

# Analysis of Frequency Lock-in Breakings with Random Dithering in a Ring Laser Gyroscope

Woo-Seok Choi<sup>1†</sup> and Byung-Yoon Park<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Agency for Defense Development, Daejeon 34186, Korea

<sup>2</sup>Department of Physics, Chungnam National University, Daejeon 34134, Korea

(Received March 6, 2023; Revised March 20, 2023; Accepted March 20, 2023)

In this paper, the results of analyzing the frequency lock-in breaking characteristics of a ring laser gyroscope with random dithering through numerical experiments are presented. By observing the variant features in the frequency lock-in characteristics according to the dithering amplitude noise, it was possible to analyze the minimum noise condition that causes the frequency lock-in to be broken. It was confirmed that the result is closely related to the relative difference between the dynamic frequency lock-in corresponding to the average dithering amplitude and the frequency determined by the Sagnac effect corresponding to an input rotational angular velocity.

**Keywords:** Frequency lock-in breaking, Random dithering, Ring laser gyroscope, Sagnac effect compensation

**OCIS codes:** (000.4430) Numerical approximation and analysis; (120.3180) Interferometry; (120.5790) Sagnac effect

## 랜덤 디더링을 이용한 링레이저 자이로 주파수 잠김 깨짐 특성 분석

최우석<sup>1†</sup> · 박병윤<sup>2</sup>

<sup>1</sup>국방과학연구소

Ⓛ 34186 대전광역시 유성구 유성우체국 사서함 35

<sup>2</sup>충남대학교 물리학과

Ⓛ 34134 대전광역시 유성구 대학로 99

(2023년 3월 6일 받음, 2023년 3월 20일 수정본 받음, 2023년 3월 20일 게재 확정)

본 논문에서는 랜덤 디더링을 이용한 링레이저 자이로 주파수 잠김 깨짐 특성을 수치적 실험을 통해 분석한 결과를 나타내었다. 디더링 진폭 잡음 크기에 따른 링레이저 자이로 주파수 잠김 특성 변화 관찰을 통해 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소 진폭 잡음 크기를 분석할 수 있었다. 해당 결과는 평균 디더링 진폭에 상응하는 동적 주파수 잠김 크기 및 회전 각속도 입력에 대응하여 사냥 효과에 의해 발생하는 주파수 사이의 상대적인 차이와 밀접한 관련이 있음을 확인하였다.

**Keywords:** 주파수 잠김 깨짐, 랜덤 디더링, 링레이저 자이로, 사냥 효과 보상

**OCIS codes:** (000.4430) Numerical approximation and analysis; (120.3180) Interferometry; (120.5790) Sagnac effect

### I. 서 론

링레이저 자이로(ring laser gyroscope, RLG)는 광섬유 자

이로와 함께 정밀한 관성항법 시스템 구현 등을 위해 요구되는 대표적인 광학식 관성센서 중 하나로<sup>[1]</sup> 기본적인 동작 원리는 시계 방향과 반 시계 방향으로 진행되는 두 빛 사이에서 센

<sup>†</sup>Corresponding author: [cws@add.re.kr](mailto:cws@add.re.kr), ORCID: 0000-0001-9009-3797

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서 몸체에 인가되는 회전 각속도에 비례하여 광 경로 차이가 발생하는 사냐 효과(Sagnac effect)에 기반을 두고 있다<sup>[2,3]</sup>. 사냐 효과에 따른 빛의 위상 차이를 감지하는 광섬유 자이로와 달리, 링레이저 자이로의 경우 원형 레이저 공진기를 이용하는 방식을 채택하고 있으며, 이러한 이유로 사냐 효과에 의한 광 경로 차이는 레이저 공진 조건을 변화시켜 레이저 공진기 내부를 서로 반대 방향으로 진행하는 두 빛 사이에서 주파수 차이를 유발하는 것으로 해석할 수 있다.

주파수 잠김(frequency lock-in)은 링레이저 자이로에 특정 기준값 이하의 낮은 회전 입력 각속도가 인가될 경우 해당 입력에 상응하는 주파수 차이를 감지하지 못하고 회전이 전혀 인가되지 않은 경우와 동일한 출력 값을 나타내는 현상으로, 링레이저 자이로 정밀도 성능을 저하시키는 대표적인 오차 요인에 해당한다. 이러한 이유로 주파수 잠김 발생 문제를 해결하기 위한 방법을 찾는 연구는 링레이저 자이로 개발 역사에서 매우 중요한 위치를 차지해 왔으며, 디더링(dithering)으로 불리는 레이저 공진기 몸체에 기계적 방식으로 주기적으로 교번하는 정현파 형태의 각진동을 인가하는 방법을 통해 현재에 이르기까지 가장 널리, 그리고 성공적으로 주파수 잠김 현상에 의한 문제를 해결하고 있다<sup>[4-7]</sup>.

그림 1에 주파수 잠김에 의한 링레이저 자이로 불감응 영역(dead band) 발생 및 디더링 적용을 통한 해당 문제의 해결 과정을 설명하기 위한 개념도를 나타내었다. 그림 1의 왼쪽 부분과 같이 링레이저 자이로가 주파수 잠김 상태에 있는 경우, 레이저 공진기 몸체에 회전이 인가되더라도 결과적으로 링레이저 자이로가 인지하는 현상학적인 광 경로 차이는 발생하지 않게 된다. 이는 사냐 효과를 설명하기 위한 기존의 개념적 이해체계와 상충되는 부분으로, 주파수 잠김에 의한 결과를 설명하기 위해서는 실제 구현 과정에서 발생가능한 불완전한 조건들을 포함하여 사냐 효과를 통합적으로 해석하는 새로운 관점의 도입이 필요하다. 최근에 발표된 연구논문에서는 링레이저 자이로의 불감응 영역 발생 현상을 주어진 사냐 효과가 레이저 공진기를 구성하는 반사경에서 발생할 수 있는

후방 산란(backscattering)에 의해 보상된 결과로 보는 관점을 제안하였으며, 새롭게 정의된 복소수 오차 함수를 이용하여 보상 신호가 발현되는 특성 분석을 수행하고 이를 통해 주파수 잠김 현상의 설명을 시도한 바 있다<sup>[8]</sup>. 해당 관점을 채택할 경우 기존의 사냐 효과 이론에 대한 수정 없이 자연스럽게 주파수 잠김 현상을 사냐 효과 보상신호의 발현 과정으로 치환하여 다룰 수 있으며, 이 경우 디더링 적용에 따른 기술적 효율 발생은 해당 보상신호가 인가된 디더링에 의해 효과적으로 소멸하여 그림 1의 오른쪽 부분과 같이 사냐 효과 보상 과정이 깨어짐으로써 광 경로 차이를 감지할 수 있는 것으로 이해할 수 있다.

랜덤(random) 디더링은 디더링 진폭을 불규칙적으로 변화시켜 주파수 잠김 특성을 효과적으로 개선하기 위한 방법으로, 넓은 회전 각속도 입력 범위에서 진동 및 온도 변화와 같은 환경적 요인의 변화와 무관하게 안정적인 링레이저 자이로 성능을 얻기 위해서는 랜덤 디더링 적용이 필수적이다<sup>[4-7]</sup>. 그림 1의 개념적 관점을 견지할 경우 랜덤 디더링의 적용을 통해 사냐 효과 보상 과정이 보다 효율적으로 깨어지는 것으로 이해할 수 있으며, 이는 곧 주파수 잠김 현상이 깨어짐으로써 사냐 효과를 감지할 수 있는 매커니즘에 불규칙 특성이 기여하는 비선형적 동역학이 자리잡고 있음을 시사한다.

본 논문에서는 랜덤 디더링을 이용한 링레이저 자이로 주파수 잠김 깨짐 특성을 수치적 실험을 통해 분석한 결과로 나타내었다. 디더링 진폭에 잡음이 없는 경우에 대한 동적 주파수 잠김 특성을 기준으로 디더링 진폭 잡음 크기 변화에 따른 링레이저 자이로 평균 출력 변화 특성을 관찰하고, 이를 통해 디더링 진폭에 관한 불규칙 특성이 어떠한 형태로 주파수 잠김 깨짐에 관여되는지 살펴보고자 한다.

본 논문의 이후 내용은 다음과 같이 구성되어 있다. 제2장에서는 정현파(sinusoidal) 디더링 항을 포함한 주파수 잠김 방정식을 기반으로 동적 주파수 잠김 특성이 나타나는 이론적 배경을 소개한다. 제3장에서는 관련된 수치적 실험을 위한 연구방법의 제시 및 이를 이용한 랜덤 디더링 진폭 잡음 크기의 변화에 따른 링레이저 자이로의 주파수 잠김 영역 변화 특성을 분석한 결과를 나타낸다. 제4장에서는 평균 디더링 진폭에 상응하는 동적 주파수 잠김 크기 및 회전 각속도의 입력에 대응하여 사냐 효과에 의해 발생하는 주파수 사이의 상대적인 차이를 기준으로 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 진폭 잡음 크기를 분석한 결과를 나타내고 해당 결과가 가지는 의미에 대해 고찰한 뒤, 제5장에서 결론을 맺는다.

## II. 이론적 배경

링레이저 자이로의 주파수 잠김을 설명하는 이론적 수식은 현재 잘 정립되어 있으며, 오랜 기간의 링레이저 자이로 연구

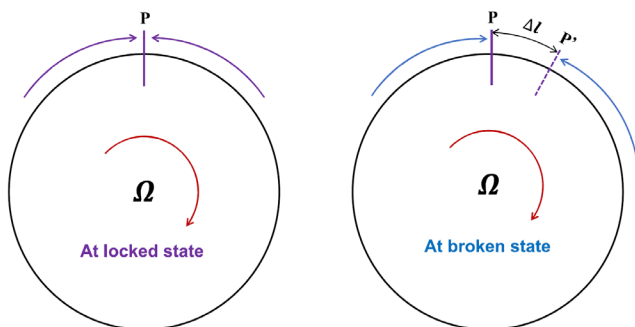


Fig. 1. Conceptual illustrations for the locked and broken state in a ring laser gyroscope based on the Sagnac effect.

분야에서 검증된 것으로 받아들여지고 있다. [6]에서는 관련 내용을 종합하여 정리한 결과를 나타내고 있는데 본 장에서는 해당 참고문헌에서 사용된 동일한 수식적 표현방법을 통해 논의를 진행하고자 한다. 정현파 형태의 디더링이 인가된 경우 링레이저 자이로 주파수 잠김 방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\psi} = a + b\sin\psi + a\cos(\omega_D t) \quad (1)$$

여기서,  $\psi$ 는 링레이저 자이로의 출력 위상 차이,  $a$ 는 사냥 효과에 의한 광 경로 차이로 인해 레이저 공진기 내부에서 서로 반대 방향으로 진행하는 두 빛 사이에 발생하는 각 주파수 차이,  $b$ 는 후방 산란 비율에 비례하여 주파수 잠김에 기여하는 각 주파수 계수,  $\alpha$ 는 디더링 진폭, 그리고  $\omega_D$ 는 각 디더링 주파수를 각각 의미한다. 참고로 식 (1)에서 디더링에 해당하는 항이 없을 경우,  $b$ 보다 작은  $a$ 에 대해 시간의 흐름에 따라  $\psi$ 가 증가하지 않는 주파수 잠김 상태에 있게 되는 반면,  $b$ 보다 큰  $a$ 에 대해서는  $\Gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$  값에 상응하여 시간의 흐름에 따라  $\psi$ 가 증가하게 된다. 식 (1)과 같이 디더링 항을 포함하는 경우,  $\psi$ 는 식 (2)의 형태를 취하는 것으로 놓고 이를 다시 식 (1)에 대입하여 풀게 되면 식 (3)과 같이  $\delta$ 에 관한 미분 방정식을 푸는 문제로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\dot{\psi}(t) = at + \left(\frac{\alpha}{\omega_D}\right) \sin(\omega_D t) + \delta(t) \quad (2)$$

$$\dot{\delta}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} bJ_m(\alpha/\omega_D) \sin[(a + m\omega_D)t + \delta(t)] \quad (3)$$

여기서,  $J_m$ 은 정수  $m$ 을 차수로 가지는 제1종 베셀(Bessel) 함수이다. 따라서,  $\delta$ 는 식 (1)의  $\psi$ 를 푸는 과정에서  $b\sin\psi$  항의 존재로 인하여 나타나는 위상오차로 해석할 수 있다. 식 (3)의 우변에 나타나 있는 무한급수는  $a$ 가 디더링 주파수의 정수배 근처에 있을 때 특별한 의미를 가진다.  $a$ 를 식 (5)의 조건 하에 식 (4)와 같이 놓고 식 (3)에 대입하게 되면,

$$a = r\omega_D + \tilde{a} \quad (4)$$

$$|\tilde{a}| \ll \omega_D \quad (5)$$

$m = -r$ 일 때  $(a + m\omega_D) = \tilde{a}$ 가 되어 해당 부분은 시간의 흐름에 따라 천천히 변화하는 반면,  $m \neq -r$ 에 해당하는 나머지 모든 부분들은 최소한  $\omega_D$  이상의 높은 각 주파수로 시간의 흐름에 따라 빠르게 변화하게 되어 수차례 이상의 디더링 주기 동안 평균을 취할 경우 사라지게 되고 결국  $m = -r$ 일 때의 항만 살아남게 된다. 즉, 새로운 변수  $\varphi = \tilde{a}t + \delta(t)$ 를 도입하게 되면 식 (3)은 식 (6)과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\dot{\varphi} = \tilde{a} + bJ_{-r}\left(\frac{\alpha}{\omega_D}\right) \sin(\varphi) \quad (6)$$

식 (2)와 식 (6)을 비교해 보면, 디더링 관련 항이 없을 때의  $b$ 는 디더링 관련 항의 추가를 통해 식 (7)과 같이 변환되는 것으로 이해할 수 있다.

$$b \rightarrow bJ_m(\alpha/\omega_D) \quad (7)$$

즉,  $b$ 가  $J_m(\alpha/\omega_D)$ 배만큼 줄어드는 대신에  $a$ 가  $\omega_D$ 의 정수( $m$ )배에 해당하는 지점들마다  $bJ_m(\alpha/\omega_D)$ 에 상응하는 불감응 영역들이 발생하게 된다. 이를 가리켜 통상적으로 동적 주파수 잠김(dynamic frequency lock-in)이라고 부르는데,  $\alpha/\omega_D$ 에 해당하는 값이 클수록, 즉,  $\alpha$ 가 크고  $\omega_D$ 가 작을수록 동적 주파수 잠김의 크기가 줄어들게 됨을 알 수 있다.

그림 2에 식 (7)의 결과를 이용하여 디더링 진폭,  $f_a = \alpha/(2\pi)$  변화에 따른 0차 및 1차 동적 주파수 잠김,  $|f_{bm}| = |bJ_m(\frac{\alpha}{\omega_D})|/(2\pi)$  변화 결과를 나타내었다.

그림 2에 사용된  $f_b = b/(2\pi)$ 는 172.38 Hz이며,  $f_D = \omega_D/(2\pi)$ 는 800 Hz이다. 그림 2로부터 몇 가지 주목할만한 점들을 확인할 수 있는데 이를 정리하면 다음과 같다. 첫번째로는,  $\alpha/\omega_D$ 가 175 수준의 큰 값을 가지더라도 수 Hz 이상의 동적 주파수 잠김 크기를 갖는 것을 충분히 예상할 수 있다. 예를 들어  $f_a$ 가 137.91 kHz일 때 0차 동적 주파수 잠김 크기는 약 3.87 Hz에 해당하며, 1차 동적 주파수 잠김 크기는 약 9.72 Hz에 해당한다[그림 2의 파란색 원형 및 주황색 별 모양 표시(marker) 부분 참조]. 물론 애초에 디더링이 인가되지 않았을 때의 주파수 잠김 크기,  $f_b$ 가 172.38 Hz였다는 부분을 고려하면 이 정도만으로도 약 15-45배 수준으로 극적인 개선이 이루어진 것으로도 볼 수 있다. 적용 시스템에 따라 이 정도의 주파수 잠김 크

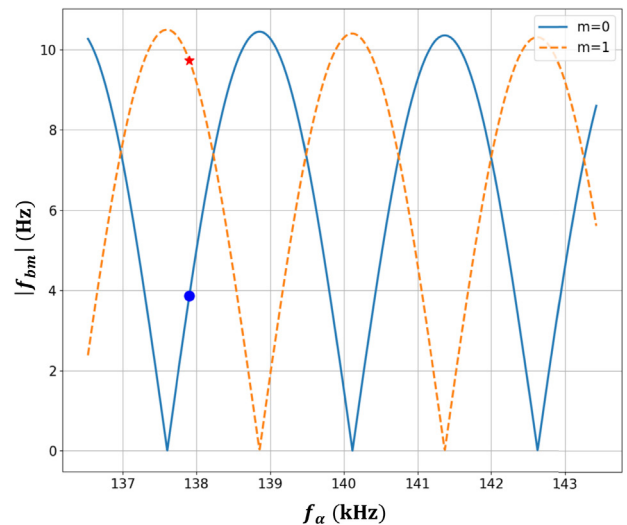


Fig. 2. Zeroth-order and first-order dynamic lock-in.

기가 큰 영향을 끼치지 않는 경우도 있을 수 있지만, 관성항법 등 정밀한 성능을 요구하는 시스템에서는 분명한 제약사항으로 작용할 수 있다.

두번째로는,  $f_\alpha$ 를 어떤 값으로 설정하는지에 따라 다른 동적 주파수 잠김 크기를 얻을 수 있으며, 심지어 0의 동적 주파수 잠김 크기를 얻을 수 있다는 점을 들 수 있다. 예를 들어 그림 2에서  $f_\alpha$ 가 각각 137.60 kHz, 140.12 kHz, 142.63 kHz의 근처에서 0차 동적 주파수 잠김의 크기가 0이 됨을 알 수 있다.

하지만 이러한 선택적 설정이 분명히 관련 특성 개선에 기여할 수 있음에도 불구하고, 다음과 같은 제한적인 측면이 있는 관계로 추가적인 검토가 요구된다. 먼저,  $J_m$ 이 가지는 근원적 특징으로 인하여 홀수차 주파수 잠김 크기를 0으로 만드는 지점들에서 짝수차 주파수 잠김 크기가 최대가 되는 문제가 존재한다. 따라서  $f_\alpha$ 를 특정값으로 고정하는 방식만으로는 특정 영역에 국한하지 않고 넓은 입력 범위에서 충분히 낮은 동적 주파수 잠김 크기를 얻기가 어렵다. 또한 넓은 입력 범위가 아닌 특정 영역(예를 들어 0차 동적 주파수 잠김 영역)에 국한된 개선 효과만을 고려하더라도, 특정값의  $f_\alpha$ 을 외부 환경 변화에 관계없이 안정적으로 유지하는 것은 또 다른 영역의 문제에 해당한다. 예를 들어 상온에서 선택된  $f_\alpha$  대비 낮은 온도 범위 내에서 일치하는 기계적 방식의 디더링 진폭을 구현하는 것과 관련된 기술적 제약사항들은 차치하더라도, 온도 변화에 따른 디더링 관련 기계적 특성 변화 문제와 관련된 기존의 연구결과<sup>[9]</sup>를 참조 시 넓은 온도 범위에서 안정적인 개선 효과를 기대하기 위해서는 많은 비용과 부가적인 제약사항을 고려해야 할 가능성이 높다<sup>[10]</sup>.

이러한 이유들로 인하여 식 (1)에 표현된 정현파 디더링만으로는 넓은 회전 각속도 입력 범위에서 외부 환경 변화에 관계없이 충분히 낮은 동적 주파수 잠김 크기를 얻기 쉽지 않다. 이러한 문제를 개선하기 위해서는 고정된 진폭을 가지는 디더링 대신 새로운 형태의 방법이 필요한데, 서론에서 언급한 바와 같이 디더링 진폭을 불규칙하게 변화시키는 랜덤 디더링 기법을 적용할 경우 이와 같은 문제점들이 자연스럽게 해소가 된다.

이를 이해하기 위해 다음의 내용을 고려해 보자.  $\alpha/\omega_D$ 가 큰 값을 가질 때  $J_m$ 는 식 (8)과 같이 근사화하여 표현 가능하다.

$$J_m\left(\frac{\alpha}{\omega_D}\right) \approx \left(\frac{2\omega_D}{\pi\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha}{\omega_D} - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (8)$$

$\alpha$ 값을 좁은 범위 내에서 불규칙하게 변화시키게 되면 식 (8) 우변의 제곱근에 해당하는 값의 변화에는 상대적으로 큰 영향을 끼치지 못하는 반면, 코사인(cosine) 함수의 선명도는 해당 불규칙 변화에 의해 효과적으로 사라지게 된다<sup>[6,11]</sup>. 예를 들어  $\alpha/\omega_D$ 가 대략 175 수준의 값을 가질 때,  $\alpha$ 의 4% 수준 이내

의 불규칙 변화는 최대  $2\pi$  rad 이상의 위상 변화를 가지게 되어 식 (8)의 코사인 함수 선명도를 효과적으로 사라지게 할 수 있으며 이때  $J_m(\alpha/\omega_D)$ 는 약 0.06 이하의 값을 가지게 되는 랜덤 변수로 취급할 수 있다. 이러한 변화 조건은 링레이저 자이로가 특정 상태에 머무르지 않을 기회를 확률적으로 제공받게 함으로써 차수에 관계 없이 모든 동적 주파수 잠김 영역에서 효과적으로 낮은 주파수 잠김 크기를 가질 수 있게 된다. 아울러, 해당 특성은 자연스럽게 외부 환경의 변화에 기인하여 발생 가능한  $\alpha$  크기 변화에도 둔감해지는 부수적인 효과가 발생하게 된다. 이는  $\alpha$ 값을 의도적으로 불규칙하게 변화시키는 랜덤 디더링 관점에서 볼 때,  $\alpha$ 값 변화가 불규칙 변화 범위 내에 있을 경우 별다른 의미를 가지지 못하게 되기 때문이다.

### III. 연구방법

랜덤 디더링 적용에 따른  $\psi$  변화 특성을 관찰하기 위해서는 식 (1)에서  $\alpha$ 를 상수가 아닌 랜덤 변수로 취급해야 하는데, 이러한 조건 하에서  $\psi$ 를 해석적으로 구하는 것은 쉽지 않은 일이며 이러한 이유로 기존의 연구에서는 수치적 실험을 통해  $\psi$ 를 구하는 방법을 이용하였다<sup>[7,12]</sup>. 본 연구 역시 동일한 방법을 이용하여 관련 특성을 관찰하고 분석하는 것을 시도하였으며, 본 장에서는 수치적 실험 방법에 관하여 간략히 설명한 뒤 해당 방법을 이용하여 랜덤 디더링 진폭 잠음 크기 변화에 따른 동적 주파수 잠김 특성에 대해 분석한 결과를 나타내고, 해당 결과가 2장에서 논의한 내용과 어떻게 연계되어 이해할 수 있는지 살펴보고자 한다.

먼저, 랜덤 디더링 구현을 위한  $\alpha$ 의 불규칙 변화는 식 (9)와 같이 디더링 한 주기마다 가우시안(Gaussian) 랜덤 변수를 따르는 것으로 표현할 수 있다.

$$\alpha(t = nT_D) \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2) \quad (9)$$

여기서,  $n$ 은 양의 정수,  $T_D = 1/f_D$ 는 디더링 주기,  $N$ 은 가우시안 랜덤 변수,  $\mu_\alpha$ 는 가우시안 랜덤 변수의 평균, 그리고  $\sigma_\alpha$ 는 가우시안 랜덤 변수의 표준편차에 각각 해당한다. 이러한 조건 하에서 식 (1)로부터 시간의 흐름에 따른  $\psi$ 를 수치해석적 방법을 이용하여 구할 수 있는데 본 연구에서는 Runge-Kutta 방법을 이용하였다. 아울러, 수치해석적 방법으로 구한  $\psi$ 로부터 링레이저 자이로의 평균 출력 맥놀이 주파수,  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$ 는 식 (10)을 이용하여 구할 수 있다<sup>[8,13]</sup>.

$$\langle f_{out} \rangle_{\Delta t} = (\psi(t + \Delta t) - \psi(t)) / (2\pi\Delta t) \quad (10)$$

여기서,  $\Delta t$ 는 수치적 실험을 통해  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$ 를 얻기 위한 관찰 시간이다.



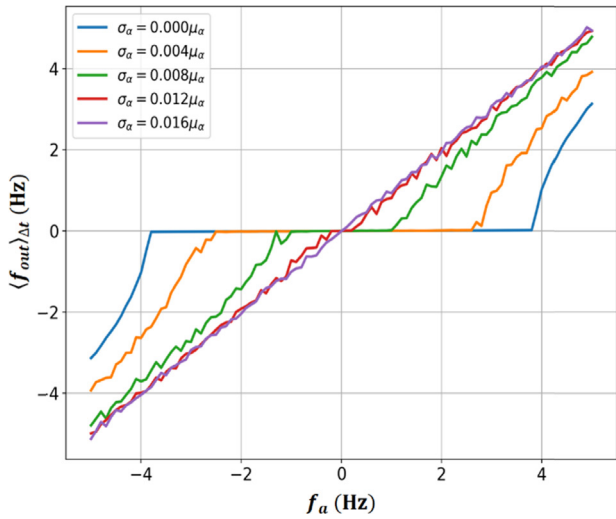


Fig. 3. Zeroth-order dynamic lock-in ranges ( $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_\alpha/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 10$  s).

그림 3 및 4에 식 (1), 식 (9) 및 식 (10)을 이용하여 사냥 효과에 의해 발생하는 입력 주파수,  $f_a = a/(2\pi)$ 에 따른  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  값을 10초 동안의 관찰 시간에 대해 수행한 수치적 실험을 통해 구한 값들을 이용하여 나타내었다. 아울러, 해당 수치적 실험에 사용된  $f_a$  및  $f_D$ 는 제2장에서 논의한 것과 동일한 조건( $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz)을 이용하였다.

그림 3은 0차 동적 주파수 잠김 특성 결과를 보여주고 있다. 그림 3으로부터,  $\alpha$ 에 불규칙 변화가 없는  $\sigma_\alpha = 0$  조건에서는 정확히 그림 2의 파란색 원형 표시와 동일한 동적 주파수 잠김 크기를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 또한 예상된 바와 같이  $\sigma_\alpha$  값이 증가함에 따라 동적 주파수 잠김 크기가 점차 줄어들고 있으며,  $\sigma_\alpha$ 이  $\mu_\alpha$ 의 1.6% 수준에 해당하는 값을 가질 때 0차 동적 주파수 잠김에 의한 링레이저 자이로 불감응 영역이 사라지는 것을 확인할 수 있다.

반면, 그림 4에는 1차 동적 주파수 잠김 특성 결과를 나타내었다. 그림 3과 동일한 맥락에서,  $\alpha$ 에 불규칙 변화가 없는  $\sigma_\alpha = 0$  조건에서는 정확히 그림 2의 주황색 별모양 표시와 동일한 동적 주파수 잠김 크기를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 또한 역시  $\sigma_\alpha$  값이 증가함에 따라 동적 주파수 잠김 크기가 점차 줄어들고 있으며,  $\sigma_\alpha$ 가  $\mu_\alpha$ 의 1.6% 수준에 해당하는 값을 가질 때 1차 동적 주파수 잠김에 의한 링레이저 자이로 불감응 영역이 사라지는 것을 확인할 수 있다.

그림 3 및 4로부터 얻을 수 있는 의미있는 사실들을 정리하면 다음과 같다. 첫번째로,  $\sigma_\alpha = 0$  조건 하에서 수치적 실험을 통해 얻은 결과는 이론적 수식에 의한 결과와 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 수치해석에 기반한 미분방정식 해를 구하는 방법론적 특징을 고려 시, 해당 방법에 의한 계산 결과 타당성은  $\sigma_\alpha = 0$  여부와 관계없어야 하며, 수치적 실험 방법에 의해  $\sigma_\alpha \neq 0$  조건 하에서도 동일한 정밀도를 가지고  $\psi$ 에 관

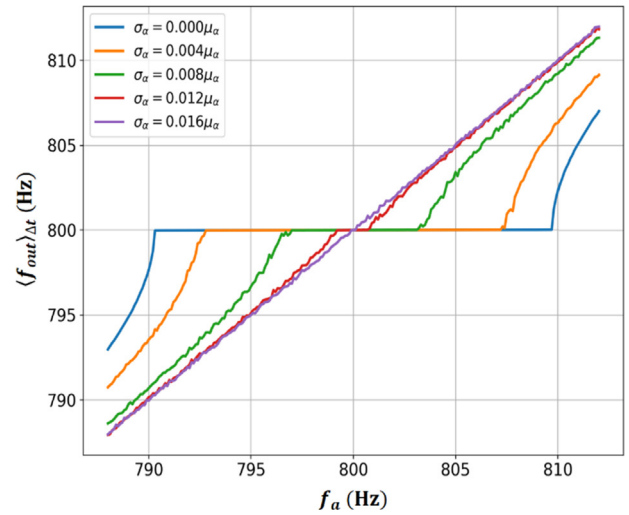


Fig. 4. First-order dynamic lock-in ranges ( $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_\alpha/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 10$  s).

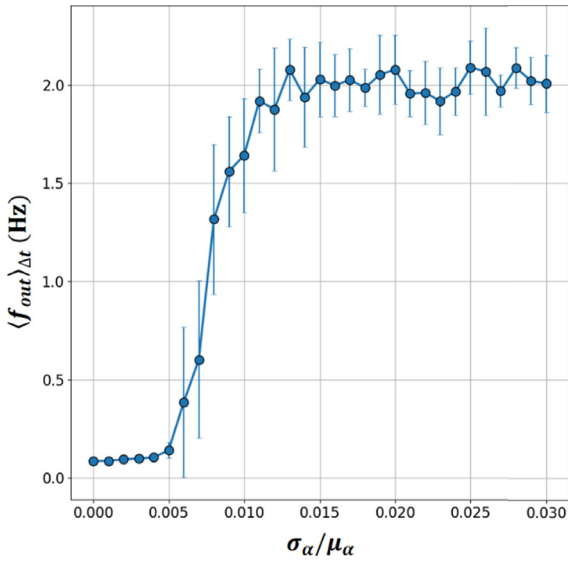
한 계산 수행을 기대할 수 있다. 두번째로는 그림 3 및 그림 4 모두  $\sigma_\alpha$ 가  $\mu_\alpha$ 의 1.6% 수준에 해당하는 값을 가질 때 동적 주파수 잠김에 의한 링레이저 자이로 불감응 영역이 사라지는 부분을 들 수 있다. 앞서 2장에서  $\sigma_\alpha$ 가  $\mu_\alpha$ 의 4% 수준에서  $2\pi$  rad 이상의 위상 변화를 가지게 되어 식 (8)의 코사인 함수 선 명도를 효과적으로 사라지게 할 수 있다고 언급한 부분을 고려해 볼 때 이는  $\pi$  rad 이하의 불규칙 위상 변화만으로도 효과적으로 0에 가까운 동적 주파수 잠김 크기를 얻을 수 있음을 의미한다.

0에 가까운 동적 주파수 잠김 크기를 얻을 수 있는 최소의  $\sigma_\alpha$  조건 및 해당 조건 근처에서의  $\sigma_\alpha$  변화에 따른  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$ 의 전형적 변화 특성, 그리고 해당 조건에 대한 물리적 특성을 고찰하는 것은 불규칙 특성이 동적 주파수 잠김 특성 개선에 기여하는 비선형적 동역학 관련 연구 분야의 진일보에 기여할 수 있을 것이다. 제4장에서 이와 관련된 연구결과를 나타내고자 한다.

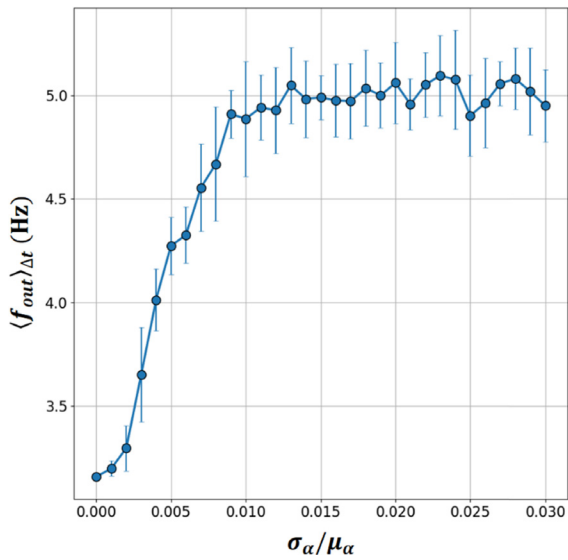
#### IV. 연구결과 및 고찰

제3장의 그림 2 및 그림 3으로부터  $\sigma_\alpha$ 가  $\mu_\alpha$ 의 0.4%-1.6% 범위 사이에서  $\sigma_\alpha$ 에 따라 급격하게 변화하는 동적 주파수 잠김 특성을 확인할 수 있었다. 본 장에서는 동일한  $f_a$ 에 대해  $\sigma_\alpha$  변화를 촘촘하고 넓게 가져가서 확인되는  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  변화 특성을 관찰하고 그 결과를 분석한 결과를 나타내고자 한다.

$\sigma_\alpha$ 가  $\mu_\alpha$ 의 0%-3% 범위 사이에서 0.1% 간격을 가지는 변화에 대해 나타나는  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  변화 특성을 수치적 실험을 통해 관찰하고 그 결과를 그림 5 내지 8에 나타내었다. 그림 5 및 6은 0차 동적 주파수 잠김 영역 근처에서의 특성을 확인하기 위해  $f_a$ 가 각각 2 Hz 및 5 Hz로 주어졌을 때의 관찰된 결과에 해당

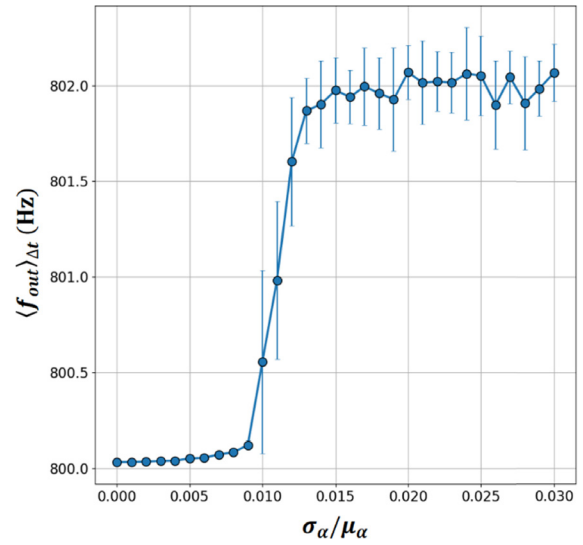


**Fig. 5.** Random dithering dependence on  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  for  $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_{\alpha}/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 1$  s and  $f_a = 2$  Hz. The error bars in the figure exhibit standard deviations for 10 times repeated observations.

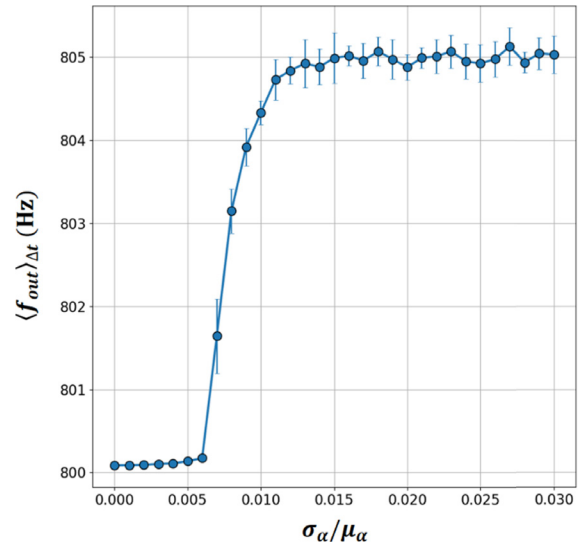


**Fig. 6.** Random dithering dependence on  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  for  $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_{\alpha}/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 1$  s and  $f_a = 5$  Hz. The error bars in the figure exhibit standard deviations for 10 times repeated observations.

하며, 그림 7 및 8은 1차 동적 주파수 잠김 영역 근처에서의 특성을 확인하기 위해  $f_a$ 가 각각 802 Hz 및 805 Hz로 주어졌을 때의 관찰된 결과에 해당한다. 그림 5 내지 8의 결과를 얻기 위한 관찰시간,  $\Delta t$ 는 1초로 설정하였고, 랜덤 디터링 인가 조건에서 반복 특성을 확인하기 위해 동일 조건 하에서 10번 반복하여 관찰하였다. 그림 5 내지 8에 나타난 오차 막대(error bar)들은 10번 반복하여 관찰된 결과의 표준편차에 해당



**Fig. 7.** Random dithering dependence on  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  for  $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_{\alpha}/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 1$  s and  $f_a = 802$  Hz. The error bars in the figure exhibit standard deviations for 10 times repeated observations.



**Fig. 8.** Random dithering dependence on  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  for  $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz,  $\mu_{\alpha}/(2\pi) = 137.91$  kHz,  $\Delta t = 1$  s and  $f_a = 805$  Hz. The error bars in the figure exhibit standard deviations for 10 times repeated observations.

하며, 원형 표시로 나타낸 부분들은 10번 반복하여 관찰된 결과의 평균을 의미한다. 아울러, 해당 수치적 실험에 사용된  $f_b$  및  $f_D$ 는 제2장에서 논의한 것과 동일한 조건( $f_b = 172.38$  Hz,  $f_D = 800$  Hz)을 이용하였다.

그림 5 내지 8의 결과로부터 도출 가능한 의미있는 특징들을 정리하면 다음과 같다. 첫번째로,  $\sigma_{\alpha}$  변화에 따른  $\langle f_{out} \rangle_{\Delta t}$  변화 양상은 모두 전형적인 상전이(phase transition) 특성을 보이고 있다는 점을 들 수 있다. 낮은  $\sigma_{\alpha}$  값에 대해서는 주파

수 잠김 상태에 있다가  $\sigma_\alpha$ 가 특정값을 넘어서는 순간 가파르게  $f_a$ 에 해당하는 값으로 수렴한 뒤부터  $\sigma_\alpha$  값 증가에 관계없이 동일 수준의 출력값을 유지하는 형태를 취하고 있다. 이는  $\sigma_\alpha$  증가에 따라 링레이저 자이로 오차의 크기가 줄어들다가 특정값의  $\sigma_\alpha$ 를 넘어서는 순간부터는 오차가 더 이상 줄어들지 않고 포화되는 기존의 연구 결과와 기본적으로 동일한 결과라 할 수 있다<sup>[12]</sup>.

아울러, 그림 5 내지 8의 결과가 전형적인 상전이 현상에 해당하는 것을 의미하는 추가적인 특징이 있는데, 그것은 바로 오차 막대의 크기가 변화하는 부분이다. 주파수 잠김 상태에서는 오차 막대의 길이가 거의 보이지 않다가 과도 상태에서 급격히 늘어난 뒤, 수렴 영역 이후에서는 일정 수준을 유지하고 있는데, 이는 상전이가 시작되는 조건을 통해 그림 1의 잠김 상태(locked state)에서 깨짐 상태(broken state)로의 전환이 일어나기 시작하고, 상전이가 완료되는 조건에서 특정 주파수 성분으로 발현된 사냥 효과 보상신호가 랜덤 디터링에 의해 효과적으로 붕괴되어 0에 가까운 동적 주파수 잠김 크기를 얻는 매커니즘으로 이해 가능하다. 그림 5 내지 8의 결과에 대해 상전이가 시작되는 조건 및 완료되는 조건을 알기 쉽게 파악할 수 있도록 수치적 실험을 위해 사용된 적용 파라미터들과 함께 표 1에 나타내었다.

두번째로는, 표 1의 상전이 시작 조건에 대응하여 오차 막대의 길이가 보이기 시작하는 지점에 해당하는  $\sigma_\alpha$ 는 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소 디터링 진폭 잡음 크기에 해당하는 것으로 볼 수 있으며, 이는 주어진  $\mu_\alpha$ 에 대해 동적 주파수 잠김 차수 및  $f_a$ 에 따라 달라진다는 점을 들 수 있다. 예를 들어 0차 동적 주파수 잠김 영역에 2 Hz의  $f_a$ 가 주어진 그림 5의 경우, 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값은  $\mu_\alpha$ 의 0.6%에 해당하는 반면, 5 Hz의  $f_a$ 가 주어진 그림 6의 경우 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값은  $\mu_\alpha$ 의 0.1%에 불과하다. 또한 1차 동적 주파수 잠김 영역에 802 Hz의  $f_a$ 가 주어진 그림 7의 경우 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값은  $\mu_\alpha$ 의 1.0%에 해당하는 반면, 805 Hz의  $f_a$ 가 주어진 그림 8의 경우 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값은  $\mu_\alpha$ 의 0.7%에 해당한다. 이러한 사실은 비록 그림 5 내지 8의 결과가 디터링 진폭을 불규칙하게 변화하는 방식을 채택함으로써 효과적으로 식 (8)의 코사인 함수 선명도를 사라지도록 의도할 수 있지만, 이는  $\sigma_\alpha$ 가 충분히 커서 깨짐 상태로의 전환이 완벽히 이루

어진 상황에서 가능한 부분이며, 과도 상태에 해당하는  $\sigma_\alpha$ 에 대해서는 여전히 랜덤 변수가 포함되어 있지 않은 그림 2의  $f_a$  변화에 따른 동적 주파수 잠김 특성을 부분적으로 따르기 때문일 것으로 판단된다. 즉, 그림 7에서 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값이 다른 그림에서보다 상대적으로 가장 큰 이유는 해당  $\mu_\alpha$  수준에서 기대할 수 있는 1차 동적 주파수 잠김이  $f_a = \tilde{a}/(2\pi)$ 에 비해 상대적으로 가장 큰 값을 가졌기 때문일 것으로 해석할 수 있는 반면, 그림 6에서 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$  값이 다른 그림에서보다 상대적으로 가장 작은 이유는 해당  $\mu_\alpha$  수준에서 기대할 수 있는 0차 동적 주파수 잠김이  $f_a$ 에 비해 상대적으로 가장 작은 값을 가졌기 때문일 것으로 해석할 수 있다. 다시 말해 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$ 는  $\mu_\alpha$ 를 고려한 동적 주파수 잠김을 기준으로  $f_a$ 의 상대적 크기 수준과 밀접한 관련이 있음을 확인할 수 있다.

마지막으로는 실제 개발 과정에서 충분히 큰  $\sigma_\alpha$  구현에 제약이 따르는 경우, 상대적으로 낮은  $\sigma_\alpha$ 를 허용하는 대신 동적 주파수 잠김 측면에서 가장 유리한  $\mu_\alpha$ 를 선택하여 최적화를 시도할 수 있는 부분을 들 수 있다. 기계적 공진을 통해 디터링 구현에 관계되는 품질 인자(quality factor)가 클 경우 디터링을 구동하는 전기 신호에 충분히 큰 크기의 잡음을 인가하더라도 실제로 해당 잡음에 의해 불규칙하게 변화하는 수준은 구동신호와 다른 통계적 특성을 따를 수 있으며<sup>[13]</sup>, 이 경우 낮은  $\sigma_\alpha$  값의 적용이 불가피한 상황이 발생할 수 있다. 앞서 언급한 바와 같이 넓은 온도 범위에서 안정적으로 디터링에 의한 개선 효과를 기대하기 위해서는 가급적 충분히 큰  $\sigma_\alpha$  값을 가지는 랜덤 디터링을 인가하여 효과적으로 식 (8)의 코사인 함수 선명도를 사라지도록 하는 것이 매우 중요하나, 부득이하게 낮은  $\sigma_\alpha$ 를 고려해야 할 상황이 발생할 경우 온도 변화에 따라  $\mu_\alpha$  값이 크게 바뀌지 않는 조건 하에서 특정  $\mu_\alpha$  값의 선택을 통해 주파수 잠김에 의한 문제 해결을 도모하는 것을 고려할 수 있다. 이 때 앞서 살펴본  $\mu_\alpha$ 를 고려한 동적 주파수 잠김을 기준으로  $f_a$ 의 상대적 크기 수준에 따른 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소의  $\sigma_\alpha$ 를 분석하는 것이 요구될 수 있으며, 이는 시스템적 관점에서 관련 파라미터의 상호 절충 및 이를 통한 기술적 효용 발생을 위해 주파수 잠김 깨짐과 관련된 비선형적 특성이 중요한 역할을 담당할 수 있음을 의미한다.

**Table 1.** Phase transition start conditions and completion conditions for each applied parameter used in the numerical experiments

Fixed Parameters	$f_a$ (Hz)	Phase Transition Start Conditions, $\sigma_\alpha/\mu_\alpha$ (%)	Phase Transition Completion Conditions, $\sigma_\alpha/\mu_\alpha$ (%)	Remarks
$f_b = 172.38$ Hz, $f_D = 800$ Hz, $\mu_\alpha/(2\pi) = 137.91$ kHz, $\Delta t = 1$ s	2	0.6	1.2	Fig. 5
	5	0.1	1.0	Fig. 6
	802	1.0	1.6	Fig. 7
	805	0.7	1.4	Fig. 8

## V. 결 론

랜덤 디더링을 이용한 링레이저 자이로 주파수 잠김 깨짐 특성을 수치적 실험을 통해 분석한 결과를 나타내었다. 디더링 진폭에 잡음이 없는 경우에 대한 동적 주파수 잠김 특성을 기준으로 디더링 진폭 잡음 크기 변화에 따른 링레이저 자이로 평균 출력 변화 특성을 관찰하고, 이를 통해 디더링 진폭에 관한 불규칙 특성이 어떠한 형태로 주파수 잠김 깨짐에 관여되는지 분석할 수 있었다. 디더링 진폭 잡음 크기 증가에 따라 잠김 상태에서 깨짐 상태로 전환하는 전형적인 상전이 특성을 확인할 수 있었으며, 주파수 잠김 깨짐을 유발하는 최소 디더링 진폭 잡음 크기를 분석할 수 있었다. 해당 결과는 평균 디더링 진폭에 상응하는 동적 주파수 잠김 크기 및 회전 각속도 입력에 대응하여 사냥 효과에 의해 발생하는 주파수 사이의 상대적인 차이와 밀접한 관련이 있음을 확인하였다. 본 연구의 결과는 기술적 응용 관점에서의 링레이저 자이로 성능 개선 측면뿐만 아니라, 불규칙 특성이 중요한 역할을 담당하는 비선형적 동역학 관련 연구 분야의 발전에도 기여할 수 있을 것으로 기대된다.

### 재정지원

이 논문은 2023년 정부의 재원으로 수행된 연구 결과임.

### 이해상충

저자는 본 논문과 관련된 어떠한 이해충돌 사항도 없었음을 밝힌다.

### 데이터 가용성

본 연구의 결과 분석 및 생성된 데이터는 모두 본 논문 내 명시되어 있으며 공공의 이용이 가능하다. 데이터에 접근하거나 사용하고자 하는 이는 저자에게 타당한 이유를 밝히고 허가를 득해 사용 가능하다.

## References

1. V. M. N. Passaro, A. Cuccovillo, L. Vaiani, M. D. Carlo, and C. E. Campanella, "Gyroscope technology and applications: A review in the industrial perspective," *Sensors* **17**, 2284 (2017).
2. E. J. Post, "Sagnac effect," *Rev. Mod. Phys.* **39**, 475-493 (1967).
3. F. Jacobs and R. Zamoni, "Laser ring gyro of arbitrary shape and rotation axis," *Am. J. Phys.* **50**, 659-660 (1982).
4. C. V. Heer, "History of the laser gyro," *Proc. SPIE* **487**, 2-12 (1984).
5. J. E. Killpatrick, "Laser gyro dither random noise," *Proc. SPIE* **487**, 85-93 (1984).
6. W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich, and M. O. Scully, "The ring laser gyro," *Rev. Mod. Phys.* **57**, 61-104 (1985).
7. K.-M. Shim and S.-H. Son, "A study on the dither random noise to minimize the output error of ring laser gyroscope," *Korean J. Opt. Photonics* **14**, 649-656 (2003).
8. W.-S. Choi, K.-M. Shim, K.-H. Chong, J.-E. An, C.-J. Kim, and B.-Y. Park, "Sagnac effect compensations and locked states in a ring laser gyroscope," *Sensors* **23**, 1718 (2023).
9. Y. Tao, S. Li, G. Zhou, and J. Lin, "Mechanical dither control optimization for laser gyro with total reflection prisms," in *Proc. 24<sup>th</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems-ICINS* (St. Petersburg, Russia, May 29-31, 2017).
10. W. S. Choi, J. E. An, and C. J. Kim, "Analysis of dynamic frequency lock-in characteristics for ring laser gyroscope," in *Proc. KSAS Fall Conference* (Jeju Island, Korea, Nov. 16-18, 2022). pp. 91-92.
11. W. Scheich, C.-S. Cha, and J. D. Cresser, "Quantum noise in a dithered ring-laser gyroscope," *Phys. Rev. A.* **29**, 230-238 (1984).
12. K.-M. Shim and C.-J. Kim, "A study on the dither random noise for improving the bias stability of ring laser gyroscope," *J. Inst. Contr. Robot. Syst.* **12**, 1065-1073 (2006).
13. W.-S. Choi and C.-J. Kim, "Investigation on output variations of ring laser gyroscope in the presence of non-ideal sinusoidal dithering," *Proc. SPIE* **12223**, 122230O (2022).