과학교육연구지, 47권 3호, pp. 263-272 (2023.12)
ISSN : 1225-3944
Jour. Sci. Edu, Vol. 47, No, 3, 263-272 (2023.12)
eISSN : 2733-4074

비유클리드 기하학에서 이차곡선의 이해를 통한 예비교사교육

강지은 · 김대환*
대구대학교

Research on Pre-service Teacher Education Through Understanding of Conic Sections in Non-Endidean Geometry

Jieun Kang · Daehwan Kim*
Daegu University

Abstract : We consider how a pre-service teacher can understand and utilize various concepts of Euclidean geometry by learning conic sections using mathematical definitions in non-Euclidean geometry. In a third-grade class of D University, we used mathematical definitions to demonstrate that learning conic sections in non-Euclidean space, such as taxicab geometry and Minkowski distance space, can aid pre-service teachers by enhancing their ability to acquire and accept new geometric concepts. As a result, learning conic sections using mathematical definitions in taxicab geometry and Minkowski distance space is expected to contribute to enhancing the education of pre-service teachers for Euclidean geometry expertise by fostering creative and flexible thinking.

keywords : definition, conic sections, Euclidean geometry, taxicab geometry, Minkowski distance space

Ⅰ. 서론

교육환경은 끊임없이 변하고 발전하며, 교사들은 새로운 교육 방법 및 전략을 적용하여 학생들에게 효과적으로 지식을 전달하기 위해 노력하고 있다. 이에 따라 예비교사들은 학습 경험을 통해 교육적 전문성을 함양하기 위해 예비교사의 수학교육에서 새로운 관점과 접근법을 탐구해야 한다. Dreiling (2012)은 택시기하학에서 구조를 탐구하는 과정을 통해 예비교사들이 유클리드 기하학의 구조에 대해 더 깊은 이해를 얻었다는 것을 발견하였고, Hollebrands (2010)은 학생들이 서로 다른 공리계에 이해에 대한 노력이 필요할 때, 기하학에 대한 이해는 크게 변화한다고 설명한다. 이러한 연구 결과를 통해 Dreiling (2012)와 Hollebrands (2010)는 비유클리드 기하학의 개념을 탐구함으로써 예비교사들은 유클리드 기하학의 개념을 더 잘 이해할 수 있음이 연구에 의해 확인되었다. 이와 관련하여 Kinach (2012)는 예비교사들이 유클리드 공리, 개념, 정리에 대해 더 깊은 통찰력을 발달시키는지 여부를 조사하기 위한 추가 연구의 필요성을 제시하였다.

구면기하학, 쌍곡기하학과 같은 비유클리드 기하학의 많은 예들은 널리 알려져 있지만, 학생들이 직관적으로 이해하기에는 어려움이 있다. 그중 택시기하학은 도시의 도로를 주행하는 택시가 움직이는 거리에서 영감을 받아 만들어진 기하학이므로 학습자가 직관적으로 쉽게 이해할 수 있다. 본 연구에서는 유클리드 공간, 비유클리드 공간과 택시기하학을 이해한 후 민코프스키 거리공간을 소개함으로써 정의와 기하학적 구조의 이해, 그 중요성이 강조되고 수학적 개념의 변형이 어떻게 이루어지는지 알 수 있다. 이에 따라 유클리드 기하의 이해를 높이기 위해 택시기하학과 민코프스키 거리공간의 개념을 활용하며, 교육적인 관점에서 학습요소를 중심으로 내용 체계를 구상하고, GeoGebra와 같은 공학 도구를 활용하여 수학적 개념을 더욱 깊게 이해하고 기하학적으로 활용할 수 있도록 한다. 이 연구는 다양한 공간에서 이차곡선을 학습요소로 활용하여 다음과 같은 수학교육의 목표를 제시한다. 첫째, 정의와 내용 체계를 통해 예비교사들에게 다양한 수학적 시각과 지식을 제공하여 문제 해결

* 교신저자: 김대환 (daehwan@daegu.ac.kr)
** 이 논문은 강지은의 2024년도 석사 학위논문을 발췌 정리하였음.
*** 2023년 12월 13일 접수, 2023년 12월 29일 수정원고 접수, 2023년 12월 29일 채택
http://dx.doi.org/10.21796/jse.2023.47.3.263

능력과 추상적 사고력을 향상시키는 데에 주안점을 둔다. 둘째, 미적분을 사용하지 않아도 되는 특성을 활용하여 예비교사들의 수학적 개념 이해 부담을 줄이는 창의적인 교육 방법을 탐구한다. 셋째, 민코프스키 거리공간을 활용하여 유클리드 공간과 택시기하학에서 이차곡선의 변화를 GeoGebra를 이용하여 학습하고, 이를 통해 기하학적 공간의 인지 변화를 살펴보며 수학적 정의를 이해하는 새로운 교육적 접근법을 제시한다.

이 연구는 민코프스키 거리공간에서 이차곡선 학습이 예비교사들의 유클리드 기하학에서 정의의 깊이 있는 이해와 기하학적 공간의 인지 변화를 탐구하는 데 중점을 두고 있다. 이를 위해 2023학년도 D 대학교 사범대학 수학교육과 3학년 재학생을 연구대상으로 4주간의 강의로 진행하였으며, 탐구적 학습 방법을 채택하였다. 각 주차별 제시된 과제와 활동을 수행하는 과정에서 예비교사들의 수학적 개념 학습이 예비교사의 발전에 어떤 역할을 했는지를 분석한다. 또한 민코프스키 거리공간에서 이차곡선에 대한 학습자들의 이해와 관련된 다음 연구 문제를 제기한다.

첫째, 유클리드 기하학, 택시기하학을 거리공간으로 확장하는 과정에서 정의의 중요성이 어떻게 나타나며, 예비교사의 교육적 전문성에 어떤 영향을 미치는가?

둘째, 다양한 공간에서 이차곡선을 학습하고 비교하는 과정에서 기하학적 공간의 인지는 어떻게 변화하는가?

예비교사들에게 민코프스키 거리공간에서의 이차곡선을 스스로 탐구하고 실험하도록 과제를 부여한다. 이를 통해 예비교사들이 개념을 직접 체험하고 유추하는 과정에서 문제해결 능력과 추상적 사고력을 촉진하여 더 깊은 기하학적 이해를 얻을 수 있도록 돕기 위한 목적이다. 또한, GeoGebra와 같은 공학 도구를 활용하여 시각적으로 이해하고 교육 현장에서 학습자들에게 효과적으로 전달하는 방법을 학습하고자 한다. 이와 같은 연구방법을 통해 민코프스키 거리공간에서 이차곡선 학습이 예비교사들에게 수학적 정의의 중요성, 기하학적 공간의 인지 변화에 미치는 긍정적 영향을 알아보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 2022 수학과 개정 교육과정

2022 개정 교육과정은 교육과정 개정의 비전과 중점, 학급별 개정 사항에 있어 최근 새롭게 부각되고 있는 시대·사회적 변화를 적극적으로 수용하는 특징을 보인다(Hong *et al.* 2022). 2022 개정 수학과 교육과정에서는 '문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리' 역량을 수학 교과 역량으로 설정하고, 핵심 아이디어와 지식・이해, 과정・기능, 가치・태도의 세 범주로 내용 체계를 구성하여 수학 교과 역량 함양을 지원하도록 설계하였다. 아울러 기초 소양의 함양과 생태전환 교육, 민주 시민 교육, 학생 맞춤형 교육을 도모하는 교수・학습 및 평가 방법을 제시하였다. 또한, 학생 주도성 개념을 바탕으로 학생의 삶과 성장을 지원하고 온라인 교육 환경에서 교수・학습 및 평가를 할 수 있도록 하였다(MOE, 2022). 특히, '문제해결'과 '추론' 역량은 수학적인 사고력을 기반으로 현실적인 문제를 해결하고 논리적 결론 도출에 중요한 역할을 한다. 비유클리드 기하학의 학습은 이러한 역량 향상에 기여할 수 있다. 비유클리드 기하학은 새로운 기하학적 개념과 규칙을 제시하여 학생들이 다양한 관점에서 수학을 바라보고 문제를 해결하는 경험을 제공한다. 또한, '의사소통' 역량은 학생들이 자신의 생각을 명확하게 표현하고 다른 이들과 협력하여 문제를 해결하는 데에 필요하다. 비유클리드 기하학의 학습을 통해 새로운 기하학적 개념을 이해하고 이를 타인에게 설명함으로써 의사소통 능력을 향상시킬 수 있다. 고등수학 교육과정에서 이차곡선을 유클리드 거리공간에서 원뿔을 절단하여 만든 곡선을 방정식으로 표현하는 것은 이차곡선의 기하학적 성질을 탐구하는 것에 효과적인 접근이다(MOE, 2022). 자세히 말하자면, 유클리드 거리공간에서 원뿔을 절단한 곡선을 유클리드 거리함수를 이용하여 대수적 방정식으로 표현하고 그 성질 및 특성을 공부한다. 2022 수학과 개정 교육과정에서 중요시하는 '문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리'를 학습하는 데 있어, 본 연구에서는 다양한 공간에서 이차곡선을 활용하여 거리 정의와 비유클리드 기하학의 개념을 중심으로 유클리드 기하학의 이해를 높이는 내용 체계를 핵심 아이디어로 제시할 수 있다. 또한, GeoGebra라는 공학 도구를 활용하여 학습자가 자기주도성을 가지고 기하학의 개념을 직관적으로 이해할 수 있다. 이론적 배경을 통한 공학 도구의 활용은 확장된 이론의 직관적 이해와 학습자의 활동적인 학습을 촉진할 수 있으며, 시각적으로 효과적인 전달을 가능하게 한다.

2. 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학

Krause (1973)는 비유클리드 기하학이 유클리드 기하학에 대한 학생들의 통찰력을 심화시킬 수 있다고 설명한다. 그의 주장은 기하학적 개념을 이해하는데 있어 다양한 시각을 제공하여 학생들의 수학적 이해를 높일 수 있다는 것이다. 이러한 관점은 기하학 교

육에서 다양성과 창의성을 중요시하는 교육적 전략의 필요성을 강조한다. Hollebrands (2010)에 따르면, 서로 다른 공리계에 기반한 학습은 학생들에게 어려움을 제공할 수 있으며, 이는 기하학에 대한 이해를 크게 변화시킬 수 있다. 이와 같은 관점에서 민코프스키 거리공간에서도 거리함수로 정의되는 이차곡선을 얻을 수 있고, 이는 유클리드 기하와 택시기하를 연결해 주는 다양한 형태로 나타난다. Dreiling (2012)은 택시 기하학을 통한 학습이 유클리드 기하학의 구조에 대한 깊은 이해를 도모한다고 말한다. 택시기하에서 이차곡선은 정의 방법에 따라 거리함수를 이용한 정의와 3차원 택시기하에서 원뿔의 절단면으로써 이차곡선을 정의한다. 이 두 가지 이차곡선의 정의 방법은 유클리드 공간과는 다르게 서로 다른 형태로 나타난다(Heo, 2017). Kinach (2012)은 서로 다른 기하학에서 유클리드 공리, 개념, 정리에 대한 학생들의 통찰력 발달을 조사하는 추가 연구의 필요성을 제기하였다. 유클리드 기하학뿐만 아니라 구면기하학, 쌍곡기하학, 택시기하학과 같은 다양한 기하학의 학습이 수학이라는 학문이 다양한 세계를 바라보는 시각에서 변화되고 발전되어 온 학문으로 학생들에게 수학에 대한 부정적 인식을 긍정적 방향으로 변화시키는 역할을 할 수 있다고 말한다 (Jin, 2021). 비유클리드 기하학의 개념은 예비교사들에게 새로운 도전을 제공하면서, 동시에 수학적 지식을 보다 다양한 시각으로 확장하는 기회를 제공한다. 또한, Kemp & Vidakovic (2021)은 수학적 정의는 개념을 이해하는 데 필수적인 부분이며, 택시기하에서 수학적 대상의 학습이 개념적 이해와 정의에 대한 깊은 이해를 촉진한다고 하였다. 이를 통해 유클리드 기하학과 비교하여 깊이 있는 수학적 통찰력을 개발할 수 있다는 가능성을 시사한다. 더불어, 다양한 기하학적 개념을 탐구하고 이해함으로써 수학적 지식을 풍부하게 발전시킬 수 있어 창의적이고 유연한 사고를 키우는 데에 기여하고 수학을 다양한 시각에서 접근하고 이해하는데 도움이 될 것으로 기대한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상 및 방법

본 연구는 민코프스키 거리공간에서 이차곡선 학습이 예비교사들의 유클리드 기하학에서 정의 이해와 창의성 향상에 어떻게 기여하는지 탐구하는 데 중점을 두고 있다. 이를 위해 본 연구는 2023학년도 D대학교 사범대학 수학교육과 3학년 재학생을 연구대상으로 하였으며, 기하학과 위상수학을 이수한 예비교사들을 중점적으로 탐구적 학습 방법을 채택하였다. 예비교사들에게 민코프스키 거리공간에서 이차곡선을 스스로 탐구하고 실험하도록 과제를 부여하여, 그들의 문제 해결 능력과 창의성을 촉진한다. 이는 예비교사들이 수학적 개념을 직접 체험하고 유추하는 과정에서 더욱 깊은 이해를 얻을 수 있도록 돕기 위함이다. 또한, GeoGebra와 같은 교육 공학 도구를 활용하여 유클리드 기하와 택시기하를 포함한 민코프스키 거리공간에서 이차곡선을 시각적으로 이해하고, 이를 교육현장에서 학생들에게 효과적으로 전달하는 방법을 학습하게 한다. 이와 같은 연구방법을 통해 민코프스키 거리공간에서 이차곡선 학습이 예비교사들의 유클리드 기하학의 개념 이해와 창의성에 어떻게 기여하는지에 대한 깊은 이해를 얻고자 하였다.

2. 수업 개발 및 적용

본 연구에서는 Jin (2019), Kemp & Vidakvic (2021), Kim (2021)의 교수학습 자료를 참고하였으며, 수업은 예비교사들의 참여와 상호작용을 중심으로 유클리드 기하, 택시기하학의 이차곡선에서 민코프스키 거리공간의 이차곡선의 확장을 주제로 4주간의 수업을 진행하였다(Table 1). 교수학습 자료 및 수업 목표를 이해하기 위해서는 기초적인 수학 지식이 필요하며, 미적분을 사용하지 않고 수학적 개념을 이해하는 것이 강조된다. 그렇다면 예비교사들이 더 유연하게 수학적 상황에 대처하고 새로운 아이디어를 도입할 수 있게 된다. 일부 예비교사들은 기하학적 구조 이해에 미적분과 같은 수학적 도구를 사용하는 것에 부담을 느낄 수 있다. 이러한 도구를 배제하면 예비교사들은 수학에 대한 긍정적인 자세를 자연스럽게 형성할 수 있다.

3. 자료수집 및 분석

본 연구에서 질적 자료는 수업 자료를 개발하고 4주차 수업(Table 1) 동안 예비교사들의 참여도를 지속적으로 관찰하였다. 수업 진행이 끝난 후 서술형 설문조사와 답변 내용을 통해 참여도가 높은 예비교사를 선발하고, 이들에게는 추가적으로 설문조사의 답변에 대한 간략한 인터뷰를 실시하였다. 이 자료는 수업에 대한 이해 수준, 흥미, 그리고 기하학적 인지 변화 등에 대한 정보를 얻기 위한 것으로, 자발적이고 심층적인 의견을 얻기 위해 노력하였다. 이를 토대로 자료를 종합하여 결과를 정리하였고 질적 자료는 모두 전사되었다.

Table 1. Quadratic Curve Extensions of Euclidean and Taxi Geometry

강의주제		강의내용
1주	유클리드 기하학과 공리계	유클리드 평행공리와 힐베르트 평행공리 및 SAS합동 공리의 이해, 중립기하학의 소개
2주	비유클리드 기하학의 다양한 예	중립기하학의 예로 쌍곡기하학과 중립기하학이 아닌 예로 구면기하학을 소개
3주	거리의 개념과 택시기하	거리를 이용한 유클리드 기하와 택시기하의 소개, 유클리드 기하와 택시기하에서 원과 이차곡선
4주	민코프스키 거리공간	민코프스키 거리공간의 소개, 공학 도구를 활용하여 이차곡선의 변화 탐구

Ⅳ. 연구결과

1. "다양한 거리공간에서의 이차곡선" 수업개발

1) 수업 주제 및 교육모형 선정

수업 주제는 유클리드 기하학과 택시기하의 이차곡선에서 민코프스키 거리공간의 이차곡선 확장이며, 이는 Krause (1987), Heo (2017), Jin (2019), Kemp & Vidakvic (2021), Kim (2021)의 내용을 기반으로 각 이론의 특징, 차이점, 그리고 확장 가능성을 종합적으로 고려하여 선정되었다. 교수학습 방법으로는 예비교사들의 다양한 수학적 지식수준을 고려한 탐구적 학습 모형을 채택하였다. 이 수업은 미적분을 사용하지 않고도 수학적 개념을 이해할 수 있는 학습 방법을 강조하며, 택시기하에서의 이차곡선과 민코프스키 거리공간에서의 거리함수를 통한 이차곡선의 확장을 다룸으로써 수학교육에 새로운 관점을 제시한다. 이를 통해 예비교사들의 문제해결 능력을 향상시키고자 한다. 탐구적 학습 모형은 활동적이고 자기 주도적인 학습을 촉진하며, 예비교사들이 주도적으로 문제를 해결하고 아이디어를 발전시키는 경험을 제공함으로써 학습의 주도성을 강조한다. 이 교육모형의 채택은 예비교사들이 수학을 실제로 활용하며 이해하고, 동시에 학습의 주체로서의 역량을 키우도록 지원하는 것에 중점을 두고 있다.

2) 차시별 내용 구성

(1) 1주차 유클리드 기하학과 공리계

유클리드 기하학은 고대 그리스의 수학자 유클리드에 의해 구축된 수학 체계로 유클리드의 원론은 기하학에 관한 최초의 체계적인 논의로 알려져 있다. 유클리드 기하학에서 중요하게 언급되는 공리 중 하나가 다음의 *유클리드 평행공리*이다.

"두 직선 l과 m의 횡선 t에 대하여 t의 한 쪽에 만들어지는 두 각의 합이 π보다 작으면 직선 l과 m은 같은 쪽에서 만난다."

하지만 유클리드가 정의한 유클리드 공리계에서는 논리적 결점이 생기기 때문에 이러한 불완전성을 보완하기 위해 힐베르트가 무정의 용어(점, 직선, 위에 있다, 사이, 합동)와 힐베르트 공리계를 통해 유클리드 기하학을 보다 엄밀하게 구성하였다. 힐베르트의 공리계는 결합공리, 순서공리, 분리공리, 합동공리, 연속공리(아르키메데스 공리, 데데킨트공리), 힐베르트의 평행공리로 구성되어 있다. 이때, *힐베르트의 평행공리*는 다음과 같다.

"한 직선 l과 l위에 있지 않은 한 점 P에 대하여 P를 지나고 l과 평행한 직선이 많아야 하나 존재한다."

특히, 유클리드 평행공리와 힐베르트의 평행공리는 서로 동치인 것이 잘 알려져 있다. 이는 삼각형의 내각의 합이 π가 되는 것과도 동치가 된다. 힐베르트 공리계에서 합동인 삼각형을 다루는데 중요한 역할을 하는 것이 다음의 *SAS 합동공리*이다.

"두 삼각형에서 대응하는 두 변과 그 사잇각이 각각 합동이면 두 삼각형은 합동이다."

유클리드 평행공리가 성립하지 않는 기하학을 비유클리드 기하학이라 하며, 그 중 중립 기하학은 힐베르트 공리군에서 평행공리를 제외하고 성립하는 기하학을 말한다.

(2) 2주차 비유클리드 기하학의 다양한 예

중립기하학에서는 중고등학생들이 학교 수업시간에 배우는 다양한 기하학적 정리가 성립한다. 특히, 중학교 교육과정에 등장하는 다음의 정리들이 있다.

1. 맞꼭지각은 서로 합동이다.
2. 모든 직각은 합동이다.
3. 엇각정리: 한 횡단선에 의해 잘린 두 직선이 합동인 엇각을 가지면 그 두 직선은 평행하다.
4. 외각정리: 삼각형의 외각은 두 내대각보다 크다.

특히, 엇각정리의 역은 평행 공리가 되므로 평행 공리를 가정하지 않은 중립기하학에서는 성립하지 않는다. 또한, 삼각형 내각의 합과 관련된 정리로 사케리-르장드르 정리가 있다:

중립기하학에서 삼각형의 내각의 합은 π보다 작거나 같다. 이때, 유클리드 기하학은 내각의 합이 π일 때가 된다.

유클리드 공리가 성립하지 않는 중립기하학의 예로써 쌍곡기하학은 한 직선이 있고 직선 밖의 점에 대해 그 점을 지나고 직선과 평행한 직선이 무수히 많은 기하학이다. 쌍곡기하학은 다양한 형태의 모델(푸앵카레 원판 모형, 푸앵카레 반평면 모형, 클라인 모형 등)로 공부가 가능하다. 사케리-르장드르 정리에 의해 쌍곡기하학이 중립기하학의 한 예이기 때문에 쌍곡기하학에서 삼각형의 내각의 합은 π보다 항상 작다(Figure 1). 비유클리드 기하학의 또 다른 예로 구면기하학이 있고, 구면기하학에서는 한 직선과 직선 밖의 점에 대해 그 점을 지나고 직선과 평행한 직선이 존재하지 않는다. 구면기하학은 비유클리드 기하학 중에서도 중립기하학을 만족하지 않는 기하학이다. 구면기하학에서 삼각형의 내각의 합은 π보다 크다.

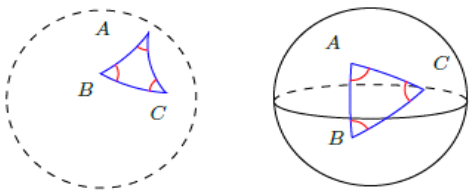

Figure 1. Triangles in Poincaré disk model (left), and in spherical geometry (right).

(3) 3주차 거리의 개념과 택시기하

유클리드 기하와 택시기하를 자세히 학습하기 위해 각 공간에서 거리를 정의한다. 유클리드 거리는 피타고라스 정리를 활용하여 두 점 사이의 직선거리를 계산한다. 두 점 $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$에 대하여 유클리드 거리는 다음과 같이 정의된다.

$$d_E(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

택시기하학에서는 SAS 합동공리가 성립하지 않으므로 유클리드 거리와 같이 거리를 정의할 수 없다. 택시기하에서 거리는 두 점 사이의 거리를 직선이 아니라 격자 형태로 이동하는 것으로 정의하며 다음과 같다(Figure 2).

$$d_T(X,Y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

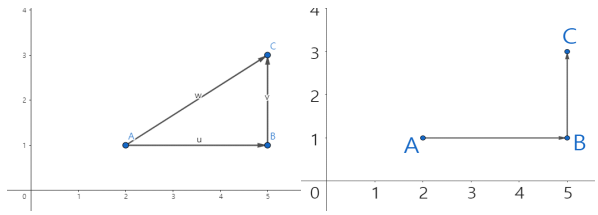

Figure 2. The distance from A to C.

공리에 따른 기하학의 분류는 Figure 3과 같다.

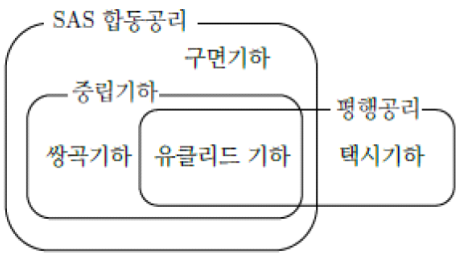

Figure 3. The spherical, hyperbolic and taxicab geometries

유클리드 기하와 택시기하에서 정의되는 거리함수에 따라 각 거리공간에서 원과 이차곡선의 방정식을 소개하고, 그래프를 통해 시각적으로 비교한다. 원의 정의는 고정된 한 점에서 거리가 일정한 점들의 집합이다. 이와 같은 원의 정의를 유클리드 기하와 택시기하에서 거리함수로 표현한다. 중심이 $C=(c_1,c_2)$이고 반지름의 길이가 r인 유클리드 거리공간에서 원의 방정식은

$$d_E(C,(x,y))=\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}=r.$$

이고, 택시기하에서 원의 방정식은 다음과 같다(Figure 4).

$$d_T(C,(x,y))=|x-c_1|+|y-c_2|=r.$$

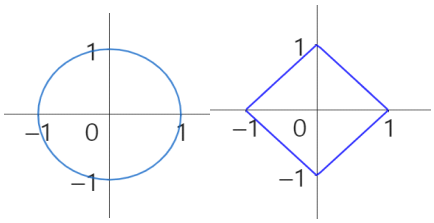

Figure 4. $C=(0,0)$, $r=1$

이와 같이 이차곡선(타원, 쌍곡선, 포물선)을 거리함수로 정의할 수 있다. 유클리드 기하에서 타원, 쌍곡선, 포물선을 거리함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_E(F_1,(x,y))+d_E(F_2,(x,y)) &= k, \\ d_E(F_1,(x,y))-d_E(F_2,(x,y)) &= \pm k, \\ d_E(F_1,(x,y))-d_E(l,(x,y)) &= 0. \end{aligned}$$

여기서 k는 양의 실수, $F_1=(a,b)$, $F_2=(c,d)$는 초점, $l:\alpha x+\beta y+\gamma=0$은 준선, $a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma$는 실수이다. 택시기하에서 타원, 쌍곡선, 포물선을 거리함수로 표현하면 다음과 같다(Figure 5, Figure 6, Figure 7).

$$\begin{aligned} d_T(F_1,(x,y))+d_T(F_2,(x,y)) &= k, \\ d_T(F_1,(x,y))-d_T(F_2,(x,y)) &= \pm k, \\ d_T(F_1,(x,y))-d_T(l,(x,y)) &= 0. \end{aligned}$$

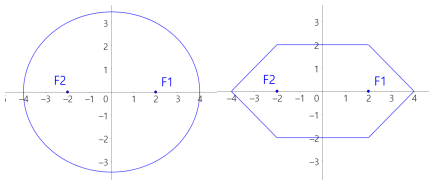

Figure 5. $F_1=(2,0)$, $F_2=(-2,0)$ $k=8$

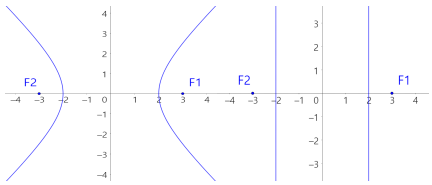

Figure 6. $F_1=(3,0)$, $F_2=(-3,0)$ $k=8$

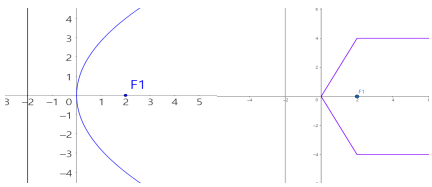

Figure 7. $F=(2,0)$, $l:x+2=0$

(4) 4주차 민코프스키 거리공간

민코프스키 거리공간의 거리는 다음과 같다.

$$d_M(X,Y)=\left(|x_1-y_1|^p+|x_2-y_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

이때, $p\geq 1$일 때, d_M이 거리함수가 되며, 택시기하학은 $p=1$일 때, 유클리드 기하는 $p=2$일 때 성립한다. GeoGobra(공학 도구)를 활용하여 민코프스키 거리공간에서 원과 이차곡선을 그려본다(Figure 8, Figure 9, Figure 10, Figure 11). 중심이 점 $C=(c_1,c_2)$이고 반지름의 길이가 r인 민코프스키 거리공간에서 원의 방정식은 다음과 같다(Figure 8).

$$d_M(C,(x,y))=\left(|c_1-x|^p+|c_2-y|^p\right)^{\frac{1}{p}}=r.$$

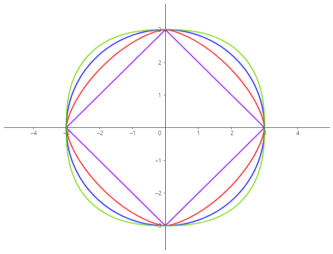

Figure 8. $p=1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}$

민코프스키 거리공간에서 이차곡선을 공부하기 위해서는 두 가지의 정의를 알아 둘 필요가 있다. 첫 번째로 점과 점사이의 거리는 민코프스키 거리공간의 거리의 정의에 의해 얻는다. 두 번째는 점과 직선사이의 거리이다. 점과 직선사이의 거리를 통해 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 직선이 $l:\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $\alpha\beta\neq 0$일 때, 점 $A=(x,y)$과 직선 l사이의 방정식은 다음과 같다.

$$d_M(A,l)=\frac{|\alpha x+\beta y+\gamma|}{\left(|a|^{\frac{p}{p-1}}+|b|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

이는 직선 위에 있는 점 $P=(u,v)$와 직선 밖에 있는 점 $A=(x,y)$이라 할 때, 함수 $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$을

$$\begin{aligned} f(u,v) &= |u-x|^p+|v-y|^p, \\ g(u,v) &= \alpha x+\beta v+\gamma. \end{aligned}$$

라 하고, 여기서 α,β,γ는 상수($\alpha\beta\neq 0$)이다. 정의역이 $S=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,|\,g(u,v)=0\}$ 로 제한 된 함수

$f|_S$의 최솟값이다. 민코프스키 거리공간에서 타원, 쌍곡선, 포물선의 식은 다음과 같다(Figure 9, Figure 10, Figure 11).

$$\begin{aligned} d_M(F_1,(x,y)) + d_M(F_2,(x,y)) &= k, \\ d_M(F_1,(x,y)) - d_M(F_2,(x,y)) &= \pm k, \\ d_M(F_1,(x,y)) - d_M(l,(x,y)) &= 0. \end{aligned}$$

2. “다양한 거리공간에서의 이차곡선” 적용 결과

수업에 참여한 예비교사를 대상으로 수업에 대한 인터뷰와 설문을 수집하여 수업에 대한 예비교사들의 생각을 분석하였다.

1) 수업 내용 이해

“민코프스키 거리공간에서의 이차곡선을 학습하는 과정에서 어떤 수학적 정의를 활용하는가?”에 대한 예비교사들의 응답은 다음과 같다.

예비교사 A: 직선이 아닌 곡선을 통해 거리를 측정하는 방식을 이해하게 되며, 이는 비유클리드 기하학에서 거리의 새로운 정의를 제시한다.

예비교사 B: 대수학적 표현과 방정식의 해석이다. 이차곡선을 다룰 때는 대수적 개념이 특히 중요하며, 이를 통해 이차곡선의 형태와 특성을 이해하고 분석할 수 있다.

예비교사 C: 거리공간의 정의, 이차곡선의 정의, 절댓값의 정의와 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이 거리, 그래프 그리는 방법, 부등식과 방정식의 풀이 등 주로 사용된다.

예비교사들의 의견 종합을 통해 정의의 중요성과 기하학적 인지 변화에 따른 인식이 명확히 드러났다. 여러 예비교사가 거리공간, 이차곡선, 절댓값 등과 관련된 정의들을 강조하며 수학적 문제를 해결하고 이해하는 것에 있어서 정의의 역할을 인식하고 있다. 예를 들어, "예비교사 C"는 거리공간의 정의, 이차곡선의 정의, 절댓값의 정의 등이 주로 사용된다고 언급하면서, 정의를 이해하는 것이 수학적 문제 해결에 필수적이라는 것을 시사한다. "예비교사 B"는 이차곡선을 다룰 때 대수적 개념의 중요성을 강조하며, 이를 통해 이차곡선의 형태와 특성을 이해하고 분석할 수 있다고 언급한다. 이러한 응답들은 예비교사들이 수학적인 개념을 깊이 있게 이해하고자 할 때 정의를 중요하게 고려하고 있음을 보여준다. 정의를 이해하면 추상적인 개념이나 수학적 문제에 대한 해석이 명확해지며, 이는 수학적 사고력을 향상시키는 것에 도움이 된다. 예비교사들은 수학적인 지식을 쌓는 데에 있어서 정의를 핵심적인 개념으로 여기고 있으며, 이는 수학적 논리와 이해를 근간으로 하는 능력을 키우는 데에 도움이 될 것이다.

다음으로 “이를 통해 어떤 기하학적 특성을 파악할 수 있을까?”에 대한 예비교사들의 응답은 아래와 같다.

예비교사 D: 유클리드 기하학에서 그래프와 택시기하학에서 그래프를 그려보면서 유사점과 차이점을 찾으며 기하학에 대한 관심과 자신감을 통해 지식을 얻는다.

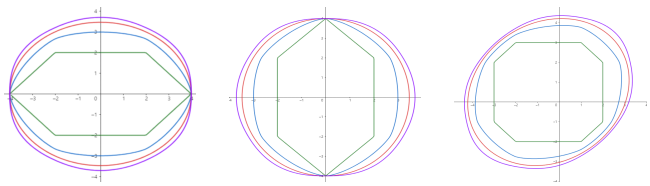

Figure 9. $p = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$

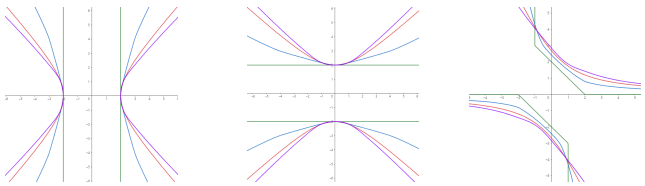

Figure 10. $p = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$

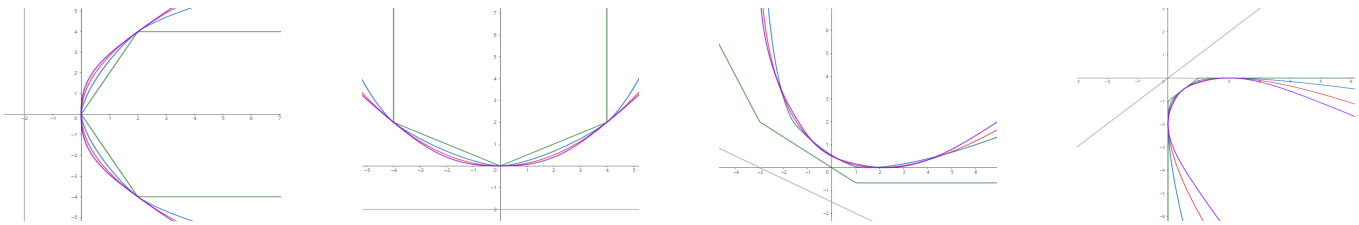

Figure 11. $p = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$

예비교사 E: 거리의 정의가 유클리드 기하학에서 벗어날 때 어떻게 변화하는지 이해함으로써 학습자들은 다양한 거리 체계에 대한 감각을 키울 수 있고 비유클리드 기하학에 대한 직관을 형성하는 것에 기여한다.

예비교사 F: 이차곡선을 통해 유클리드 기하학과 택시기하학의 관계를 시각화하고 설명함으로써, 유클리드 기하학의 직관과 민코프스키 거리공간에서 거리의 차이를 명확히 이해할 수 있다.

예비교사 G: 도형의 변화를 직관적으로 보고 정의를 통해 수학적인 일반성과 추상화를 이해하고, 다양한 수학적 환경에서 문제를 해결하는 능력을 향상시킬 수 있다.

예비교사 H: 이차곡선을 활용하여 택시 거리와 유클리드 거리 사이의 변환을 시각화하고 설명함으로써, 두 거리 체계의 공간적 차이와 유사성을 더 잘 이해하게 된다.

예비교사 I: 다양한 기하학 공간에서 이차곡선을 생각하게 되었고, 특히 구면 위에서 택시기하와 같은 확장된 기하에 대한 호기심을 통해 기하학에 대한 흥미가 생겼다.

예비교사 J: 유클리드 공간에서 이차곡선의 그림과 민코프스키 거리공간에서 이차곡선을 공학 도구를 활용하여 비교하는 학습으로부터 만약 민코프스키 거리공간에서 구면기하학에서 이차곡선은 어떻게 될 것인가 궁금점이 생길 것 같다.

응답에서 예비교사들은 기하학적 인지 변화를 명확히 경험하고 있다. 예비교사들은 유클리드 기하학에서의 직선 개념에서 벗어나 새로운 개념이나 관점에 도전함으로써 기하학적인 변화를 경험하고 있다. 예를 들어, "예비교사 D"는 유클리드 기하학과 택시기하학에서 그래프를 그리며 유사점과 차이점을 찾고, "예비교사 E"는 거리의 정의가 유클리드 기하학에서 벗어날 때의 변화를 이해하는 것을 강조한다. 또한, "예비교사 F"는 이차곡선을 통해 유클리드 기하학과 택시기하학의 관계를 시각화하고 설명하여 두 기하학 체계 간의 차이를 명확히 이해하고 있다고 나타난다. 마찬가지로, "예비교사 H"도 이차곡선을 활용하여 택시 거리와 유클리드 거리 사이의 변화를 시각화하고 설명하여 두 거리 체계 간의 공간적 차이를 이해하고 있다. 이러한 응답들은 예비교사들이 다양한 기하학적 개념을 탐험하고, 비유클리드 기하학에서의 새로운 개념에 적응하면서 기하학적인 인지 변화를 경험하고 있다는 것을 시사한다. “예비교사 I“와 ”예비교사 J“는 유클리드 기하학에서의 직선 개념에 국한되지 않고 다양한 관점과 거리 체계를 이해하고 활용하며, 이는 기하학적 사고력과 수학적 지각력을 확장하는 중요한 단계이다. 이러한 다양한 관점과 접근법을 통해 예비교사들은 수학교육의 다양성을 체험하고, 문제해결 능력과 추상적 사고를 향상시키며, 학문에 대한 더 깊은 이해를 발전시킬 수 있다.

2) 기하학적 인지 변화와 정의의 중요성

기하학적 인지 변화와 정의의 중요성이 예비교사들의 수학적 사고력과 이해력을 향상시키고 있다는 점은 매우 의미 있고 교육적으로 중요한 발견이다. 초기에는 유클리드 기하학에서의 직선 개념에 익숙한 예비교사들이 새로운 개념에 도전하면서 수학교육의 핵심 가치를 실제로 경험하고 있는 것으로 보인다. 기하학적 변화를 통해 예비교사들은 직선이 아닌 다양한 거리 체계에 노출되면서 수학적인 문제를 다양한 관점에서 해석하는 능력이 향상되고 있다. 이는 추상적인 개념을 이해하고 확장하는 과정에서 학습자들이 현실 세계의 다양한 상황에 대응하는 데에 도움을 주고 있다. 또한, 정의의 중요성을 인식하는 것은 수학교육에서 학문의 근본적인 이해에 큰 도움이 되고 있다. 거리공간, 이차곡선 등의 정의를 이해하고 활용함으로써 예비교사들은 수학적인 문제에 대한 탐구와 해결 능력을 키우고 있다. 정의를 통한 깊은 이해는 단순히 개념을 암기하는 수준을 넘어서, 예비교사들이 수학적인 지식을 응용하고 실생활에서의 문제에 유연하게 대처할 수 있도록 도와주고 있다. 특히, 공학 도구를 활용한 학습은 이론적인 지식뿐만 아니라 현실적인 응용과 교육의 융합을 강조함으로써 학생들이 수학을 실제 상황에서 어떻게 활용할 수 있는지를 강조하고 있다. 이러한 주관적인 논의를 통해, 민코프스키 거리공간에서 이차곡선을 학습하는 과정은 확장된 공간으로 유클리드 기하학의 개념을 더욱 풍부하게 이해하고, 다양한 상황에서 더 유연하게 적용할 수 있는 능력을 키우게 된다. 이러한 교육적 노력은 새로운 접근법과 지속적인 성장을 통해 수학교육 환경을 더욱 발전시키고, 학습자들에게 풍부한 학습 경험을 제공하는데 기여할 것으로 기대된다.

V. 결론 및 제언

기하학은 유클리드, 가우스, 푸앵카레 등의 수학자들에 의해 접근 방법의 관점, 시각의 변화 등의 노력으로 발전된 분야이다. 이를 통해 예비교사들의 수학에 대한 선입관과 고정된 수학에 대한 인식을 바꾸고 새로운 접근법을 제시함으로써 그들의 수학교육에 대한 인식에 변화를 야기할 수 있다. 본 논문에서는 D 대학교 3학년을 대상으로 한 4주간 수업을 통해 다양한 거리공간에서 이차곡선을 학습하면서 정의의 중요성과 기하학적 인지가 변화함을 조사하였다. 기존의 지식으로부터 새롭게 받아들이는 지식을 스스로 재해석하는 능력은 정의를 통해 이루어진다. 이 과정은 새로운 지식을 이해하고 수용하기 위한 필수적인 능력으로 기존의 개념과 새로운 지식 사이의 연결점을 찾고, 새로운 의미를 부여함으로써 지식의 확장과 발전을 이끌어낼 수 있었다. 예비교사들이 새로운 거리공간에서 기하학적 구조를 이해하는 것에 도움을 받았고, 정의를 이해하고 공부하는 것으로부터 다양한 수학적 정의가 어떻게 활용되는지를 인식하게 되었다. 거리의 정의가 유클리드 기하학에서 벗어날 때, 원과 이차곡선의 변화로 기하학적 구조가 변화되는 동향을 직관적으로 이해하고 예비교사들이 기하학적 공간의 인지 변화 증진에 영향을 받았다. 민코프스키 거리공간에서 이차곡선 학습은 예비교사들의 비유클리드 기하학에 대한 직관을 향상시키며, 고차원으로의 확장, 구면 위의 택시기하 등 확장된 기하에 대한 상상력을 자극함으로써 새로운 개념 도입의 영향을 확인하고 학문적인 전문성을 높이는 데 기여하였다. 특히, 구면기하학과 쌍곡기하학과 같은 다양한 공간에서 이차곡선에 대한 궁금증은 기하학적 개념과 문제 해결 능력, 수학적 추론력과 논리적 사고의 발전에 영향을 줄 것으로 기대된다. 이는 예비교사들이 새로운 시각으로 문제를 바라보고 다양한 방식으로 해결하고자 하는 능력을 키우는 데 도움이 되고, 비유클리드 기하학에서 이차곡선을 학습함으로써 유클리드 기하학을 쉽게 이해할 수 있다는 새로운 교육적 전략은 예비교사들의 학습 경험을 풍부하게 한다. 이러한 관점은 교사들이 실제 교육환경에서 깊이 있는 학습과 지식 전달, 다양한 교수법과 수업 전략의 개발, 학습자의 이해도와 문제 해결 능력 향상에 기여할 것으로 기대된다. 따라서 기하학적 사고의 확장과 수학적 정의에 대한 중요성을 강조하는 수업의 개발과 적용에 대한 연구가 필요함을 제시한다.

국 문 요 약

예비교사가 비유클리드 기하학에서 수학적 정의를 이용한 이차곡선의 학습으로 유클리드 기하학의 다양한 개념을 어떻게 이해하고 활용할 수 있는지를 살펴본다. 본 연구에서는 D 대학교 수학교육과 3학년 수업에서 수학적 정의를 이용하여 택시기하, 민코프스키 거리공간과 같은 비유클리드 공간의 이차곡선 학습이 예비교사들에게 새로운 기하학적 개념을 습득하고 수용하는 능력 향상에 도움을 줄 수 있음을 보였다. 이러한 결과로부터 택시기하와 민코프스키 거리공간에서의 정의를 활용한 이차곡선 학습이 창의적이고 유연한 사고를 유도하여, 예비교사들의 유클리드 기하학 교육 전문성 향상에 기여할 것으로 기대된다.

주제어: 정의, 이차곡선, 유클리드 기하학, 비유클리드 기하학, 택시기하학, 민코프스키 거리공간

References

Dreiling, K. M. (2012). Triangle construction in taxicab geometry. *The Mathematics Teacher, 105*(6), 474-478.

Heo, N. G. (2017). Inquiry of Quadratic Curves According to Definition on Taxicab Geometry. *Communications of Mathematical Education*, *31*(2), 103-121.

Hollebrands, K. F., Conner, A., & Smith, R. C. (2010). The nature of arguments provided by college geometry students with access to technology while solving problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 324-350.

Hong, W. P., Lee, K.-W., & Lim, Y. (2022). Remaining Issues and Challenges of the 2022 Revised High School Curriculum: Based on a Teacher Survey. *The Journal of Curriculum Studies*, *40*(1), 157-183.

Jin, S.-S. (2019). Study of Geometrical Pre-Teacher Training -Development and application of classes for the change of perception on Mathematics. *The Journal of Education Studies*, *56*(4), 166-182.

Kemp, A., & Vidakovic, D. (2021). Ways secondary mathematics teachers apply definitions in taxicab geometry for a real-life situation: Midset. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100848.

Kim, S. J. (2021). Development and Application of Teaching and Learning Materials for Gifted Students in Elementary School: Focusing on Taxi Geometry. *Journal of Science Education for the Gifted*, *13*(3),

75-88.
Kinach, B. M. (2012). Fostering spatial vs. metric understanding in geometry. *The Mathematics Teacher, 105*(7), 534-540.
Krause, E. F. (1973). Taxicab geometry. *The Mathematics Teacher, 66*(8), 695-706.
Krause, E. F. (1987). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. Mineola, NY: Dover Publications.
Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 249-266.
Ministry of Education [MOE]. (2022). *2022 개정 교육과정* [2022 Education Curriculum]. Sejong, Korea: Author. Retrieved from https://ncic.go.kr

저 자 정 보

강 지 은 (대구대학교 대학원생)

김 대 환 (대구대학교 교수)