

초등학교 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태 조사

방 정 숙 (한국교원대학교, 교수)

김 리 나 (한국교원대학교 대학원, 학생)[†]

이 연구의 목적은 초등학교 2학년과 3학년 학생들을 대상으로 패턴에 대한 이해 실태를 조사하는 것이다. 이를 위해 10개 학교에서 학년별 12학급을 선정하여 2학년 216명과 3학년 223명을 대상으로 46개 문항으로 구성된 검사지를 활용하여 연구를 진행하였다. 연구 결과, 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해는 통계적으로 유의한 차이를 보이지 않는 경우가 대부분이었지만, 예외적으로 패턴의 구조를 파악하기 문항 중 8개의 항에서는 2학년, 2개의 문항에서는 3학년 학생들의 정답률이 통계적으로 유의하게 높게 나타났다. 2, 3학년 학생들이 전반적으로 어려움을 보인 문항의 내용은 하나의 패턴에서 다양한 구성 요소를 탐색하기, 패턴 간 구조를 비교하기, 열린 패턴의 특정한 항을 추측하기였다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 본 연구에서는 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태와 추가적인 지도 방법에 대해 논의하였다.

I. 서론

초등학교 수학과 교육과정에서는 패턴에 대한 내용을 지속적으로 다뤄 왔다. 최근의 교육과정을 살펴보면 패턴과 관련된 내용은 2015 개정 수학과 교육과정의 ‘규칙성’ 영역과 2022 개정 수학과 교육과정의 ‘변화와 관계’ 영역에 제시되어 있는데, 내용을 다루는 영역명만 변경되었을 뿐, 1~2학년군과 3~4학년군에서 다루는 ‘규칙 찾기’는 크게 바뀐 부분이 없다(교육부, 2015, 2022). 1~2학년군에서는 배열에서 규칙을 찾아 여러 가지 방법으로 나타내거나 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기를 다루고 있고, 3~4학년군에서는 다양한 변화 규칙을 찾아 설명하고 그 규칙을 수나 식으로 나타내기를 중점적으로 다루고 있다. 이처럼 초등학교에서 다루는 규칙성은 함수 개념의 기초로서, 수학적 추측과 일반화의 기반으로 교육과정에서 꾸준히 강조된다(교육부, 2015, 2022).

2015 개정 수학과 교육과정을 반영한 교과서(이하 2015 개정 교과서)를 살펴보면 1, 2, 4학년에서 각각 규칙 찾기 단원을 통하여 패턴에 대한 내용을 다룬다. 사실 3학년 교과서에 곱셈표, 규칙에 따라 원 그리기 등과 같이 패턴과 관련이 있는 일부 활동이 있기는 하지만, 다른 학년에서처럼 한 단원을 통하여 규칙 찾기를 중점적으로 다루지는 않는다. 또한 초등학교 1, 2학년 교과서에서는 주로 패턴의 일정한 부분이 반복되는 형태의 패턴을 제시하고 규칙을 이야기하거나 이어지는 항이나 중간항의 빈 항을 구하는 활동을 다루는 데 비해, 4학년 교과서에서는 대부분 순서에 따라 패턴의 구성 요소 중 일부가 규칙적으로 증가하는 형태의 패턴을 제시하고 이어지는 항을 수나 식으로 표현하거나 규칙을 이야기하는 활동이 제시되어 있다(교육부, 2023b; 방정숙, 이수진, 2023). 결국 2학년과 4학년에서 제시하는 패턴의 유형과 주요 학습 내용에는 차이가 있으며, 3학년에서는 패턴 활동을 주로 다루지 않고 있다.

본 연구는 초등학교 학생들에게 꾸준히 강조되는 함수적 사고의 중요성에도 불구하고 우리나라 2, 3학년 학

* 접수일(2023년 11월 10일), 심사(수정)일(2023년 11월 29일), 게재확정일(2023년 12월 12일)

* MSC2000분류 : 97H20

* 주제어 : 학생 이해, 규칙 찾기, 패턴의 구조, 기하 패턴, 증가 패턴

† 교신저자 : kimleena@hanmail.net

생들의 패턴에 대한 이해 실태를 면밀하게 탐색한 선행 연구가 많지 않음에 주목하였다. 또한 패턴에 대하여 1, 2학년의 규칙 찾기 단원을 통하여 학습한 2학년 학생들과 3학년 교육과정에서 명시적으로 패턴을 학습하지 않은 학생들의 패턴에 대한 이해 정도를 살펴본 연구가 없다는 점을 고려하여 2학년 학생들과 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태를 비교하여 살펴보았다. 이는 초등학생들의 패턴에 대한 이해는 저절로 발달하는 것이 아니라는 주장(Kieran et al., 2016)과, 패턴 활동을 포함한 초기 대수(early algebra) 학습에 참여하였다고 해도 1년 동안 관련된 학습을 하지 않은 경우 거의 모든 영역에서 학생들의 문제 해결력이 감소하였다는 연구 결과(Stephens et al., 2021)를 고려한 것이다. 이에 본 연구에서는 특정 학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태를 자세히 조사할 뿐만 아니라 패턴에 대한 이해 정도를 전반적으로 파악할 수 있는 동일한 검사지를 활용하여 두 개 학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태를 비교하였다. 특히 3학년 학생들의 이해 실태는 2학년 때까지 배운 내용을 잘 이해하고 있는지, 4학년의 규칙 찾기 단원을 학습할 준비가 어느 정도 되어 있는지 알아보는 데 도움이 될 것으로 기대된다. 본 연구를 통하여 초등학교 저학년에서 다루는 패턴 학습의 내용과 지도 방안에 대한 시사점을 논의하고자 하였다.

II. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 패턴에 대한 초등학교 2, 3학년 학생들의 이해

본 연구는 초등학교 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 정도를 알아보는 것이 목적이므로 패턴 학습을 다룬 선행 연구 중 초등학교 2, 3학년 학생들을 대상으로 한 연구 내용을 중점적으로 살펴보았다. 우선 선행 연구는 공통적으로 초등학교 2, 3학년 학생들이 반복 패턴과 증가 패턴의 구조를 이해할 수 있다고 보고한다. 유치원생과 초등학교 1학년 학생들을 대상으로 반복 패턴의 구조와 규칙에 대하여 지도한 결과, 학생들은 반복 패턴에 대하여 충분히 이해하는 것으로 드러났다(예, Rittle-Johnson et al., 2019; Wijns et al., 2021). 이는 초등학교 2, 3학년 학생들도 반복 패턴을 잘 이해할 수 있음을 시사한다.

한편, 초등학교 2, 3학년 학생들에게 증가 패턴에 대하여 지도하고 그 과정을 상세하게 서술한 연구들에 따르면 학생들은 증가 패턴의 구조를 분석하여 규칙을 찾아낼 수 있었다. 예를 들어, Moss와 London McNab(2011)은 초등학교 2학년 학생들을 대상으로 증가 기하 패턴을 제시하였는데 학생들은 패턴에 대한 규칙을 식별하는 능력이 향상되었다. 또한 위치 번호(position number)를 사용하여 패턴의 규칙을 탐색하였으며 주어진 규칙을 기반으로 패턴을 구성하는 것도 가능하였다. Radford(2010)는 초등학교 3학년 학생들이 증가 기하 패턴에서 규칙을 발견하고 특정한 항을 구할 뿐만 아니라 위치 번호와 패턴을 연결하여 규칙을 일반화할 수 있다는 것을 밝혔다. Mulligan 외(2020)는 증가 패턴을 지도하기 위하여 블록을 조작하는 방법으로 패턴의 구조를 분석하게 하였고, 이때 항의 순서와 블록의 수를 연결하여 학생들의 패턴에 대한 이해를 도왔는데, 그 결과 프로그램에 참여한 학생들은 그렇지 않은 학생들보다 패턴의 구조에 대한 인식을 전반적으로 잘하는 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과들을 종합하면 초등학교 2, 3학년 학생들은 반복 패턴은 물론이고 증가 패턴에 대하여 이해하는 것이 충분히 가능하다고 볼 수 있다.

또한, 선행 연구는 초등학교 2, 3학년 학생들이 패턴의 외형적인 속성을 뛰어넘어 패턴의 구조에 대한 이해를 바탕으로 기하 패턴과 수 패턴을 연결할 수 있음을 보고한다. 예를 들어, Radford(2011)는 초등학교 2학년 학생들에게 증가 기하 패턴을 제시하고 학생들이 규칙을 일반화하는 과정을 연구하였는데, 학생들이 증가 기하 패턴에서 각 항을 구성하고 있는 도형의 개수를 세어 증가 수 패턴으로 연결하면서 규칙성에 대하여 점진적으로 파

약하다고 하였다. 학생들은 패턴의 각 항에 제시된 도형을 그리면서 동시에 도형의 수를 세는 행위를 통하여 규칙을 정교화하고 구체화하는 것이 가능하였다. 이와 같은 연구는 초등학교 2, 3학년 학생들이 증가 기하 패턴과 증가 수 패턴 각각을 이해하는 것뿐만 아니라 두 패턴을 연결하여 사고할 수 있음을 시사한다.

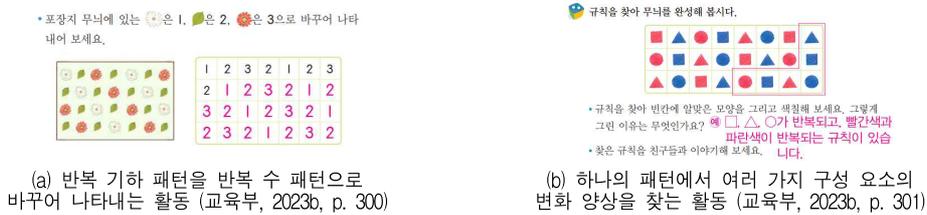
나. 초등학교 2, 3학년 교과서에 제시된 패턴 학습 활동과 관련된 내용

본 연구의 대상이 초등학교 2, 3학년 학생들이기 때문에 이 학생들이 학습한 패턴 학습 활동을 간단히 정리해 보면 다음과 같다. 우선 초등학교 2학년 교과서의 규칙 찾기 단원을 살펴본 결과(교육부, 2023a), 패턴의 유형으로 반복 기하 패턴, 증가 기하 패턴, 반복 수 패턴, 증가 수 패턴을 모두 다루고 있는 것으로 드러났다. 다만, 증가 기하 패턴은 구슬 꿰기 활동([그림 II-1]의 (a))과 쌓기나무 활동([그림 II-1]의 (b))에서만 다루고 있었다.



[그림 II-1] 초등학교 2학년 교과서에 제시된 증가 기하 패턴 활동

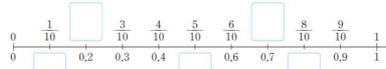
활동의 내용으로는 제시된 패턴을 따라서 만들기, 반복되는 부분 찾기, 반복 기하 패턴을 반복 수 패턴으로 바꾸어 나타내기, 하나의 패턴에서 여러 가지 구성 요소의 변화 양상 찾기, 패턴에서 이어지는 하나 또는 여러 개의 항 구하기, 패턴 중간의 빈 항 구하기, 패턴의 규칙 말하기, 규칙을 만들어서 무늬 꾸미기가 제시되었다(방정숙 외, 2023). 구체적으로 제시된 패턴을 따라서 만들기는 교과서에 제시된 상자를 쌓은 그림을 보고 쌓기나무를 활용하여 똑같이 쌓아 보는 활동이다. 반복되는 부분 찾기는 벽지의 무늬를 보고 반복되는 모양을 찾는 활동이다. 반복 기하 패턴을 반복 수 패턴으로 바꾸어 나타내는 [그림 II-2]의 (a)와 같이 흰 꽃, 잎, 빨간 꽃, 잎이 반복되는 포장지를 보고 흰 꽃은 1, 잎은 2, 빨간 꽃은 3으로 바꾸어 표현하는 활동이다. 하나의 패턴에서 여러 가지 구성 요소의 변화 양상을 찾기는 [그림 II-2]의 (b)와 같이 하나의 패턴이지만 모양의 변화 양상과 색의 변화 양상이 다르게 나타나는 패턴에서 규칙을 찾는 활동이다. 패턴에서 이어지는 하나 또는 여러 개의 항 구하기는 주어진 패턴에서 다음에 올 항을 구하는 활동이고, 패턴 중간의 빈 항 구하기는 덧셈표나 곱셈표에서 빈 곳에 들어갈 수를 구하는 활동으로 제시되었다. 패턴의 규칙 말하기는 주로 ‘규칙을 말해 보세요’라고 제시되었으며 학생들이 주어진 패턴을 보고 규칙이 무엇인지 설명하는 활동이다. 규칙을 만들어서 무늬 꾸미기는 짝이 정한 규칙에 맞게 이어진 모양을 만드는 활동으로 지도서에서는 친구가 만들고자 의도했던 규칙이 아닐지라도 다른 규칙을 발견하여 이어진 모양을 만든 경우 친구들끼리 의논하여 합당한 규칙이라면 정답으로 인정하게 하고(교육부, 2023b, p. 302), 색깔과 모양 등이 혼합된 독창적인 문제를 만들도록 안내하였다(교육부, 2023b, p. 303).



[그림 II-2] 초등학교 2학년 교과서에 제시된 활동의 내용

한편, 초등학교 3학년 교과서에서는 패턴을 중점적으로 다루는 단원이 없으며, 대부분의 검정 교과서에서 패턴과 관계있는 활동을 간헐적으로 제시하고 있었다. 예를 들어, 3학년 1학기 분수와 소수 단원에서는 분수를 소수로 또는 소수를 분수로 바꾸는 활동을 제시하고 있다([그림 II-3]의 (a) 참고). 이러한 활동은 제시된 분수와 소수를 $\frac{1}{10}$ 또는 0.1씩 증가하는 증가 수 패턴으로 간주하고, 뛰어 세기를 활용하여 빈칸에 수를 써넣게 할 수도 있다. 또한 많은 교과서에서는 나눗셈 단원을 학습하면서 [그림 II-3]의 (b)와 같은 곱셈표가 제시되어 있는데, 이는 2학년 규칙 찾기 단원에서도 다루는 형태의 표이며 증가 수 패턴과 관련이 있다. 그러나 이러한 활동의 초점은 규칙을 찾는 것이 아니라 분수와 소수의 관계, 곱셈과 나눗셈의 관계 파악에 있기 때문에 학생들이 패턴 학습을 한다고 보기 어려울 수 있다.

□ 안에 알맞은 분수 또는 소수를 써넣어 봅시다.



(a) (강완 외, 2023, p. 139)

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81



(b) (박성선 외, 2023, p. 65)

[그림 II-3] 초등학교 3학년 1학기 교과서에 제시된 패턴과 관련이 있는 활동

또한, 3학년 2학기 원 단원에서는 크기가 같은 원을 규칙에 따라 반복하여 그리는 활동([그림 II-4]의 (a) 참고)과 일정한 규칙에 따라서 커지는 원 사이의 규칙을 파악하여 이어지는 원을 그리는 활동([그림 II-4]의 (b) 참고)을 제시한 활동이 있었다. 이는 반복 기하 패턴, 증가 기하 패턴을 다루는 것으로 볼 수 있다. 또한 나만의 규칙을 정하여 원으로 작품을 만드는 활동을 제시한 경우도 있었다([그림 II-4]의 (c) 참고). 나눗셈 단원에서는 달력의 규칙을 찾는 활동을 하며 규칙을 이용하여 100일 뒤의 요일을 구하는 발문을 제시하고 있었다([그림 II-4]의 (d) 참고). 이는 증가 수 패턴의 규칙을 알고 먼 항의 값을 구하는 활동으로 간주할 수 있다. 다만, 이러한 활동들이 해당 교과서에서 간헐적으로 등장하기 때문에 각각의 검정 교과서로 학습하는 학생들 입장에서는 패턴 학습을 중점적으로 하고 있다고 보기는 어렵다.



• 세준이와 가은이는 그림에 어떤 규칙이 있는지 설명하고 있습니다. □ 안에 알맞은 수를 써넣고 알맞은 말에 ○표 하세요.

원의 중심은 오른쪽으로 □ 칸씩 옮겨 가고 있어

원의 반지름은 (변하는, 변하지 않는) 규칙이다

• 규칙에 따라 원을 3개 더 그려 보세요.

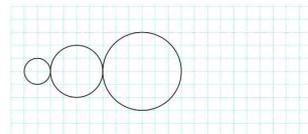
(a) (김성여 외, 2023, p. 85)

나만의 규칙을 정하여 원으로 작품을 만들어 보세요.



(c) (박교식 외, 2023, p. 75)

규칙을 찾아 원을 1개 더 그리고, 규칙을 설명해 보세요.



(b) (장혜원 외, 2023, p. 49)

주	월	수	목	금	토	일
1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
8일	9일	10일	11일	12일	13일	14일
15일	16일	17일	18일	19일	20일	21일

⑦ 7, 14는 주로 나누면 나머지가 □ 일/가 되는 수이므로

7일 뒤, 14일 뒤는 □ 요일입니다.

⑧ 8, 16은 주로 나누면 나머지가 □ 일/가 되는 수이므로

8일 뒤, 16일 뒤는 □ 요일입니다.

⑨ 9, 18은 주로 나누면 나머지가 □ 일/가 되는 수이므로

9일 뒤, 18일 뒤는 □ 요일입니다.



(d) (한대희 외, 2023, p. 53)

[그림 II-4] 초등학교 3학년 2학기 교과서에 제시된 패턴과 관련이 있는 활동

2. 연구 방법 및 절차

가. 연구 대상 및 자료 수집

본 연구는 2학년과 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태를 비교 분석하는 것이므로, 학교를 먼저 선정하고 그 학교의 2학년과 3학년 학급을 각각 1반씩 선택하였다. 이때 학교 선정은 임의 표집하였으나, 가능한 여러 지역을 포함하였으며, 대도시 2학급, 중소도시 6학급, 읍면지역 4학급씩 학년당 12학급을 선정하여, 결과적으로 초등학교 2학년 216명과 3학년 223명을 대상으로 진행하였다. 2학년의 경우 2학년 2학기 6단원 규칙 찾기 단원을 학습한 이후 검사를 실시하였으며 3학년은 2학년과 같은 시기에 검사하였다. 본 연구에서 사용한 검사지는 방정숙 외(2023)의 연구에서 제시한 검사 도구를 활용하였으며 검사 시간은 80분을 할당하였다. 검사지는 우편을 통해 발송 및 회수하였고, 수거한 검사지를 모두 분석 대상으로 하였다.

나. 검사 도구

검사 도구는 크게 두 가지 내용, 즉 패턴의 구조를 파악하기와 패턴에서 특정한 항을 탐색하기로 구성되어 있다. 전자의 경우 다시 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항과 패턴 간 구조를 비교하기 문항으로 세분되어 있다. 후자의 경우 패턴의 특정한 항을 구하기 문항과 패턴의 특정한 항을 추측하기 문항으로 세분되어 있다. 검사 도구의 문항은 유형별로 살펴보면 14개이며, 문항의 특성에 따라 세부 문항을 포함하고 있어서 총 문항의 수는 46개이다. 각 문항을 살펴보면 다음과 같다.

패턴의 구조를 파악하기 문항 중 1~6번 문항, 즉 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항은 <표 II-1>과 같이 제시하였다. 학생들이 답안을 작성하는데 어려움을 겪지 않도록 예시 답안을 제시하였으며, 특히 여러 가지 답이 나올 수 있는 2번 문항은 답안의 예시를 여러 가지로 제시하였다. 또한 5번과 6번은 답안을 글로 쓰게 되어 있어 예시 답안에서 모양(또는 수)과 색에 대한 부분을 명확하게 제시하였다.

<표 II-1> 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항의 예시(1~6번 문항)

<p>1-(1)~(5). 반복 기하 패턴의 반복 단위 찾기</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 그림을 보고, 반복되는 부분을 ○로 표시해 봅시다.</p> 	<p>2-(1)~(5). 증가 기하 패턴의 변하지 않는 부분 찾기</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 그림을 보고, 변하지 않는 부분을 ○로 표시해 봅시다.</p> 
<p>3-(1)~(5). 반복 수 패턴의 반복 단위 찾기</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 수를 보고, 반복되는 부분을 ○로 표시해 봅시다.</p> <p>1 4 8 8 1 4 8 8 1 4 8 8</p>	<p>4-(1)~(5). 증가 수 패턴에서 일정하게 커지거나 작아지는 수 찾기</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 수를 보고, 수가 얼마만큼 커지는지 또는 작아지는지 써 봅시다.</p> <p>20 30 40 50 60 ()씩 (커진다, 작아진다)</p>
<p>5-(1)~(4). 기하 패턴에서 다양한 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 찾기(모양, 색)</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 그림을 보고, 슬기와 준기와 같이 다양한 규칙을 찾아 써 봅시다.</p> 	<p>6-(1)~(4). 수 패턴에서 다양한 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 찾기(수, 색)</p> <p>규칙적으로 놓여 있는 다음 수를 보고, 슬기와 준기와 같이 다양한 규칙을 찾아 써 봅시다.</p> <p>4 6 4 4 6 4 4 6 4 4 6 4</p>

<표 II-3> 패턴의 특정한 항을 구하기 문항(11~12번)의 예시와 추측하기 문항(13~14번 문항)

11-(1)~(6). 패턴의 빈 항을 구하기(반복 패턴)	12-(1)~(6). 패턴의 빈 항을 구하기(증가 패턴)																								
규칙에 따라 빈칸에 알맞은 모양을 그리거나 수를 써 봅시다.	규칙에 따라 빈칸에 알맞은 모양을 그리거나 수를 써 봅시다.																								
	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td><td>17</td><td></td> </tr> <tr> <td>69</td><td>66</td><td></td><td>60</td><td>57</td><td></td><td>51</td><td>48</td> </tr> <tr> <td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td><td>36</td><td>42</td><td></td><td></td> </tr> </table>	5	7	9	11	13	15	17		69	66		60	57		51	48	12	18	24	30	36	42		
5	7	9	11	13	15	17																			
69	66		60	57		51	48																		
12	18	24	30	36	42																				
13. 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유 설명하기 (반복 패턴, 증가 패턴 모두 가능)	14. 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유 설명하기 (반복 패턴만 가능)																								
규칙에 따라 ★에 올 수 있는 수를 있는 대로(모두) 쓰고 그 이유를 써 봅시다.	규칙에 따라 ★에 올 수 있는 수를 있는 대로(모두) 쓰고 그 이유를 써 봅시다.																								
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>2</td><td>3</td><td>★</td><td></td><td></td><td></td><td></td> </tr> </table>	2	3	★					<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>2</td><td>3</td><td>★</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td></td> </tr> </table>	2	3	★	3	2	3											
2	3	★																							
2	3	★	3	2	3																				
★에 올 수 있는 수: 이유:	★에 올 수 있는 수: 이유:																								

다. 자료 분석

우선 수집한 학생들의 응답을 정답과 오답으로 구분하였다. 이때, 5번과 6번 문항은 모양(수)의 변화와 색의 변화를 모두 맞힌 경우, 정답이지만 모양(수)의 변화만 맞힌 경우와 색의 변화만 맞힌 경우가 있어서 학생들의 응답을 자세히 알아보고자 오답의 유형을 나누어 코딩하였다. 7번 문항은 반복 패턴에 초점을 둔 문항이므로 패턴의 속성인 기하에 초점을 두어 2번을 고른 학생은 오답으로 간주하였다. 이와 유사하게 8번 문항은 증가 패턴에 초점을 둔 문항이므로 패턴의 속성인 수에 초점을 두어 1번을 고른 학생은 오답으로 간주하였다. 다만 오답이라 할지라도 교육적 함의가 있을 수도 있겠다고 판단되어 이러한 학생들도 따로 코딩하여 응답의 경향성을 자세히 파악하고자 하였다. 9번, 10번 문항은 3개의 응답을 기록할 수 있게 하였기 때문에 맞힌 개수를 세어 0, 1, 2, 3점으로 코딩하였다. 이때 규칙을 서술하지 않았거나 서술한 규칙에 오류가 있는 경우는 오답으로 처리하였다. 그중 10번 문항은 $2n+1$ 의 규칙을 가진 기하 패턴을 수 패턴으로 바꾸어 표현하는 문항으로 수 또는 식을 쓰게 제시되었다. 이때 학생들의 응답이 다양하게 산출되어 모든 응답을 유형별로 분류하였다. 그 결과 12개의 유형이 도출되었으며 2, 3학년의 응답 합계가 10 미만인 경우를 기타로 처리하였다. 13번과 14번 문항은 패턴의 특정한 항을 추측하여 5개의 패턴을 만들도록 제시하였다. 이에 ★에 올 수 있는 수와 그에 따른 이유를 바르게 서술한 것의 개수를 세어 0~5점의 점수를 부여하였다. 이때 13번 문항은 반복 패턴과 증가 패턴이 모두 가능하므로 반복 패턴으로 맞힌 경우와 증가 패턴으로 맞힌 경우를 따로 코딩하였다. 이처럼 정답을 세분하여 코딩한 것은 학생들의 패턴에 대한 이해를 보다 자세히 알아보기 위함이었고 경향성의 학년 간 차이를 비교하기 위함이었다. 코딩된 자료는 SPSS 18.0을 사용하여 분석하였으며 독립표본 t-검정과 빈도 분석 및 교차 분석을 활용하였다. 본 연구에서 사용한 검사 도구의 Cronbach's α 값은 .875로 문항 간 내적 일치도가 확인되었다.

III. 연구 결과

1. 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항의 분석 결과

패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항에 대한 분석 결과는 <표 III-1>과 같다. 전체적으로 기하 패턴(1, 2, 5번 문항)에 비해 수 패턴(3, 4, 6번 문항)에 대한 문항들의 정답률이 높았지만 하나의 패턴에서 다양한 구성 요소 등을 찾는 문항(5, 6번 문항)에서는 기하 패턴과 수 패턴 둘 다에서 학생들이 어려움을 보였다. 기하 패턴과 수 패턴의 반복 단위를 찾는 문항에서 2학년보다 3학년의 정답률이 높게 나타났으나

AABB의 반복 단위를 가진 반복 기하 패턴을 제외하고 학년 간 차이는 유의하지 않았다. 반면 증가 패턴에서는 증가 수 패턴의 일부 문항(4-(4), 4-(5)번 문항)을 제외하고는 2학년의 성취도가 전반적으로 높게 나타났으나, 학년 간 차이는 증가 기하 패턴의 2n, 제곱 모양에서만 유의한 것으로 드러났다. 증가 수 패턴에서 15씩 감소하는 패턴(4-(4)번 문항)의 경우 2학년보다 3학년의 성취도가 월등하게 높은 것으로 나타났다. 이 문항에서 제시한 수 패턴은 '100, 85, 70, 55, 40'인데 이에 대하여 '25씩 작아진다'라고 응답한 2학년 학생들이 다수 발견되어 오답률이 증가하였다. 한편, 하나의 패턴에서 다양한 구성 요소인 모양(수)이나 색의 구조를 탐색하는 문항(5, 6번 문

<표 III-1> 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하기 문항의 독립표본 t-검정 결과

문항 내용 및 규칙			2학년 M(SD)	3학년 M(SD)	t(437)	p
1. 반복 기하 패턴의 반복 단위 찾기						
(1)	ABCC		.89(.315)	.91(.280)	-.912	.362
(2)	AAB		.90(.303)	.95(.226)	-1.877	.061
(3)	AABB		.84(.369)	.91(.286)	-2.289	.023*
(4)	ABC		.92(.277)	.95(.226)	-1.221	.223
(5)	ABBC		.91(.284)	.94(.243)	-.997	.319
2. 증가 기하 패턴의 변하지 않는 부분 찾기						
(1)	삼각형		.90(.297)	.88(.322)	.655	.513
(2)	2n		.88(.321)	.80(.399)	2.365	.018*
(3)	제곱		.89(.309)	.82(.385)	2.192	.029*
(4)	ㄱ자형(+2)		.90(.297)	.86(.347)	1.358	.175
(5)	L자형(+1)		.90(.297)	.87(.337)	1.083	.279
3. 반복 수 패턴의 반복 단위 찾기						
(1)	ABCC		.97(.177)	.97(.162)	-.339	.735
(2)	AAB		.94(.247)	.94(.243)	-.087	.931
(3)	AABB		.95(.211)	.96(.197)	-.305	.761
(4)	ABC		.91(.291)	.94(.235)	-1.358	.175
(5)	ABBC		.94(.230)	.96(.197)	-.745	.457
4. 증가 수 패턴에서 일정하게 커지거나 작아지는 수 찾기						
(1)	+10		.98(.135)	.98(.148)	.288	.774
(2)	+5		.97(.165)	.95(.217)	1.174	.241
(3)	-2		.92(.270)	.88(.322)	1.339	.181
(4)	-15		.77(.423)	.91(.286)	-4.102	.000***
(5)	-5		.95(.220)	.97(.162)	-1.297	.195
5. 기하 패턴에서 다양한 구성 요소 등을 찾기(모양, 색)						
(1)	ABA	ABCC	.59(.493)	.44(.498)	3.043	.002**
(2)	ABC	AABB	.70(.460)	.62(.486)	1.677	.094
(3)	+1	+1	.44(.498)	.32(.467)	2.734	.007**
(4)	-1	-1	.42(.494)	.28(.451)	2.968	.003**
6. 수 패턴에서 다양한 구성 요소 등을 찾기(수, 색)						
(1)	ABA	ABCC	.60(.491)	.48(.501)	2.484	.013*
(2)	ABC	AABB	.74(.439)	.56(.498)	4.124	.000***
(3)	+3	+1	.51(.501)	.45(.498)	1.372	.171
(4)	-4	-1	.54(.500)	.47(.500)	1.481	.139

*p<.05, **p<.01, ***p<.001

항)에서는 2학년 학생들의 성취도가 3학년에 비하여 높게 나타났다. 특히 5번 문항에서는 4개의 하위 문항 중 3개 문항의 학년 간 차이가 유의하게 나타났다, 6번 문항에서는 반복 패턴과 관련된 문항에서만 학년 간 차이가 유의하게 나타났다.

5번 문항은 하나의 기하 패턴에서 모양과 색의 변화를 모두 찾아야 하지만 둘 중 하나의 변화만 맞힌 학생이 많은 편이었다(<표 III-2> 참고). 전체적으로 증가 패턴(5-(3), 5-(4)번 문항)보다 반복 패턴((5-(1), 5-(2)번 문항)의 정답률이 높게 나타났으며 3학년보다 2학년의 정답률이 높게 나타났다. 하위 문항별로 살펴보면, 하위 문항 5-(1)은 모양은 ABA의 반복 단위, 색은 ABCC의 반복 단위를 가진 패턴이다. 오답의 유형을 살펴보면 2학년 학생들은 색의 변화만 탐색한 경우가 19.9%로 나타났다. 반면 3학년 학생들은 모양의 변화만 탐색한 경우가 26.9%로 높게 나타났다. 하위 문항 5-(2)는 모양은 ABC, 색은 AABB의 반복 단위를 가진 반복 패턴이며 하위 문항 5-(1)에 비하여 정답률이 2학년과 3학년 모두 높았다. 두 학년 모두 모양의 변화만을 탐색한 학생이 색의 변화만을 탐색한 학생보다 많은 것으로 나타났으며 하위 문항 5-(1)과 비교하면 색의 변화를 탐색한 학생의 수가 확연하게 줄어든 것을 알 수 있다. 하위 문항 5-(3)은 모양과 색이 모두 1개씩 증가하는 패턴으로 모양의 변화만 탐색한 학생이 30% 이상으로 나타나 정답률이 낮아졌다. 하위 문항 5-(4)는 모양과 색이 모두 1개씩 감소하는 패턴으로 하위 문항 5-(3)과 비슷한 경향을 나타냈으나 학생들이 모양이나 색의 수가 증가하는 것보다 감소하는 것에 더 어려움을 보인 것을 알 수 있다.

<표 III-2> 5번 문항의 세부 코딩에 따른 빈도

문항	규칙		2학년(n=216)				3학년(n=223)			
	모양	색	정답	모양만 맞힘	색만 맞힘	모두 틀림	정답	모양만 맞힘	색만 맞힘	모두 틀림
(1)	ABA	ABCC	127 (58.8%)	22 (10.2%)	43 (19.9%)	24 (11.1%)	99 (44.4%)	60 (26.9%)	26 (11.7%)	38 (17.0%)
(2)	ABC	AABB	151 (69.9%)	34 (15.7%)	16 (7.4%)	15 (6.9%)	139 (62.3%)	57 (25.6%)	8 (3.6%)	19 (8.5%)
(3)	+1	+1	96 (44.4%)	65 (30.1%)	4 (1.9%)	51 (23.6%)	71 (31.8%)	80 (35.9%)	3 (1.3%)	69 (30.9%)
(4)	-1	-1	90 (41.7%)	64 (29.6%)	5 (2.3%)	57 (26.4%)	63 (28.3%)	81 (36.3%)	5 (2.2%)	74 (33.2%)

6번 문항은 하나의 수 패턴에서 수와 색의 변화를 찾는 것으로 5번 문항에 비하여 대체로 정답률이 약간 높게 나타났다(<표 III-3> 참고). 5번 문항과 마찬가지로 증가 패턴(6-(3), 6-(4)번 문항)보다 반복 패턴(6-(1), 6-(2)번 문항)에서 3학년보다 2학년의 정답률이 높게 나타났다. 또한 모든 문항에서 색의 변화만 탐색한 학생보다 수의 변화만 탐색한 학생이 많다는 특징이 있다. 하위 문항별로 살펴보면, 하위 문항 6-(1)은 2학년은 수의 변화만 탐색한 학생의 수와 색의 변화만 탐색한 학생의 수가 크게 차이가 나지 않은 반면, 3학년의 경우 약 2배의 차이가 났다. 하위 문항 6-(2)는 6번 문항에서 정답률이 가장 높았지만 3학년의 경우 같은 규칙으로 제시된 하위 문항 5-(2)와 비교했을 때 정답률이 낮아진 것을 발견할 수 있다. 하위 문항 6-(3)은 수는 3씩 증가하고 색은 1씩 증가하는 패턴으로 색의 변화만을 탐색한 학생의 수가 매우 적게 나타났다. 하위 문항 6-(4)는 수는 4씩, 색은 1씩 감소하는 패턴인데 5번 문항과는 달리 수나 색이 증가하는 패턴에 비해 정답률이 조금 높게 나타났으며 하위 문항 6-(3)과 마찬가지로 색의 변화만을 탐색한 학생은 매우 적었다.

<표 III-3> 6번 문항의 세부 코딩에 따른 빈도

문항	규칙		2학년(n=216)				3학년(n=223)			
	수	색	정답	수만 맞힘	색만 맞힘	모두 틀림	정답	수만 맞힘	색만 맞힘	모두 틀림
(1)	ABA	ABCC	130 (60.2%)	30 (13.9%)	24 (11.1%)	32 (14.8%)	108 (48.4%)	55 (24.7%)	26 (11.7%)	34 (15.2%)
(2)	ABC	AABB	160 (74.1%)	34 (15.7%)	9 (4.2%)	13 (6.0%)	124 (55.6%)	52 (23.3%)	18 (8.1%)	29 (13.0%)
(3)	+3	+1	111 (51.4%)	86 (39.8%)	5 (2.3%)	14 (6.5%)	100 (44.8%)	105 (47.1%)	2 (.9%)	16 (7.2%)
(4)	-4	-1	116 (53.7%)	81 (37.5%)	4 (1.9%)	15 (6.9%)	104 (46.6%)	101 (45.3%)	4 (1.8%)	14 (6.3%)

정리하면, 패턴의 구조를 파악하는 활동 중 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 파악하는 내용의 문항에서는 2학년과 3학년의 정답률이 비슷하게 나타났다. 반복 수 패턴의 반복 단위를 구하는 문항을 제외하고 학년 간 차이가 유의한 문항은 문항별 1~2개로 나타났다. 또한 하나의 패턴에서 모양(수)이나 색 등의 다양한 구성 요소를 찾는 내용의 문항에서는 2학년의 정답률이 높게 나타났으며 학년 간 차이가 유의한 문항이 절반 이상으로 나타났다. 학생들은 하나의 패턴에서 여러 가지 규칙을 발견할 수 있는 문항이 제시된 경우 색을 제외한 모양이나 수의 변화에서만 규칙을 탐색하려고 하는 경향이 있었다.

2. 패턴 간 구조를 비교하기 문항의 분석 결과

패턴 간 구조를 비교하는 문항의 분석 결과는 <표 III-4>와 같다. 분석 결과, 반복 기하 패턴을 반복 수 패턴으로 바꾸어 표현하는 문항을 제외하고 학년 간 차이는 유의하지 않게 나타났다. 또한 반복 패턴의 경우 2학년 학생들이 3학년 학생들보다 정답률이 높았고, 증가 패턴의 경우는 3학년 학생들의 정답률이 더 높았다. 하지만 9번 문항을 제외하고 다른 문항들의 정답률은 전반적으로 낮게 나타났다.

<표 III-4> 패턴 간 구조를 비교하기 문항의 독립표본 t-검정 결과

문항 내용과 규칙	2학년 M(SD)	3학년 M(SD)	t(437)	p
7. 구조가 유사한 패턴 찾기(반복 패턴)				
AB	.63(.485)	.57(.496)	1.185	.237
8. 구조가 유사한 패턴 찾기(증가 패턴)				
+2	.53(.500)	.57(.497)	-.685	.493
9. 기하 패턴을 수 패턴으로 바꾸어 표현하기(반복 패턴)				
AB	.97(.177)	.90(.305)	2.982	.003**
10. 기하 패턴을 수 패턴으로 바꾸어 표현하기(증가 패턴)				
L자형(+2)	1.49(.945)	1.58(.904)	-.982	.326

**p<.01

7번 문항에서 답과 이유를 모두 맞힌 학생은 2학년 62.5%, 3학년 57.0%로 나타났다. <표 III-5>에서 볼 수 있듯이, 216명의 2학년 학생들 중 정답을 맞혔으나 이유를 틀리게 서술하거나 이유를 서술하지 않은 학생은 29명이었다. 또한 나머지 선택지 중 2번을 답으로 선택한 학생은 29명으로 가장 많았는데, 그중 기하 패턴이기 때문이라고 이유를 서술한 학생은 6명이었다. 223명의 3학년 학생들 중 정답을 맞혔으나 이유를 틀리게 서술한 학생은 25명, 2번을 답으로 선택한 학생 34명 중 기하 패턴임을 이유로 서술한 학생은 15명이었다. 이는 문항에서 주어진 패턴의 생성 방식인 반복, 증가 패턴에 초점을 맞추지 않고 패턴의 속성인 수, 기하 패턴에 초점을 맞추는 학생이 3학년에서 더 많았음을 의미한다.

<표 III-5> 7번 문항의 세부 코딩에 따른 빈도

학년	정답(③)	오답				
		정답을 맞혔지만 틀린 이유 또는 이유 없음	①을 선택함	②를 선택함	④를 선택함	무응답
2학년(n=216)	135(62.5%)	29(13.4%)	4(1.9%)	29(13.4%)	4(1.9%)	15(6.9%)
3학년(n=223)	127(57.0%)	25(11.2%)	6(2.7%)	34(15.2%)	5(2.2%)	26(11.7%)

8번 문항에서는 2학년 53.2%, 3학년 56.5%의 학생이 정답과 이유를 모두 맞혔으며 반복 패턴에 비하여 정답률이 낮았다. 답은 맞혔으나 틀린 이유를 서술하거나 이유를 서술하지 않은 학생은 2학년 16명, 3학년 9명으로 나타났다(<표 III-6> 참고). 3번을 답으로 선택한 학생 중 수 패턴이기 때문이라고 응답한 학생은 2학년의 경우 21명 중 4명으로 다소 낮게 나타난 반면 3학년의 경우 36명 중 19명으로 나타났다. 즉, 2학년과 비교하여 3학년에서 패턴의 생성 방식에 초점을 맞추지 않고 패턴의 속성을 고려하여 패턴의 규칙을 탐색하고자 하는 학생들이 다수 발견되었다. 다만, 2학년 학생들은 반복 수 패턴인 1번을 선택한 학생들이 34명으로 보기에서 제시된 증가 수 패턴과 1번에서 제시된 반복 수 패턴을 명확하게 구분하지 못하는 학생들도 상당히 있음을 알 수 있다. 또한 7번 문항과 비교하면 정답을 맞혔지만 적절하지 않은 이유를 서술한 학생은 줄어든 반면, 1번이나 2번을 선택하거나 무응답인 학생이 모든 학년에서 증가한 것을 확인할 수 있다.

<표 III-6> 8번 문항의 세부 코딩에 따른 빈도

학년	정답(④)	오답				무응답
		정답을 맞혔지만 틀린 이유 또는 이유 없음	①를 선택함	②를 선택함	③을 선택함	
2학년(n=216)	115(53.2%)	16(7.4%)	34(15.7%)	6(2.8%)	21(9.7%)	24(11.1%)
3학년(n=223)	126(56.5%)	9(4.0%)	15(6.7%)	6(2.7%)	36(16.1%)	31(13.9%)

9번 문항에서는 2학년과 3학년 모두 정답률이 높았는데, 2학년 학생들의 정답률이 유의하게 높은 것으로 나타났다. 10번 문항에서 2학년의 점수는 3점 중 1.49, 3학년은 1.58로 반복 패턴에 비하여 훨씬 낮게 나타났다. 3학년의 점수는 2학년에 비하여 높게 나타나긴 하였으나 학년 간 차이가 유의하지 않았다.

10번 문항에서는 다양한 응답이 도출되었는데 이를 범주화하여 분석한 결과는 <표 III-7>과 같다. 2학년(n=216)은 1인당 1.49개, 3학년(n=233)은 1인당 1.52개의 응답을 서술한 것으로 볼 수 있다. 규칙을 수(1, 3, 5, 7, 9, ...)로 표현한 학생들의 수는 2학년과 3학년이 비슷하게 나타났다. 응답의 유형별 빈도 순서를 살펴보면 대부분 비슷하다는 것을 알 수 있으나 2번과 3번 유형에서 학년 간 차이가 있음을 알 수 있다. 규칙이 2씩 커지는 것을 식에서 명시적으로 표현한 2번 유형(1, 1+2, 3+2, 5+2, 7+2, ...)은 3학년 학생들이 더 많이 서술하였으며, 첫 항을 기준으로 추가된 도형의 수를 덧셈으로 표현한 3번 유형(1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8, ...)은 2학년 학생들이 더 많이 서술하였다.

<표 III-7> 증가 기하 패턴을 수 패턴으로 바꾸어 수나 식으로 표현하는 응답의 유형별 빈도

학년	응답의 유형*							합계
	①	②	③	④	⑤	⑥	기타	
2학년	175	48	56	17	9	6	11	322
3학년	178	77	47	18	11	8	14	353
합계	353	125	103	35	20	14	25	675

* ① 1, 3, 5, 7, 9, ..., ② 1, 1+2, 3+2, 5+2, 7+2, ..., ③ 1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8, ...,
 ④ 1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5, ..., ⑤ 1, 2+1, 2+3, 2+5, 2+7, ..., ⑥ 1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4, ...

정리하면, 패턴 간 구조를 비교하는 문항에서 반복 기하 패턴을 반복 수 패턴으로 바꾸어 표현하는 문항을 제외하고 학년 간 유의한 차이는 나타나지 않았다. 반복 패턴은 2학년, 증가 패턴은 3학년 학생들의 정답률이 높은 경향이 있었다. 구조가 유사한 패턴을 찾는 문항의 정답률은 높게 나타나지 않았으며 패턴의 속성을 고려하여 답을 찾는 오류를 보이는 학생들이 있었다. 증가 기하 패턴을 수 패턴으로 바꾸어서 수 또는 식으로 표현하는 문항의 경우 다양한 응답이 나타났으며 응답의 수에서는 학년 간에 큰 차이를 보이지 않았다.

3. 패턴의 특정한 항을 구하기 문항의 분석 결과

패턴의 특정한 항을 구하는 문항의 분석 결과는 <표 III-8>과 같다. 전체 문항에서 학년 간 차이는 유의하지 않은 것으로 나타났으며 반복 패턴에서는 2학년, 증가 패턴에서는 3학년 학생들의 정답률이 높은 경향이 있었다. 반복 패턴은 전반적으로 정답률이 높았으며, 증가 패턴은 이어지는 1개의 항을 구하는 유형의 정답률이 가장 높고 중간에 비어있는 2개를 구하는 유형과 이어지는 2개의 항을 구하는 유형의 순으로 정답률이 낮아졌다.

<표 III-8> 패턴의 특정한 항을 구하기 문항의 독립표본 t-검정 결과

문항 내용과 규칙			2학년 M(SD)	3학년 M(SD)	t(437)	p
11. 패턴의 빈 항을 구하기(반복 패턴)						
(1)	반복	이어지는 1개	.91(.291)	.90(.299)	.215	.830
(2)	기하	중간 2개	.97(.165)	.94(.235)	1.580	.115
(3)	패턴	이어지는 2개	.97(.165)	.93(.251)	1.954	.051
(4)	반복	이어지는 1개	.94(.238)	.91(.286)	1.175	.241
(5)	수	중간 2개	.93(.255)	.93(.259)	.094	.925
(6)	패턴	이어지는 2개	.95(.220)	.92(.266)	1.087	.278
12. 패턴의 빈 항을 구하기(증가 패턴)						
(1)	증가	이어지는 1개	.84(.369)	.87(.342)	-.791	.429
(2)	기하	중간 2개	.77(.423)	.77(.424)	.042	.966
(3)	패턴	이어지는 2개	.75(.434)	.81(.392)	-1.561	.119
(4)	증가	이어지는 1개	.91(.284)	.93(.259)	-.626	.532
(5)	수	중간 2개	.83(.374)	.88(.322)	-1.503	.134
(6)	패턴	이어지는 2개	.78(.414)	.84(.365)	-1.628	.104

패턴의 유형에 따라 결과를 살펴보면, 반복 패턴에서는 기하 패턴과 수 패턴의 여부보다는 어떠한 항을 구하는지에 따라서 정답률이 달라졌다. 우선 이어지는 1개의 항을 구하는 문항보다 이어지는 2개의 문항에서 정답률이 높게 나타나는 경향이 있었다. 본 연구에서는 이어지는 1개의 항을 구하는 문항의 경우 7개의 항을 제시하고

8항을 구하게 하였다. 이때 반복 기하 패턴의 경우 반복 단위를 ABC로 제시하였으며, 반복 수 패턴은 반복 단위를 AAB로 제시하였다. 즉 학생들은 반복 단위 ABC 문항에서는 'B', 반복 단위 AAB 문항에서는 'A'를 구해야 하는 상황이다. 구체적으로, 하위 문항 11-(1)에서는 '♡, □, △, ♡, □, △, ♡'를 제시하고 다음에 올 항을 구하게 하였다. 이때 학생들은 'B'에 해당하는 '□'을 써야 하지만 '△'을 써서 틀리는 학생들이 전체 학생 중 21명으로 나타났다. 이에 비하여 이어지는 2개의 항을 구하는 문항에서는 6개의 항을 제시하고 7, 8항을 구하게 하였으며, 반복 기하 패턴은 ABB, 반복 수 패턴은 ABC로 반복 단위를 제시하였다. 하위 문항 11-(3)을 예로 들면 '△, □, □, △, □, □'를 제시하고 반복 단위 중 'AB'에 해당하는 '△, □'가 답인 문항이다. 즉 학생들은 특정한 항을 구할 때 반복 단위의 중간부터 쓰는 것을 반복 단위의 처음부터 쓰는 것보다 다소 어려워한다는 것을 알 수 있다. 또한 중간 2개의 빈 항을 구하는 문항에서 학생들은 연속하는 중간의 빈 항을 구하는 것보다 연속하지 않는 중간의 빈 항을 구하는 것을 다소 어려워하였다. 하위 문항 11-(2)에서는 반복 단위를 AB로 하여 '○, △, ○, △, (), (), ○, △'와 같이 제시한 반면, 하위 문항 11-(5)에서는 '1, 5, (), 5, 1, (), 1, 5'를 제시하였는데 학생들은 후자의 유형에서 더 어려움을 보였다. 즉 반복 패턴에서는 어떤 반복 단위를 제시하는가 보다는 어떤 유형의 문항을 제시하는가에 따라서 학생들의 정답률에 차이가 있었다.

패턴의 특정한 항을 구하는 문항의 정답률은 전반적으로 높게 나타났으나, 증가 기하 패턴의 정답률은 다른 문항에 비하여 낮게 나타났다. 증가 기하 패턴에서 중간 2개의 빈 항을 구하는 유형은 2학년과 3학년의 정답률에서 거의 차이가 나지 않았으며 다른 문항에 비하여 문제를 해결하지 못한 학생들이 많았다. 또한 이어지는 1개의 항을 구하는 문항보다 이어지는 2개의 항을 구하는 문항에서 어려움을 보이는 학생이 많았는데 이러한 경향은 3학년에 비하여 2학년에서 더 두드러지게 나타났다. 본 연구에서 제시한 증가 기하 패턴은 패턴의 모양은 다르지만 오른쪽으로 2씩 증가한다는 점에서 동일한 규칙을 가지고 있다. 하지만 학생들은 이어지는 1개의 항을 구하는 것보다 중간 2개의 빈 항을 구하거나 이어지는 2개의 항을 구하는 것을 어려워하였다. 이러한 경향은 증가 수 패턴에서도 동일하게 나타났다. 본 연구에서는 이어지는 1개의 항을 구하는 문항은 2씩 증가, 중간 2개의 빈 항을 구하는 문항은 3씩 감소, 이어지는 2개의 항을 구하는 문항은 6씩 증가하는 규칙으로 모두 다르게 제시하였다. 그럼에도 불구하고 전반적으로 이어지는 1개의 항을 구하는 문항의 정답률이 다른 문항에 비하여 높게 나타났다.

정리하면, 2학년과 3학년 학생들은 패턴의 빈 항을 구하는 문항을 대부분 잘 해결하였으며 학년 간 차이는 유의하지 않게 나타났다. 반복 패턴에서는 반복 단위가 무엇인지보다는 문항의 유형에 따라 학생들의 정답률이 다르게 나타났다. 증가 패턴에서는 전반적으로 증가 패턴에서 중간 2개의 빈 항을 구하는 것에 학생들이 어려움을 겪는 경향이 있었으며, 이어지는 1개의 항을 구하는 것보다 2개의 항을 구하는 것에 어려움을 보였다.

4. 패턴의 특정한 항을 추측하기 문항의 분석 결과

패턴의 특정한 항을 추측하는 문항의 분석 결과는 <표 III-9>와 같다. 전반적으로 2학년 학생들의 점수가 3학년보다 높게 나타났으며 학년 간 차이는 유의하지 않게 나타났다. 또한 13번 문항보다 14번 문항에서 학생들은 어려움을 겪은 것으로 보인다.

<표 III-9> 패턴의 특정한 항을 추측하기 문항의 독립표본 t-검정 결과

문항 내용과 규칙	2학년 M(SD)	3학년 M(SD)	t(437)	p
13. 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유 설명하기				
반복 패턴, 증가 패턴	2.62(1.944)	2.30(1.892)	1.747	.081
14. 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유 설명하기				
반복 패턴	1.97(1.996)	1.80(1.852)	.897	.370

13번, 14번 문항의 학생들의 응답을 자세히 살펴보면 전반적으로 13번 문항은 약 20%, 14번 문항은 약 30%의 학생들이 ★에 올 수 있는 수를 추측하지 못하였다(<표 III-10> 참고). 13번 문항에서 두 학년 모두에서 공통적으로 발견할 수 있는 현상은 5개의 수를 추측한 학생의 수가 가장 많다는 것이다. 또한 1개 또는 5개의 수를 추측한 학생들보다 2~4개의 수를 추측한 학생의 수가 적게 나타났다. 다만 2학년의 경우 5개의 수를 추측한 학생이 3학년 학생들보다 다소 많아 전체적인 점수가 높게 나타난 것을 알 수 있다. 14번 문항의 경우 13번 문항에 비하여 평균 점수가 낮게 나타났다. 이를 통하여 ★에 올 수 있는 수를 1개 추측한 학생들이 13번 문항보다 증가하였고 이에 따라 2~5개를 추측한 학생의 수가 줄어들었음을 알 수 있다. 즉 학생들은 증가 패턴과 반복 패턴을 모두 고려할 수 있는 13번 문항에서 어려움을 덜 겪었다고 볼 수 있다. 이에 반해 14번 문항은 ‘23★’을 하나의 반복 단위로 인식하지 않으면 ‘23’을 반복 단위로 인식하여 ★에 올 수 있는 수를 2로만 응답하는 경향이 있었다. 이에 두 문항 간 점수의 차이가 있었던 것으로 생각할 수 있다.

<표 III-10> 패턴의 특정한 항을 추측하기 문항의 빈도

학년	13번 문항						14번 문항					
	0개	1개	2개	3개	4개	5개	0개	1개	2개	3개	4개	5개
2학년	47 (21.8%)	32 (14.8%)	25 (11.6%)	24 (11.1%)	28 (13.0%)	60 (27.8%)	71 (32.9%)	52 (24.1%)	21 (9.7%)	9 (4.2%)	11 (5.1%)	52 (24.1%)
3학년	49 (22.0%)	48 (21.5%)	31 (13.9%)	28 (12.6%)	20 (9.0%)	47 (30.0%)	71 (31.8%)	60 (26.9%)	27 (12.1%)	13 (5.8%)	11 (4.9%)	41 (18.4%)

13번 문항에서 주어진 패턴은 반복 패턴과 증가 패턴으로 추측하는 것이 모두 가능하므로, 이에 대해 교차분석을 한 결과는 <표 III-11>과 같다. 주어진 패턴을 반복 패턴으로만 인식한 학생들이 2학년 69명, 3학년 49명으로 다른 문항들의 결과와 마찬가지로 2학년 학생들은 증가 패턴에 비하여 반복 패턴에 대한 정답률이 높은 것으로 볼 수 있다. 2학년의 경우 반복 패턴으로만 인식한 학생이 29명, ★을 3으로 추측하여 증가 패턴 1개를 포함하여 총 5개의 패턴을 추측한 학생이 29명으로 나타났다. 이러한 응답을 한 3학년 학생들은 2학년 학생들에 비하여 다소 적은 21명, 24명으로 나타났다.

<표 III-11> 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유 설명하기(반복 패턴, 증가 패턴)의 교차 분석 결과

학년	증가 패턴	반복 패턴						합계
		0개	1개	2개	3개	4개	5개	
2학년	0개	47	16	8	5	11	29	116
	1개	16	17	19	15	29	0	96
	2개	0	0	1	0	0	0	1
	3개	0	1	1	0	0	0	2
	4개	0	1	0	0	0	0	1
	합계	63	35	29	20	40	29	216
3학년	0개	49	9	9	5	5	21	98
	1개	39	22	19	12	24	0	116
	2개	0	4	3	1	0	0	8
	4개	0	0	0	0	0	1	1
	합계	88	35	31	18	29	22	223

정리하면, 학생들은 패턴의 특정한 항을 추측하는 내용의 문항에서 다양한 패턴을 생각하기 어려워하였다. 또한 2학년 학생들의 점수가 3학년 학생들에 비하여 다소 높았으나 그 차이가 유의하지는 않았다. 학생들은 14번

문항에 비하여 13번 문항을 잘 해결하였는데 반복 패턴과 증가 패턴이 모두 가능한 문항이 '23★3'과 같은 형태의 반복 단위를 추측해야 하는 문항보다 쉽게 느껴졌다고 간주할 수 있다.

IV. 논의 및 시사점

본 연구에서는 초등학교 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태를 조사하고 이를 비교하였다. 주된 연구 결과를 바탕으로 초등학교 저학년 학생들을 대상으로 한 패턴의 지도 방안에 대해 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 이해는 반복 패턴과 관련하여 일관되게 높은 정답률로 나타났다. 구체적으로, 반복 기하 패턴과 반복 수 패턴에서의 반복 단위 찾기, 반복 기하 패턴을 반복 수 패턴으로 바꾸어 표현하기, 반복 기하 패턴과 반복 수 패턴에서 패턴의 빈 항을 구하기 문항에서 일관되게 높은 정답률을 유지했다. 이는 2학년 때까지 중점적으로 다룬 반복 패턴에 대해 초등학교 학생들이 잘 이해하고 있음을 드러낸다. 다만, 반복 패턴이라고 하더라도 하나의 패턴에서(기하 패턴이든, 수 패턴이든) 다양한 구성 요소를 동시에 찾아야 하는 문항, 그리고 패턴의 특정한 항을 추측하고 설명해야 하는 문항에서는 정답률이 높지 않았음에 유의할 필요가 있다. 이에 2학년 때까지 다루는 반복 패턴 지도와 관련하여 반복 기하 패턴을 다룰 때, 모양과 색이 동시에 변화하는 경우, 반복 수 패턴에서 수와 색이 동시에 변화하는 경우를 제시하고 그 변화 양상을 학생들이 탐색할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 특히 전자와 관련하여 현행 2학년 교과서에서 세 가지 도형이 반복되면서 동시에 두 가지 색이 반복되는 패턴을 학습하고 놀이 수학에서 색과 모양을 혼합하여 규칙을 생성할 것을 지도서에 명시하고 있으며 평가 차시에서도 관련 문제를 제시함에도 불구하고(교육부, 2023b) 정답률이 높지 않았기에, 하나의 패턴에서 다양한 구조를 파악하는 활동을 유의해서 지도할 필요가 있다. 이는 색과 모양 등의 규칙이 혼합된 패턴을 학생들에게 제시하여 규칙을 탐색하게 하는 활동은 학생들이 패턴의 구조를 파악하게 하는데 도움이 된다는 선행 연구의 주장과 일맥상통한다(Mulligan et al., 2020; Wijns et al., 2021). 또한 반복 패턴의 특정한 항을 추측하는 활동을 제시하되, 그 항에 들어갈 수나 모양이 한 가지로 결정되는 것이 아니라 다양하게 들어갈 수 있는 패턴을 제시하여 학생들이 반복 패턴을 다양하게 추측할 수 있는 기회를 2학년에서 제공하는 것도 고려해 볼 필요가 있다.

둘째, 2, 3학년 학생들의 패턴에 대한 전반적인 이해 정도는 통계적으로 유의한 차이를 보이지 않는 경우가 대부분이었다. 하위 문항까지 포함하여 총 46개 문항 중 10문항에서만 통계적인 차이가 있었는데, 그중 8개의 문항에서는 2학년, 2개의 문항에서는 3학년 학생들의 정답률이 높게 나타났다. 이와 같은 결과는 초등학교 저학년에서 지속적인 패턴 지도의 필요성을 부각하며, 학생들의 패턴에 대한 이해를 향상시키기 위해서는 의도적이고 체계적인 지도가 필요하다는 선행 연구에서의 시사점(Kieran et al., 2016; Stephens et al., 2021)을 뒷받침한다. 이와 관련하여 패턴 지도 시기를 간단하게 생각하면 3학년에서 추가적인 지도를 하는 방법을 생각할 수 있으나, 3학년 때 분수와 소수, 나눗셈 등과 같이 새로 도입되는 중요한 내용이 있기에 패턴 지도만을 위해 별도의 차시를 배정하는 것은 현실적으로 쉽지 않을 것으로 예상된다. 오히려 교과서 분석을 통해 살펴본 것처럼 3학년에서 다루는 내용과 연계하여 패턴에 대한 사고도 유지하거나 향상시킬 수 있도록 지도하는 방법을 고안할 수 있다. 예를 들어, 3학년 2학기 원 단원을 학습하면서 기하 패턴의 경우 김성여 외(2023)에서 제시한 것과 같이 반지름이 같은 원을 활용하여 반복 기하 패턴을 제시하고 패턴의 구조를 파악할 수 있는 발문을 제시하거나(그림 II-3]의 (a) 참고), 장혜원 외(2023)와 같이 반지름이 일정하게 커지는 원을 활용하여 증가 기하 패턴을 제시한 후 이어지는 항을 구하고 규칙을 설명하게 할 수 있다(그림 II-3]의 (b) 참고). 아니면 현행처럼 2학년과 4학년에서 규칙 찾기를 다룰 때, 2·3학년 학생들이 특히 어려움을 겪었던 부분에 대해 해당 학년 수준 및 내용에 맞춰 지도할 것을 제안한다. 예를 들어, 하나의 패턴에서 다양한 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상을 찾을 수 있는 기

하 패턴을 제시하고 규칙을 찾게 할 수 있다. 이러한 활동들은 3학년에서의 패턴에 대한 학습 부재로 인한 틈새를 메우는 데 도움이 될 수 있다.

셋째, 2, 3학년 학생들은 패턴의 구조를 파악하기 문항 중 공통적으로 하나의 패턴에서 다양한 구성 요소를 찾기와 패턴 간 구조를 비교하기 문항에서 어려움을 겪는 것으로 드러났다. 이와 같은 경향은 반복 패턴에서보다는 증가 패턴에서 더 두드러지게 나타났다. 구체적으로, 2, 3학년 학생들은 증가 기하 패턴에서 모양과 색의 변화 양상을 파악해야 했을 때, 모양만 맞는 경우가 많았고, 증가 수 패턴에서 수와 색의 변화 양상을 파악해야 했을 때, 수만 맞는 경우가 많았다. 또한 증가 수 패턴을 제시하고 구조가 유사한 패턴을 찾는 것을 어려워하였다. 이에 초등학교 저학년에서 증가 패턴을 지도할 때, 패턴의 구성 요소, 배열 형태, 변화 양상 등을 다양한 측면에서 탐색하는 활동을 강화할 필요가 있다. 특히 4학년의 규칙 찾기 단원에서 주로 다루는 패턴이 증가 패턴임을 감안할 때, 저학년에서 증가 패턴의 구조를 자세히 탐색하고 패턴 간 구조를 다양하게 비교하는 활동이 중요하기 때문이다. 이와 관련하여 초등학교 2, 3학년 학생들이 증가 기하 패턴을 증가 수 패턴으로 바꾸어 표현하기 문항에서 수나 다양한 식으로 응답했다는 점은 고무적이다. 즉, 2개씩 증가하는 기하 패턴에 대해서 결과값으로 '1, 3, 5, 7, 9, ...'로 표현한 것 외에, '1, 1+2, 3+2, 5+2, 7+2, ...', '1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8, ...' 등과 같이 다양하게 표현할 수 있는 것은 학생들이 증가 기하 패턴에서 변화하는 부분을 다양하게 인식할 수 있고, 그 인식을 바탕으로 규칙을 추측하고 일반화할 수 있다는 가능성을 드러내기 때문이다. 이는 증가 패턴의 규칙을 일반화하여 표현하기 위해서는 패턴에서 일정하게 증가하는 부분인 공통성(commonality)을 파악하는 것이 우선이며 초등학교 2학년 학생들도 충분히 공통성을 파악하여 대수적 일반화가 가능하다는 Radford(2011)의 연구와 맥락을 같이 한다. 이에 현행 2학년 교과서에서 기하 패턴과 수 패턴을 연결하는 활동을 제시하고는 있으나 반복 패턴만 제시하고 있어, 2학년 교과서에서 간단한 수준의 증가 기하 패턴과 증가 수 패턴을 연결하는 활동을 제시하는 것도 필요하다고 생각한다.

넷째, 2, 3학년 학생들은 패턴의 특정한 항을 구하기 문항에서는 전반적으로 높은 정답률을 드러냈으나, 패턴의 특정한 항을 추측하기 문항에서는 그렇지 못했다. 구체적으로 패턴의 특정한 항을 구하기 문항에서는 반복 패턴의 경우 기하 패턴과 수 패턴 둘 다에서 이어지는 항이 1개일 때, 2개일 때, 중간 2개 항을 묻는 모든 문항에서 90% 이상의 높은 정답률을 보였다. 증가 패턴의 경우 반복 패턴의 정답률보다 낮기는 했으나 적어도 75% 이상의 정답률을 드러냈다. 또한 패턴의 특정한 항을 추측하고 그 이유를 설명하는 문항에서도 70% 이상의 정답률을 나타냈으나 역으로 30% 이하의 학생들이 특정한 항에 올 수를 전혀 추측하지 못하였다는 것은 계교의 여지가 있다. 물론 문항에서 제시한 패턴이 열린 패턴으로 패턴의 규칙이 명확하게 정해지지 않아 학생들이 문항의 형태에 대해 다소 생소하게 여겼을 수 있다. 다만 놀이 수학 차시에서 짝이 규칙을 정해 만든 모양을 보고 이어질 모양을 찾는 활동을 할 때 짝이 의도하지 않은 규칙을 추측하여 이어지는 모양을 만드는 경우도 정답으로 인정할 필요가 있다고 지도서에 명시하고 있다(교육부, 2023b). 이처럼 교과서에서도 규칙을 추측하여 모양을 만드는 활동을 제시하고 있고, 학생들이 패턴의 특정한 항을 추측하는 사고 과정 자체가 중요하다는 연구 결과(Lüken & Sauzet, 2021)를 고려할 때, 패턴의 특정한 항을 추측하고 이유를 설명하게 하는 활동을 강조하여 지도할 필요가 있다. 이에 초등학교 저학년에서 패턴이 한 가지로 고정된 반복 패턴과 증가 패턴만 제시할 것이 아니라, 다양하게 반복 단위를 생각할 수 있거나 증가 패턴으로 규칙을 이어갈 수 있는 패턴을 제시하여 학생들이 패턴의 특정한 항을 다양하게 추측하고 이유를 설명할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다.

초등학교 수학의 다른 주제와 마찬가지로 패턴에 대한 내용도 의도적이고 체계적인 지도가 뒷받침되어야 학생들의 이해를 향상시킬 수 있을 것이다. 본 연구를 통해 드러난 초등학교 저학년 학생들의 패턴에 대한 이해와 관련하여 학생들의 강점은 유지하고, 부족한 점에 대해서는 해당 학년의 활동을 보완 또는 확대하거나, 이후의 학년에서 관련된 내용을 지도할 때 점검하여 보완할 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 강완 · 백석윤 · 전인호 · 이경화 · 김연 · 이미연 외 15인 (2023). 수학 3-1. 대교.
- Kang, W., Baek, S., Jeon, I., Lee, K., Kim, Y., & Lee, M. et al. (2023). *Mathematics 3-1*. Deakyo.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].
- Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. 2015-74 (Book 8).
- 교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8].
- Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. 2022-33 (Book 8).
- 교육부 (2023a). 수학 2-2. 비상교육.
- Ministry of Education (2023a). *Mathematics 2-2* Visang.
- 교육부 (2023b). 수학 2-2 교사용 지도서. 비상교육.
- Ministry of Education (2023b). *Mathematics 2-2 teachers guidebook*. Visang.
- 김성여 · 강언진 · 강요한 · 고창수 · 김보현 · 김영준 외 9인 (2023). 수학 3-2. 아이스크림.
- Kim, S., Kang, U., Kang, Y., Ko, C., Kim, B., & Kim, Y. et al. (2023). *Mathematics 3-2* i-Scream.
- 박교식 · 정영욱 · 고정화 · 권석일 · 남진영 · 박진형 외 27인 (2023). 수학 3-2. 동아출판.
- Park, K., Jung, Y., Ko, J., Kwon, S., Nam, J., & Park, J. et al. (2023). *Mathematics 3-2* Dong-a.
- 박성선 · 류성립 · 김상미 · 권성룡 · 김남균 · 강호진 외 11인 (2023). 수학 3-1. YBM.
- Park, S., Ryu, S., Kim, S., Kwon, S., Kim, N., & Kang, H. et al. (2023). *Mathematics 3-1*. YBM.
- 방정숙 · 이수진 (2023). 4학년 수학 검정 교과용 도서의 규칙 찾기 단원에 제시된 패턴 활동의 지도 방안 분석. 초등수학교육, **26(1)**, 45-63.
- Pang, J. S., & Lee, S. J. (2023). An analysis of pattern activities of a finding rules unit in government-authorized mathematics curricular materials for fourth graders. *Education of Primary School Mathematics*, **26(1)**, 45-63.
- 방정숙 · 이수진 · 강은진 · 김리나 (2023). 초등학교 2학년 학생들의 패턴에 대한 이해 실태 조사: 규칙 찾기 단원의 학습 전과 후의 비교분석을 중심으로. 수학교육, **62(2)**, 175-194.
- Pang, J. S., Lee, S. J., Kang, E., & Kim, L. (2023). Second graders' understanding of patterns: Focusing on the comparative analysis of before and after learning of the finding rules unit. *The Mathematical Education*, **62(2)**, 175-194.
- 장혜원 · 서동엽 · 김민희 · 김선 · 김주숙 · 김차명 외 8인 (2023). 수학 3-2. 미래엔.
- Chang, H., Seo, D., Kim, M., Kim, S., Kim, J., & Kim, C. et al. (2023). *Mathematics 3-2* Mirae-n.
- 한대희 · 고은성 · 이수진 · 조형미 · 한상의 · 신희영 외 11인 (2023). 수학 3-2. 천재교육.
- Han, D., Ko, E., Lee, S., Cho, H., Han, S., & Shin, H. et al. (2023). *Mathematics 3-2*. Chunjae Education.
- Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer nature.
- Lüken, M. M., & Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, **23(1)**, 28-48.
- Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). Springer.
- Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J., & Davis, B. (2020). Evaluating the impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) intervention in the primary school. *Mathematics*

- Education Research Journal*, **32**, 285-305.
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, **30(2)**, 2-7.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303 - 322). Springer.
- Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, **46**, 166-178.
- Stephens, A., Stroud, R., Strachota, S., Stylianou, D., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2021). What early algebra knowledge persists 1 year after an elementary grades intervention?. *Journal for Research in Mathematics Education*, **52(3)**, 332-348.
- Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., De Keyser, L., & Torbeyns, J. (2021). Stimulating preschoolers' focus on structure in repeating and growing patterns. *Learning and Instruction*, **74**, 101444.

An Analysis of Second and Third Graders' Understanding of Patterns

Pang, JeongSuk

Korea National University of Education

E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Kim, Leena[†]

Graduate School of Korea National University of Education

E-mail : kimleena@hanmail.net

The purpose of this study is to investigate the overall understanding of patterns by second- and third-grade elementary school students. For this purpose, 12 classes per grade were selected from 10 schools, and a 46-item test was administered to 216 second graders and 223 third graders. The results of the study showed that in most cases, there was no statistically significant difference in the understanding of patterns between second- and third-graders. The exception occurred regarding the 10 items of identifying the structure of a pattern: Second-graders did better than third-graders regarding 8 items, whereas vice versa regarding 2 items. The items that both second- and third-graders struggled with included finding multiple components of a given pattern, comparing the structures between patterns, and guessing a particular term in an open pattern. Based on these findings, this paper discusses second- and third-graders' understanding of patterns and suggestions for further instruction.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97H20

* Key words : student understanding, finding rules, structure of patterns, geometric patterns, growing patterns

[†] corresponding author