

## Geo/D/1/1 모형에서의 실시간 원격 추정값의 오차 분석

### Analysis of Real-time Error for Geo/D/1/1 Model

Yutae Lee\*

\*Professor, Department of Information and Communications Engineering, Dong-eui University, Busan, 47340 Korea

#### ABSTRACT

In this paper, we study real-time error in the context of monitoring a binary information source through a delay system. To derive the average real-time error, we model the delay system as a discrete time Geo/D/1/1 queuing model. Using a discrete time three-dimensional Markov chain with finite state space, we analyze the queuing model. We also perform some numerical analysis on various system parameters: state transition probabilities of binary information source; transmission times; and transmission frequencies. When the state changes of the information source are positively correlated and negatively correlated, we investigate the relationship between transmission time and transmission frequency.

**Keywords** : Real-time error, Geo/D/1/1, Binary Markov source, Discrete time Markov chain

## I. 서론

최근 통신 기술의 발전으로 원격 협업과 원격지와의 역동적 상호 작용이 가능해졌다. 특히 사물인터넷에서부터 데이터 분석에 이르기까지 실시간 원격 모니터링에 대한 관심이 증가하고 있다[1]. 원격지와의 통신 지연 시간이 길면 원격지로부터 전송되는 정보만으로는 원격지 상태를 실시간으로 파악하기 어려우므로, 이에

관련한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 이와 관련된 연구 중 하나인 실시간 원격 추정의 정확도를 분석하고자 한다. 센서가 상황을 관찰하고 정보를 샘플링하여 원격 추정자로 보내는 상황에서, 원격 추정자는 센서가 전송한 정보를 최소한의 오차로 복구하는 것이 목적일 것이다. 이를 위해 추정의 정확도 분석이 필요하다.

본 논문에서는 원격으로 이진 마르코프 정보원의 상태를 추정할 때의 실시간 오차를 고려한다. 논문[2]는 이진 마르코프 정보원의 상태를 추정한 값에 대한 실시간 오차의 평균과 AoI(Age of Information)의 평균 및 AoII(Age of Incorrect Information)[3]의 평균을 고려하였다. 이를 위해 잘못 추정한 시간을 비용으로 정의한 마르코프 결정 과정을 RVI(Relative Value Iteration) 알고리즘으로 시뮬레이션하였다. 논문[4]는 시스템을 Geo/Geo/1/1으로 모형화 한 후, 상태 공간이 유한한 이산 시간 마르코프 과정을 도입하였다. 또한 상태 변화 확률, 패킷 전송 시간, 패킷 전송 빈도의 변화에 따른 실시간 원격 추정값의 오차의 평균에 대한 수치 분석을 수행하였다. 본 논문에서는 논문[4]에서와 같이 기하 분포로 전송 시간을 가정하는 것이 아니라, 일정한 전송 시간을 갖는 모형을 다룬다. 이를 위해 3차원 이산 시간 확률 과정을 도입하여 분석한다.

## II. 시스템 모형

정보원이 슬롯의 시작점에서 채널이 사용되고 있지 않을 때만 패킷의 생성과 전송을 결정하게 되는 이산 시간 대기 행렬 시스템을 고려한다. 정보원은 패킷의 전송이 끝나지 않아 채널이 사용 중일 때에는 새 패킷을 생성하지 않는다. 채널이 비어 있을 때는 패킷을 생성하여 전송을 시작할 수도 있고, 패킷을 생성하지 않을 수도 있다. 확률  $p_T$ 를 채널이 사용되지 않을 때 패킷을 생성하여 패킷의 전송을 시작할 확률이라 하자. 확률

Received 1 December 2022, Revised 7 December 2022, Accepted 16 December 2022

\* Corresponding Author Yutae Lee(E-mail:ylee@deu.ac.kr, Tel:+82-51-890-1682)

Professor, Department of Information and Communications Engineering, Dong-eui University, Busan, 47340 Korea

Open Access <http://doi.org/10.6109/jkiice.2023.27.1.135>

print ISSN: 2234-4772 online ISSN: 2288-4165

$\bar{p}_T = 1 - p_T$ 는 패킷 전송을 시작하지 않을 확률이다.

전송되는 패킷은 수신 측 모니터에 오류 없이 수신되기 전에 일정한 수의 슬롯 동안 지연을 겪는다. 수신 측 모니터는 도착한 패킷으로부터 패킷이 발생할 당시의 정보원의 상태에 대한 정보를 얻는다. 본 논문에서는 지연 시간이  $D$  슬롯인 경우를 다룬다. 수신 측에서 패킷을 수신하면, 모니터는 정보원으로 즉각적인 ACK를 보낸다. 이 ACK를 통해 정보원은 채널이 비어 있음을 알게 되어 다른 패킷을 보낼 것인지를 결정할 수 있다.

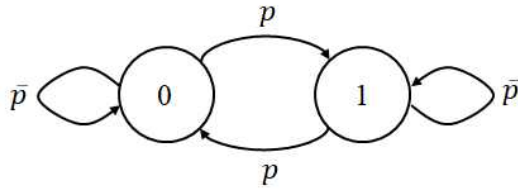


Fig. 1 Symmetric binary Markov source

정보원은 그림 1과 같은 이진 마르코프 모형[5]으로 가정한다. 상태가 바뀔 확률은  $p$ 이고 바뀌지 않을 확률은  $\bar{p} = 1 - p$ 이다. 확률  $p$ 가  $1/2$ 보다 작으면 상태 변경이 positively correlated 되어 있고,  $1/2$ 보다 크면 negatively correlated 되어 있는 것이다. 정보원의 상태 변경은 슬롯 경계에서 이루어진다.

### III. 실시간 오차 분석

본 논문에서는 평균 실시간 오차를 고려한다. 확률 변수  $S_n$ 을 다음과 같이 정의한다:  $n$ 번째 슬롯의 시작점에서 수신 측에서의 추정값이 실제 상태와 같으면 0이고, 수신 측에서의 추정값이 실제 상태와 같지 않으면 1이다. 확률 변수  $T_n$ 은 다음과 같이 정의한다:  $n$ 번째 슬롯의 시작점에서 전송되는 패킷이 없으면  $T_n$ 은  $-1$ 이고, 전송 중인 패킷이 있고 해당 패킷에 포함된 상태 정보가 정보원의 상태와 일치하면 0, 패킷이 전송 중이고 전송 중인 패킷에 포함된 상태 정보가 정보원의 상태와 일치하지 않으면 1이다. 확률 변수  $R_n$ 은  $n$ 번째 슬롯의 시작점에서 전송 중인 패킷의 남아 있는 전송 시간으로 정의한다.  $n$ 번째 슬롯의 시작점에서 전송 중인 패킷이 없는 경우, 확률 변수  $R_n$ 은 0으로 정의한다. 확률 과정

$\{(S_n, T_n, R_n), n = 1, 2, \dots\}$ 는 마르코프 연쇄 과정이 된다[6].

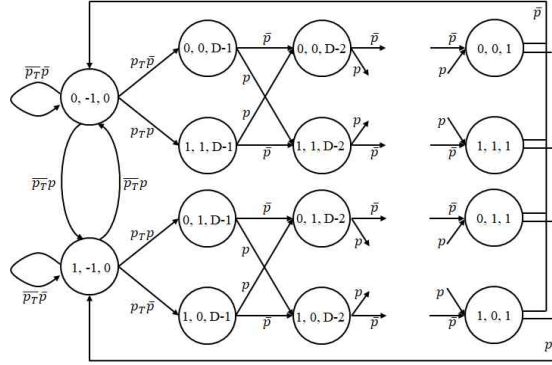


Fig. 2 State transition diagram

그림 2는 확률 과정  $\{(S_n, T_n, R_n), n = 1, 2, \dots\}$ 의 상태 전이도를 나타낸다. 확률  $p_T$ 는 패킷을 전송할 확률이고  $\bar{p}_T = 1 - p_T$ 이며,  $p$ 는 정보원의 상태가 바뀌는 확률이고  $\bar{p} = 1 - p$ 이다. 확률 분포  $\pi = (\pi_{i,j,k})$ 를 마르코프 연쇄  $\{(S_n, T_n, R_n), n = 1, 2, \dots\}$ 의 정상 상태에서의 분포라 하자[7]. 그림 2로부터 1보다 크거나 같고  $D$ 보다 작은 정수  $k$ 에 대하여 정상 상태의 분포에 대한 관계식을 얻는다:

$$\begin{aligned} \pi_{0,0,D-k} &= \pi_{0,-1,0} p_T \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} {}_k C_{2l} (\bar{p})^{k-2l} p^{2l} \\ &= \pi_{0,-1,0} p_T \frac{1 + (1-2p)^k}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\pi_{1,1,D-k} = \pi_{0,-1,0} p_T \frac{1 - (1-2p)^k}{2}, \quad (2)$$

$$\pi_{0,1,D-k} = \pi_{1,-1,0} p_T \frac{1 - (1-2p)^k}{2}, \quad (3)$$

$$\pi_{1,0,D-k} = \pi_{1,-1,0} p_T \frac{1 + (1-2p)^k}{2}. \quad (4)$$

여기서  $\lfloor a \rfloor$ 는  $a$ 보다 작거나 같은 가장 큰 정수를 의미한다. 그림 2의 상태 전이도에서 첫 번째 열과 마지막 열로부터 상태  $(0, -1, 0)$ 으로 전이되는 경우를 고려하면,

$$\pi_{0,-1,0} = \pi_{0,-1,0} \overline{p_T p} + \pi_{1,-1,0} \overline{p_T p} + (\pi_{0,0,1} + \pi_{1,0,1}) \overline{p} + (\pi_{1,1,1} + \pi_{0,1,1}) p \quad (5)$$

이다. 식 (1)-(4)를 이용하여 (5)를 정리하면, 다음 관계식을 얻게 된다:

$$\begin{aligned} \pi_{0,-1,0} & \left[ p + p_T \frac{(1-2p) - (1-2p)^D}{2} \right] \\ & = \pi_{1,-1,0} \left[ p + p_T \frac{(1-2p) + (1-2p)^D}{2} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

그림 2의 상태 전이도에서 각 열의 상태를 하나로 묶어 생각하면, 첫 번째 열에서 두 번째 열로의 전이 확률은  $p_T$ 이고,  $1 < k < D$ 인 정수  $k$ 에 대하여  $k$ 번째 열에서  $k+1$ 번째 열로의 전이 확률과 마지막 열에서 첫 번째 열로의 전이 확률은 1이다. 따라서

$$\pi_{0,-1,0} + \pi_{1,-1,0} = \frac{1}{1 - p_T + D p_T} \quad (7)$$

를 얻을 수 있다. 식 (6)과 (7)로부터 다음을 구할 수 있다:

$$\pi_{0,-1,0} = \frac{1}{2p + (1-2p)p_T} \frac{1}{1 - p_T + D p_T} \times \left[ p + p_T \frac{(1-2p) + (1-2p)^D}{2} \right], \quad (8)$$

$$\pi_{1,-1,0} = \frac{1}{2p + (1-2p)p_T} \frac{1}{1 - p_T + D p_T} \times \left[ p + p_T \frac{(1-2p) - (1-2p)^D}{2} \right] \quad (9)$$

식 (8)과 (9)를 (1)-(4)에 대입하여,  $i=0,1$ ,  $j=0,1$  및  $1 \leq k < D$ 를 만족하는 정수  $i, j, k$ 에 대하여  $\pi_{i,j,D-k}$ 를 얻을 수 있다.

수신 측에서의 추정값이 실제 상태와 같으면  $S_n = 0$ 이고 수신 측에서의 추정값이 실제 상태와 같지 않으면  $S_n = 1$ 이므로, 수신 측에서의 추정값이 실제 상태와 같지 않을 때의 오차를 1이라 하면, 실시간 오차의 평균  $\epsilon$ 는 다음과 같이 구할 수 있다:

$$\begin{aligned} \epsilon & = \pi_{1,-1,0} + \sum_{k=1}^{D-1} (\pi_{0,1,D-k} + \pi_{1,0,D-k}) \\ & = \frac{1}{2p + (1-2p)p_T} \left[ p + p_T \frac{(1-2p) - (1-2p)^D}{2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

#### IV. 수치 해석

본 절에서는 파이썬을 사용하여 식 (10)으로 주어진 실시간 오차에 대한 수치 해석 결과를 제시한다.

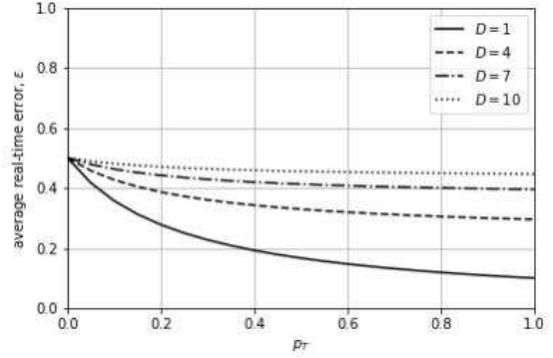


Fig. 3 Real-time error,  $p = 0.1$

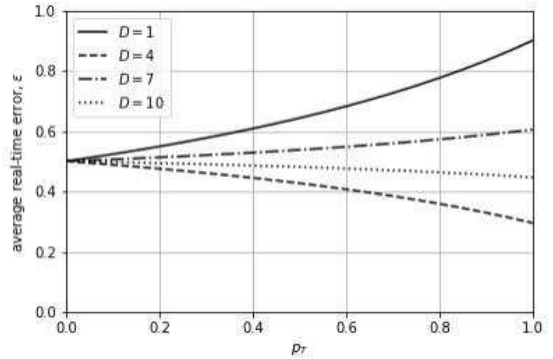


Fig. 4 Real-time error,  $p = 0.9$

그림 3은 정보원의 상태 변경이 positively correlated ( $p < 1/2$ )인 경우 중 하나인  $p=0.1$ 일 때, 확률  $p_T$ 의 변화에 따른 평균 실시간 오차를 전송 시간  $D$ 가 1, 4, 7, 10 슬롯인 경우로 나누어 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이, 전송 빈도가 높을수록 평균 실시간 오차가 줄어드는 것을 알 수 있다. 예를 들어  $D=1$ 인 경우, 실시간 오차의 평균은  $p_T=0.1$ 일 때 0.42에서  $p_T=1$ 일 때 0.1로 줄어든다. 또한 전송 빈도가 같은 경우에는 전송 시간이 짧을수록 평균 실시간 오차가 작은 것을 알 수 있다. 정보원의 상태 변경이 positively correlated 되어 있는 경우라 할지라도 전송 시간이 길어질수록 전송 빈도에 상관없이 평균 실시간 오차가 0.5로 수렴하는 것을 알 수 있다.

그림 4는 정보원의 상태 변경이 negatively correlated ( $p > 1/2$ )인 경우 중 하나인  $p = 0.9$ 일 때, 확률  $p_T$ 의 변화에 따른 평균 실시간 오차를 나타내었다. 그림에서 볼 수 있듯이, 전송 지연 슬롯의 수  $D$ 가 짝수일 때는 전송 빈도가 높을수록 평균 실시간 오차가 줄어들지만, 그렇지 않은 경우는 평균 실시간 오차가 오히려 늘어나는 것을 알 수 있다. 예를 들어,  $D = 4$ 인 경우 실시간 오차의 평균은  $p_T = 0.1$ 일 때 0.49에서  $p_T = 1$ 일 때 0.3으로 줄어들지만,  $D = 1$ 인 경우 실시간 오차의 평균은  $p_T = 0.1$ 일 때 0.51에서  $p_T = 1$ 일 때 0.9로 오히려 늘어난다.

## V. 결론

본 논문에서는 원격으로 이진 마르코프 정보원의 상태를 추정할 때의 실시간 오차를 유도한다. 이를 위해 상태 공간이 유한한 이산 시각 3차원 마르코프 연쇄 과정으로 시스템을 모형화한 후 분석하였다. 정보원의 상태 변화 확률과 전송 빈도 및 전송 시간에 따른 실시간 원격 추정값의 오차에 대한 평균을 분석하였다. 수치 해석을 통해, 정보원의 상태 변화가 positively correlated인 경우와 negatively correlated인 경우에, 전송 빈도의 변화에 따른 평균 실시간 오차를 다양한 전송 시간에 대해 살펴보았다. 수치 해석 결과에서 알 수 있듯이, positive correlated인 경우에 전송 빈도를 높일수록 평균 실시간 오차가 줄어들지만, negatively correlated인 경우에는 전송 빈도에 따른 평균 실시간 오차의 변화 패턴이 전송 시간의 특성에 따라 달라진다는 것을 알 수 있었다.

## REFERENCES

- [ 1 ] G. Rule and E. Akyol, "Strategic Remote Estimation," in *Proceeding of the 54th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove: CA, USA, pp. 751-757, 2020. DOI: 10.1109/IEEECONF51394.2020.9443376.
- [ 2 ] C. Kam, S. Kompella, and A. Ephremides, "Age of incorrect information for remote estimation of a binary Markov source," in *Proceeding of the IEEE INFOCOM 2020 - IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*, Toronto: ON, Canada, pp. 1-6, 2020. DOI: 10.1109/INFOCOMWKSHPS50562.2020.9162726.
- [ 3 ] A. Maatouk, S. Kriouile, M. Assaad, and A. Ephremides, "The Age of Incorrect Information: A New Performance Metric for Status Updates," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 28, no. 5, pp. 2215-2228, Oct. 2020. DOI:10.1109/TNET.2020.3005549.
- [ 4 ] Y. Lee, "Analysis of real-time error for remote estimation based on binary Markov chain model," *Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering*, vol. 26, no. 2, pp. 317-320, Feb. 2022. DOI: 10.1109/TNET.2020.3005549.
- [ 5 ] E. Verbitskiy, "Thermodynamics of the binary symmetric channel," *Pacific Journal of Mathematics for Industry*, vol. 8, no. 2, Mar. 2016. DOI: 10.1186/s40736-015-0021-5.
- [ 6 ] Y. Lee, "Performance of Dynamic Spectrum Access Scheme Using Embedded Markov Chain," *Journal of the Korea Institute of Information and Communication Engineering*, vol. 17, no. 9, pp. 2036-2040, Sep. 2013. DOI: 10.6109/jkiice.2013.17.9.2036.
- [ 7 ] J. Mo, *Performance Modeling of Communication Networks with Markov Chains*, Morgan & Claypool, VT: USA, 2010.