의 관계를 강조할 수 있다. 마지막으로 '조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색'은 이중 척도 모델을 조작하여 문제의 해결 방법을 찾고, 계산 원리를 탐색하는 것을 의미한다.

나. 분수의 나눗셈 단원에 제시된 이중 척도 모델

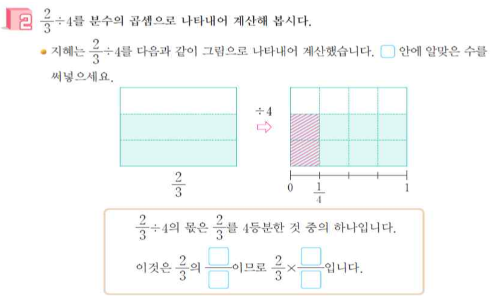
본 연구는 초등학교 학생들이 분수의 나눗셈 단원에서 이중 척도 모델이 제시된 목적별로 해당하는 요소들을 이해하고 있는지 파악하는 데 초점이 있으므로, 이 절에서는 해당 단원에서 이중 척도 모델이 어떠한 목적으로 제시되었는지 서은미(2019)의 연구를 바탕으로 분석한 결과를 제시한다. 2015 개정 교과서에서 분수의 나눗셈 학습은 6학년 1학기 1단원, 6학년 2학기 1단원에서 이루어진다. 이 두 개의 단원에서 이중 척도 모델이 제시된 차시는 총 다섯 차시로([그림 Ⅱ-2] 참조), 각 차시별로 이중 척도 모델이 제시된 목적을 분석한 결과는 다음과 같다.

(a)



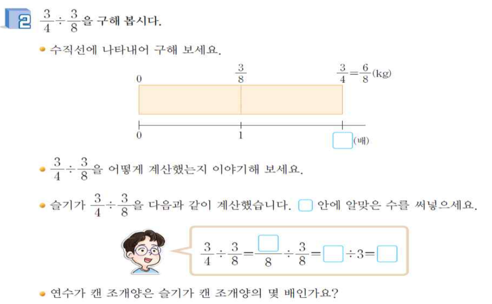
6학년 1학기 1단원 4차시(교육부, 2020a, p.14)

(b)



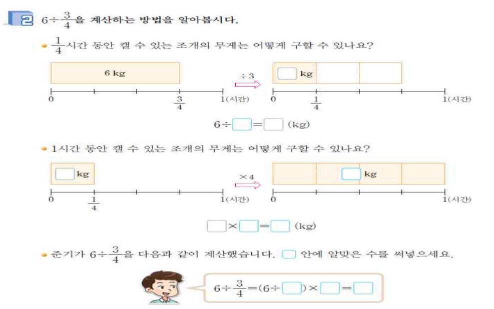
6학년 1학기 1단원 5차시(교육부, 2020a, p.16)

(c)



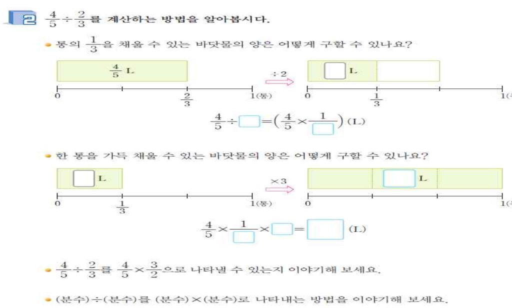
6학년 2학기 1단원 4차시(교육부, 2020b, p.14)

(d)



6학년 2학기 1단원 5차시(교육부, 2020b, p.17)

(e)



6학년 2학기 1단원 6차시(교육부, 2020b, p.19)

[그림 Ⅱ-2] 2015 개정 교과서의 분수 나눗셈 단원에 제시된 이중 척도 모델

6학년 1학기 1단원 4차시는 (분수)÷(자연수)의 계산 원리를 학습하는 차시이다. [그림 Ⅱ-2a]와 같이 매듭실 $\frac{6}{8}$m를 3등분하여 똑같은 작품 3개를 만들 때 작품 하나에 사용된 매듭실의 길이를 구하는 문제에서 이중수직선이 제시되었다. 이중수직선의 구성 요소를 탐색하여 작품의 개수와 매듭실의 길이 사이의 관계를 파악하도록 하

였고, 이 두 양은 서로 공변하는 관계임을 강조하고 있다. 작품 3개에 사용된 매듭실의 길이가 $\frac{6}{8}$m일 때, 작품의 수가 3개에서 1개로 변한다면 사용된 매듭실의 길이도 똑같은 비율로 변하여야 함을 확인하도록 하였고, 이를 바탕으로 $\frac{6}{8} \div 3$이라는 나눗셈식을 세우도록 하였다. 마지막으로 식을 계산한 결과를 이중수직선을 통해 어림하도록 하였다.

6학년 1학기 1단원 5차시는 (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 원리를 학습하는 차시이다. 이 차시의 <활동1>에서는 식혜 $\frac{2}{3}$L를 4명이 똑같이 나누어 마실 때 한 명이 마실 수 있는 식혜의 양을 구하는 문제가 제시되었다. 이 활동에서는 '$\frac{2}{3} \div 4$'라는 나눗셈식이 필요하다는 점과 동치분수를 이용해 계산 결과가 $\frac{1}{6}$이라는 것을 확인하도록 하였다. <활동2>에서는 [그림 Ⅱ-2b]와 같이 '$\frac{2}{3} \div 4$'가 '$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$'과 같다는 것을 시각적으로 확인할 수 있도록 영역 모델과 수직선이 결합 된 이중 척도 모델이 제시되었다. 앞의 활동에서 이미 식을 세웠으므로, 이 활동에서는 식혜의 양 $\frac{2}{3}$L를 나타내는 영역 모델의 가로를 네 칸으로 나눈 것이 곧 아래의 수직선에서 1을 4등분 한 것 중의 하나인 $\frac{1}{4}$과 같음을 확인하도록 함으로써 두 양 사이의 관계를 강조하고, 모델을 조작하여 계산 원리를 탐색하도록 하였다.

한편, 6학년 2학기 1단원 4~6차시에서는 모두 띠와 수직선이 결합 된 이중 척도 모델이 제시되었다. 4차시는 분모가 다르면서 배수의 관계인 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리를 학습하는 차시다. <활동1>에서 조개의 양 $\frac{3}{4}$kg이 $\frac{3}{8}$kg의 몇 배인지를 구하기 위해 나눗셈식 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$을 세우고, <활동2>에서는 [그림 Ⅱ-2c]와 같이 위에 놓인 띠에서 조개의 양 $\frac{3}{8}$kg이 아래에 놓인 수직선에서 1에 대응하고, 곱셈적으로 공변한다는 점을 이용해 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$을 계산하는 원리를 탐색하도록 하였다.

5차시는 (자연수)÷(분수)의 계산 원리를 학습하는 차시이고, 6차시는 (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 원리를 학습하는 차시이다. 두 차시 모두 피제수를 제수의 분자만큼 먼저 나누어 단위비율을 구한 뒤, 분모만큼 곱하는 과정을 두 단계로 구분하고 있고, 각각의 단계에서 띠와 수직선이 결합 된 이중 척도 모델을 조작함으로써 계산 원리를 탐색하도록 하였다. 5차시에서는 [그림 Ⅱ-2d]와 같이 제수의 분자만큼 나누는 것을 나눗셈식으로 나타내는 것에 그치지만, 6차시에서는 이를 분모의 곱셈으로 바꾸어 나타내게 함으로써 (분수)×(분수) 식을 최종적으로 도출하도록 하였다([그림 Ⅱ-2e]).

종합하면, 6학년 1학기와 2학기의 분수의 나눗셈 단원에 제시된 이중 척도 모델은 주로 문제 구조의 이해, 두 양 사이의 관계 강조, 조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색을 목적으로 제시되었음을 알 수 있다. 예외적으로 6학년 1학기에서 (분수)÷(자연수)를 계산하는 원리를 다룰 때만 식을 세우기 위한 참조 모델로서도 제시되었다. 이를 요약하면 <표 Ⅱ-2>와 같다. 본 연구에서는 분수의 나눗셈 단원에서 학습 주제별로 이중 척도 모델이 어떤 목적으로 제시되었는지 분석한 것을 바탕으로, 이중 척도 모델에 대한 학생의 이해를 알아보기 위한 검사 도구를 개발하였다.

<표 Ⅱ-2> 학습 주제별 이중 척도 모델의 제시 목적 및 형태

단원 및 학습 주제	이중 척도 모델의 제시 목적	형태
· 6학년 1학기 1단원 4차시 · (분수)÷(자연수)를 계산하는 원리	①문제 구조의 이해 ②두 양 사이의 관계 강조 ④식을 세우기 위한 참조 모델	이중수직선
· 6학년 1학기 1단원 5차시 · (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리	①문제 구조의 이해 ②두 양 사이의 관계 강조 ⑤조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색	영역 모델-수직선
· 6학년 2학기 1단원 4차시 · 분자끼리 나누어떨어지는 분모가 다른 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리	①문제 구조의 이해 ②두 양 사이의 관계 강조 ⑤조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색	띠-수직선
· 6학년 2학기 1단원 5차시 · (자연수)÷(분수)를 계산하는 원리	①문제 구조의 이해 ②두 양 사이의 관계 강조 ⑤조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색	띠-수직선
· 6학년 2학기 1단원 6차시 · (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법	①문제 구조의 이해 ②두 양 사이의 관계 강조 ⑤조작을 통한 문제 해결 및 계산 원리 탐색	띠-수직선

다. 이중 척도 모델에 대한 학생 이해에 관한 국내 선행연구

이중 척도 모델에 대한 학생들의 이해를 분석한 연구는 주로 2015 개정 교과서가 학교 현장에서 사용되기 이전에 이중 척도 모델의 활용과 관련한 시사점을 얻기 위해 수행된 경향이 있다(예: 김양권, 2017; 서은미 외, 2017; 서은미, 2019; 장혜원 외, 2018; 조지원, 신항균, 2018 등). 이들 중 분수의 나눗셈을 중심으로 연구의 결과를 살펴보면, 먼저 김양권(2017)에서 3~6학년들을 대상으로 검사지를 투입하여 이중수직선을 활용한 문항의 정답률을 분석한 결과, 분수의 나눗셈 문항에서 6학년 학생들이 80%로 높은 정답률을 보이는 등 자연수의 연산을 분수의 연산으로 확장하는 데 이중수직선이 도움이 된다고 주장하였다. 장혜원 외(2018)에서는 6학년 말 29명의 학생에게 이중수직선을 활용해 분수의 나눗셈을 지도한 결과 대부분의 학생이 문제 상황을 적절히 이해하고, 연산 원리를 파악하였다고 보고하였다.

2015 개정 교과서를 학습한 학생들을 대상으로 한 연구에는 방정숙 외(2022)가 있었다. 이 연구에서는 특히 분수의 나눗셈에 대한 초등학생의 의사소통 능력을 분석하였는데, 연구 결과 분수의 나눗셈의 계산 원리를 어떤 시각적 모델로 나타내느냐에 따라 이해의 정도가 달랐음을 확인하였다. 예를 들어 (대분수)÷(자연수)의 계산 원리를 수식으로 나타낸 경우 정답률이 약 89.1%로 높았던 반면, (분수)÷(자연수)의 계산 원리를 영역 모델과 수직선이 결합 된 모델로 나타낸 경우 정답률이 약 45.3%로 낮았다. 이러한 결과를 통해 여러 가지 모델을 학생들이 고르게 학습할 수 있는 기회를 마련하는 것이 중요함을 주장하였다.

이처럼 이중 척도 모델에 대한 학생의 이해에 관한 연구는 주로 학생들이 이중 척도 모델을 경험하기 이전에 수행되었다. 이러한 연구로는 이중 척도 모델을 실제로 경험한 학생들이 어떠한 이해 정도를 보이는지에 대한 정보를 자세하게 얻기에 한계가 있다. 따라서 이중 척도 모델을 활용하여 수학을 학습한 학생들의 이해 정도를 구체적으로 분석할 필요성이 제기된다. 본 연구에서는 6학년 학생들을 대상으로 이중 척도 모델에 관한 이해를 분수의 나눗셈을 중심으로 살펴보고자 한다.

2. 연구 방법

가. 연구 대상

본 연구의 목적은 분수의 나눗셈을 중심으로 교과서에 제시된 이중 척도 모델에 대한 6학년 학생들의 이해를 분석하는 것이다. 이를 위해 2015 개정 교과서의 분수의 나눗셈 단원을 모두 학습한 초등학교 6학년 학생들을 연구 대상으로 정하였다. 경기 지역 2개 학교, 경남 지역 2개 학교에서 학력 및 사회·경제적 수준이 중간 정도에 해당하는 두 학급을 각각 편의표집하여 최종적으로 154명을 연구 대상으로 하였다. 이와 같이 지역, 학력, 사회·경제적 수준 등에 따른 편차를 줄이기 위한 노력을 하였으나, 편의표집이라는 점에서 본 연구 결과를 과도하게 일반화하는 데는 주의가 필요하다.

나. 검사 도구

검사 문항은 2015 개정 교과서와 이중 척도 모델의 제시 목적을 추출한 서은미(2019)를 바탕으로 분수의 나눗셈 단원의 차시별로 개발하였다. 검사 문항을 개발할 때는 학생 이해에 영향을 미칠 수 있는 요인을 최소화하기 위해 이중 척도 모델의 형태와 문제의 상황 맥락 및 형태를 교과서에 제시된 것과 동일하게 하는 것을 원칙으로 하였다. 다만 구체적인 요소에 대한 학생의 이해를 파악하기 위해서 필요한 경우에는 해당 요소를 가리키는 화살표와 같은 기호를 추가하기도 하였다. 검사 문항은 초등수학교육 전문가 2인의 검토와 예비 검사 2회를 거쳐 최종 확정되었다.

검사 문항의 유형은 <표 Ⅱ-3>과 같다. 해당 문항 유형을 만들기 위해 교과서에 제시된 이중 척도 모델이나 문항의 형태를 많이 변형해야 하는 경우는 본 연구 목적에 맞지 않는다고 판단하여 생략하였다. 구체적인 문항은 지면의 한계와 가독성을 고려하여 연구 결과에서 함께 제시한다.

<표 Ⅱ-3> 검사 문항의 유형

<table>
<tr><th>단원 및 학습 주제</th><th>문항 번호</th><th>문항 유형</th><th>모델의 제시 목적</th></tr>
<tr><td rowspan="5">· 6학년 1학기 1단원 4차시
· (분수)÷(자연수)를 계산하는 원리</td><td>1</td><td>·모델의 구성 요소(단위) 탐색하기</td><td rowspan="2">①</td></tr>
<tr><td>2</td><td>·모델의 구성 요소(단위) 탐색하기</td></tr>
<tr><td>3</td><td>·공변을 나타내는 수식 탐색하기</td><td rowspan="2">②</td></tr>
<tr><td>4</td><td>·공변을 나타내는 수식 탐색하기</td></tr>
<tr><td>5</td><td>·문제 상황에 적절한 식 세우기</td><td>④</td></tr>
<tr><td rowspan="3">· 6학년 1학기 1단원 5차시
· (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리</td><td>6</td><td>·모델의 의미 탐색하기</td><td rowspan="2">①</td></tr>
<tr><td>7</td><td>·모델의 의미 탐색하기</td></tr>
<tr><td>8</td><td>·계산 과정 완성하기</td><td>⑤</td></tr>
<tr><td rowspan="2">· 6학년 2학기 1단원 4차시
· 분자끼리 나누어떨어지는 분모가 다른 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리</td><td>9</td><td>·모델의 구성 요소(수) 탐색하기</td><td>①</td></tr>
<tr><td>10</td><td>·계산 과정 완성하기</td><td>⑤</td></tr>
<tr><td rowspan="3">· 6학년 2학기 1단원 5차시
· (자연수)÷(분수)를 계산하는 원리</td><td>11</td><td>·모델의 구성 요소(수) 탐색하기</td><td rowspan="2">①</td></tr>
<tr><td>12</td><td>·모델의 구성 요소(수) 탐색하기</td></tr>
<tr><td>13</td><td>·계산 과정 완성하기</td><td>⑤</td></tr>
<tr><td rowspan="5">· 6학년 2학기 1단원 6차시
· (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법</td><td>14</td><td>·모델의 구성 요소(수) 탐색하기</td><td rowspan="2">①</td></tr>
<tr><td>15</td><td>·모델의 구성 요소(수) 탐색하기</td></tr>
<tr><td>16</td><td>·계산 과정 완성하기</td><td rowspan="3">⑤</td></tr>
<tr><td>17</td><td>·계산 과정 완성하기</td></tr>
<tr><td>18</td><td>·계산 원리 설명하기</td></tr>
</table>

다. 자료 수집 및 분석

연구에 참여한 8개 학급에 총 205부의 검사지를 배부하였고, 그중 175부를 회수하였다. 전체 18문항 중 무응답한 문항의 비율이 $\frac{1}{3}$이상인 검사지는 분석에서 제외하여 154명의 응답을 최종 분석하였다.

학생들은 각 학급 담임교사의 감독하에 40분 동안 검사 문항을 해결하였다. 연구자는 검사에 앞서 각 학급 담임교사에게 문항 이해에 필요한 용어나 주의할 점에 대해 안내하도록 요청하였다(예: 수식은 +1, ×2, ÷3, -4처럼 연산 기호와 숫자를 같이 쓴 것을 뜻함을 안내하도록 요청함).

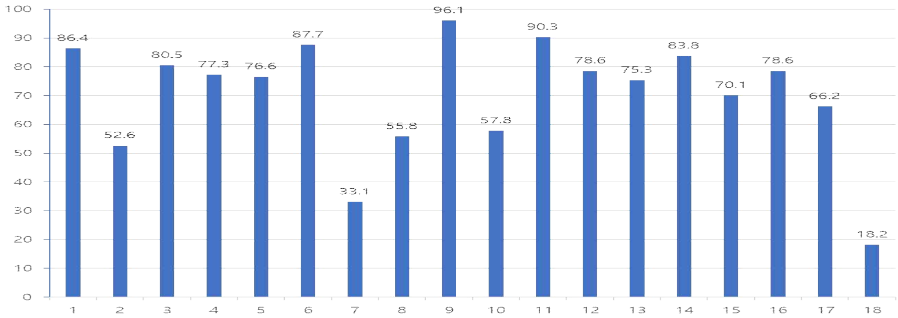
각 검사 문항에 대한 학생 반응은 정답, 오답, 무응답으로 분류한 후 정답률을 파악하고, 정답과 오답 반응의 예에 대해 추가 분석하였다. 본 연구의 목적이 분수의 나눗셈 문항을 학생들이 얼마나 잘 해결하는지 알아보는 것보다는 이중 척도 모델에 대한 학생들의 이해도를 알아보는 것이므로, 각 문항에 대한 학생들의 반응을 문항에 제시된 이중 척도 모델과 관련하여 분석하려고 노력하였다. 예를 들어 이중 척도 모델의 구성 요소를 바탕으로 계산 과정을 완성하는 문항의 경우 각각의 정답률을 구한 후 두 문항을 추가로 분석하여 모델을 이용해 계산 원리를 어느 정도 이해하고 있는지 파악하고자 하였다.

서술형 문항-예를 들어 이중 척도 모델의 의미를 탐색하여 설명하도록 하거나 모델을 활용하여 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 나타낼 수 있는 이유를 설명하는 문항 등-의 답안은 연구자들이 각각 정답과 오답으로 1차 분류한 후, 분류한 결과가 서로 일치되지 않은 문항에 대해서는 논의를 거쳐 정답과 오답을 최종 확정하였다. 문항별 정답 및 오답 유형을 나눈 기준에 따라 세부적으로 분석한 내용은 연구 결과에서 상세히 기술하였다.

Ⅲ. 연구 결과

1. 정답률에 기초한 전반적인 경향 분석

이중 척도 모델 검사 문항별 정답률은 [그림 Ⅲ-1]과 같다. 전반적으로 살펴보면 세 부류의 정답률로 구분할 수 있었다. 구체적으로, 80% 이상의 정답률을 보인 문항이 6문항, 70% 이상 80% 미만의 정답률을 보인 문항이 6문항, 70% 미만의 정답률을 보인 문항이 6문항으로 정답률의 차이가 크다는 것을 알 수 있다. 또한 예를 들어, 문항 1번과 2번을 살펴보면 동일하게 ‘모델의 구성 요소(단위) 탐색하기’를 알아보는 것인데 정답률의 차이가 크다는 것을 알 수 있다. 이와 유사하게 문항 6번과 7번을 살펴보면, 동일하게 ‘모델의 의미 탐색하기’에 대한 것인데, 정답률의 차이가 크다는 것을 알 수 있다. 또한 학습 주제별로 살펴보아도 (자연수)÷(분수)를 계산하는 원리를 다룬 11번부터 13번 문항을 제외하고 동일한 학습 주제 내에서도 문항간 정답률의 차이가 크다는 것을 알 수 있다. 이에 문항별로 학생들의 이해를 상세하게 분석할 필요가 있었다.



[그림 Ⅲ-1] 문항별 정답률(%)

문항별 상세 분석에 앞서 높은 정답률을 보인 문항과 낮은 정답률을 보인 문항에 대해서 간단히 살펴보면 다음과 같다. 먼저 80% 이상의 정답률을 보인 문항의 유형은, 모델의 구성 요소(수)를 탐색하기(9, 11, 14번), 모델의 구성 요소(단위)를 탐색하기(1번), 모델의 의미 탐색하기(6번), 공변을 나타내는 수식 탐색하기(3번) 문항이었다. 이러한 결과로 볼 때 학생들은 비교적 모델의 구성 요소를 잘 탐색하는 것으로 생각된다. 다음으로, 70% 미만의 정답률을 보인 문항의 유형은 계산 원리 설명하기(18번), 모델의 의미 탐색하기(7번), 모델의 구성 요소(단위)를 탐색하기(2번), 계산 과정 완성하기(8, 10, 17번)였다. 이러한 결과로 볼 때 학생들은 이중 척도 모델을 통해 계산 과정을 완성하거나, 계산 원리를 설명하는 것에 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. 특히, 계산 과정을 완성하고, 계산 원리를 설명하는 문항은 총 6문항이었는데(8, 10, 13, 16, 17, 18번), 이 중에서 가장 정답률이 높은 16번 문항조차 80%를 넘지 못했다. 여기서 또한 주목할 만한 것은, 분수의 나눗셈에 최종적인 학습 내용으로서 (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법을 옳게 설명한 학생이 18.2%에 불과하였고, 이는 전체 검사 문항에서 가장 낮은 정답률이었다는 것이다. 이중 척도 모델을 통해 계산 과정과 원리를 이해하는 것이 핵심이라는 점에 비추어 보았을 때, 이러한 모델을 계속 사용한다면 모델을 통해 계산 원리의 도출 과정을 어떻게 지도해야 하는지에 대한 진지한 고민이 필요해 보인다.

2. 분수 나눗셈의 유형별 학생 이해 상세 분석

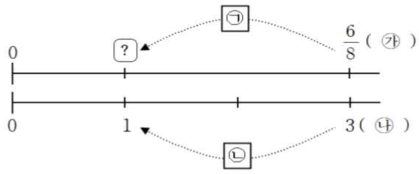
가. (분수)÷(자연수)를 계산하는 원리에 대한 이해 분석

(분수)÷(자연수)를 계산하는 원리에 대한 문제 상황과 모델, 하위 문항별 정답률은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> (분수)÷(자연수)를 계산하는 원리에 대한 문항 및 정답률

문제 상황 및 모델

[문항 1~5]. 지혜는 집에서 리본 $\frac{6}{8}$m를 3등분하여 똑같은 작품 3개를 만들었습니다. 작품 1개에 사용된 리본의 길이를 수직선을 이용해 구해봅시다.



명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
1	·수직선의 ㉮에 들어갈 알맞은 단위는 무엇일까요?	133 (86.4)	15 (9.7)	6 (3.9)
2	·수직선의 ㉯에 들어갈 알맞은 단위는 무엇일까요?	81 (52.6)	66 (42.9)	7 (4.5)
3	·수직선에서 화살표로 연결된 두 수의 변화를 살펴보고, ㉠에 들어갈 알맞은 수식을 써보세요.	124 (80.5)	23 (15.0)	7 (4.5)
4	·수직선에서 화살표로 연결된 두 수의 변화를 살펴보고, ㉡에 들어갈 알맞은 수식을 써보세요.	119 (77.3)	31 (20.1)	4 (2.6)
5	·작품 1개에 사용된 리본의 길이를 구하는 식을 써보세요.	118 (76.6)	26 (16.9)	10 (6.5)

먼저, 이중수직선의 구성 요소(단위)를 탐색하는 1, 2번 문항의 정답률은 각각 86.4%와 52.6%로 나타났다. 정답률에서 알 수 있듯 학생들은 아래에 놓인 수직선의 단위를 파악하는 데 더 어려움을 보였다. 두 문항의 유형과 형태가 동일했으므로, 정답률의 차이가 나타난 이유를 파악하기 위하여 학생들이 보인 오답 반응을 자세히 살펴보았다. 우선, 오답 반응을 한 학생들은 주로 수직선에 나타내는 양의 단위가 아닌, 문제에서 제시된 수를 나누거나 곱하는 상황을 나타내는 단어 혹은 문제 해결에 필요한 연산의 기호를 답한 경우가 가장 많았다. 구체적인 오답의 예로는 윗선에 대한 문항 1번에서는 '÷', '÷3' '$\times\frac{1}{3}$'이 있었고, 아랫선에 대한 문항 2번에서는 '등분', '배', '÷', '÷3', '$\times\frac{1}{3}$'이 있었다. 특히 '등분', '배'는 아랫선에 대한 문항에서만 나타난 오답 반응이면서도 그 빈도가 48로 가장 많았다. 이는 위아래의 수직선이 각각 리본의 길이와 작품의 개수를 나타낸 모델임을 명확하게 인식하지 못한 채, 단순히 '리본 $\frac{6}{8}$m를 3등분한다'는 문제 상황에 주목했기 때문인 것으로 추측된다. 이와 같은 오답을 보인 학생들은 아랫선에 나타낸 숫자 1을 '1 등분'으로 해석할 수 없다는 사실을 파악하지 못한 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 결과는 각 수직선이 나타내고 있는 양이 무엇인지에 따라 고유의 단위를 지니고 있음을 명확히 인지하도록 지도하는 것이 필요함을 시사한다.

다음으로, 이중수직선에 표시한 양이 곱셈적으로 공변하는 특성을 탐색하는 3, 4번 문항의 정답률은 각각 80.5%와 77.3%로 나타났다. 두 문항에서 대부분의 학생들은 아랫선에서 작품의 수가 3에서 1로 변화한 것에 따라 윗선에 표시한 리본의 길이에 '÷3'을 해야 함을 옳게 찾았다. 반면 오답을 한 학생들은 측정 공간 내에서 두 양 사이의 관계를 '-2'처럼 덧셈적으로 파악하거나, 곱셈적으로 파악하였음에도 적절하지 못한 수식(예: $\times\frac{6}{8}$, $\times 3$, $\times 2$)을 쓴 경우가 있었다.

한편 3, 4번의 응답을 추가 분석한 결과 위아래 수직선에서 두 양의 변화를 서로 다른 수식으로 나타낸 학생이 24명이었고, 이 중에는 덧셈적 관계와 곱셈적 관계를 나타내는 수식을 혼합하여 답한 학생이 12명이었다. 이들은 위아래 수직선에서 같은 위치에 표시된 두 양은 공변한다는 사실을 명확히 이해하지 못한 것으로 볼 수 있다.

마지막으로 이중수직선을 활용해 문제 상황에 적절한 식을 세울 수 있는지 묻는 5번 문항의 정답률은 76.6%로 나타났다. 본 연구에 참여한 학생들이 해당 주제를 모두 학습한 상태임을 고려하여 '$\frac{6}{8}\div 3$'과 '$\frac{6}{8}\times\frac{1}{3}$', '$3:\frac{6}{8}=1:\square$'를 모두 정답으로 분류하였다. 오답 유형을 분석한 결과 크게 문제 상황과 관련 없는 식을 세운 경우와 식을 쓰지 않고 숫자만 쓴 경우로 구분할 수 있었다. 이 밖에도 '$3\div\frac{6}{8}$', '$3\times\frac{6}{8}$', '$\frac{6}{8}\times 3$' 등과 같은 오답을 확인할 수 있었다.

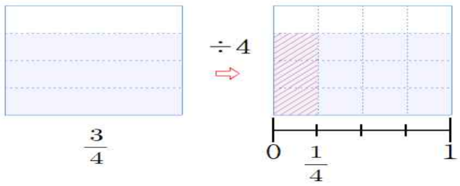
오답 반응을 살펴보면 학생들은 리본의 길이를 나타내는 $\frac{6}{8}$과 작품의 개수를 나타내는 3을 활용하여 식을 세우기는 하였으나, 나누는 수와 나눠지는 수가 각각 무엇인지 명확히 파악하지 못한 것으로 보인다. 또한 문제 상황에 제시되지 않은 '4'와 같은 수를 활용하여 식을 세운 경우가 있었다. 이러한 사례들은 문제 상황을 이해하거나 문제 해결에 필요한 식을 세우는 데 모델을 적절히 활용하지 못한 사례라 할 수 있다.

나. (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리에 대한 이해 분석

(분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리에 대한 문제 상황과 모델, 하위 문항별 정답률은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리에 대한 문항 및 정답률

문제 상황 및 모델
[문항 6~8]. 오렌지 주스 $\frac{3}{4}$L를 4명이 똑같이 나누어 마시려고 합니다. 그림을 이용해 $\frac{3}{4}\div4$를 계산하여, 한 명이 마실 수 있는 주스의 양을 구해봅시다.



명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
6	·위에 놓인 그림()이 나타내는 것은 무엇인가요?	135 (87.7)	7 (4.5)	12 (7.8)
7	·아래에 놓인 수직선이 나타내는 것은 무엇인가요?	51 (33.1)	87 (56.5)	16 (10.4)
8	·그림으로 $\frac{3}{4}\div4$를 계산하는 과정을 설명한 글입니다. $\square$안에 알맞은 수를 쓰고, 빈 칸에는 알맞은 식을 써 보세요. $\frac{3}{4}\div4$의 몫은 $\frac{3}{4}$을 4등분한 것 중의 하나입니다. 이것은 $\frac{3}{4}$의 $\frac{\square}{\square}$이므로 곱셈식으로 나타내면 ( )입니다.	86 (55.8)	56 (36.4)	12 (7.8)

먼저, 영역 모델과 수직선이 결합 된 모델의 의미를 탐색하는 문항 6, 7번의 정답률은 각각 87.7%와 33.1%로 나타났다. 정답률을 비교해보면 학생들은 위에 놓인 영역 모델에 비해 아래에 놓인 수직선의 의미를 파악하는 데 많은 어려움을 보인 것을 알 수 있다. 6번 문항에서 위에 놓인 영역 모델이 나타내는 것에 대해서는 '전체 오렌지 주스의 양', '주스의 양 $\frac{3}{4}$'을 정답 반응으로 분류하였다. 반면, '사람의 수', '3', '그림그래프'는 오답 반응으로 분류하였는데 이는 모델이 나타내는 것을 잘못 파악하거나 단순히 모델의 종류를 답한 것이기 때문이다.

7번 문항에서 아래에 놓인 수직선이 나타내는 것에 대해서는 '나누어 마실 사람의 수', '1÷먹을 명수' 등 주스를 마실 사람만큼 나누는 상황을 설명한 답안을 정답으로 분류하였다. 이는 아래의 수직선의 역할이, 오렌지 주스 $\frac{3}{4}$L를 나타내는 위의 영역 모델(   )을 나누어 마실 사람의 수만큼 4 등분하는 것을 '$\times\frac{1}{4}$'로 바꾸어 나타낼 수 있음을 시각적으로 이해하도록 하는 것이기 때문이다.

한편 아래의 수직선이 나타내는 것에 대한 오답 반응을 분석한 결과, 위의 영역 모델에 대한 문항에 비해 다양한 오답 반응이 나타났다. <표 Ⅲ-3>은 문항 7에 대한 오답의 유형과 각 유형에서 대표적인 예를 정리한 것이다.

<표 Ⅲ-3> 아래에 놓인 수직선에 대한 7번 문항의 오답의 예

오답의 유형	오답의 예	빈도
·'$\frac{3}{4} \div 4$'의 결과에 대해 설명한 경우	·한 명이 마실 주스의 양 ·주스를 4등분 한 양 ·$\frac{3}{4}$을 4로 나눈 양 등	53
·의미를 불충분하게 설명한 경우	·4명이 마실 주스의 양 ·주스를 나눈 것 등	21
·수직선에 표시된 값이나 수직선의 형태에 대해 설명한 경우	·한 칸은 1/4이라는 것 ·띠그래프 등	7
·기타	·마실 사람에 따른 수식 ·L 등	6

<표 Ⅲ-3>에서 알 수 있듯, 아랫선이 '$\frac{3}{4} \div 4$'의 결과를 나타낸다고 파악한 학생들이 53명으로 가장 많았다. 이 오답 반응을 보인 학생들은 주로 아래의 수직선이 '한 명이 마실 주스의 양'을 나타낸다고 답하였다. '한 명이 마실 주스의 양'은 문제에서 최종적으로 구해야 하는 양으로서, 수직선 바로 위에 놓인 영역 모델에서 빗금 친 부분의 넓이에 해당한다. 이때 빗금 친 부분의 세로는 $\frac{3}{4}$이고, 가로는 $\frac{1}{4}$이므로 그 넓이를 '$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$' 을 계산함으로써 구할 수 있다.

이처럼 아래의 수직선이 문제에서 최종적으로 구해야 할 양을 나타낸다고 파악한 학생들이 많았다는 점은 학생들이 제시된 이중 척도 모델을 하나의 모델로 통합적으로 해석하려는 경향이 강하다는 점을 보여준다. 또한 오답의 대부분이 '주스를 4등분한 양'과 '$\frac{3}{4}$을 4로 나눈 양' 등과 같이 주스의 양과 관련되었다는 점은 '÷4'를 '$\times \frac{1}{4}$'로 나타낼 수 있음을 이해하도록 제시된 아랫선의 의미를 학생들이 제대로 파악하도록 구체적이고 명확한 탐색 활동이 이루어져야 함을 시사한다.

다음으로, 영역 모델과 수직선이 결합 된 모델을 활용해 문제 해결에 필요한 계산의 과정을 완성하는 8번 문항의 정답률은 55.8%였다. 이 문항의 응답에 대해서는 첫째 칸의 답안을 통해 '4등분 한 것 중의 하나'를 $\frac{1}{4}$로 나타낼 수 있는지를 분석하였고, 식을 작성하는 둘째 칸의 답안을 통해 '$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$'이라는 곱셈식을 세울 수 있는지를 분석하였다. (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 원리를 이해하는 것이 본 문항의 목표이므로 둘째 칸에 식이 아닌 숫자만을 답한 경우는 오답으로 분류하였다. 또한 하나의 칸이라도 오답한 경우 본 문항의 오답자로 분류하였다.

첫째 칸에 대해서는 '$\frac{4}{1}$', '$\frac{3}{1}$', '$\frac{3}{16}$', '$\frac{3}{4}$' 등의 오답 반응이 나타났다. 이러한 답안으로 유추해 볼 때 '$\frac{3}{4}$을 4등분 한 것 중의 하나'를 분수의 곱셈으로 나타내기 위하여 전체 1을 4등분 하여 $\frac{1}{4}$을 표시한 수직선이 제시되었음에도, 학생들이 이를 적절히 활용하지 못한 것으로 볼 수 있다.

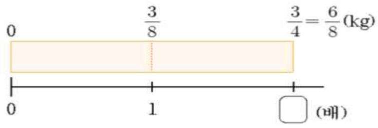
둘째 칸에 대해서는 '$\frac{3}{4} \times \frac{4}{1}$', '$\frac{3}{4} \times \frac{4}{4}$', '$\frac{3}{4} \times \frac{3}{16}$' 등의 오답 반응을 확인하였다. 이러한 오답을 보인 학생들은 자신이 최종적으로 세운 식의 계산 결과와 문제에 제시된 모델에서 빗금 친 부분의 넓이가 일치하지 않음을 확인하지는 못한 것이었다.

다. 분자끼리 나누어떨어지는 분모가 다른 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 이해 분석

분자끼리 나누어떨어지는 분모가 다른 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 문제 상황과 모델, 하위 문항별 정답률은 <표 Ⅲ-4>와 같다.

<표 Ⅲ-4> 분자끼리 나누어떨어지는 분모가 다른 (분수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 문항 및 정답률

문제 상황 및 모델
[문항 9~10]. 갯벌 체험에서 진수는 조개 $\frac{3}{4}$kg을, 민지는 조개 $\frac{3}{8}$kg을 캤습니다. 진수가 캔 조개의 양은 민지가 캔 조개의 양의 몇 배일까요? $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$을 구해봅시다.



명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
9	·그림의 □안에 알맞은 수를 써 넣어보세요.	148 (96.1)	5 (3.2)	1 (0.6)
10	·진수는 위 그림을 이용해 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$을 다음과 같이 계산했습니다. □안에 알맞은 수를 써 넣어보세요. 위의 그림에서 $\frac{3}{8}$은 수직선의 1에 해당하고, $\frac{3}{4}$은 $\frac{6}{8}$과 같구나. 그렇다면 $\frac{3}{4}$ 에는 $\frac{\square}{\square}$이 □번 들어간다고 할 수 있네. 따라서 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8} = \square$야.	89 (57.8)	65 (42.2)	0 (0.0)

먼저, 띠-수직선 모델의 구성 요소(수)를 탐색하는 9번 문항의 정답률은 96.1%로, 전체 검사 문항 중 가장 높게 나타났다. 이는 아랫선이 '몇 배'를 나타낸 모델임을 직접적으로 제시하고 있고, 이미 표시된 1을 활용하여 동일한 간격만큼 더 오른쪽에 빈칸이 있으므로 이에 알맞은 수가 2임을 쉽게 파악한 것으로 판단된다. 오답 반응으로는 $\frac{3}{8}$, 3, 4가 있었다.

다음으로, 띠-수직선 모델을 활용해 문제 해결에 필요한 계산의 과정을 완성하는 10번 문항의 정답률은 57.8%로 나타났다. 학생들의 응답을 분석한 결과 오답자를 포함한 대부분의 학생이 $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$을 계산한 결과를 2라고 옳게 구한 것으로 확인되었다. 이들은 식을 옳게 계산할 수는 있으나 그 식이 도출되는 원리를 모델을 활용해 파악하지는 못한 것으로 보인다. 본 과제에서는 제수와 피제수에 해당하는 분수를 분모가 같은 동치분수로 변환하여 분자끼리 나눌 수 있음을 이해하는 것이 목표이므로, $\frac{3}{4}$에 $\frac{3}{8}$이 2번 들어가는 원리를 제대로 파악했는지를 중점적으로 분석하였다.

$\frac{6}{8}$이 2번 들어간다고 파악한 학생은 22명이었는데, 제시된 모델에서 1배에 해당하는 값이 $\frac{3}{8}$임을 제대로 확인하지 않았거나, 단순히 아랫선에서 2에 대응하는 값이 $\frac{6}{8}$인 것을 근거로 답변한 것으로 추측된다. $\frac{3}{4}$이 2번 들어간다고 파악한 학생은 7명이었고 마찬가지로 아랫선의 2에 대응하는 값 $\frac{3}{4}$을 그대로 읽었을 가능성이 있다. 한편 $\frac{1}{4}$이 3번 들어간다고 파악한 학생은 22명이었고, $\frac{1}{8}$이 6번 들어간다고 파악한 학생은 8명이었는데 이들은 제

시된 모델을 활용했다기보다 단순히 문항에 쓰인 숫자인 $\frac{3}{4}$과 $\frac{6}{8}$을 단위 분수의 개수로 탐색한 것이라 유추할 수 있다. 이와 같은 반응을 한 학생들은 전체 오답자의 절반에 가까웠으므로 적지 않은 수치라 할 수 있다. 종합하면, 오답 반응을 보인 학생들은 전반적으로 문제의 모델에서 제시된 숫자들 사이의 곱셈적인 관계를 파악한 후 이를 바탕으로 문제 해결에 필요한 계산의 원리를 도출하기보다는 단순히 문제에 제시된 숫자 자체에 주목하여 모델과 관련 없는 계산 원리를 탐색한다는 점을 알 수 있다. 이러한 경향에 비추어 볼 때, 모델의 빈칸에 알맞은 숫자를 탐색하는 9번 문항에서 학생들이 가장 높은 정답률을 보였지만, 이것을 두고 학생들이 $\frac{3}{4}$이 $\frac{3}{8}$의 2배임을 이용하는 '분모가 다른 (분수)÷(분수)'의 계산 원리를 학생들이 명확하게 이해했다고 판단하는 데에는 신중해야 할 것이다. 따라서 모델의 구성 요소를 탐색하는 활동에서 구성 요소 사이의 곱셈적 관계를 파악하고, 계산의 원리가 모델에 어떻게 나타나는지를 확인하도록 하는 발문이나 안내가 교과서에 구체적이고 명시적으로 제시될 필요가 있다.

라. (자연수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 이해 분석

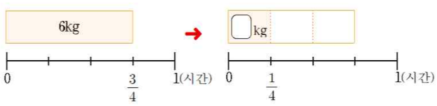
(자연수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 문제 상황과 모델, 하위 문항별 정답률은 <표 Ⅲ-5>와 같다.

<표 Ⅲ-5> (자연수)÷(분수)를 계산하는 원리에 대한 문항 및 정답률

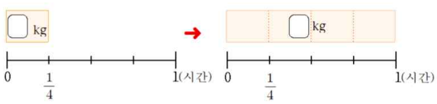
문제 상황 및 모델

[문항 11~13]. 진수네 반 학생들이 조개 6kg을 캐는 데 $\frac{3}{4}$시간이 걸렸습니다. 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게는 몇 kg일까요? $6 \div \frac{3}{4}$을 구해봅시다.

1) $\frac{1}{4}$시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게 구하기



2) 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게 구하기



명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
11	·$\frac{1}{4}$시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구해, □안에 알맞은 수를 써 넣어보세요.	139 (90.3)	13 (8.4)	2 (1.3)
12	·1시간 동안 캘 수 있는 조개의 무게를 구해, □안에 알맞은 수를 써 넣어보세요.	121 (78.6)	26 (16.9)	7 (4.5)
13	·위의 그림을 보고 진수는 $6 \div \frac{3}{4}$을 다음과 같이 계산했습니다. □안에 알맞은 수를 써 넣어보세요. $6 \div \frac{3}{4} = (6 \div \square) \times \square = \square$	116 (75.3)	28 (18.2)	10 (6.5)

먼저, 띠-수직선 모델의 구성 요소(수)를 탐색하는 11, 12번 문항의 정답률은 각각 90.3%, 78.6%로 나타났다. 11번 문항은 $\frac{1}{4}$시간 동안 캘 수 있는 조개의 양을 구하기 위하여 조개 6kg을 나타내는 위의 띠 모델을 3 등분해야 하는 문항이다. 대부분의 학생들은 위에 놓인 띠 모델을 3등분하였을 때 한 칸이 2kg를 나타낸다는 것을 옳게 찾았다. 오답 반응으로는 $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{3}{4}$ 등이 있었다. 이러한 오답 반응은 문제에서 제시된 숫자 혹은 모델의 형태와 관련한 것으로 볼 수 있다. 예를 들어 $\frac{1}{4}$이라고 답한 학생은 6명으로 오답자 중 가장 많았는데, 이들은 아래에 놓인 수직선에 표시된 숫자 $\frac{1}{4}$을 위의 모델에 그대로 대응시켰을 가능성이 있다. 또한 위에 놓인 띠의 칸의 개수를 세어 1이라 답하거나, 문제 상황에서 나누는 수와 관련된 $\frac{3}{4}$과 3이라 답한 것으로 보이는 경우도 있었다.

이렇듯 문제에서 제시된 숫자 혹은 모델의 형태와 관련된 오답 반응은 이어지는 문항인 12번에서도 유사하게 나타났다. 우선, 12번 문항은 이전 단계에서 구한 $\frac{1}{4}$시간 동안 캔 조개의 양(2kg)을 4배 하여 최종적으로 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 양(8kg)을 구해야 하는 문항이다. 이 문항에서는 먼저 이전 문항에서 구한 $\frac{1}{4}$시간 동안 캔 조개의 양을 화살표 왼쪽에서 위에 놓인 띠 모델의 첫째 칸에 답하고, 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 양을 구하여 화살표 오른쪽 띠 모델의 둘째 칸에 나타내야 한다. 오답을 한 26명의 학생들 중 첫째 칸에 $\frac{1}{4}$시간 동안 캔 조개의 무게(2kg)를 옳게 답한 학생이 10명이었다. 이들은 첫째 칸에 알맞은 값을 찾았음에도 화살표 양쪽 띠 모델의 칸의 변화를 탐색하여 1시간 동안 캘 수 있는 조개의 양을 구하기 위해서는 화살표 왼쪽 띠 모델의 칸을 4배 해야 함을 적절하게 파악하지 못한 것이다. 또한, 앞선 11번 문항에서처럼 아랫선에서 시간을 나타내는 숫자 $\frac{1}{4}$을 그대로 위의 모델에 대응시켜 $\frac{1}{4}$이라고 답한 것으로 보이는 학생이 6명이었다. 단순히 위에 놓인 띠 모델의 칸의 개수를 세어 1이라고 답하거나, 문제에서 나누어지는 수로 제시된 6이라고 답하기도 하였다.

11, 12번 문항의 정답률은 모델의 구성 요소인 수를 탐색하는 다른 문항의 정답률에 비해 낮은 편이 아니었다. 그러나 오답 반응의 예에서 알 수 있듯 위아래에 제시된 모델이 서로 다른 양과 척도를 나타내고 있음을 정확하게 파악하지 못할 경우, 모델이 나타내는 계산의 원리를 학생들이 적절히 도출하지 못할 가능성이 있으므로 이에 대한 명확한 지도가 필요하다 할 수 있다.

한편 12번 문항의 첫째 칸의 응답과 11번 문항의 응답을 추가로 분석한 결과, 서로 다른 응답을 한 학생들은 모두 20명이었다. 이들은 11번 문항에서 화살표 오른쪽에 제시된 모델이 12번 문항의 첫 모델이 된다는 점을 인식하지 못한 것으로 보인다. (자연수)÷(분수) 학습에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 이해하기 위해서는 11번과 12번 문항에 제시된 모델이 서로 연결된다는 점을 이해해야 한다. 각각의 모델을 분절적으로 탐색할 경우 최종적인 계산 원리를 옳게 이해하기 어려우므로 제시된 모델을 서로 연결해서 탐색한 후 이를 계산 원리와 비교해보는 기회가 주어져야 할 것이다.

다음으로, 띠-수직선 모델을 활용해 문제 해결에 필요한 계산의 과정을 완성하는 13번 문항의 정답률은 75.3%로 나타났다. '$6 \div \frac{3}{4} = (6 \div \square) \times \square = \square$' 에서 첫째 칸과 둘째 칸은 각각 11, 12번 문항에 제시된 모델에서 도출된 것이다. 우선 첫째 칸에 나타난 오답 반응을 빈도순으로 나열하면 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, 4, 3 등이다. $\frac{3}{4}$이라고 답한 학생은 전체 오답자 28명 중 11명이었다. 이들은 9번에서 좌변 '$6 \div \frac{3}{4}$'을 그대로 우변에 나타낸 것으로 판단된다. $\frac{1}{4}$이라고 답한 학생은 8명이었다.

13번 문항의 둘째 칸의 오답 반응에는 $\frac{1}{4}$, 3, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ 등이 있었다. 이와 같은 오답 반응을 보인 학생들은 본 문항의 둘째 칸과 관련된 12번 모델에서 화살표 왼쪽 모델의 크기가 4배로 변하여 오른쪽 모델이 됨을 제대로

파악하지 못한 것으로 볼 수 있다.

11, 12번 문항과 13번 문항에 대한 학생들의 반응을 추가 분석한 결과, 11, 12번 문항에서 정답을 한 학생 중 13번 문항에서 오답하거나 무응답 한 학생들은 17명이었다. 이들은 문제 상황을 나타내는 모델의 구성 요소를 바르게 찾았음에도 식을 세우는 데 이를 활용하지 못한 것으로 볼 수 있다. 반대로 11, 12번 문항에서 한 문항 이상 오답을 하거나 무응답 하였음에도 13번 문항에서 정답을 한 학생은 16명이었다. 이는 문제 상황을 나타내는 모델의 구성 요소를 적절하게 파악하지 못했음에도, 식을 세우는 데 어려움을 겪지 않을 수 있음을 시사한다.

마. (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법에 대한 이해 분석

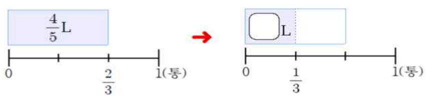
(분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법에 대한 문제 상황과 모델, 하위 문항별 정답률은 <표 Ⅲ-6>과 같다.

<표 Ⅲ-6> (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 방법에 대한 문항 및 정답률

문제 상황 및 모델

[문항 14~18]. 승기가 바닷물 $\frac{4}{5}$L를 빈 통에 담아 보니 통의 $\frac{2}{3}$가 찼습니다. 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양은 몇 L일까요? $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$를 구해봅시다.

1) 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양 구하기



2) 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양 구하기

명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
14	·통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구해, $\square$안에 알맞은 수를 써 넣어보세요.	129 (83.8)	18 (11.7)	7 (4.5)
15	·한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 구해, $\square$안에 알맞은 수를 써 넣어보세요.	108 (70.1)	32 (20.8)	14 (9.1)
16	·그림을 보고 계산 과정의 빈 칸에 알맞은 수를 써 넣어보세요. $\frac{4}{5}\div\square = (\frac{4}{5}\times\frac{1}{\square})$	121 (78.6)	28 (18.2)	5 (3.2)
17	·그림을 보고 계산 과정의 빈 칸에 알맞은 수를 써 넣어보세요. $\frac{4}{5}\times\frac{1}{\square}\times\square$	102 (66.2)	35 (22.8)	17 (11.0)
18	·위의 그림을 이용해 승기는 $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$를 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$으로 바꾸어 계산했습니다. '$\div\frac{2}{3}$'를 '$\times\frac{3}{2}$'으로 바꾸어 계산할 수 있는 이유를 위의 그림을 이용해 설명해 보세요.	28 (18.2)	68 (44.2)	58 (37.7)

먼저, 14번과 15번 문항은 띠-수직선 모델의 구성 요소(수)를 탐색하는 문항이었는데, 정답률은 각각 83.8%와 70.1%로 나타났다. 14번 문항은 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하기 위하여 바닷물 $\frac{4}{5}$L를 나타내는 위의 띠 모델을 2등분해야 하는 문항이다. 학생 대부분은 띠 모델을 2등분하였을 때 한 칸이 $\frac{2}{5}$L를 나타낸다고 옳게 답하였다. 오답 반응으로는 $\frac{2}{3}$, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{5}$ 등이 있었다. 이와 같은 오답 반응을 분석한 결과 문제 상황에서 나누는 수로 제시된 $\frac{2}{3}$를 그대로 쓰거나 나누는 수의 분자 2를 쓴 것으로 추측되는 경우가 가장 많았다. 아래 수직선에 표시된 숫자인 $\frac{1}{3}$이라 답하거나 문제 해결에 필요한 계산을 수행하여 그 결과인 $\frac{6}{5}$(또는 $\frac{12}{10}$)이라고 답하기도 하였다.

15번 문항은 이전 단계에서 구한 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양($\frac{2}{5}$L)을 3배 하여 최종적으로 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양($1\frac{1}{5}$L)을 구해야 하는 문항이다. 이 문항에서는 먼저 이전 문항에서 구한 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 위에 놓인 띠 모델의 첫째 칸에 답하고, 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 모델의 둘째 칸에 나타내야 한다. 15번 문항 첫째 칸의 오답 반응을 높은 빈도순으로 나열하면 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, 2 등이다. 이 중 $\frac{2}{5}$라 답한 학생들은 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 옳게 구하였으나, 이를 3배 하여 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하지는 못하였다. 통의 $\frac{1}{3}$이 아랫선에 표시된 것을 위의 띠 모델에 그대로 대응시켜 $\frac{1}{3}$이라는 답하거나, 문제에서 제시된 $\frac{2}{3}$통을 채운 바닷물의 양 $\frac{4}{5}$L를 그대로 대응시켜 $\frac{4}{5}$라 답하기도 하였다.

한편, 15번 문항에서는 처음 제시된 모델의 칸에 알맞은 수를 찾고, 이를 3배 하여 오른쪽에 제시된 모델의 칸에 알맞은 수를 찾아야 한다. 첫째 칸과 둘째 칸에 나타내야 하는 수들이 서로 3배 관계임을 이해했는지 알아보고자 오답 반응을 분석한 결과, 전체 오답자 32명 중 11명만이 첫째 칸의 수를 3배 하여 둘째 칸의 수를 구하였다. 이들은 첫째 칸에 알맞은 수를 옳게 찾지 못하여 본 문항의 오답자로 분류된 것이었다. 이처럼 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 나타낼 때 나누는 수의 분모만큼 곱하는 계산 원리를 모델을 이용해 이해하는 것이 핵심이지만 이에 대한 이해가 다소 부족한 것으로 확인되었다.

15번 문항에서 화살표 왼쪽 모델의 첫째 칸의 응답과 14번 문항의 응답을 추가로 분석한 결과, 서로 다른 답변을 한 학생들은 모두 16명이었다. 이들은 14번 문항에 제시된 모델이 15번 문항의 첫 모델이 된다는 점을 인식하지 못하였다. 이와 같은 반응은 앞선 11, 12번 문항에서도 확인할 수 있었다. (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내는 알고리즘을 모델을 활용해 지도하기 위해서는 14번과 15번 문항에 제시된 모델이 연결된다는 점을 인식하고, 모델로부터 도출된 알고리즘과 모델을 비교해보는 기회를 제공해야 할 것이다.

다음으로, 16번과 17번 문항은 띠-수직선 모델을 보고 계산의 과정을 완성하는 문항이었는데, 정답률은 각각 78.6%, 66.2%로 나타났다. 16번 문항에서 학생들은 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하기 위해 통의 $\frac{2}{3}$를 채운 바닷물의 양 $\frac{4}{5}$L를 2로 나누고($\frac{4}{5}\div 2$), 이를 곱셈식($\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$)으로 나타내어야 한다. 학생들의 오답 반응을 분석한 결과 전체 오답자 28명 중 19명의 학생들이 $\frac{4}{5}\div 3=\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$이라고 답하였다. 이러한 반응은, 화살표의 오른쪽에 제시된 모델에서 아래의 수직선에 $\frac{1}{3}$이 표시된 것에 근거해 위의 띠 모델의 칸의 크기를 $\frac{1}{3}$이라 여긴 것으로 추측되며, 아래의 수직선과 위의 띠 모델이 갖는 척도가 다른 것을 고려하지 못한 결과라 할 수 있다. 또한 화살표 양쪽에 있는 두 모델에 표시된 양의 크기가 어떻게 변화하는지를 살펴보지 않고 화살표 오른쪽의 모델에 표시된 양의 크기만을 주목한 것이라 여겨진다.

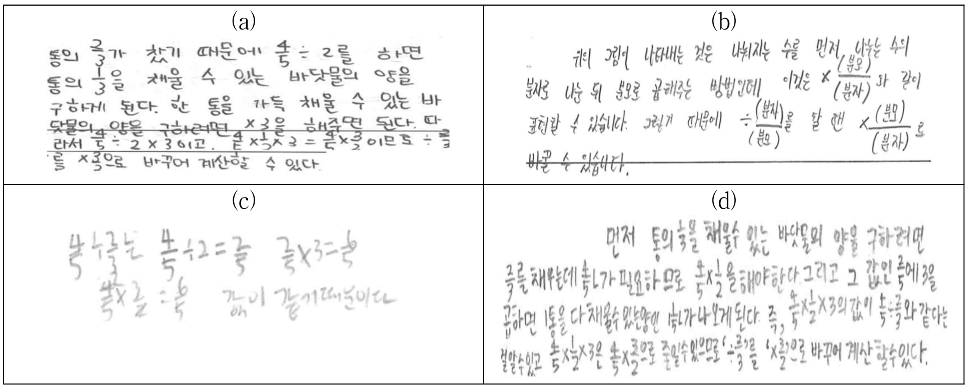
한편, 14번 문항과 15번 문항의 학생 응답을 추가 분석한 결과, 17명의 학생들은 14번 문항에 정답 반응을 보였음에도 16번 문항에 오답 반응을 보이거나 무응답하였다. 이와 같은 반응을 보인 학생들은 모델에 표시된 양의 크기의 변화를 바르게 탐색하였음에도 이를 계산 과정으로 적절히 나타내지는 못한 것이라 볼 수 있다.

17번 문항에서 학생들은 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하기 위해, 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양($\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$L)을 3배 하여 곱셈식 '$\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times3$'으로 나타내어야 한다. 학생들의 오답 반응을 분석한 결과 전체 오답자 39명 중 21명이 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하는 곱셈식을 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$로 나타내었는데, 그중 10명은 최종적으로 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하는 곱셈식을 '$\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times2$'로 나타내었다. 본 문항에서 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하는 곱셈식을 '$\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}$'로 나타낸 학생들은 화살표 왼쪽 모델의 수직선에 표시된 $\frac{1}{3}$을 위의 띠 모델에 그대로 대응시킨 것으로 보인다.

한편, 오답자 중 10은 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하는 곱셈식을 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$로 옳게 나타내었음에도 불구하고 한 통을 가득 채울 수 있는 바닷물의 양을 구하는 곱셈식을 옳게 나타내지 못하였다. 이들은 화살표 양쪽에 제시된 모델의 크기 변화를 적절하게 탐색하지 못한 것으로 판단된다.

마지막으로, 18번 문항은 띠-수직선 모델을 활용해 계산의 원리를 설명하는 문항이었는데, 정답률은 18.2%로 전체 문항 중에서 가장 낮은 수치였다. 무응답률도 전체 문항 중에서 가장 높게 나타났다는 점을 고려할 때, 학생들은 모델을 활용해 분수의 나눗셈 알고리즘의 원리를 설명하는 데 어려움을 보이는 것으로 보인다.

본 문항에서는 통의 $\frac{1}{3}$을 채울 수 있는 바닷물을 구하기 위해서 $\frac{4}{5}\div2$를 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$로 바꾸어 나타내도록 하고, 최종적으로 한 통을 채울 수 있는 바닷물을 구하기 위해서 '$\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times3$'이라는 식을 도출함으로써 나누는 수의 역수를 곱하는 알고리즘을 제시하고 있다. [그림 Ⅲ-2]는 정답 반응의 예이다.



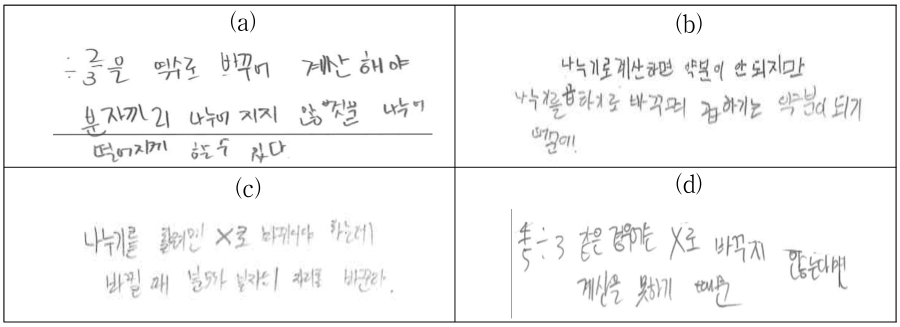
[그림 III-2] 분수의 나눗셈 알고리즘 원리에 대한 정답 반응의 예

정답 반응을 분석한 결과, 학생들은 주로 문제에서 제시하는 대로 제수의 분자만큼 나누고 분모만큼 곱하는 과정으로 원리를 설명하였다. [그림 Ⅲ-2c]와 [그림 Ⅲ-2d]는 $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$와 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$을 계산한 결과가 같다는 점을 추가로 제시한 것이다.

한편, 오답 반응을 분석한 결과 정답 반응보다 다양한 반응을 확인할 수 있었다. 우선 오답 반응을 보인 68명의 학생들 중 51명의 학생들은 나누는 수의 역수를 곱할 수 있는 이유를 설명하지 않고 '바꿀 수 있기 때문', '÷에서 ×로 바뀌면 분자와 분모가 바뀐다', '쉽기 때문' 등과 같이 답하거나, 모델을 활용해 계산하는 과정에 대한 설명 없이 단순히 '계산하면 답이 같기 때문'이라고 응답하였다. 이러한 반응은 본 연구에 참여한 학생들이 이미

분수의 나눗셈 알고리즘을 학습한 이후이므로 자연스러운 것이라 여겨지나, 알고리즘에 익숙한 반면 모델을 활용하여 그 원리에 대한 이해를 공고히 하지는 못하였다고 해석할 수 있다.

그밖에, 알고리즘의 원리가 성립되는지에 대해 타당하지 않은 이유를 제시하거나 문제 상황과 관련 없는 수치를 활용하여 답한 오답자는 모두 12명이었다. [그림 Ⅲ-3]은 그 대표적인 예이다.



[그림 Ⅲ-3] 알고리즘의 원리에 대해 타당하지 않은 이유를 제시한 예

먼저 [그림 Ⅲ-3a]와 [그림 Ⅲ-3b]는 나누는 수의 역수를 곱해야 약분이 가능하다는 점을 근거로 알고리즘의 원리를 설명한 것이고, [그림 Ⅲ-3c]와 [그림 Ⅲ-3d]는 분수의 나눗셈 자체로는 계산이 불가능하다는 타당하지 않은 인식을 바탕으로 알고리즘의 원리를 설명한 것이다. 이와 같은 반응은 제시된 이중 척도 모델을 해석하는 과정에서 나타난 오류라기보다 학생들이 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈식으로 계산하는 알고리즘에 이미 익숙한 데서 기인한 것으로 판단된다. 다만, 이와 같은 반응이 수학적으로 타당하지 않으므로, 제시된 모델을 조작하여 분수의 나눗셈 알고리즘을 어떻게 도출할 수 있는지 그 원리를 명확하게 이해하도록 지도할 필요가 있다고 여겨진다.

Ⅳ. 결론 및 논의

본 연구에서는 이중 척도 모델을 통해 분수의 나눗셈을 학습한 경험이 있는 학생들을 대상으로 이중 척도 모델에 관한 이해를 상세하게 분석하였다. 주된 연구 결과를 토대로 결론 및 논의를 제시하면 다음과 같다.

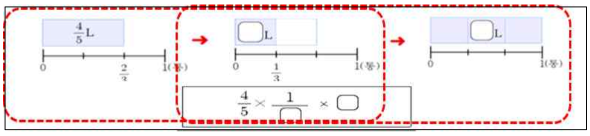
첫째, 이중 척도 모델에서 아래에 놓인 수직선에 대한 이해를 공고히 할 필요가 있다. 본 연구 결과 학생들은 전반적으로 이중 척도 모델에서 위에 놓인 모델에 관한 문항은 잘 해결하였으나 아래에 놓인 수직선의 단위나 의미를 탐색하는 문항에서 상대적으로 낮은 정답률을 보였고, 오답 반응도 더 다양하게 나타났다. 분수의 나눗셈에서는 아랫선의 1에 해당하는 값이 위의 수직선에서 얼마인지 이해하는 것이 핵심이다(장혜원 외, 2018). 아래에 놓인 수직선을 기준으로 위의 모델을 조작하여야 하므로 위아래 모델 각각의 척도나 의미를 명확히 하되 특히 아래에 놓인 모델이 나타내는 바에 대한 이해를 공고히 할 필요가 있다.

둘째, 이중 척도 모델의 구성 요소를 탐색하는 것도 중요하지만 궁극적으로 학생들이 모델을 통해 계산 과정을 완성하거나 계산 원리를 설명하는 기회를 제공할 필요가 있다. 본 연구에서 학생들은 계산 과정을 완성하거나 계산 원리를 설명하는 것에 많은 어려움을 보였는데, 특히 계산 원리를 설명하는 18번 문항의 정답률이 18.2%에 그쳤다. 전체 검사 문항 중 정답률이 가장 낮았고, 무응답 비율이 가장 높았다. 정답 반응을 보인 학생들은 문항에 제시된 이중 척도 모델이 나타내고 있는 것처럼 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \div 2 \times 3 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times 3 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$과 같은 흐름으로

설명하였다. 오답 반응을 보인 학생들은 문항에 제시된 이중 척도 모델을 활용하기보다는 자신에게 이미 익숙한 분수의 나눗셈 알고리즘에 근거하여 답하였으나, 타당하지 못한 이유를 제시한 것이었다. 2015 개정 교과서에서는 분수의 나눗셈 알고리즘을 더욱 개선된 방법으로 제시하기 위하여 이중 척도 모델을 도입하였다(김정하, 2020; 서동엽, 2021). 그러나 본 연구에서 학생들의 이해 실태를 분석한 결과 정작 학생들은 그러한 모델의 도움을 받아 계산 원리를 설명하지는 못하는 것으로 드러났다. 임재훈(2021)은 이중수직선에 놓인 수들 사이의 관계에 기초해 (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 지도할 수 있음을 제안하였다. 이처럼 이중 척도 모델과 계산 원리 사이의 연결을 보다 직접적으로 드러내거나 적어도 학생들이 계산 원리를 설명할 기회를 가질 필요가 있어 보인다.

셋째, (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내는 원리를 학습하는 차시에서 영역 모델과 수직선이 결합 된 이중 척도 모델을 제시하는 것이 적절한지에 대한 재고가 필요하다. (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 계산하는 원리를 학습할 때 영역 모델과 수직선이 결합 된 모델이 제시되었는데, 학생들은 아랫선의 나타내는 바를 제대로 해석하는 데 많은 어려움을 보였다. 오답 반응을 분석한 결과 학생들은 아랫선의 의미를 구체적으로 제시하지 못하고 문제에서 최종적으로 구해야 할 결과를 답하거나, 위에 놓인 띠 모델이 나타내는 양에 대해 설명하는 경우가 많았다. 위에 놓인 영역 모델은 5학년 2학기 분수의 곱셈 단원에서 제시된 것이다. 분수의 나눗셈 단원에서는 $\frac{3}{4}\div 4$에서 4등분한 것 중의 하나를 '$\times\frac{1}{4}$'로 나타내는 것을 이해하도록 아래에 수직선을 추가한 것으로 보이지만, 수직선을 제시하지 않아도 이미 경험한 영역 모델로 원리를 도출하는 것이 충분히 가능할 것으로 판단된다. 또한 다른 차시 사용된 아랫선의 단위는 비교적 명시적으로 드러나는 반면, (분수)÷(자연수) 차시에서 아래에 놓인 수직선의 단위는 명시적이지 않으므로 학생들이 수직선의 의미를 파악하는 데 어려움을 준다. 따라서 이 차시에서 이중 척도 모델을 제시하는 것이 적절한지, 적절하다면 학생들의 이해도를 높이기 위해 어떤 방안이 필요한지 재고할 필요가 있다.

넷째, (자연수)÷(분수)와 (분수)÷(분수)를 학습하는 차시에서는 연산 알고리즘과의 연결성이 드러나도록 이중 척도 모델을 제시할 필요가 있다. 2015 개정 교과서에서는 제수가 분수일 때, 제수의 분자만큼 나누고, 분모만큼 곱하는 알고리즘을 위아래로 분절된 모델을 통해 두 단계로 제시하고 있다. 본 연구의 결과, 위 모델에서 분자만큼 나눈 결과를 아래 모델의 첫 부분에 그대로 나타내지 못하고 서로 다른 값으로 답한 경우를 다수 확인하였다. 이와 같은 반응을 보인 학생들은 두 단계에 제시된 이중 척도 모델을 연결하여 파악하지 못하고 분절적으로 이해한 것이라 볼 수 있다. 이에 대한 대안으로는 [그림 Ⅳ-1]처럼 위아래로 분절적으로 제시된 모델을 양옆으로 나란하게 제시하는 방법이 있다. 모델을 옆으로 나란히 제시할 경우, 제수의 분자만큼 나누고, 그 결과에 분모만큼 곱하는 분수의 나눗셈 알고리즘과도 자연스럽게 연결할 수 있다.



[그림 Ⅵ-1] 분수의 나눗셈 알고리즘과 연결하여
이중 척도 모델을 제시한 예

본 연구에서는 2015 개정 교과서에서 이중 척도 모델을 사용한 경험이 있는 학생들의 이해를 분석함으로써 이전의 연구보다 자세한 정보를 제공하고자 노력하였다. 본 연구의 결과가 앞으로 초등 수학 교과서나 교수·학습 과정에서 이중 척도 모델을 더 의미 있게 활용하는 방안을 마련하는 데 도움이 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2020a). 수학 6-1. 천재교육.

Ministry of Education (2020a). *Mathematics 6-1*. Chunjae Education.

교육부 (2020b). 수학 6-2. 천재교육.

Ministry of Education (2020b). *Mathematics 6-2*. Chunjae Education.

김양권 (2017). 초등학생의 수개념 학습에서 수직선의 활용. 건국대학교 대학원 박사학위논문.

Kim, Y. (2017). *The utilization of the number line on the elementary school students' number concept learning* [Doctoral dissertation, Konkuk University].

김정하 (2020). 이중수직선을 이용한 분수 나눗셈 지도에 대한 고찰. 학습자중심교과교육연구, 20(8), 1253-1277.

Kim, J. (2020). A study on fraction division teaching using double number lines. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction,* 20(8), 1253-1277.

방정숙・김윤영・선우진 (2022). 분수의 나눗셈에 대한 초등학생의 수학적 의사소통 능력 분석. 초등수학교육, 25(2), 179-195.

Pang, J., Kim, Y., & Sunwoo, J. (2022). An analysis of students' mathematical communication competency focused on fraction division. *Education of Primary School Mathematics*, 25(2), 179-195.

서동엽 (2021). 분수의 나눗셈 지도 방법에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 25(1), 81-102.

Seo, D. (2021). An examination on the method of teaching for division of fractions. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 25(1), 81-102.

서은미 (2019). 초등학교 수학 수업을 위한 이중 척도 모델의 활용 방안 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

Seo, E. (2019). *A study on the double scale models for elementary mathematics instruction* [Doctoral dissertation, Korea National University of Education].

서은미・방정숙・이지영 (2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석. 수학교육학연구, 27(4), 791-810.

Seo, E., Pang, J., & Lee, J. (2017). An analysis of lessons to teach proportional reasoning with visual models: Focused on ratio table, double number line, and double tape diagram. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 27(4), 791-810.

서은미・조선미・방정숙 (2019). 일본 교과서에 제시된 이중 척도 모델에 관한 분석. 초등수학교육, 22(1), 29-48.

Seo, E., Cho, S., & Pang, J. (2019). An analysis of double scale models in the Japanese elementary mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, 22(1), 29-48.

임재훈 (2021). 제수가 분수인 나눗셈에서 단위비율 결정 맥락의 도입에 대한 논란과 과제. 한국초등수학교육학회지, 25(4), 395-416.

Yim, J. (2021). Issues and challenges on introducing context of determination of a unit rate into division by fractions. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 25(4), 395-416.

장혜원・임미인・유미경・박혜민・김주숙・이화영 (2018). 초등학교 수학 지도를 위한 이중수직선의 활용 방안 탐색. 학교수학, 20(1), 227-249.

Chang, H., Lim, M., Yu, M., Park, H., Kim, J., & Lee, H. (2018). The application of double number line in elementary school mathematics education. *School Mathematics*, 20(1), 227-249.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. 수학교육학연구, 25(1), 21-58.

Chong, Y. (2015). Teaching proportional reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 25(1), 21-58.

조지원 · 신항균 (2018). 이중수직선과 이중테이프 모델을 활용한 비율 지도가 초등학생의 비례추론 능력과 수학적 태도에 미치는 영향. 한국초등교육, 29(4), 51-67.

Jo, J., & Sihn, H. (2018). Effects of proportional teaching based on double number line and double tape diagram on proportional reasoning abilities and attitude. *The Journal of Korea Elementary Education*, **29(4)**, 51-67.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). Using the double number line to model multiplication. In *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME7) (pp. 326-335). University of Rzeszo´w, Poland.

Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **15(5)**, 381-403.

An Analysis of Sixth Graders' Understanding on Double Scale Model: Focusing on Fraction Division

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Kwak, Giwoo†
Graduate School of Korea National University of Education
E-mail : giwoo9292@naver.com

Kim, SoHyeon
Daejeon Gayang elementary school
E-mail : sohyeon6523@naver.com

Double scale models have been introduced in elementary mathematics textbooks under the 2015 revised mathematics curriculum. However, few studies have examined in detail how students understand or utilize such models. In this study, we analyzed how 154 sixth-grade students who had learned the division of fractions from textbooks containing double scale models understood such models. The results showed that the students tended to identify the components of the model relatively well, but had difficulties exploring the unit or the meaning of the bottom number line of a model. They also had a lot of difficulties using the double scale model to complete the computation process and explain the computation principle. Based on these findings, we discuss the implications of teaching double scale models.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : double scale model, fraction division, computation principle, student understanding
† corresponding author