

# 루카스-파도반 수열을 이용한 새로운 위상적 네트워크 구축<sup>☆</sup>

## On the construction of a new topological network using Lucas-Padovan sequence

이 광 연<sup>1</sup>                      김 진 수<sup>2</sup>                      박 기 섭<sup>3\*</sup>                      김 문 성<sup>3</sup>  
Gwangyeon Lee                      Jinsoo Kim                      Kisoeb Park                      Moonseong Kim

### 요 약

본 논문에서는 파도반 수열을 이용하여 새로운 루카스-파도반(Lucas-Padovan) 수열을 정의하고, 이를 이용하여 새로운 위상적 상호연결 네트워크(Interconnection Networks)를 구축한다. 루카스-파도반 수열의 부분 수열을 이용하여 음이 아닌 정수를 코딩(Coding)하고, 이를 이용하여 루카스-파도반 큐브(Cubes)를 새롭게 구축하여 위상적 성질을 다룬다.

☞ 주제어 : 루카스-파도반 수열, 위상적 상호연결 네트워크, 루카스-파도반 큐브

### ABSTRACT

In this paper, we define a new Lucas-Padovan sequence using the Padovan sequence, and a new topological interconnection network is constructed using it. Coding nonnegative integers using subsequences of the Lucas-Padovan sequence, and using this to construct a new Lucas-Padovan cubes to deal with topological properties.

☞ keyword : Lucas-Padovan Sequence, Topological Interconnection Network, Lucas-Padovan Cubes

## 1. 서 론

이미 이진 큐브(binary cube)와 피보나치 큐브(Fibonacci cube)는 많이 연구되어 상호연결 네트워크(Interconnection Network)에 활용하고 있다[1, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 14, 16, 20]. 본 연구에서는 이진 큐브와 피보나치 큐브 이외의 큐브를 구축하여 네트워크 연구에 새로운 도구를 제공하고자 한다.

파도반 수열(Padovan sequence)은 Padovan[15]에 의하여 처음 소개되었고, [17, 18, 19]에서 일반화된 파도반 수열을 다루기까지 많은 연구 결과가 발표되었다. 특히 [10, 11]에서 파도반 수열은  $k$ -파도반 수열로 확장되었다.

파도반 수열  $\{P_n\}$ 은 초깃값  $P_1 = P_2 = P_3 = 1$ 와  $n \geq 2$ 에 대하여  $P_{n+2} = P_n + P_{n-1}$ 로 정의된다. 파도반 수열의 처음 몇 항은 다음과 같다.

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, ...

이제, 피보나치 수열에서 루카스 수열(Lucas sequence)을 도입하였듯이, 파도반 수열로부터 루카스-파도반(Lucas-Padovan) 수열  $\{LP_n\}$ 을 정의하자. 수열  $\{LP_n\}$ 은 파도반 수열  $\{P_n\}$ 와 초깃값  $LP_1 = 1$ , 그리고  $n \geq 2$ 에 대하여  $LP_n = P_{n-1} + P_{n+1}$ 로 정의되며, 처음 몇 개의 항은 다음과 같다.

1, 2, 3, 3, 5, 6, 8, 11, 14, 19, 25, 33, 44, 58, 77, ...

이후, 본 논문에서는 루카스-파도반을 줄여 루도반(Ludovan)이라 부르기로 한다. 어떤 수열  $M = \{m_n\}$ 이 완비(complete)라는 것은 모든 자연수를  $\{m_n\}$ 의 부분 수열의 합으로 나타낼 수 있을 때이다. 즉,  $a_i = 0$  또는  $a_i = 1$ 에 대하여 임의의 양의 정수  $N$ 이  $M$ 의 어떤 부분 수열의 합  $N = \sum_{i=0}^{\infty} a_i m_i$ 일 때 수열  $M = \{m_n\}$ 는 완비이다. 수열의 완비에 대하여 다음의 따름정리를 얻을 수 있다[4].

(따름정리 1.1) 수열  $M = \{m_n\}$ 은 만일  $m_1 = 1$ 이고,

1 Dept. of Mathematics, Hanseo University, Seosan, 31962 Korea.  
2 Mathematics, Ewoo High School, Seongnam, 13547, Korea.  
3 Dept. of IT Convergence Software, Seoul Theological University, Bucheon, 14754, Korea.

\* Corresponding author (kisoeb@stu.ac.kr)

[Received 11 January 2023, Reviewed 17 January 2023, Accepted 08 Feb 2023]

☆ 이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임.

(NRF-2021R1A2C1093105, NRF-2021R1F1A1061873)

☆ 본 논문은 2022년 한국인터넷정보학회 추계학술대회 우수 논문 추천에 따라 확장 및 수정된 논문임.

$n \geq 1$ 에 대하여  $m_{n+1} \leq 2m_n$ 이면 완비이다.

일반화된 피보나치 수열과 파도반 수열에 대한 완비는 여러 연구에서 진행되었다[9, 12]. 본 연구에서 루도반 수열이 완비임을 보일 것이다. 그런데 루도반은 완비라고 하더라도 임의의 정수를 유일하게 표현하지 못한다. 정수 표현의 유일성을 보장하기 위하여 우리는 루도반 코딩에 대한 공리(Axiom)를 도입할 것이다.

본 논문에서 우리는 상호연결 위상(Interconnection Topology)을 그래프  $G=(V, E)$ 로 나타낸다. 여기서  $V$ 는 꼭짓점의 집합이고  $E$ 는 변의 집합이다. 본 논문에서 이용할 그래프(Graph)에 대한 몇 가지 정의를 살펴보자.

두 그래프  $G_1$ 과  $G_2$ 에 대하여  $G_2$ 가  $G_1$ 의 부분그래프(subgraph)인 경우는  $G_2 \subseteq G_1$ 으로 나타내고, 동형(isomorphic)은  $G_1 \cong G_2$ 로 나타낸다. 그래프  $G_1$ 이  $G_2$ 에 직접 내장(directly embedded)일 필요충분조건은  $G_1 \cong G_3$ 인  $G_2$ 의 부분그래프  $G_3$ 가 존재할 때이다. 이때  $G_1 \supseteq G_2$ 로 나타낸다. 세 그래프  $G_1=(V_1, E_1)$ ,  $G_2=(V_2, E_2)$ ,  $G_3=(V_3, E_3)$ 에 대하여는  $V_1 = V_2 \cup V_3$ 이고  $E_1 = E_2 \cup E_3$ 일 때이고,  $G_1 = G_2 \cap G_3$ 는  $V_1 = V_2 \cap V_3$ 이고  $E_1 = E_2 \cap E_3$ 일 때이다. 특히  $G_1 = G_2 \cup G_3$ 이고,  $G_2 \cap G_3 = \emptyset$ 일 때,  $G_1 = G_2 \cup G_3$ 을  $G_1 = G_2 \uplus G_3$ 으로 나타낸다. 또 만일  $1 \leq i \leq k$ 에 대하여  $G_i \cong G$ 일 때,  $\uplus_{i=1}^k G_i = k \cdot G$ 로 나타낸다.

본 논문은 모두 다섯 개의 절로 구성되어 있다. 1절은 서론이고, 2절에서는 루도반 수열의 부분 수열을 기반으로 루도반 코드를 정의한다. 3절에서는 루도반 코드를 기반으로 루도반 큐브를 정의한다. 4절에서는 루도반 큐브의 몇 가지 위상적 특성을 다룬다. 5절에서는 본 연구에 대한 결론을 간략하게 소개한다.

우리는 [16]에서 다음과 같은 상호연결 네트워크의 배경과 응용 전망을 볼 수 있다. 즉, 슈퍼컴퓨팅 컴퓨터 아키텍처 분야에서 상호연결 네트워크는 이진  $n$ -큐브 멀티프로세서로 정의되며,  $n$ 차원 이진 큐브에서 연결된  $N=2n$  프로세서로 구성된 느슨하게 결합된 시스템으로 취급된다. 이때 각 프로세서는 큐브의 꼭짓점(또는 노드(node))을 나타낸다. 현재 피보나치 큐브는 다양한 용도로 이용되고 있다. 특히 수학적 화학과 컴퓨터 과학에서 상호연결 네트워크는 큐브 그래프의 연구에 사용되고, 알고리즘적 관점에서 흥미롭게 다뤄지고 있다. 따라서, 피보나치 큐브를 직접 내장한 루도반 큐브에 대한 연구는 큰 의미가 있다.

## 2. 루카스-파도반 코드

Lee와 Kim은 파도반 수열의 부분 수열을 이용한 파도반 코드를 구축했고, 파도반 코드를 이용하여 파도반 큐브를 구축하였다[12]. 본 논문에서는 그들의 결과를 조금 더 확장하기 위하여 루카스-파도반 수열을 도입하여 지금까지 존재하지 않았던 새로운 코드와 상호연결 네트워크를 구축한다.

다시 강조하자면, 이후에 본 논문에서 루카스-파도반을 간단히 루도반이라고 한다. 루도반 수열에 대하여  $LP_1 = 1, LP_2 = 2, LP_3 = 3, LP_4 = 3$ 이므로  $LP_4 = LP_2 + LP_1$ 이다. 또  $n \geq 5$ 에 대하여  $LP_n = P_{n-1} + P_{n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} LP_{n-2} + LP_{n-3} &= P_{n-3} + P_{n-1} + P_{n-4} + P_{n-2} \\ &= P_{n+1} + P_{n-1} \\ &= LP_n. \end{aligned}$$

따라서  $n \geq 4$ 일 때 루도반 수열  $\{LP_n\}$ 에 대하여 다음의 점화식이 성립한다.

$$LP_n = LP_{n-2} + LP_{n-3}$$

이제, 루도반 코드를 정의하기 위하여 루도반 수열  $\{LP_n\}$ 의 홀수 루도반 수열(odd-Ludovan sequence)  $\{l_n\}$ 을 도입하자. 초깃값  $l_1 = LP_1, l_2 = LP_2$ 과  $n \geq 3$ 에 대하여  $l_n = LP_{2n-3}$ 으로 정의하자. 그러면 홀수 루도반 수열의 처음 몇 개 항은 다음과 같다.

$$1, 2, 3, 5, 8, 14, 25, 44, 77, 135, 237, 416, 730, \dots$$

이로부터  $l_6 \neq l_5 + l_4 + l_2$ 임을 알 수 있다. 그런데  $l_n = LP_{2n-3}, l_{n-1} = LP_{2n-5}, LP_{2n-3} = LP_{2n-5} + LP_{2n-6}$ 이므로  $n \geq 7$ 에 대하여

$l_n = LP_{2n-5} + LP_{2n-6} = l_{n-1} + (l_{2n-8} + LP_{2n-9})$ 이다. 따라서 간단한 계산으로부터  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-4}$ 임을 알 수 있다. 그러므로  $n \geq 7$ 일 때 홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 에 대하여 다음 점화식이 성립한다.

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-4} \quad (1)$$

홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 을 이용하여 루도반 코드와 루도반 큐브를 구축하려면 우선 이 수열이 완비여야 한다. 그런데  $2l_n = 2LP_{2n-3}$ 이고

$$l_{n+1} = LP_{2n-1} = LP_{2n-3} + LP_{2n-4} \text{이므로}$$

$2l_n - l_{n+1} = LP_{2n-3} - LP_{2n-4} \geq 0$ 이다. 즉,  $2l_n \geq l_{n+1}$  이므로 따름정리 1.1에 의하여 홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 은 완비이다.

홀수 루도반 수열이 완비이지만, 루도반 코드와 루도반 큐브를 구축하기 위하여 모든 음이 아닌 정수를 유일하게 표현해야 하므로 다음의 공리가 필요하다.

**[루도반 코딩 공리(Ludovan Coding Axiom)]**

홀수 루도반 수  $l_k (1 \leq k \leq n)$ 에 대하여, 양의 정수  $N$ 의 홀수 루도반 표현이  $N = \sum_{i=1}^n l_i$  라면, 홀수 루도반 수  $l_{k_1}$  과  $l_{k_2} (2 \leq i \leq n)$ 는 다음 조건을 만족해야 한다.

$$l_{k_1} = \max\{l_k | 1 \leq l_k \leq N\},$$

$$l_{k_2} = \max\left\{l_k | 1 \leq l_k \leq N - \sum_{j=1}^{i-1} l_{k_j}\right\}.$$

위의 루도반 코딩 공리는 간단히 정리하면, 임의의 정수  $N$ 을 홀수 루도반 수열의 합으로 나타낼 때 가능한 홀수 루도반 수 중에서  $N$ 에 가장 가까우며 큰 루도반 수를 반드시 먼저 사용해야 한다는 것이다. 예를 들어, 자연수 28을 홀수 루도반 수열의 합으로 나타내면

$$\begin{aligned} 28 &= 25 + 3 \\ &= 14 + 8 + 5 + 1 \\ &= 14 + 8 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

처럼 홀수 루도반 표현은 유일하지 않다. 하지만 루도반 코딩 공리로부터, 28에 대한 홀수 루도반 표현은  $28 = 14 + 8 + 5 + 1$ 도  $28 = 14 + 8 + 3 + 2 + 1$ 도 아닌  $28 = 25 + 3$ 으로 유일하게 표현된다. 이때 25는 28에 가장 가까우며 큰 홀수 루도반 수이다. 루도반 코딩 공리를 사용하여 임의의 양의 정수를 홀수 루도반 수의 합으로 표현하면 연속한 세 개의 홀수 루도반 수는 나타나지 않는다. 즉, 다음 보조정리가 성립한다.

**(보조정리 2.1)** 만일  $N$ 이 임의의 양의 정수라면 홀수

루도반 수열  $\{l_n\}$ 에 대하여  $N = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i l_i$ 와 같이 유일하게 표현된다. 이때  $i \geq 1$ 에 대하여, 각각의  $\alpha_i$ 는  $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} = 0$ 을 만족하는 이진수 0 또는 1이다.

**(증명)** 홀수 루도반 수열은 완비이고, 루도반 코딩 공

리로부터 임의의 양의 정수의 홀수 루도반 표현이 유일

함은 자명하다. 따라서 양의 정수의 홀수 루도반 표현에 연속된 세 개의 홀수 루도반 수가 없음을 보이면 증명은 완성된다. 이를 귀납적으로 보이자.

처음 6개의 홀수 루도반 수 1, 2, 3, 5, 8, 14에 대하여 이 사실은 자명하게 성립한다. 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13에 대하여  $4=3+1, 6=5+1, 7=5+2, 9=8+1, 10=8+2, 11=8+3, 12=8+3+1, 13=8+5$ 이므로  $n \leq 14$ 에 대하여 주어진 조건은 성립한다.

이제  $N \geq 15$ 라 하자. 만일  $N$ 이 홀수 루도반 수라면 조건을 만족한다. 그렇지 않으면  $l_j < N < l_{j+1}$ 을 만족하는  $j$ 가 존재한다. 귀납법에 의하여,  $k < N$ 은 홀수 루도반 표현을 갖는다고 가정하고  $k = N - l_j$ 이라 하자.  $k < N$ 이므로  $k$ 는 홀수 루도반 표현을 갖는다.

동시에  $j \geq 7$ 에 대하여  $l_j = l_{j-1} + l_{j-2} + l_{j-4}$ 이므로  $k = N - l_j < l_{j+1} - l_j = l_{j-1} + l_{j-3} < l_{j-1} + l_{j-2}$ 이다. 그래서  $k$ 의 홀수 루도반 표현은  $l_{j-1} + l_{j-2}$ 을 포함하지 않는다. 결국,  $N$ 는  $l_j$ 와  $k$ 의 홀수-루도반 표현의 합으로 나타낼 수 있다. 즉, 연속된 세 홀수-루도반 수는  $N$ 의 표현에 없다. 따라서,  $i \geq 1$ 에 대하여  $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} = 0$ 이다.

[5]와 [12]에서는 각각 피보나치 코드와 파도반 코드를 새롭게 도입했다. 본 논문에서도 마찬가지로 홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 을 이용하여 루도반 코드를 새롭게 도입한다.

**(정의 2.1)[루카스-파도반 코드]**

홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 에 대하여  $N$ 을  $0 \leq N \leq l_n - 1$ 인 음이 아닌 정수라 하자.  $0$  또는  $1$ 인  $b_i (1 \leq i \leq n-1)$ 에 대하여  $(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1)_l$ 를  $N$ 의 위수  $n$ 인 루도반 코드라고 한다. 이때  $N = \sum_{i=1}^{n-1} b_i \cdot l_i$ 이다.

본 논문에서는  $C_n$ 을 위수  $n$ 인 루도반 코드의 집합이라 하고,  $n$ 이 정해져 있다면  $(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1)_l$ 을 간단히  $n-1$ 개의 이진 숫자의 문자열  $b_{n-1}b_{n-2}..b_2b_1$ 로 나타내자. 이를 간단히 루도반 코드라 하자. 또 어떤 루도반 코드  $\alpha$ 와 영 코드(null string)  $\lambda$ 에 대하여  $\alpha \cdot \lambda = \alpha$ 이다. 다음은 루도반 코드의 집합의 몇 가지 예이다.

$l_1 = 1$ 이고  $0 \leq N \leq 1-1=0$ 이므로  $C_1 = \{\lambda\}$ 이다. 여기서  $\lambda$ 는 영 코드이다.

$l_2 = 2$ 이고  $0 \leq N \leq 2-1=1$ 이므로  $C_2 = \{0,1\}$ .

$l_3 = 3$ 이고  $0 \leq N \leq 3-1=2$ 이므로  $C_3 = \{00, 01, 10\}$ .

$l_4 = 5$ 이고  $0 \leq N \leq 5-1=4$ 이므로

$$C_4 = \{000, 001, 010, 100, 101\}.$$

$l_5 = 8$ 이고  $0 \leq N \leq 8-1=7$ 이므로

$$C_5 = \{0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 1000, 1001, 1010\}.$$

$l_6 = 14$ 이고  $0 \leq N \leq 14-1=13$ 이므로

$$C_6 = \{00000, 00001, 00010, 00100, 00101, 01000, 01001, 01010, 10000, 10001, 10010, 10100, 10101, 11000\}.$$

$l_7 = 25$ 이고  $0 \leq N \leq 25-1=24$ 이므로

$$C_7 = \{000000, 000001, 000010, 000100, 000101, 001000, 001001, 001010, 010000, 010001, 010010, 010100, 010101, 011000, 100000, 100001, 100010, 100100, 100101, 101000, 101001, 101010, 110000, 110001, 110010\}.$$

한편, 두 루도반 코드  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 대하여  $\alpha \cdot \beta$ 는 두 루도반 코드를 이어 붙인 코드이다. 특히 영 코드  $\lambda$ 에 대하여  $\lambda \cdot \alpha = \alpha \cdot \lambda = \alpha$ 이다. 만일  $S$ 가 루도반 코드의 집합이라면  $\alpha \cdot S = \{\alpha \cdot \beta | \beta \in S\}$ 이다. 예를 들어

$$\begin{aligned} 0 \cdot C_6 &= \{000000, 000001, 000010, 000100, 000101, \\ &\quad 001000, 001001, 001010, 010000, 010001, \\ &\quad 010010, 010100, 010101, 011000\}, \\ 10 \cdot C_5 &= \{100000, 100001, 100010, 100100, 100101, \\ &\quad 101000, 101001, 101010\}, \\ 1100 \cdot C_3 &= \{110000, 110001, 110010\} \end{aligned}$$

이다. 즉,  $C_7 = 0 \cdot C_6 \cup 10 \cdot C_5 \cup 1100 \cdot C_3$ 임을 알 수 있다. 그런데  $1100 \cdot C_2 = \{11000, 11001\}$ 이지만  $C_6$ 는 코드 11001을 포함하고 있지 않으므로

$C_6 \neq 0 \cdot C_5 \cup 10 \cdot C_4 \cup 1100 \cdot C_2$ 이다. 따라서 다음 정리가 성립한다.

**(정리 2.2)**  $n \geq 7$ 일 때 위수  $n$ 인 루도반 코드의 집합  $C_n$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$C_n = 0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}.$$

또  $n \geq 1$ 에 대하여  $|C_n| = l_n$ 이다.

**(증명)** 음이 아닌 정수  $N$ 과  $l_n$ 에 대하여

$$0 \leq N = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i l_i \leq l_n - 1 \text{이다.}$$

만일  $\alpha \in 0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}$ 라면 분명하게  $\alpha \in C_n$ 이다.

역으로  $\alpha \in C_n$ 라 가정하자. 그러면 루도반 코드  $\alpha$ 는  $n-1$ 개의 이진 숫자의 문자열을 가지므로, 일반성을 잃지 않고,  $\alpha = 0 \cdot \beta$  또는  $\alpha = 1 \cdot \beta$ 라 가정할 수 있다. 여기서  $\beta$ 는  $n-2$ 개의 이진 숫자의 문자열을 가진 루도반 코드이다. 만일  $\alpha = 0 \cdot \beta$ 이라면  $\alpha$ 는  $n-1$ 개의 이진 자릿수를 가지고  $C_{n-1}$ 은  $n-2$ 개의 이진 숫자의 문자열을 갖는 위수  $n-1$ 의 루도반 코드의 집합이므로  $\beta \in C_{n-1}$ 이다. 즉,  $\alpha \in 0 \cdot C_{n-1}$ 이다.

이제  $\alpha = 1 \cdot \beta$ 라 하자.  $n-3$ 개의 이진 숫자의 문자열을 갖는 루도반 코드  $\beta_1$ 에 대하여  $\beta = 0 \cdot \beta_1$ 라면  $\alpha = 10 \cdot \beta_1 \in 10 \cdot C_{n-2}$ 이다. 그래서  $\beta = 1 \cdot \beta_1$ 라 가정하자. 즉,  $\alpha = 11 \cdot \beta_1$ .

만일  $n-4$ 개의 이진 숫자의 문자열을 갖는 루도반 코드  $\beta_2$ 에 대하여  $\beta_1 = 1 \cdot \beta_2$ 이라면  $\alpha = 111 \cdot \beta_2$ 이다. 그러나 이것은 보조정리 2.1에 의하여 불가능하다. 따라서  $\beta_1 = 0 \cdot \beta_2$ .

다시, 만일  $n-5$ 개의 이진 숫자의 문자열을 갖는 루도반 코드  $\beta_3$ 에 대하여  $\beta_2 = 1 \cdot \beta_3$ 라면  $\alpha = 1101 \cdot \beta_3$ 이다. 식 (1)로부터  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-4}$ 이므로 이진 숫자의 문자열로 만들어진 양의 정수  $N$ 은  $N > l_n - 1$ 이다. 그러나 이것은 불가능하다. 그래서  $\beta_3 \in C_{n-4}$ 에 대하여  $\beta_2 = 0 \cdot \beta_3$ 이므로 다음이 성립한다.

$$\alpha = 1100 \cdot \beta_3 \in 1100 \cdot C_{n-4}.$$

따라서  $\alpha \in 0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}$ 이다. 그러므로  $n \geq 7$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$C_n = 0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}.$$

또  $n \geq 1$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |C_n| &= |0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}| \\ &= l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-4} = l_n. \end{aligned}$$

두 이진 코드  $I = (b_{n-1}, \dots, b_2, b_1)$ 와  $J = (c_{n-1}, \dots, c_2, c_1)$ 에 대하여  $I$ 와  $J$ 의 해밍 거리(Hamming distance)  $H(I, J)$ 는  $I$ 와  $J$ 의 같은 위치에 있는 이진 숫자 문자열 중에서

다른 것의 개수이다. 예를 들어  $I = (1101)$ ,  $J = (1011)$ 이면  $I$ 와  $J$ 는 문자열 중에서 둘째와 셋째의 2개가 다르므로  $H(I, J) = 2$ 이다.

**(따름정리 2.3)**  $n \geq 7$ 에 대하여  $A(n-1, n-2)$ 은  $0 \cdot C_{n-1}$ 의 코드와  $10 \cdot C_{n-2}$ 의 코드를 비교할 때 해밍 거리가 1인 코드의 개수,  $A(n-1, n-4)$ 은  $0 \cdot C_{n-1}$ 의 코드와  $1100 \cdot C_{n-4}$ 의 코드를 비교할 때 해밍 거리가 1인 코드의 개수,  $A(n-2, n-4)$ 은  $10 \cdot C_{n-2}$ 의 코드와  $1100 \cdot C_{n-4}$ 의 코드를 비교할 때 해밍 거리가 1인 코드의 개수라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$A(n-1, n-2) = l_{n-2}, \quad A(n-1, n-4) = l_{n-4},$$

$$A(n-2, n-4) = l_{n-4}.$$

**(증명)** 정리 2.2로부터  $|C_n| = l_n$ 이다.  $\alpha \in 0 \cdot C_{n-1}$ 와  $\beta \in 10 \cdot C_{n-2}$ 에 대하여  $H(\alpha, \beta) = 1$ 이면,  $\alpha_1 \in C_{n-2}$ 에 대하여  $\alpha = (00\alpha_1)$ 와  $\beta = (10\alpha_1)$ 로 나타낼 수 있다. 이때,  $|C_{n-2}| = l_{n-2}$ 이므로  $A(n-1, n-2) = l_{n-2}$ 이다.

$\alpha \in 0 \cdot C_{n-1}$ 와  $\gamma \in 1100 \cdot C_{n-4}$ 에 대하여  $H(\alpha, \gamma) = 1$ 이면,  $\alpha_2 \in C_{n-4}$ 에 대하여  $\alpha = (0100\alpha_2)$ 와  $\gamma = (1100\alpha_2)$ 로 나타낼 수 있다. 이때,  $|C_{n-4}| = l_{n-4}$ 이므로  $A(n-1, n-4) = l_{n-4}$ 이다.

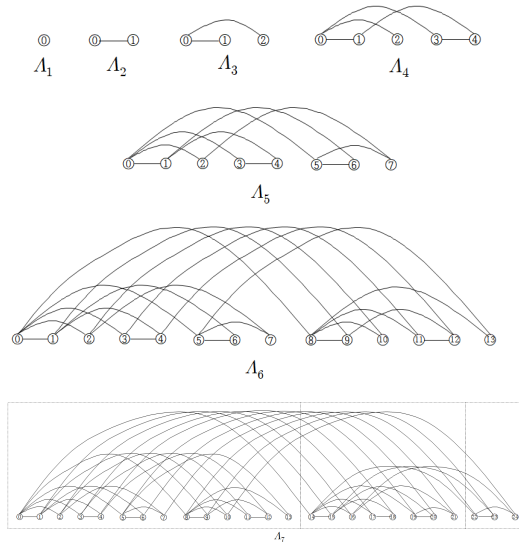
마찬가지로  $\beta \in 10 \cdot C_{n-2}$ 와  $\gamma \in 1100 \cdot C_{n-4}$ 에 대하여  $A(n-2, n-4) = l_{n-4}$ 을 얻을 수 있다.

### 3. 루카스-파도반 큐브

피보나치 큐브와 파도반 큐브는 Hsu[5]와 Lee와 Kim[12]가 각각 도입했다. 이 절에서 우리는 루도반 코드를 기반으로 루도반 큐브를 정의한다. 루도반 큐브는 지금까지 도입되지 않았던 새로운 상호연결 네트워크이다.

그림 1은 크기가  $N = 1, 2, 3, 5, 8, 14, 25$ 인 루도반 큐브의 예이다. 루도반 큐브에서 적당한 홀수 루도반 수  $l_k$ 에 대하여 꼭짓점  $i$ 와  $j$ 가  $|i-j| = l_k$ 일 때, 두 꼭짓점은 변  $\{i, j\}$ 로 인접한다. 예를 들어 크기가 14인 루도반 큐브  $A_6$ 에서 꼭짓점  $0 = (00000)_l$ 은 다섯 개의 꼭짓점  $1 = (00001)_l$ ,  $2 = (00010)_l$ ,  $3 = (00100)_l$ ,  $5 = (01000)_l$ ,  $8 = (10000)_l$ 과 인접하고, 이들은 모두 홀수 루도반 수이다.

한편,  $A_7$ 은 각각  $A_6, A_5, A_3$ 와 동형인 부분그래프를 포함하고 있으며,  $l_5 + l_3 + l_3 = 8 + 3 + 3 = 14$ 개의 변이 세



(그림 1) 루도반 큐브  
(Figure 1) Rudovan cubes

부분그래프를 연결하고 있다. 이로부터 우리는  $n \geq 7$ 에 대하여  $A_n$ 이 각각  $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-4}$ 와 동형인 부분그래프를 포함하고 있음을 추측할 수 있다. 하지만  $A_6$ 는  $A_5, A_4, A_2$ 와 동형인 세 그래프를 포함하고 있지 않다. 따라서  $n \geq 7$ 은 매우 중요한 조건임을 알 수 있다.

이 절에서는 루도반 큐브  $A_n$ 이 어떤 부분그래프를 포함하고 있는지 알아본다.

**(보조정리 3.1)**  $n \geq 7$ 에 대하여  $S_1(n), S_2(n), S_3(n)$ 은 각각 세 꼭짓점의 집합

$$V_{n-1} = \{0, 1, 2, \dots, l_{n-1}-1\},$$

$$V_{n-2} = \{l_{n-1}, l_{n-1}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}-1\},$$

$$V_{n-4} = \{l_{n-1}+l_{n-2}, l_{n-1}+l_{n-2}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}+l_{n-4}-1\}$$

에서 유도된  $A_n$ 의 세 부분그래프라 하면, 다음이 성립한다.

$$S_1(n) \cong A_{n-1}, \quad S_2(n) \cong A_{n-2}, \quad S_3(n) \cong A_{n-4}.$$

**(증명)** 만일  $n = 7$ 라면 그림 1로부터 정리는 분명하게 성립한다.  $C_n$ 는  $A_n$ 의 꼭짓점 레이블 집합임을 상기하자. 그러면  $A_n$ 의 상호연결은 이들 코드의 해밍 거리에 기초

하고 있고, 정리 2.2로부터 다음이 성립함을 알고 있다.

$$C_n = 0 \cdot C_{n-1} \cup 10 \cdot C_{n-2} \cup 1100 \cdot C_{n-4}.$$

여기서  $0 \cdot C_{n-1}$ ,  $10 \cdot C_{n-2}$ ,  $1100 \cdot C_{n-4}$ 은 각각 정확히  $S_1(n)$ ,  $S_2(n)$ ,  $S_3(n)$ 의 꼭짓점 레이블의 집합임을 상기하자. 더욱이  $\{i, j\} \in A_{n-1}$ 일 필요충분조건은  $\{i, j\} \in S_1(n)$ 이다. 왜냐하면  $i$ 와  $j$ 는 모두 위수  $n$ 인 코드에서 해밍 거리에 영향을 주지 않는 앞부분이 같은 '0'의 문자열을 갖는다. 따라서  $S_1(n) \cong A_{n-1}$ .

마찬가지로  $S_2(n) \cong A_{n-2}$ 이고,  $S_3(n) \cong A_{n-4}$ 이다.

이제  $n \geq 7$ 에 대하여 위수  $n$ 인 루도반 큐브  $A_n = (V_n, E_n)$ 의 변의 집합  $Link_1(n)$ ,  $Link_2(n)$ ,  $Link_3(n)$ 을 정의하자. 집합  $Link_1(n)$ 에 대하여 변  $\{i, j\} \in Link_1(n)$ 일 필요충분조건은  $i \in V_{n-1}$ 이고  $j \in V_{n-2}$ 이다. 집합  $Link_2(n)$ 에 대하여 변  $\{i, j\} \in Link_2(n)$ 일 필요충분조건은  $i \in V_{n-1}$ 이고  $j \in V_{n-4}$ 이다. 집합  $Link_3(n)$ 에 대하여 변  $\{i, j\} \in Link_3(n)$ 일 필요충분조건은  $i \in V_{n-2}$ 이고  $j \in V_{n-4}$ 이다. 여기서 꼭짓점 집합  $V_{n-1}$ ,  $V_{n-2}$ ,  $V_{n-4}$ 는 보조정리 3.1과 같다. 예를 들어 그림 1의  $A_7 = (V_7, E_7)$ 에 대하여  $V_6 = \{0, 1, \dots, 12, 13\}$ ,  $V_5 = \{14, 15, \dots, 20, 21\}$ ,  $V_3 = \{22, 23, 24\}$ 이고,

$$Link_1(7) = \{\{0, 14\}, \{1, 15\}, \{2, 16\}, \{3, 17\}, \{4, 18\}, \{5, 19\}, \{6, 20\}, \{7, 21\}\}$$

$$Link_2(7) = \{\{8, 22\}, \{9, 23\}, \{10, 24\}\},$$

$$Link_3(7) = \{\{14, 22\}, \{15, 23\}, \{16, 24\}\}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$|Link_1(7)| = 8 = l_5, |Link_2(7)| = 3 = l_3, |Link_3(7)| = 3 = l_3.$$

이것을 일반화하자.  $n \geq 7$ 에 대하여, 위수가 각각  $n$ ,  $n-1$ ,  $n-2$ ,  $n-4$ 인 루도반 큐브를

$$A_n = (V_n, E_n), A_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1}),$$

$$A_{n-2} = (V_{n-2}, E_{n-2}), A_{n-4} = (V_{n-4}, E_{n-4})$$

라 하고,  $A(n-1, n-2)$ ,  $A(n-1, n-4)$ ,  $A(n-2, n-4)$ 을 따름정리 2.3에서 정의된 것과 같은 코드의 수라 하자. 그러면  $\{i, j\} \in E_n$ 일 필요충분조건은  $H(I_i, J_j) = 1$ 이므로  $|Link_1(n)| = A(n-1, n-2)$ ,  $|Link_2(n)| = A(n-1, n-4)$ ,

$$|Link_3(n)| = A(n-2, n-4)$$

이다. 따라서 따름정리 2.3으로부터 일반적으로 다음이 성립한다.

$$|Link_1(n)| = l_{n-2}, |Link_2(n)| = l_{n-4}, |Link_3(n)| = l_{n-4} \quad (2)$$

**(정리 3.2)**  $n \geq 7$ 에 대하여  $A_n$ 을 위수  $n$ 인 루도반 큐브라고 하면  $A_n$ 은 세 개의 부분그래프  $A_{n-1}$ ,  $A_{n-2}$ ,  $A_{n-4}$ 로 분해할 수 있다. 이때 세 부분그래프는 쌍마다 서로소이고, 정확하게 변의 집합  $Link_1(n)$ ,  $Link_2(n)$ ,  $Link_3(n)$ 에 의해 인접한다.

**(증명)**  $S_1(n)$ ,  $S_2(n)$ ,  $S_3(n)$ 를 보조정리 3.1과 같이 정의된 부분그래프라 하면  $S_1(n) \cong A_{n-1}$ ,  $S_2(n) \cong A_{n-2}$ ,  $S_3(n) \cong A_{n-4}$ 이고, 정의로부터  $S_1(n) \cap S_2(n) = (\emptyset, \emptyset)$ ,  $S_1(n) \cap S_3(n) = (\emptyset, \emptyset)$ ,  $S_2(n) \cap S_3(n) = (\emptyset, \emptyset)$ 이다. 이로부터  $Link_1(n)$ 의 변  $\{i, j\}$ 에 대하여  $S_2(n)$ 의 꼭짓점  $j$ 는  $S_1(n)$ 의 꼭짓점  $i = j - l_{n-1}$ 와 인접하고,  $Link_2(n)$ 의 변  $\{i, j\}$ 에 대하여  $S_3(n)$ 의 꼭짓점  $j$ 는  $S_1(n)$ 의 꼭짓점  $i = j - l_{n-1}$ 와 인접하고,  $Link_3(n)$ 의 변  $\{i, j\}$ 에 대하여  $S_3(n)$ 의 꼭짓점  $j$ 는  $S_2(n)$ 의 꼭짓점  $i = j - l_{n-2}$ 와 인접함을 알 수 있다.

이제  $S_1(n)$ 과  $S_2(n)$  사이에 다른 변이 존재하지 않음을 보이자.

정리 2.2에 의하여,  $S_2(n)$ 의 모든 꼭짓점의 이진 숫자 문자열 앞부분은 '10'이나,  $S_1(n)$ 의 모든 꼭짓점의 이진 숫자 문자열 앞부분은 '00' 또는 '01'이다. 만일  $i$ 가 앞부분이 '01'인 문자열을 갖는 꼭짓점이고  $j$ 가 앞부분이 '10'인 문자열을 갖는 꼭짓점이라면  $i$ 와  $j$ 의 루도반 코드  $I_i$ 과  $J_j$ 은  $H(I_i, J_j) \geq 2$ 이다. 그러면  $i \in S_1(n)$ 이고  $j \in S_2(n)$ 에 대하여  $\{i, j\}$ 는  $A_n$ 의 변이 아니다. 따라서  $S_1(n)$ 과  $S_2(n)$  사이에  $Link_1(n)$ 로 주어진 변만 존재한다.

마찬가지 방법으로,

$l_{n-1} \leq i, j \leq l_{n-2} + l_{n-1} - 1$ ,  $l_{n-2} + l_{n-1} \leq i, j \leq l_n - 1$ 에 대하여  $Link_2(n)$ 과  $Link_3(n)$ 로 주어진 변뿐임을 보일 수 있다.

#### 4. 루도반 큐브의 분해와 위상적 성질

이 절에서는 루도반 큐브의 분해와 위상적 성질을 다룬다.  $n \geq 1$ 에 대하여  $e(A_n)$ 을 루도반 큐브  $A_n$ 의 변의

수라 하자. 그러면 (그림 1)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$e(A_1) = 0, e(A_2) = 1, e(A_3) = 2, e(A_4) = 5, \\ e(A_5) = 10, e(A_6) = 22, e(A_7) = 48.$$

한편, 정리 3.2로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$e(A_n) = e(A_{n-1}) + e(A_{n-2}) + e(A_{n-4}) \\ + |Link_1(n)| + |Link_2(n)| + |Link_3(n)|.$$

식 (2)으로부터

$$|Link_1(n)| = l_{n-2}, |Link_2(n)| = l_{n-4}, |Link_3(n)| = l_{n-4}$$

이므로 루도반 큐브  $A_n$ 의 변의 수는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$e(A_n) = e(A_{n-1}) + e(A_{n-2}) + e(A_{n-4}) + l_{n-2} + 2l_{n-4} \quad (4)$$

$n \geq 1$ 에 대하여, 식 (4)로부터 다음과 같은 루도반 큐브  $A_n$ 의 변의 수에 대한 수열을 얻을 수 있다.

0, 1, 2, 5, 10, 22, 48, 99, 198, 391, 764, 1477, 2830, ...

수학용 컴퓨터 프로그램을 이용하면 이 수열에 대하여 다음과 같은 생성함수를 얻을 수 있다.

$$g(z) = \frac{z^7 - 2z^6 + 5z^5 - 4z^4 + 3z^3 - 2z^2 + z}{(z^3 - z^2 + 2z - 1)^2}.$$

마지막으로 상호연결 네트워크인 루도반 큐브의 분해에 대하여 알아보기 위해 홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 을 이용하여 새로운 수열  $\{r_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자. 초기조건은  $r_1 = l_1 = 1, r_2 = l_2 = 2, r_3 = l_3 = 3, r_4 = l_1 + l_2 + l_3 = 6$ 이고,  $n \geq 5$ 에 대하여

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-4}.$$

그러면  $\{r_n\}$ 의 처음 몇 항은 다음과 같다.

1, 2, 3, 6, 10, 18, 31, 55, 96, 169, 296, 520, 912, 1601, ... .

여기서  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} + l_{n-4}$ 이므로  $\{r_n\}$ 은 홀수 루도반 수열  $\{l_n\}$ 와 같은 방법으로 정의되었음을 알 수 있다. 이때 수열  $\{r_n\}$ 의 생성함수는 다음과 같다.

$$g(r_n) = \frac{-x^3 - x - 1}{x^4 + x^2 + x - 1}.$$

예를 들어, 정리 3.2로부터  $A_{10}$ 은 세 부분그래프  $A_9, A_8, A_6$ 로 분해됨을 알 수 있다. 이때  $A_9$ 는 다시  $A_8, A_7, A_5$ 로 분해된다. 이런 과정을 두 번 더 실행한다면  $A_{10}$ 은 서로소인 여섯 개의  $A_6$ , 네 개의  $A_5$ , 두 개의  $A_4$ , 그리고 세 개의  $A_3$ 로 분해됨을 알 수 있다. 즉,  $A_{10} \cong 6A_6 \cup 4A_5 \cup 2A_4 \cup 3A_3$ 로 나타낼 수 있다. 엄밀히 말하면 이것은  $A_{10}$ 은  $A_6$ 와 동형인 여섯 개의 서로소인 부분그래프,  $A_5$ 와 동형인 네 개의 부분그래프,  $A_4$ 와 동형인 두 개의 부분그래프,  $A_3$ 와 동형인 세 개의 부분그래프로 분해됨을 의미한다.

일반적으로  $A_n$ 에 대하여 다음 정리가 성립한다.

**(정리 4.1)**  $n \geq 10$ 와  $4 \leq k \leq n$ 에 대하여 위수  $n$ 의 루도반 큐브  $A_n$ 은 다음과 같이 분해할 수 있다. 단,  $n - k \geq 6$ .

$$A_n \cong r_k A_{n-k} \cup (r_{k-1} + r_{k-3}) A_{n-k-1} \\ \cup r_{k-2} A_{n-k-2} \cup r_{k-1} A_{n-k-3}.$$

**(증명)** 정리 3.2로부터 다음이 성립한다.

$$\Gamma_n \cong (\Gamma_{n-1} \cup \Gamma_{n-2} \cup \Gamma_{n-4}), \\ \Gamma_{n-1} \cong (\Gamma_{n-2} \cup \Gamma_{n-3} \cup \Gamma_{n-5}), \\ \Gamma_{n-2} \cong (\Gamma_{n-3} \cup \Gamma_{n-4} \cup \Gamma_{n-6}), \\ \Gamma_{n-3} \cong (\Gamma_{n-4} \cup \Gamma_{n-5} \cup \Gamma_{n-7}).$$

$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, r_4 = 6$ 이므로  $n \geq 10$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\Gamma_n \cong 6\Gamma_{n-4} \cup 4\Gamma_{n-5} \cup 2\Gamma_{n-6} \cup 3\Gamma_{n-7} \\ = r_4 \Gamma_{n-4} \cup (r_1 + r_3) \Gamma_{n-5} \cup r_2 \Gamma_{n-6} \cup r_3 \Gamma_{n-7}.$$

이제  $4 \leq K \leq N$ 에 대하여  $n \leq N$ 와  $k \leq K$ 일 때 성립한다고 가정하면, 귀납법으로부터  $n = N+1$ 와  $k = K+1$ 인 경우에 성립함을 보이자.

정리 3.2로부터  $A_{N+1}$ 은  $A_N, A_{N-1}, A_{N-3}$  각각 하나씩으로 구성되어 있다. 가정으로부터  $A_N$ 는  $r_K$ 개의  $A_{N-K}$ ,  $(r_{K-1} + r_{K-3})$ 개의  $A_{N-K-1}$ ,  $r_{K-2}$ 개의  $A_{N-K-2}$ ,  $r_{K-1}$ 개의  $A_{N-K-3}$ 로 구성되어 있다.  $A_{(N-1)}$ 는  $r_{(K-1)}$ 개의  $A_{(N-1)-(K-1)}$ ,  $(r_{(K-1)-1} + r_{(K-1)-3})$ 개의  $A_{(N-1)-(K-1)-1}$ ,  $r_{(K-1)-2}$ 개의  $A_{(N-1)-(K-1)-2}$ ,  $r_{(K-1)-1}$ 개의  $A_{(N-1)-(K-1)-3}$ 로 구성되어 있다.  $A_{(N-3)}$ 는  $r_{(K-3)}$ 개의  $A_{(N-3)-(K-3)}$ ,  $(r_{(K-3)-1} + r_{(K-3)-3})$ 개의

의  $A_{(N-3)-(K-3)-1}$ ,  $r_{(K-3)-2}$ 개의  $A_{(N-3)-(K-3)-2}$ ,  $r_{(K-3)-1}$ 개의  $A_{(N-3)-(K-3)-3}$ 로 구성되어 있다.

그러면  $A_{(N+1)-(K+1)}$ 은  $r_K+r_{K-1}+r_{K-3}=r_{K+1}$ 개,  $A_{(N+1)-(K+1)-1}$ 은  $(r_{K-1}+r_{K-2}+r_{K-4})+(r_{K-3}+r_{K-4}+r_{K-4}+r_{K-6})=r_K+r_{K-2}$ 개,  $A_{(N+1)-(K+1)-2}$ 은  $r_{K-2}+r_{K-3}+r_{K-5}=r_{K-1}$ 개,  $A_{(N+1)-(K+1)-3}$ 은  $r_{K-1}+r_{K-2}+r_{K-4}=r_K$ 개이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} A_{N+1} &\supseteq r_{K+1}A_{(N+1)-(K+1)} \\ &\cup (r_{(K+1)-1}+r_{(K+1)-3})A_{(N+1)-(K+1)-1} \\ &\cup r_{(K+1)-2}A_{(N+1)-(K+1)-2} \\ &\cup r_{(K+1)-1}A_{(N+1)-(K+1)-3} \\ &= r_{K+1}A_{N-K} \cup (r_K+r_{K-2})A_{N-K-1} \\ &\cup r_{K-1}A_{N-K-2} \cup r_K A_{N-K-3} \end{aligned}$$

따라서 귀납법으로부터  $n=N+1$ 와  $k=K+1$ 일 때도 성립하므로 정리의 증명이 완성된다.

예를 들어,  $k=10$ 에 대하여

$$\begin{aligned} A_n &\supseteq r_{10}A_{n-10} \cup (r_9+r_7)A_{n-11} \cup r_8A_{n-12} \cup r_9A_{n-13} \\ &= 169A_{n-10} \cup 127A_{n-11} \cup 55A_{n-12} \cup 96A_{n-13}. \end{aligned}$$

이므로  $n=14$ 라면,

$$A_{14} \supseteq 169A_4 \cup 127A_3 \cup 55A_2 \cup 96A_1.$$

임의의 실수  $x$ 에 대하여  $\lfloor x \rfloor$ 는  $x$ 보다 작은 수 중에서 가장 큰 정수이고,  $\lceil x \rceil$ 는  $x$ 보다 큰 수 중에서 가장 작은 정수를 나타낸다. 이를테면,  $\lfloor 2.4 \rfloor = 2$ 이고  $\lceil 2.4 \rceil = 3$ 이다.

**(정리 4.2)** 루도반 큐브  $A_n (n \geq 3)$ 에 대하여  $d_n(i)$ 를 꼭짓점  $i$ 의 차수라면 다음이 성립한다.

$$2 \left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1 \leq d_n(i) \leq (n-1).$$

**(증명)** 루도반 큐브  $A_n$ 의 꼭짓점은  $n-1$ 개의 문자열을 가짐을 상기하자. 꼭짓점  $i$ 와 인접한 모든 꼭짓점은  $i$ 의 루도반 코드  $I_i$ 과 해빙 거리가 1인 코드를 갖는다. 따라서 꼭짓점 '0'은  $A_n$ 에서 정확히  $n-1$ 개의 인접한 꼭짓점을 가지므로  $d_n(i) \leq n-1$ 이 성립한다.

이제,  $\delta_n$ 을  $A_n$ 의 꼭짓점의 최소 차수라 하면 그림1로부터  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ ,  $\delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = 2$ 임을 알 수

있다.  $A_n$ 은 꼭짓점의 집합이 각각

$\{0, 1, 2, \dots, l_{n-1}-1\}$ ,  $\{l_{n-1}, l_{n-1}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}-1\}$ ,  $\{l_{n-1}+l_{n-2}, l_{n-1}+l_{n-2}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}+l_{n-4}-1\}$ 인 세 개의 부분그래프  $A_{n-1}$ ,  $A_{n-2}$ ,  $A_{n-4}$ 로 분해할 수 있다. 다시  $A_{n-1}$ 은 꼭짓점의 집합이 각각  $\{0, 1, 2, \dots, l_{n-2}-1\}$ ,  $\{l_{n-2}, l_{n-2}+1, \dots, l_{n-2}+l_{n-3}-1\}$ ,  $\{l_{n-2}+l_{n-3}, l_{n-2}+l_{n-3}+1, \dots, l_{n-2}+l_{n-3}+l_{n-5}-1\}$ 인 세 개의 부분그래프  $G_1 \cong A_{n-2}$ ,  $G_2 \cong A_{n-3}$ ,  $G_3 \cong A_{n-5}$ 로 분해할 수 있다.

두 꼭짓점의 집합

$\{l_{n-1}, l_{n-1}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}-1\}$ ,  $\{l_{n-1}+l_{n-2}, l_{n-1}+l_{n-2}+1, \dots, l_{n-1}+l_{n-2}+l_{n-4}-1\}$

를 갖는 두 부분그래프를  $G_4 = A_{n-2}$ 와  $G_5 = A_{n-4}$ 라 하면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \min\{\delta_{n-2}+1, \delta_{n-3}+1, \delta_{n-5}+2, \delta_{n-2}+1, \delta_{n-4}+2\} \\ \leq \delta_n \leq \\ \min\{\delta_{n-2}+2, \delta_{n-3}+2, \delta_{n-5}+2, \delta_{n-2}+2, \delta_{n-4}+2\}. \end{aligned}$$

여기서 우변의 첫 번째  $\delta_{n-2}$ 는  $G_1$ , 두 번째  $\delta_{n-3}$ 는  $G_2$ , 세 번째  $\delta_{n-5}$ 는  $G_3$ , 네 번째  $\delta_{n-2}$ 은  $G_4$ , 다섯 번째  $\delta_{n-4}$ 는  $G_5$ 의 꼭짓점에 대한 최소 차수이다.  $k \geq 2$ 에 대하여  $\delta_k \geq \delta_{k-1}$ 이므로  $n \geq 8$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\min\{\delta_{n-3}+1, \delta_{n-5}+2\} \leq \delta_n \leq \delta_{n-5}+2$$

그러면 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- (i)  $\delta_{n-3}+1 \leq \delta_n$ ,
- (ii)  $\delta_n = \delta_{n-5}+2$ .

- (i)  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ ,  $\delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = 2$ 이므로  $3 \leq \delta_8$ ,  $3 \leq \delta_9$ ,  $3 \leq \delta_{10}$ 이다.

따라서  $\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor \leq \delta_n$ 이 성립한다.

- (ii)  $\delta_n = \delta_{n-5}+2$ 이므로  $\delta_8 = 3$ ,  $\delta_9 = 3$ ,  $\delta_{10} = 4$ ,  $\delta_{11} = 4$ ,  $\delta_{12} = 4$ ,  $\delta_{13} = 5$ ,  $\delta_{14} = 5$ ,  $\delta_{15} = 6$ ,  $\delta_{16} = 6$ ,  $\delta_{17} = 6$  등을 얻을 수 있다. 이것은  $3 \leq \delta_8, \dots, 3 \leq \delta_{11}, 3 \leq \delta_{12}, 5 \leq \delta_{13}, \dots, 5 \leq \delta_{16}, 5 \leq \delta_{17}$  등과 같이 나타낼 수 있으므로  $2 \left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1 \leq \delta_n$ 이 성립한다.

위의 두 가지 경우로부터 다음을 얻을 수 있다.



$$\min\left\{\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, 2\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1\right\} \leq \delta_n$$

이때  $\lfloor x \rfloor$  와  $\lceil x \rceil$  의 성질로부터  $n \geq 3$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\min\left\{\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, 2\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1\right\} = 2\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1$$

따라서  $2\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor - 1 \leq \delta_n$  이므로 정리가 성립한다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 새로운 상호 연결 네트워크로 루도반 큐브를 제시하고, 그것의 구조적 특성을 분석했다. 분석된 구조적 문제에는 채귀적 분해, 정도의 경계 조건 등 다른 구조물과의 관계가 포함된다. 우리는 또한 다양한 유형의 구조가 루도반 큐브에 직접 내장될 수 있다는 것을 보여주었다. 그러나 이진 큐브나 피보나치 큐브에 비해 루도반 큐브는 조금 복잡하고 다루기 어렵다.

루도반 수열의 처음 몇 항은 같은 수가 겹치기 때문에 루도반 수열의 완전성은 쉽지만 유일성은 보장할 수 없다. 유일성을 보장하기 위해 루도반 큐브는 홀수 항 수열로만 구성되었기 때문에 기존의 루도반 수열의 모든 속성을 그대로 사용할 수 없다. 여러 연구에서는 커뮤니케이션의 기본 원리에 대해 논의했고, 본 연구에서도 이를 다룬다. 이로부터 위수가  $n$ 인 루도반 큐브에서, 우리는 임의의 두 꼭짓점 사이의 송수신 연산이 최적인  $n-1$  단 계로 수행될 수 있다.

본 논문에서 다루지 않았던 루도반 큐브와 관련된 다양한 특성은 향후 꾸준히 연구되어야 한다.

## 참고문헌(Reference)

[ 1 ] P. Codara and O. M. D'Antona, "Generalized Fibonacci and Lucas cubes arising from powers of paths and cycles", *Discrete Mathematics*, Vol.339, pp.270-282, 2016.  
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.08.012>

[ 2 ] O. Egecioglu, E. Saygi and Z. Saygi, " $k$ -Fibonacci Cubes: A Family of Subgraphs of Fibonacci Cubes", *International Journal of Foundations of Computer Science* Vol.31, No.5, pp.639-661, 2020.

<https://doi.org/10.1142/S0129054120500318>

[ 3 ] O. Egecioglu, E. Saygi and Z. Saygi, "The number of short cycles in Fibonacci cubes", *Theoretical Computer Science*, Vol.871, No.6, pp.134-146, 2021.  
<https://doi.org/10.1016/j.tcs.2021.04.019>

[ 4 ] R. Honsberger, "Mathematical gems III", The Mathematical Association of America: Washington, DC, USA, pp.123-130, 1985.

[ 5 ] W. Hsu, "Fibonacci Cubes-A New Interconnection Topology", *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol.4, pp.3-12, 1993.  
<https://doi.org/10.1109/71.205649>

[ 6 ] A. Ilic., S. Klavzar and Y. Rho, "Generalized Fibonacci Cubes", *Discrete Mathematics*, Vol.312, pp.2-11, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.02.015>

[ 7 ] S. Klavzar, M. Mollard and M. Petkovsek, "The degree sequence of Fibonacci and Lucas cubes", *Discrete Mathematics*, Vol.311, pp.1310-1322, 2012.  
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.03.019>

[ 8 ] S. Kraitsana, "Matrices formula for Padovan and Perrin Sequences", *Applied Mathematical Sciences*, Vol.7, No.142, pp.7093-7096, 2013.  
<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2013.311658>

[ 9 ] G. Lee, "A Completeness on Generalized Fibonacci Sequences", *Bull. Korean Math. Soc.*, Vol.32, No.2, pp.239-249, 1995.

[ 10 ] G. Lee, "On the Generalized Binet Formulas of the  $k$ -Padovan Numbers", *Far East J. Mathematical Sciences*, Vol.99, No.10, pp.1487-1504, 2016.

[ 11 ] G. Lee, "On the  $k$ -generalized Padovan Numbers", *Utilitas Mathematica*, Vol.108, pp.185-194, 2018.

[ 12 ] G. Lee and J. Kim, "On the Padovan codes and the Padovan cubes", *Symmetry*, Vol.266, No.15, pp.1-14, 2023.  
<https://doi.org/10.3390/sym15020266>

[ 13 ] M. Mollard, "The existence of perfect codes in a family of generalized Fibonacci cubes", *Information Processing Letters*, Vol.140, pp.1-3, 2018.  
<https://doi.org/10.1016/j.ipl.2018.07.010>

[ 14 ] E. Munarin, C. P. Cippo and N. Z. Salvi, "On the Lucas cubes", *Fibonacci quarterly*, Vol.39, No.1, pp.12-21, 2001.

[ 15 ] R. Padovan, "Dom Hans Van Der Laan and the Plastic

- Number”, Nexus Network Journal, Vol.4, No.3, pp.181-193, 2002.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-319-00143-2\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-319-00143-2_27)
- [16] M. F. Semeniuta, “Super Fibonacci graceful graphs and Fibonacci cubes”, Control Systems and Computers, Vol.5, No.289, pp.34-41, 2020.  
<https://doi.org/10.15407/csc.2020.05.034>
- [17] A. G. Shannon, A. F. Anderson and P. R. Anderson, “The Auxiliary Equation Associated with the Plastic Numbers”, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol.12, No.1, pp.1-12, 2006.
- [18] A. G. Shannon, P. G. Anderson and A. F. Horadam, “Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers”, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, Vol.37, No.7, pp.825-831, 2006.  
<https://doi.org/10.1080/00207390600712554>
- [19] C. Voet, “The Poetics of order: Dom Hans Van der Loan’s numbers”, Architectonic Space, Vol.16, pp.137-154, 2012.  
<https://doi.org/10.1017/S1359135512000450>
- [20] J. Wu, “Extended Fibonacci Cubes”, IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol.8, No.12, pp.1203-1210, 1997.  
<https://doi.org/10.1109/71.640012>

## ● 저 자 소 개 ●



### 이 광 연(Gwangyeon Lee)

1987년 성균관대학교 수학과(이학사)  
 1989년 성균관대학교 대학원 수학과(이학석사)  
 1993년 성균관대학교 대학원 수학과(이학박사)  
 1996년~1997년 미국 와이오밍주립대학교 박사후과정  
 1992년~현재 한서대학교 교육대학원 수학교육전공 교수  
 관심분야 : 네트워크, 그래프 이론, 행렬론 etc.  
 E-mail : gylee@hanseo.ac.kr



### 김 진 수(Jinsoo Kim)

1988년 성균관대학교 수학과(이학사)  
 1993년 성균관대학교 대학원 수학과(이학석사)  
 2000년 성균관대학교 대학원 수학과(이학박사)  
 2005년~현재 이우학교 교사  
 관심분야 : 네트워크, 그래프 이론, 행렬론 etc.  
 E-mail : loglion@gmail.com

● 저 자 소개 ●



**박 기 섭(Kisoeb Park)**

1999년 한서대학교 수학과(이학사)  
2001년 성균관대학교 대학원 수학과(이학석사)  
2007년 성균관대학교 대학원 수학과(이학박사)  
2008년~2009년 영국 King's College London 수학과 박사후연구원  
2021년~현재 서울신학대학교 IT융합소프트웨어학과 교수  
관심분야 : 빅데이터, 데이터분석 및 컴퓨터 시뮬레이션, 네트워크, 그래프 이론, 응용수학 etc.  
E-mail : kisoeb@stu.ac.kr



**김 문 성(Moonseong Kim)**

2002년 성균관대학교 일반대학원 수학과(이학석사)  
2007년 성균관대학교 일반대학원 전기전자및컴퓨터공학부(공학박사)  
2007년~2009년 미국 미시간주립대학교 컴퓨터과학공학과 연구원  
2009년~2018년 특허청 사무관/서기관 대우  
2018년~현재 서울신학대학교 IT융합소프트웨어학과 교수/학과장  
관심분야 : 모바일 컴퓨팅, 정보보호, 머신러닝, 지식재산권 등  
E-mail : moonseong@stu.ac.kr