

타원 기둥에 의한 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식

임형래*

부산대학교 지구과학교육과

The Expressions of Vector Gravity and Gravity Gradient Tensor due to an Elliptical Cylinder

Hyoungra Rim*

Department of Earth Science Education, Pusan National University

요약

이 논문에서는 타원 기둥에 대한 벡터 중력과 중력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 임의의 3차원 이상체에 대한 벡터 중력은 이상체의 모양에 따른 3중 적분이 포함된 인력 포텐셜을 각 축 방향으로 미분하여 구한다. 축 대칭성을 가진 이상체에 의한 벡터 중력은 먼저 축 방향으로 적분하여 2중 적분 형태로 축약한다. 켈레 복소수를 도입한 복소 그린 정리를 이용하면 2중 적분은 1차원 폐곡선 선적분 형태로 변환된다. 최종적으로 타원 기둥에 의한 벡터 중력은 타원 기둥 단면의 경계를 폐곡선의 매개변수로 설정하여 1차원 수치적분으로 유도된다. 같은 방식으로 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서는 인력 퍼텐셜을 2차 미분하여 3중 적분으로 표현된 중력 변화율 텐서를 구한 후, 수직 축 방향으로 적분하여 2중 적분으로 축약한다. 벡터 중력에서 적용한 방법과 동일한 복소 평면에서의 그린 정리를 도입하여 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서 반응식의 모든 성분을 유도한다.

주요어

벡터 중력, 중력 변화율 텐서, 타원 기둥, 복소 그린 정리

ABSTRACT

This study derives the expressions of vector gravity and gravity gradient tensor due to an elliptical cylinder. The vector gravity for an arbitrary three-dimensional (3D) body is obtained by differentiating the gravitational potential, including the triple integral, according to the shape of the body in each axis direction. The vector gravity of the 3D body with axial symmetry is integrated along the axial direction and reduced to a double integral. The complex Green's theorem using complex conjugates subsequently converts the double integral into a one-dimensional (1D) closed-line integral. Finally, the vector gravity due to the elliptical cylinder is derived using 1D numerical integration by parameterizing a boundary of the elliptical cross-section as a closed line. Similarly, the gravity gradient tensor due to the elliptical cylinder is second-order differentiated from the gravitational potential, including the triple integral, and integrated along the vertical axis direction reducing it to a double integral. Consequently, all the components of the gravity gradient tensor due to an elliptical cylinder are derived using complex Green's theorem as used in the case of vector gravity.

KEYWORDS

vector gravity, gravity gradient tensor, elliptical cylinder, complex Green's theorem

서론

지하 이상체를 기본적인 형태인 직육면체, 원기둥 또는 원판과 같은 형태의 조합으로 해석하기 위하여 여러 연구자들에

의해 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식이 유도되고 있다 (LaFehr and Nabighian, 2012; Lowrie and Fichtner, 2020). 기본적인 3차원 물체에 대한 중력 및 중력 변화율 텐서를 유도하는 방법은 직접 3중 적분을 수행하는 방법(Okabe, 1979;

Received: 27 January 2023; Revised: 15 February 2023; Accepted: 22 February 2023

*Corresponding author

E-mail: brim2017@pusan.ac.kr

Address: 2 Busandaehak-ro, 63 beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 46241, Korea

©2023, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Nagy, 1966; Nettleton, 1942), 축 방향 대칭성을 이용하여 베셀 함수를 도입하는 방법(Singh, 1977; Damiata and Lee, 2002; Rim, 2021) 등이 있다.

칼데라 구조에서 관입하는 화성암맥의 경우 주 방향이 보조 방향에 비해 연장되어 관입하는 경우가 많다(Alatorre-Zamora and Campos-Enriquez, 1991; Battaglia *et al.*, 2008). 이런 경우 관입 화성 암맥을 원통 보다는 타원 원통으로 근사하여 해석할 수 있다. 다이아몬드와 같은 유용 광물을 배태하고 있는 김벌라이트(Kimberlite) 암맥은 타원 기둥 형태를 가지는 경우가 많은데(Vasanthi and Mallick, 2005; Matende and Mickus, 2021), 타원 기둥에 대한 중력 및 중력 변화율 해석해를 이용하면 해석하는 파라미터 개수를 서너 개로 제한할 수 있으므로 다수의 육면체로 나누어 3차원 역산 해석하는 방법에 비해 효율성을 비약적으로 향상시킬 수 있다.

이 논문에서는 타원 기둥에 대한 이미 수직 중력과 중력 변화율 텐서의 일부 성분을 유도한 Kwok (1991a)의 방법을 확장하여 벡터 중력의 수평 성분과 중력 변화율 텐서의 모든 성분을 유도한다. 복소수를 도입한 복소 그린 정리(complex Green's theorem)를 이용하여 2중 적분을 복소 평면에서 1차원 폐곡선으로 선적분하는 방법을 활용한다.

타원 기둥에 의한 벡터 중력

측정점 (x, y, z) 에서 밀도 ρ , 부피 V 인 임의의 3차원 물체에 의한 인력 퍼텐셜은 식 (1)과 같이 측정점과 이상체 내의 미소 적분소(infinitesimal integral volume)까지의 역거리를 3중 적분하는 방법으로 구해진다(Blakely, 1996). 이 식에서 γ 는 만유인력 상수이고, r 은 측정점과 3차원 물체의 미소 적분소까지의 거리이다. 측정점에 해당하는 좌표계 (x, y, z) 는 북쪽을 x 축, 동쪽을 y 축, 깊이 방향을 z 축으로 설정한 오른손 직교 좌표계를 이용한다. 임의의 3차원 이상체를 표현하는 직교 좌표계 (ξ, η, ζ) 도 동일한 좌표계를 적용한다. Fig. 1은 이 논문에서 유도할 단면이 타원인 타원 기둥의 모양을 보여준다. 타원 기둥 윗면 중심의 좌표는 (ξ_0, η_0, ζ_0) 이고 아래 타원 단면의 z 좌표는 ζ_1 이다. 타원 단면의 두 반지름은 각각 a 와 b 이다.

$$U(x, y, z) = \gamma \rho \iiint_V \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (1)$$

$$= \gamma \rho \iiint_V \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

먼저 타원 기둥에 대한 수직 중력을 유도한 Kwok (1991a)의 방법을 간단히 기술하고, Kwok의 방법을 적용하여 두 개의 수평 중력 성분을 유도하여 벡터 중력을 완성한다. 임의의 3차원 물체에 대한 수직 중력 g_z 은 식 (1)을 z 축으로 미분하여 구한다.

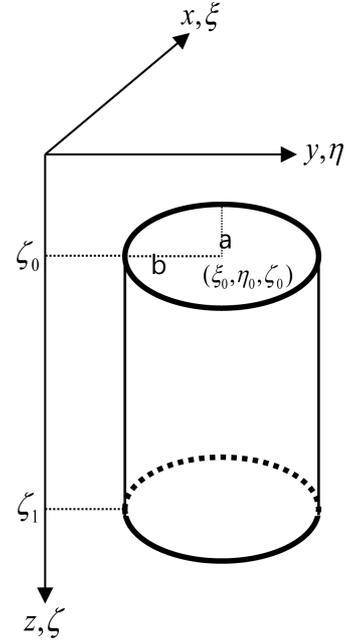


Fig. 1. The schematic geometry of a vertical elliptical cylinder. The origin of top elliptical plane is (ξ_0, η_0, ζ_0) and z coordinate of bottom elliptical plane is ζ_1 . Two radii of the elliptical cross-section are a and b respectively. The identical Cartesian coordinates are used for observations and the elliptical cylinder.

$$g_z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = \gamma \rho \iiint_V \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (2)$$

임의의 3차원 물체가 Fig. 1과 같이 수직 축 방향으로 대칭성을 가진다면 수직 중력은 먼저 ζ 축으로 적분하여 식 (3)과 같이 2중 적분으로 축약된다. 식 (3)에서 S 는 수직 축에 수직인 이상체의 단면을 나타낸다.

$$g_z = \gamma \rho \iint_S \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\zeta - z}{r^3} d\zeta \right) d\xi d\eta = -\gamma \rho \iint_S \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) d\xi d\eta \quad (3)$$

여기서 r_0 와 r_1 은 다음과 같이 정의된다.

$$r_1 = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta_1 - z)^2}$$

$$r_0 = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta_0 - z)^2} \quad (4)$$

식 (3)을 1차원 선적분으로 변형하기 위하여 다음과 같은 쥘레 복소수를 도입한다.

$$w = (\xi - x) + i(\eta - y)$$

$$\bar{w} = (\xi - x) - i(\eta - y) \quad (5)$$

식 (3)의 2중 적분을 1차원 폐곡선 선적분으로 변환시키는 복소수 형태의 그린 정리(Green's theorem)는 식 (6)로 주어진다(Kwok, 1989; Kwok, 1991b; Kwok and Beyer, 1993).

$$\oint_C F(w, \bar{w}) dw = 2i \iint_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} d\xi d\eta \quad (6)$$

1차원 선적분에 필요한 복소 함수 $F(w, \bar{w})$ 는 식 (7)을 \bar{w} 에 대하여 적분하여 구한다.

$$2i \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}} \quad (7)$$

$$F(w, \bar{w}) = -i \frac{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}}{w} \quad (8)$$

2중 적분을 포함한 식 (3)은 복소 그린 정리(식 6)를 적용하면 식 (9)과 같이 복소 평면에서 1차원 선적분으로 변환된다.

$$\iint_S \frac{1}{r_0} d\xi d\eta = -i \oint_C \left[\frac{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}}{w} - \frac{|\zeta_0 - z|}{w} \right] dw \quad (9)$$

여기서 폐곡선 C 는 단면 S 의 경계이고, 식 (9)의 두 번째 복소 선적분은 식 (10)로 주어진다(Kwok, 1991a).

$$i \oint_C \frac{|\zeta_0 - z|}{w} dw = \begin{cases} 0 & w=0 \text{ is outside } C \\ -\pi |\zeta_0 - z| & w=0 \text{ is on } C \\ -2\pi |\zeta_0 - z| & w=0 \text{ is inside } C \end{cases} \quad (10)$$

타원 단면의 경계에 해당하는 폐곡선 C 은 식 (11)과 (12)로 매개 변수로 설정한다(Kwok, 1991a).

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 + a \cos t \\ \eta(t) &= \eta_0 + b \sin t \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \xi_0 + a \cos t - x \\ v(t) &= \eta_0 + b \sin t - y \end{aligned} \quad (12)$$

타원 매개 변수를 이용하면 타원 기둥에 대한 수직 중력이 식 (13)으로 유도된다(Kwok, 1991a).

$$g_z = \begin{cases} -\gamma \rho \int_0^{2\pi} (r_1 - r_0) \theta_1(t) dt & \text{if } (x, y) \text{ is outside } C \\ -\gamma \rho \int_0^{2\pi} (r_1 - r_0) \theta_1(t) dt + \pi \gamma \rho (|\zeta_1 - z| - |\zeta_0 - z|) & \text{if } (x, y) \text{ is on } C \\ -\gamma \rho \int_0^{2\pi} (r_1 - r_0) \theta_1(t) dt + 2\pi \gamma \rho (|\zeta_1 - z| - |\zeta_0 - z|) & \text{if } (x, y) \text{ is inside } C \end{cases} \quad (13)$$

$$\theta_1(t) = \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{u(t)^2 + v(t)^2} \quad (14)$$

벡터 중력의 x 성분은 타원 기둥에 의한 인력 퍼텐셜 (식 1)을 x 축의 미분하여 구한다.

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \gamma \rho \iiint_V \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta \quad (15)$$

수직 축에 대한 대칭성을 이용하여 수직 축에 대하여 적분

하면 식 (16)와 같다.

$$g_x = \gamma \rho \iint_S \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right) d\xi d\eta \quad (16)$$

벡터 중력의 x 성분은 식 (5)에 정의한 켈레 복소수를 도입하면 식 (17)로 변환한다.

$$g_x = \gamma \rho \operatorname{Re} \left(\iint_S \frac{w}{w\bar{w}} \left[\frac{(\zeta_1 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2}} - \frac{(\zeta_0 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}} \right] d\xi d\eta \right) \quad (17)$$

복소 그린 정리를 이용하면 식 (17)의 2중 적분은 식 (18)과 같이 복소 평면에서 1차원 폐곡선 선적분으로 축약된다.

$$g_x = \gamma \rho \operatorname{Re} \left(-i \frac{1}{2} \oint_C \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{|\zeta_1 - z|} \ln \frac{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2} - |\zeta_1 - z|}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2} + |\zeta_1 - z|} - \frac{(\zeta_0 - z)}{|\zeta_0 - z|} \ln \frac{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2} - |\zeta_0 - z|}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2} + |\zeta_0 - z|} \right) dw \right) \quad (18)$$

타원 단면의 매개 변수(식 11-12)을 대입하면 타원 기둥형 이상체에 대한 벡터 중력 x 성분은 식 (19)과 같이 구해진다.

$$g_x = \frac{\gamma \rho}{2} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sgn}(\zeta_1 - z) \ln \frac{r_1 - |\zeta_1 - z|}{r_1 + |\zeta_1 - z|} - \operatorname{sgn}(\zeta_0 - z) \ln \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right] v'(t) dt \quad (19)$$

같은 방법을 벡터 중력의 y 성분에 적용하면 식 (20)과 같다.

$$g_y = -\frac{\gamma \rho}{2} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{sgn}(\zeta_1 - z) \ln \frac{r_1 - |\zeta_1 - z|}{r_1 + |\zeta_1 - z|} - \operatorname{sgn}(\zeta_0 - z) \ln \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right] u'(t) dt \quad (20)$$

타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서

Kwok(1991a)이 이미 유도한 타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서의 zz, xz, yz 성분에 대한 유도 기법을 기술하고, 나머지 성분인 xx, yy, xy 성분을 유도하여 완전한 중력 변화율 텐서를 완성한다.

타원 기둥에 대한 중력 변화율 텐서의 zz 성분은 수직 중력 (식 13)를 z 축으로 미분하여 구한다(Kwok, 1991a).

$$g_{zz} = \gamma \rho \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right] \theta_1(t) dt \quad (21)$$

중력 변화율 텐서의 zz 성분(식 21)은 관측점 (x, y, z) 가 타원 기둥의 외부에 위치한 경우이고, 관측점이 타원 기둥의 내

부에 위치하면 $4\pi\rho\gamma$ 를 더하고 타원 기둥 옆면에 위치하면 $2\pi\rho\gamma$ 를 더한다.

타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서의 xz 성분은 수직 중력 (식 3)을 1차원 선적분으로 변환하기 전 단계에서 x 축 방향으로 먼저 미분하여 구한다(Kwok, 1991a).

$$g_{xz} = -\gamma\rho \operatorname{Re} \left[\iint_S \frac{w}{\{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{w}{\{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta \right] \quad (22)$$

식 (22)에 복소 그린 정리를 적용하면 식 (23)과 같이 유도된다(Kwok, 1991a)

$$g_{xz} = \gamma\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) v'(t) dt \quad (23)$$

마찬가지로 yz 성분은 식 (24)와 같이 주어진다(Kwok, 1991a).

$$g_{yz} = \gamma\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) u'(t) dt \quad (24)$$

타원 기둥에 의한 중력 변화율 텐서의 xx , yy 및 xy 성분은 다음과 같이 유도된다.

xx 성분을 유도하기 위하여 벡터 중력 x 성분을 1차원 선적분으로 변환하기 전 단계에서 x 축으로 미분한다.

$$g_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = \gamma\rho \iiint_V -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5} d\xi d\eta d\zeta \quad (25)$$

식 (25)를 타원 기둥의 수직 축 방향의 대칭성을 이용하여 ζ 로 적분하면 식 (26)이다.

$$g_{xx} = \gamma\rho \iint_S \left[\frac{(\xi - x)^2}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1^3} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} \right) + \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right) \right] d\xi d\eta \quad (26)$$

식 (26)에 켈레 복소수를 도입하면 식 (27)로 변형된다.

$$g_{xx} = \gamma\rho \operatorname{Re} \left[\iint_S \frac{(w + \bar{w})^2}{4w\bar{w}} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{\{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{(\zeta_0 - z)}{\{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) d\xi d\eta \right] + \gamma\rho \operatorname{Re} \left[\iint_S \frac{\bar{w}^2}{w^2 \bar{w}^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2}} - \frac{(\zeta_0 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}} \right) d\xi d\eta \right] \quad (27)$$

식 (27)에 복소 그린 정리를 적용하고 타원 기둥의 매개 변수를 도입하면 식 (28)과 같이 타원 기둥에 대한 중력 변화율 텐서의 xx 성분이 유도된다.

$$g_{xx} = -\frac{\gamma\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right) \theta_1(t) dt + \frac{\gamma\rho}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\zeta_1 - z)(5r_1^2 + (\zeta_1 - z)^2)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)(5r_0^2 + (\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_2(t) dt + \frac{\gamma\rho}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{(\zeta_1 - z)r_1} + \frac{1}{(\zeta_1 - z)|\zeta_1 - z|} \ln \left| \frac{r_1 - |\zeta_1 - z|}{r_1 + |\zeta_1 - z|} \right| - \frac{2}{(\zeta_0 - z)r_0} - \frac{1}{(\zeta_0 - z)|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right| \right) \theta_3(t) dt \quad (28)$$

여기서 $\theta_2(t)$ 와 $\theta_3(t)$ 는 각각 식 (29)과 (30)로 정의된다.

$$\theta_2(t) = \frac{(u^3(t)v'(t) - 3u(t)v^2(t)v'(t) + v^3(t)u'(t) - 3u^2(t)v(t)u'(t))}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \quad (29)$$

$$\theta_3(t) = (u(t)v'(t) + v(t)u'(t)) dt \quad (30)$$

같은 방법으로 yy 성분은 식 (31)으로 유도된다.

$$g_{yy} = -\frac{\gamma\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right) \theta_1(t) dt - \frac{\gamma\rho}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\zeta_1 - z)(5r_1^2 + (\zeta_1 - z)^2)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)(5r_0^2 + (\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_2(t) dt - \frac{\gamma\rho}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{(\zeta_1 - z)r_1} + \frac{1}{(\zeta_1 - z)|\zeta_1 - z|} \ln \left| \frac{r_1 - |\zeta_1 - z|}{r_1 + |\zeta_1 - z|} \right| - \frac{2}{(\zeta_0 - z)r_0} - \frac{1}{(\zeta_0 - z)|\zeta_0 - z|} \ln \left| \frac{r_0 - |\zeta_0 - z|}{r_0 + |\zeta_0 - z|} \right| \right) \theta_3(t) dt \quad (31)$$

xx 성분과 yy 은 관측점 (x, y, z) 가 타원 기둥의 외부에 위치한 경우이고, 관측점이 내부에 위치하면 $-2\pi\rho\gamma$ 를 더하고 타원 기둥의 옆면에 위치하면 $-\pi\rho\gamma$ 를 더한다. 퍼텐셜 이론에 따르면 중력 변화율 텐서의 xx , yy , 및 zz 성분의 합은 항상 '0'인데(Blakely, 1996), 타원 기둥의 경우에도 만족함을 알 수 있다.

xy 성분은 벡터 중력의 x 성분을 y 축으로 미분하거나 y 성분을 x 축으로 미분하여 구한다.

$$g_{xy} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = \gamma\rho \iiint_V \frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{r^5} d\xi d\eta d\zeta \quad (32)$$

식 (32)를 수직 축 방향의 대칭성을 이용하여 ζ 로 적분하면 식 (33)이다.

$$g_{xy} = \gamma\rho \iint_S \left[\frac{(\xi - x)(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1^3} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0^3} \right) + \frac{2(\xi - x)(\eta - y)}{\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2\}^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)}{r_0} \right) \right] d\xi d\eta \quad (33)$$

식 (33)에 켈레 복소수를 도입하면 식 (34)이다.

$$g_{xy} = -\frac{\gamma\rho}{2} \text{Im} \left[\iint_S \frac{\bar{w}}{w} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{\{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{(\zeta_0 - z)}{\{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right) d\xi d\eta \right] - \gamma\rho \text{Im} \left[\iint_S \frac{1}{w^2} \left(\frac{(\zeta_1 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_1 - z)^2}} - \frac{(\zeta_0 - z)}{\sqrt{w\bar{w} + (\zeta_0 - z)^2}} \right) d\xi d\eta \right] \quad (34)$$

복소 그린 정리를 적용하고 타원 단면에 대한 매개 변수를

도입하면 식 (35)와 같이 유도된다.

$$g_{xy} = \frac{\gamma\rho}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(\zeta_1 - z)(3r_1^2 + (\zeta_1 - z)^2)}{r_1} - \frac{(\zeta_0 - z)(3r_0^2 + (\zeta_0 - z)^2)}{r_0} \right] \theta_4(t) dt \quad (35)$$

$$\theta_4(t) = \frac{u^3(t)u'(t) - 3u(t)v^2(t)u'(t) - v^3(t)v'(t) + 3u^2(t)v(t)v'(t)}{(u^2(t) + v^2(t))^3} \quad (36)$$

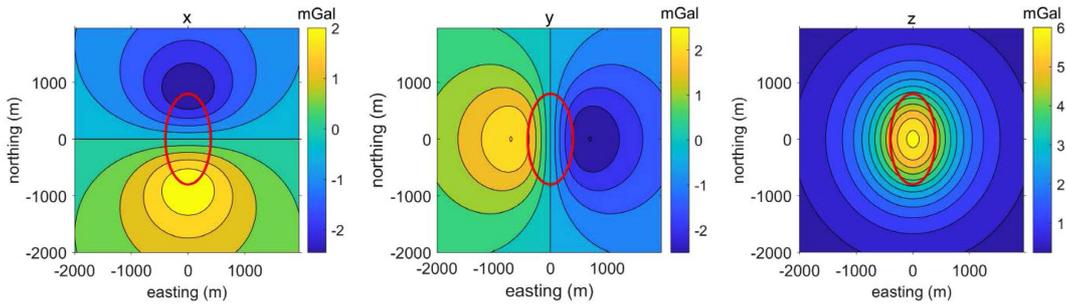


Fig. 2. Vector gravity due to an elliptical cylinder with the length, 1,000 m. The origin of the top plane is (0, 0, -500 m). The short and long radius is 400 m and 800 m, respectively. The density of the elliptical cylinder 1,000 kgm⁻³. The observation points locates on the the sea level.

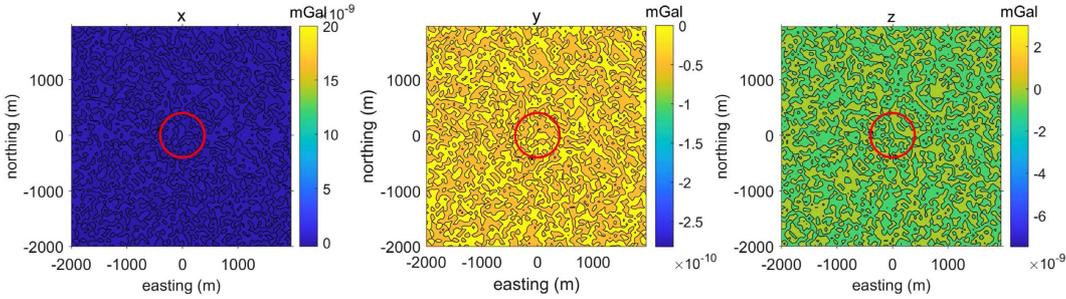


Fig. 3. Differences of the vector gravity between circular cylinder and elliptical cylinder.

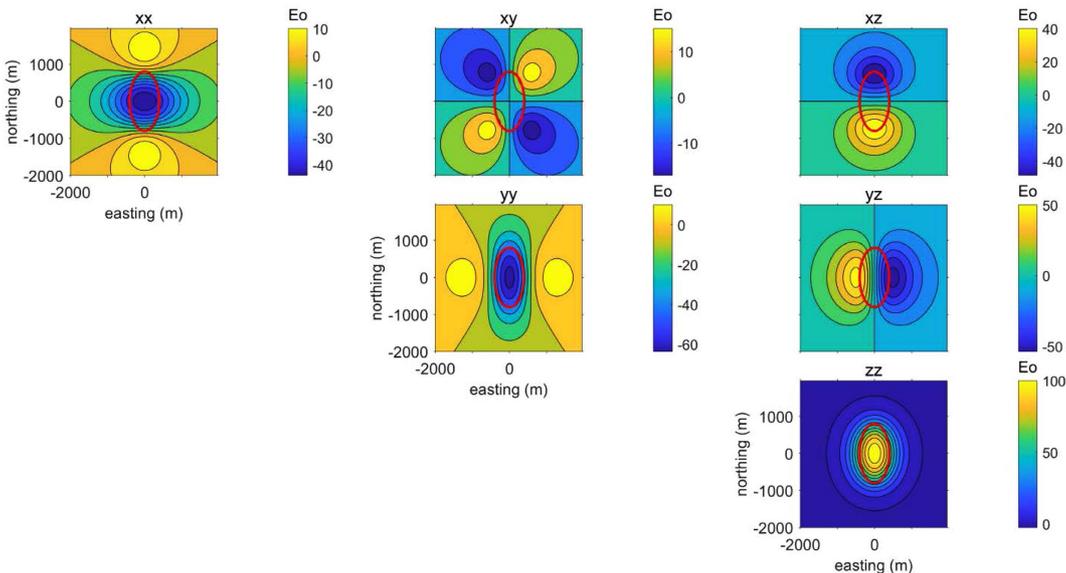


Fig. 4. Gravity gradient tensor due to the same elliptical cylinder used in Fig. 2.

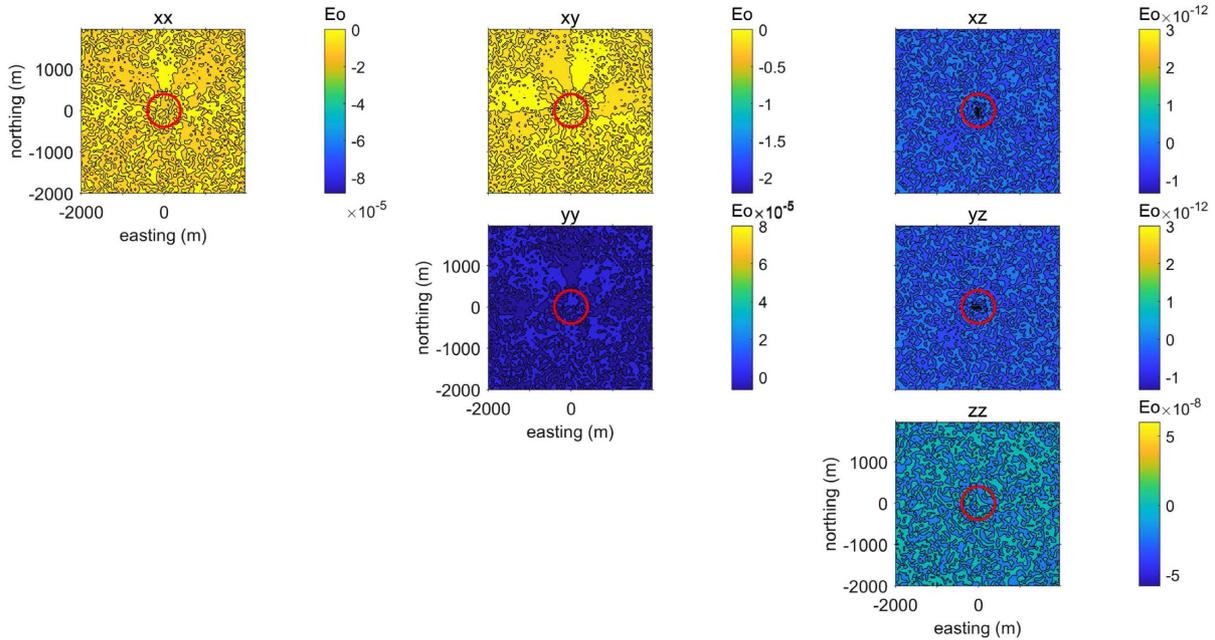


Fig. 5. Differences of the gravity gradient tensor between the circular cylinder and the elliptical cylinder.

벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 모델링

Fig. 2는 윗면의 타원 단면의 중심이 (0, 0, -500 m), 단반경 400 m, 장반경 800 m, 기둥의 길이 1,000 m, 밀도 $1,000 \text{ kgm}^{-3}$ 인 타원 기둥에 대한 벡터 중력을 보여준다. 원형 기둥에 의한 벡터 중력과 비슷한 패턴을 보이고 수직 성분의 경우 장반경 방향으로 연장되는 양상을 보인다. 타원 기둥의 장반경과 단반경이 같으면 원기둥과 동일하는데 원기둥에 의한 벡터 중력과 차이를 비교하면 Fig. 3과 같이 완벽하게 일치한다. 원기둥에 의한 벡터 중력은 Rim and Li (2016)의 벡터 중력식을 이용하였다

같은 타원 기둥에 대한 중력 변화율 텐서 반응(Fig. 4)은 원 기둥과 비슷한 양상을 보이고, 특히 zz 성분의 경우 장반경 방향으로 중력 변화율 텐서 이상 반응이 확장되는 양상을 보인다. 벡터 중력에서 비교한 것과 같이 Fig. 5에서 원기둥의 중력 변화율 텐서(Rim and Li, 2016)와 비교한 경우 완벽한 일치를 보여준다.

결론

임의의 지질 구조를 반영하는 3차원 물체에 의한 중력 및 중력 변화율 텐서 반응은 3중 적분을 포함한 형태로 주어진다. 만약 지질 구조가 대칭성을 가지고 있으면 3중 적분을 수행하여 해석해 형태로 표현할 수 있다. 다양한 지질 구조를 구현하기 위해서는 단순한 형태에 대한 해석해를 유도하여 한다. 예를 들어 화성암 관입의 경우 원기둥 형태보다는 한 축이 다른 축보다 길게 연장된 타원 기둥의 형태를 갖는 경우가 많다. 이

논문에서는 타원 기둥으로 근사가 가능한 지질 구조를 중력 및 중력 변화율 탐사 자료로부터 해석하기 위해서 타원 기둥에 대한 중력 및 중력 변화율 텐서 반응의 해석해를 유도하였다.

타원 기둥에 의한 벡터 중력은 3중 적분이 포함된 인력 퍼텐셜을 각 축으로 미분한 후 타원 기둥의 축 대칭성을 이용하여 수직 방향으로 적분하여 2중 적분으로 축약한 후 복소 그린 정리를 이용하여 1차원 선적분으로 변환한다. 최종적으로 타원 단면의 경계를 선적분 곡선의 매개 변수로 변환하여 벡터 중력을 유도하였다. 같은 방법으로 중력 변화율 텐서의 모든 성분을 복소 그린 정리를 적용하여 유도하였다. 기존에 이미 알고 있는 원형 기둥의 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식과 비교하여 완벽하게 일치함을 보였다.

밀도 대비가 큰 화성암 관입이나 유용한 광물 자원을 배태한 킴벌라이트 구조 등은 중력 및 중력 변화율 탐사의 주요 대상이다. 이런 이상체의 구조는 일반적으로 원형 대칭이 아니고 주 방향이 보조 방향에 비해 길게 연장되어 나타나므로 타원 기둥에 의한 반응식으로 중력 및 중력 변화율 텐서 이상을 해석해야 한다. 이 논문에서 유도한 타원 기둥에 의한 벡터 중력 및 중력 변화율 텐서 반응식을 이용하면 타원 기둥의 장반경, 단반경, 및 원통의 길이 등 서너개의 변수만으로도 타원 기둥 모양의 이상체를 해석해 낼 수 있으므로 통상 3차원 중력 역산에서 사용하는 다수의 직육면체의 조합으로 해석하는 것보다 획기적으로 효율적인 해석이 가능할 것이다.

감사의 글

이 논문은 기상청 기상·지진 See-At 기술 개발 연구 사업

(KMI 2018-02710)의 지원으로 수행되었습니다.

References

- Alatorre-Zamora, M. A., and Campos-Enríquez, J. O., 1991, La Primavera caldera (Mexico): Structure inferred from gravity and hydrogeological considerations, *Geophysics*, **56(7)**, 992-1002, doi: [10.1190/1.1443132](https://doi.org/10.1190/1.1443132)
- Battaglia, M., Gottsmann, J. Carbone, D., and Fernández, J., 2008, 4D volcano gravimetry, *Geophysics*, **73(6)**, WA3-WA18, doi: [10.1190/1.2977792](https://doi.org/10.1190/1.2977792)
- Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press, doi: [10.1017/CBO9780511549816](https://doi.org/10.1017/CBO9780511549816)
- Damiata, B. N., and Lee, T.-C., 2002, Gravitational attraction of solids of revolution: Part 1: Vertical circular cylinder with radial variation of density, *Journal of Applied Geophysics*, **50(3)**, 333-349, doi: [10.1016/S0926-9851\(02\)00151-9](https://doi.org/10.1016/S0926-9851(02)00151-9)
- Kwok, Y. K., 1989, Conjugate complex variables method for the computation of gravity anomalies, *Geophysics*, **54(12)**, 1629-1637, doi: [10.1190/1.1442631](https://doi.org/10.1190/1.1442631)
- Kwok, Y.-K., 1991a, Singularities in gravity computation for vertical cylinders and prisms, *Geophysical Journal International*, **104(1)**, 1-10, doi: [10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1991.tb02490.x)
- Kwok, Y. K., 1991b, Gravity gradient tensors due to a polyhedron with polygonal facets, *Geophysical Prospecting*, **39(3)**, 435-443, doi: [10.1111/j.1365-2478.1991.tb00320.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1991.tb00320.x)
- Kwok, Y. K., and Beyer, L. A., 1993, Gravity due to a body with rotational symmetry about a vertical axis, *Geophysics*, **58(2)**, 298-306, doi: [10.1190/1.1443414](https://doi.org/10.1190/1.1443414)
- Matende, K., and Mickus, K., 2021, Magnetic and gravity investigation of kimberlites in north-central Botswana, *Geophysics*, **86(2)**, B67-B78, doi: [10.1190/geo2020-0450.1](https://doi.org/10.1190/geo2020-0450.1)
- LaFehr, T. R., and Nabighian, M. N., 2012, *Fundamentals of gravity exploration*, Society of Exploration Geophysicists, doi: [10.1190/1.9781560803058](https://doi.org/10.1190/1.9781560803058)
- Lowrie, W., and Fichtner, A., 2020, *Fundamentals of Geophysics 3rd ed.*, Cambridge University Press, doi: [10.1017/9781108685917](https://doi.org/10.1017/9781108685917)
- Nagy, D., 1966, The gravitational attraction of a right rectangular prism, *Geophysics*, **31(2)**, 362-371, doi: [10.1190/1.1439779](https://doi.org/10.1190/1.1439779)
- Nettleton, L. L., 1942, Gravity and magnetic calculations, *Geophysics*, **7(3)**, 293-310, doi: [10.1190/1.1445015](https://doi.org/10.1190/1.1445015)
- Okabe, M., 1979, Analytical expressions for gravity anomalies due to homogeneous polyhedral bodies and translations into magnetic anomalies, *Geophysics*, **44(4)**, 730-741, doi: [10.1190/1.1440973](https://doi.org/10.1190/1.1440973)
- Rim, H., and Li, Y., 2016, Gravity gradient tensor due to a cylinder, *Geophysics*, **81(4)**, G59-G66, doi: [10.1190/geo2015-0699.1](https://doi.org/10.1190/geo2015-0699.1)
- Rim, H., 2021, Closed-form expressions of the vector gravity and gravity gradient tensor due to a circular disk, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **24(1)**, 1-5, doi: [10.7582/GGE.2021.24.1.001](https://doi.org/10.7582/GGE.2021.24.1.001) (in Korean with English abstract)
- Singh, S. K., 1977, Gravitational attraction of a vertical right circular cylinder, *Geophysical Journal International*, **50(1)**, 243-246, doi: [10.1111/j.1365-246X.1977.tb01332.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1977.tb01332.x)
- Vasanthi, A., and Mallick, K., 2005, Bouguer gravity anomalies and occurrence patterns of kimberlite pipes in Narayanpet-Maddur Regions, Andhra Pradesh, India, *Geophysics*, **70(1)**, J13-J24, doi: [10.1190/1.1852778](https://doi.org/10.1190/1.1852778)