

수학교육에서 글쓰기의 중요성에 관한 소고

김 정 현 (단국대학교 대학원, 대학원생)
고 상 숙 (단국대학교, 교수)[†]

오래전부터 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)과 같은 수학교육기관에서 글쓰기는 필수적인 부분으로 언급해 왔다. 그리고 최근 교육부 조사에 따르면 코로나 시대 이후 기초학력 저하의 심각성을 보고하였다. 본 연구는 수학교육에서 수학 쓰기를 재정의하고, 현재 수학교육에서 제시되는 역량 중 과거부터 언급해 온 문제해결, 의사소통, 추론 영역을 중심으로 글쓰기의 역할과 그 중요성을 파악하는 것을 목적으로 하였다. 연구 결과에서 문제 해결에서의 글쓰기는 인지적인 부분을 정리함으로써 개념과 방법을 습득할 수 있는 능력을 기를 수 있고, 의사소통에서의 글쓰기는 재인지 과정을 통해 자신감을 가질 수 있으며, 추론에서의 글쓰기는 단계적으로 어떤 부분이 부족한지를 스스로 파악할 수 있다. 특히, AI를 활용하는 미래 사회에서 수업 환경이 달라지는 만큼 쓰기를 통한 진위성 판단이나 올바른 쓰기 문화 정착을 위해 연구가 이루어질 필요가 있다.

I. 서론

수학에서 글쓰기의 역할은 CCSSI(Common Core State Standards Initiative)를 통해 계속해서 강조해 왔고 여러 문헌에서 수학 글쓰기 과정이 수학 수업에서 필수 부분으로 여겨왔다. NCTM(1980, p. 142)에 따르면, “writing as a process [that] emphasizes brainstorming, clarifying, and revising ... can readily be applied to solving a mathematical problem”에서 글쓰기는 수학 문제해결에 적용될 수 있다고 하였다. 또한, 시간이 지나면서 NCTM(2000)은 수학 글쓰기에 대한 강조를 “Writing in mathematics can also help students consolidate their thinking because it requires them to reflect on their work and clarify their thoughts about the ideas.”(p. 61)라고 하였다. 글쓰기를 통해 본인을 성찰할 수 있고 생각을 명확히 할 수 있는 강력한 도구가 되며, 사고력을 높일 수 있는 것에서 제시되었다고 볼 수 있다. 또한, Jurdak과 Zein(2010)은 글쓰기는 운동 수준(펜을 움직이는 손), 감각 수준(눈 읽기), 인지 수준(메시지의 지적·분석적 처리)으로 처리 가능하고, 학습자가 자신의 속도에 맞춰 학습할 수 있도록 하며, 자기 생각을 종이에 적고 읽을 수 있도록 하여 즉각적인 피드백을 제공하는 쓰기 이론을 제시하고 있다(Emig, 1977 재인용). 수학이라는 과목, 학문이 주된 내용이겠지만 범위를 학교 수학(school mathematics)으로 한정했을 때 우리는 수학 문제를 풀고, 그 문제를 해결하기 위해 생각을 정리하는 도구가 필요한데 그 부분이 바로 글쓰기로 보는 것이다.

미국의 National Center for Education Statistics(2012)의 보고서에 따르면, 미국의 중학교 2학년 학생 중 27%만이 글쓰기 평가에서 우수함을 보였고, 20%가 기초학력 미달 점수를 받았다고 밝혔다. 이는 Powell 외(2017)에서 학생들 대부분이 학년 수준에 맞게 쓰기를 해야 하는데 그러지 못하는 상황임을 지적하였다. 비슷한 시점에 서 National Assessment of Educational Progress(2011)의 자료를 인용하여 분석한 Kim(2017)에 따르면 미국의

* 접수일(2023년 11월 22일), 심사(수정)일(2023년 12월 11일), 게재확정일(2023년 12월 23일)

* MSC2000분류 : 97C99

* 주제어 : 수학 쓰기, 문제해결, 의사소통, 추론, 챗GPT

† 교신저자 : sangch@dankook.ac.kr

8학년 학생들을 대상으로 작문 능력 실태 조사에 대하여 탁월한 수준(advanced)이 3%에 불과한 것, 그리고 기초 이하의 수준(below basic)이 20%를 차지하는 점을 지적하였다. 결과적으로 글쓰기는 교육과정에서 학년에 맞게 제시되고 있는 점에서 글쓰기 능력 수준이 미달 또는 기초 정도에 미치는 수준이 대부분을 차지한다는 것을 문제 삼았다. 국내의 경우 Korea Institute for Curriculum and Evaluation에서 주관하는 국가수준 학업성취도 평가에서 고등학교 2학년생을 대상으로 국어 영역을 2019년과 2021년을 비교·분석한 결과 기초학력 미달(제1수준)에 해당하는 비율이 2019년 4.0%에서 2021년 7.1%로 증가하였고 반대로 보통 학력(제3수준) 이상에 해당하는 비율이 2019년 77.5%에서 2021년 64.3%로 감소하였으며 통계적으로 유의한 차이가 있었음을 보였다(Ministry of Education, 2022a). 비록 국어 교과목으로 읽기, 듣기·말하기, 쓰기, 문법을 모두 보고 있는 점에서 각 영역에서 어떠한지를 파악하기에는 어려움이 있으나 전체적으로 기초학력(제2수준) 이하의 학생들이 늘어나고 있는 점은 분명하다.

글쓰기는 글쓴이의 생각, 학습 경험이 글의 형태로 바뀌는 사고 과정을 의미하며, K-12에서 다루는 교육과정 내에서 쓰기는 학교에서 학습 환경에 필요로 하는 가장 중요한 기술 중 하나이다(Mohamadi, 2018). 글쓰기에서는 다양한 지식이 필요로 하는데, 내용(content), 맥락(context), 과정(process), 수사적(rhetorical) 이외에도 언어적 특징을 포함하고 있다(Kitajroonchai et al., 2022). 결국 글을 쓰는 데에 있어서 많은 고려가 필요하고, 글을 잘 쓰기 위해서는 독자를 고려하면서 세부 사항에 주의를 기울여야 한다. 국내에서 쓰기 또는 작문과 관련된 실태를 조사한 연구가 다수 있었다. Lee(2013)는 초등학교 6학년을 대상으로 쓰기에 나타난 낱말의 형태적 오류를 분석하고자 하였다. 형태 오류로 준말, 어간, 어미 등을 항목으로 정하여 오류 정도를 파악한 것으로, 연구 대상 100명 중 69명이 하나 이상의 오류를 범하였다고 밝혔다. 이는 맞춤법 및 받아쓰기 등에서 나타나는 오류 분석으로 글쓰기에서 단어 하나를 사용하더라도 어떤 단어로 사용했는지, 문법적으로 옳게 사용했는지를 파악하는 연구라고 할 수 있다. Kim(2017)은 중학교 2학년을 대상으로 글쓰기의 유형에 해당하는 설명글, 설득하는 글, 서사 글에 대하여 자료를 수집하고 분석하였는데 그 결과로 쓰기 능력이 전반적으로 낮은 수준이었고 하위 수준에 속한 학생의 비중은 크다고 하였다. 특히 글쓰기에서 하위 요인으로 본 ‘내용 선정 및 조직 능력’이 가장 낮았는데, 이는 남녀 성차에서도 적은 편이었다는 점에서 공통으로 적용되는 사항이었음을 밝혔다. 고등학생의 경우 Choi와 동료들(2018)이 고등학생을 대상으로 쓰기 능력을 살펴보았는데, 이는 앞서 제시한 Kim(2017)의 연구를 고등학생에게 적용하여 설명글, 설득하는 글, 서사 글을 수합해 분석·적용하였고 그 결과 고등학교 수준의 쓰기 능력을 갖추지 못하고 있고 중학교와 동일하게 내용 조직에서 큰 어려움을 겪고 있었음을 밝혔다. 전체적으로 쓰기 실태를 통해 학년 또는 학교급에서 제시하는 수준보다 아래에 있음을 보여준 점에서 쓰기 교육이 중요성을 일깨워 준다고 할 수 있다.

교과목을 수학으로 압축했을 때 쓰기 또는 작문과 관련한 연구들도 존재하였다. 대표적으로, Ha와 Jang(2009)은 초등학교 4학년의 수학 학습 부진 학생 5명을 대상으로 수학 저널 쓰기를 활용해 기하학적 사고 수준이 어떻게 변화하는지를 사례 연구를 통해 살펴보았다. 그 결과, 수학 저널 쓰기를 통해 학습을 통해 습득한 내용을 재구성할 기회를 제공하였고, 수학적 의사소통력에 긍정적인 영향을 미쳤음을 드러냈다. Kim & Lee(2010) 역시 수학 학습 부진 학생을 대상으로 수학일지를 쓰도록 하여 수학 성취도와 태도의 변화를 파악하고자 하였는데, 수학 일지가 학생들에게 능동적인 학습과 자신감을 가져오게 하였고 수학 성취도에 향상된 변화를 보였다고 밝혔다. Lee & Ahn(2013)은 문제해결 단계와 관련해 쓰기 활동이 학업성취도 및 수학적 태도에 어떠한 변화가 있었는지를 초등학교 6학년을 대상으로 확인하고자 하였다. 연구 결과, 문제해결 및 탐구활동 단계에 쓰기 활동을 구안한 집단에 대해 성취도 및 수학적 태도가 향상되었음을 통계적으로 보였다. Yang & Kim(2018)은 수학일지 쓰기 활동을 적용한 후 수학적 성향과 의사소통 수준에 어떠한 영향을 미쳤는지를 살펴보았다. 특히 표현과 설명에 있어서 수준 변화를 살펴본 점에서 반복측정 분산분석을 통해 수준이 상승하였음을 밝혔다. 이처럼 수학교육에서 쓰기를 포함해 처치 프로그램을 활용해 연구가 이루어지고 있음을 확인할 수 있었다. 하지만 수학 쓰기

에 대한 정의가 명확하지 않은 채 쓰기를 포함한 연구가 대부분이었으며, 이를 통해 살펴본 결과로 수학적 의사소통, 수학적 태도, 학업 성취도 등에 초점을 두고 있는 점에서 수학 쓰기를 초점으로 왜 중요한지를 다루는 연구는 찾아보기 어려웠다.

최근 Ministry of Education(2023)은 대학입시제도 개편을 발표하면서 교육 개혁에 나섰다. 그중 강조하는 것으로 지식 암기를 확인하려는 시험보다는 학생의 역량과 사고력을 측정할 수 있도록 하는 형태로 서술·논술형 평가로 확대하는 방안을 제시하였다. 현재 학교와 전국 단위의 평가는 지식을 암기하는 위주로 진행되어 객관식의 5지선다형으로 평가하고 있는데 이를 지양하는 것, 그리고 앞으로는 문제해결력 및 사고력을 요구하는 문제가 출제되어 평가할 수 있도록 하는 주관식의 서술·논술형을 강화하겠다는 방침을 발표한 것이다. 여러 가지 사항이 있겠지만 개정 중점에서 “미래 사회가 요구하는 역량 함양이 가능한 교육과정”(Ministry of Education, 2021)으로 제시한 핵심 역량과도 연결되는 점에서 역량 중심으로도 글쓰기를 파악해 볼 필요가 있다.

따라서 본 연구는 수학교육에서 수학 쓰기가 무엇인지 문헌 분석을 통해 정의하고, 쓰기가 현재 수학교육에서 제시되는 역량 중 꾸준히 강조되어 온 수학적 문제해결력, 수학적 의사소통 능력, 수학적 추론 능력과 연결되는 점을 문헌 분석을 통해 제시함으로써 이를 왜 필요로 하는지를 파악하는 것을 목적으로 하였다. 나아가, 본 연구에서 제시하는 여러 가지 배경들을 통해 후속 연구를 제안하고 수학교육에 시사점을 밝히는 것을 포함하고 있다.

II. 연구의 배경

1. 수학교육에서 수학 쓰기

수학 쓰기(mathematics writing)는 초기에 Geeslin(1977)에 의해 밝혀졌고 계속해서 발전해 나가고 있다. 국외의 경우 물론 의사소통을 수학과 결합하여 수학적 의사소통(mathematical communication)을 제시하거나 수학에서 제시하는 용어, 기호, 계산 등에 대해 글로 나타내는 것으로 정의하고 있다. 국내에서는 기존 수학 쓰기라는 연구는 찾을 수 있었으나 여러 형태로 쓰기가 제시되어 있어 명확한 정의를 내리기에 너무 불분명하였다(cf. Lee & Kim, 2016; Kim, 2009; Kim & Jeon, 2019). 그러나 최근 Choi-Koh(2023)의 연구에서 비로소 수학 쓰기를 정의하고 있었다. 수학 글쓰기의 주된 목적을 학생들이 수학을 배우도록 돕고 수학 수업을 알리는 것을 포함하는 것이라고 하였다(Powell et al., 2021). 수학 쓰기를 2000년대부터 여러 학자가 제시한 정의를 아래 <표 II-1>처럼 정리할 수 있다.

<표 II-1> 수학 쓰기의 정의 (Burton & Morgan, 2000 etc.)

구분	연구자(연도)	정의
국외	Burton & Morgan (2000)	수학 교실 상황에서 만들어지는 다양한 글쓰기 장르를 포함해 정의
	Bicer et al. (2014)	학생들이 수학에 관해 의사소통하는 방법
	Cohen et al. (2015)	학생들이 자신의 수학적 추론을 포함하도록 요구하는 절차의 결과로 종이에 기록한 모든 표현(NCTM, 2000에 기반한 정의)
	Casa et al. (2016)	학생들에게 아이디어를 추론하고 전달할 수 있도록 하는 도구
	Powell et al. (2021)	학생들이 수학 개념 또는 절차에 대해 작성하는 쓰기 활동
국내	Choi-Koh (2023)	수학에서 또는 수학에 대해 단어를 사용해 글로 표현하는 것(p. 125)

Morgan에 따르면 수학 쓰기에 대한 정의에 대해 절대적인 정의는 없다고 하였지만, 수학 학습을 위한 의미

있는 맥락을 전달하기 위한 용어, 기호 및 이미지의 주제별 응축으로 바라고 있다고 하였다(Seo, 2015). 점차 수학 쓰기는 수학에서 다루는 개념, 용어, 문제해결, 표상(representation)을 문장 또는 문구로 정리해 표현하는 방법까지 이르게 되었고 전체적으로 기록물을 남겨 쓰는 서면적 의사소통(written communication)을 위한 방법과 유사하다고 할 수 있다.

수학 쓰기에서 다수 이루어진 연구 영역으로 수학 일지 또는 일기 쓰기(mathematics journal)를 찾아볼 수 있었다. 수학 수업에서 일기 쓰기는 메타인지 기술을 개발하고 개념적 이해를 심화시키는 효과적인 전략이다(Knox, 2017). Jurdak과 Zein(2010)은 일기 쓰기가 수학 성취도와 수학에 대한 태도에 미치는 영향을 조사하였는데, 저널 쓰기(journal writing)를 한 집단은 저널 쓰기를 하지 않은 집단보다 개념 이해, 절차적 지식, 수학적 의사소통에 긍정적인 영향을 미쳤다고 밝혔으며, 저널 쓰기가 인지적, 정의적 영역에 대한 이점을 모두 가지고 있다는 것을 발견하였다. 한편, Choi-Koh와 동료들(2023)에서는 수학 일기 쓰기에서도 상당한 유행을 나타냈는데(교구를 활용한) 관찰 일기, 문제 만들기, 복습 일기, 개념 정리 일기 등을 썼다고 보았다. 이는 일기의 형태로 유행화했을 때 나타나는 현상이기도 하지만, 수학 학습을 한 후에 쓸 수 있는 일기 또한 다양하게 작성할 수 있다는 것을 의미하는 것으로 수학 수업에서 일기를 다양하게 활용함으로써 개념을 정리하고 성찰할 수 있는 기회를 제공한다.

2. 수학적 의사소통에서 수학 쓰기

의사소통(communication)은 크게 구두적 의사소통(oral communication)과 서면적 의사소통(written communication)으로 구분한다(Prabavathi & Nagasubramani, 2018). 구두적 의사소통은 언어적, 시각적 도움을 통해 발신자로부터 수신자에게 정보를 말로 전달하는 것으로 발표, 연설, 토론 등에서 사용된다. 이는 전달하려는 것을 언어에서 높낮이, 강조하는 부분 등을 직접적으로 느낄 수 있게 해준다는 장점이 있다. 반면, 서면적 의사소통은 발신자가 수신자에게 글로 써서 문서 등으로 전달하는 모든 형태의 의사소통으로 편지, 메모, 보고서, 연구 논문 등이 이 소통 방법에 해당한다. 최근 디지털 시대에 오면서 인터넷의 발달과 함께 전자메일, 블로그 등으로 활용되기도 하며 이는 기록물 즉, 구체적인 형태의 증거가 되기도 한다는 점에서 빠르게 발달해 온 점이 특징이다. 여기서 중요한 점은 수신자가 발신자가 이야기하고자 하는 것을 적은 점에서 모든 것을 이해할 수는 없고, 명확성 및 정확성이 구두적 의사소통보다는 다소 완벽하다고 할 수 없다. 그렇다고 해서 구두적 의사소통만으로는 피드백을 꼼꼼하게 제공할 수 없다는 점이 한계가 될 수 있으므로 이 두 의사소통은 모두 중요하다고 할 수 있다. 학교 현장에서, 특히 중학교와 고등학교에서 다루는 학교 수학은 종종 교사가 주도하는 ‘말하기’ 접근 방식으로 특징짓는다(Baroody & Ginsburg, 1990에서 Shield & Galbraith, 1998, p. 32를 재인용). 이는 수학교과서에 많은 영향을 미치는데, 이후 글쓰기와 연결을 통해 접근해야 정보를 습득하는 데에 용이하다는 것을 뜻한다. 본 절에서는 그중에서 서면적 의사소통에 해당하는 쓰기(writing)를 수학교육에서 어떻게 정의하고 있고, 어떤 교수·학습을 사용해 왔는지를 살펴보고자 한다.

수학 글쓰기를 소재로 하여 진행된 수학적 의사소통(mathematical communication) 연구들은 대표적으로 다음과 같다. 해외의 대표적인 사례로 Baxter와 동료들(2005)은 7학년을 대상으로 수학 수업에서 의사소통을 지원하고자 글쓰기를 어떻게 사용하고 있는지를 분석하였는데, 학생들이 쓴 일지(students' journal)를 통해 자신의 수학적 추론을 설명할 수 있었고 개념 이해, 설명 능력, 문제 표현 기술을 드러낼 수 있었던 여러 가지 사례를 확인하였다고 밝혔다. 국내 연구에서는 Kim과 Jeon(2019)이 수학 쓰기 학습 전략을 의사소통을 중심으로 활용하여 수학 학습 성취도와 수학적 성향에 대해 어떠한 영향을 주는지를 파악하고자 하였는데 그 결과 두 가지 모두 긍정적인 영향을 미쳤다고 밝혔다. Jung과 Oh(2015)는 초등학교 5학년을 대상으로 설명식 쓰기 활동을 적용했을 때 수학적 의사소통에 어떠한 영향을 미치는지를 수준 변화와 특징을 중점적으로 살펴보았다. 결과에서 학생들

은 지식의 견고화, 논리의 정교화, 사고 과정의 가치화, 내용 명료화의 경향을 보였음을 밝혔다. 그러면서도 수학적 의사소통을 정확하고 논리적이면서 구체적으로 전달하는 데에 도움이 되었음을 결론에 제시하였다. 이러한 점에서 글쓰기는 의사소통 역량에 있어서 중요한 요소이면서 수학 학습에서 절대적으로 필요로 해 학생들이 이 역량이 길러진다면 학업 성취도 등의 인지적 영역은 물론 수학적 성향, 수학에 대한 태도 등의 정의적 영역에서도 향상된 결과를 보여준다고 할 수 있다.

수학에 초점을 맞춰 글을 쓰도록 하는 글쓰기 유형으로 주로 설명적 글쓰기(expository writing)와 표현적 글쓰기(expressive writing)가 이루어지는 것으로 나타났다. 이를 소재로 하여 연구한 내용을 요약하여 제시하면 다음과 같다. Shield와 Galbraith(1998)는 25명의 학생을 대상으로 친구에서 편지 쓰기와 과제에서 어려움을 표현한 사람에게 수학적 아이디어를 어떻게 설명할 것인지에 대한 두 가지 설명적 글쓰기를 통해 사례를 분석하였다. 그 결과, 학생들은 자신이 글쓰기 스타일을 표현하는 데에 있어 시간이 지날수록 능숙해졌다고 하였다. Santos와 Semana(2015)는 수학에 대한 설명적 글쓰기와 수학적 의사소통을 발전시키기 위해 평가 전략에 기여하고자 하였는데, 8학년 학생 4명을 대상으로 질적 연구를 수행한 결과 해석과 정당화와 관련해 설명적 글쓰기에 긍정적인 발전이 있었음을 시사하였다. 특히 모호한 진술, 규칙, 질차적 설명 대신에 점점 더 많은 관계적 정당화(relational justifications)가 포함되었다고 밝혔다. Guce(2017)는 대학교 3학년 학생들에게 설명적 글쓰기를 사용하면서 나타나는 오류를 밝히고자 하였는데, 잘못된 문법과 수학 기호의 오용에 관한 오류가 가장 많았음을 제시하였다. 위를 종합하면, 설명적 글쓰기를 통해 학생들이 나타내고자 하는 수학적 아이디어에 관한 오류를 범하지 않도록 쓰는 것이 중요하고, 어느 정도 시간을 두고 글쓰기를 했을 때 긍정적인 변화를 일으킬 수 있다는 것으로 정리할 수 있다.

한편, 표현적 글쓰기를 소재로 수학을 바라본 여러 문헌의 대부분은 수학 불안(mathematics anxiety)과 연결해 연구가 이루어졌음을 보여주었다(cf. Mesghina & Richland, 2020; Ruark, 2021; Brewster & Miller, 2022). 대표적으로 Hines와 동료들(2016)은 9학년부터 12학년까지에 해당하는 93명의 학생을 실험 집단과 비교 집단을 통해 배치하고, 실험 집단에 3일 동안 15분씩 표현적 글쓰기를 시켰는데 그 결과 수학 불안 수준이 감소했다고 하였다. 표현적 글쓰기는 James Pennebaker에 의해 글쓰기의 치료 효과를 연구한 최초의 연구자로, 고통을 초래하는 충격적인 사건 또는 상황에 대처하기 위해 생각과 감정을 글로 표현하는 것으로 정의하였다(Pennebaker & Chung, 2007). 정의에서 볼 수 있듯이, 표현적 글쓰기를 통해 정의적 영역을 중심으로 수학에 대한 마음의 변화, 성향, 태도 등의 결과를 파악할 수 있는 점에서 나아가 심리학 중심의 연구가 점차 늘어나고 있음을 보여주고 있다.

3. 수학적 문제해결에서 수학 쓰기

선행 문헌에서 수학적 문제해결(mathematical problem solving)을 다음과 같이 설명하고 있다.

“In order to solve a problem, a problem solver must first translate the problem into an internal representation. One aspect of this comprehension process is that each sentence or proposition must be encoded into memory(Mayer, 1985, p. 125).”

Mayer는 수학 학습에서 문제를 해결하기 위해서는 내부적 표현으로 변환해야 하고, 문장 또는 명제가 기억 속에 부호화되어 있어야 한다는 것을 제시하였다. 이를 분석하면 결국 문제해결을 하기 위해서는 표현의 방법이 중요하다는 것을 의미하고, 더 나아가 학생이 다루고 있는 문제가 문장제였을 때 방정식, 함수 등의 수학적 표현을 사용해 문제를 다양하게 해결하도록 하는 것이 중요하다고 할 수 있다.

NCTM(1980)에서 수학적 문제해결은 수학을 수행하면서 본질이 되면서도 수학적 문제해결에 있어서 문제해결 모형으로 다양한 연구들이 제시되고 있다. 기본적으로 수학적 문제해결과 관련하여 Polya(1957)는 문제해결 전략으로 문제 이해, 계획 수립, 실행, 반성으로 4단계를 설명하고, Schoenfeld(1985)는 Polya의 문제해결에서 제시한 실행을 탐구와 실행으로 세분화하여 모형을 제시하였으며, Burton(1985)은 반성 단계에 중요시하였는데, 기존 Polya의 문제해결 전략 모형에서 검토와 확장(일반화)을 제시하였다(<표 II-2> 참고). 문제해결에 있어서 Lesh와 Zawojewski(2007)는 수학적 해석을 표현하고, 테스트하며 수정하는 여러 반복 주기와 수학 안팎의 다양한 주제에서 수학적 개념을 분류, 통합, 수정 또는 정제하는 과정(p. 782)이라고 하였다. 또한, Seo와 Park(2021)은 개방형 문제해결학습을 통해 수학적 창의성과 수학적 태도에 향상되었다고 하였는데, 답을 내야 한다는 틀에서 벗어나 생각을 다양하고 자유롭게 제시할 수 있는 능력을 길러야 함을 강조하고 있다. 결국 우리는 어떤 문제를 접했을 때 해결하기 위해 물론 구상이라는 것을 하겠지만 풀이가 결코 안심으로 나올 수 없는 점에서 기록은 절대적이라 할 수 있고, 학교 현장에서 수학 수업에서 학생들이 문제를 해결한 결과물을 바탕으로 자기 성찰과 동료, 교수자의 피드백을 통해 상호작용을 하는 전체적인 과정이 중요하다고 할 수 있다.

<표 II-2> 수학적 문제해결의 모형 (Kim, 2022, p. 318)

Polya(1957)	Schoenfeld(1985)	Burton(1985)
이해	분석 및 이해	도입
계획	계획	
실행	탐구 실행	공략
반성	검증	검토 확장

수학적 문제해결에 있어서 국내·외 다양한 연구를 보여주고 있다. 학생과 교사가 은유적 표현(Metaphors)을 선택하면서 어떻게 수학적 문제해결을 맥락화하는지를 분석한 Yee(2017)는 교사 6인과 학생 22인을 대상으로 혼합 연구방법론-정량적으로는 은유의 빈도와 대중성을 통해 분석, 정성적으로는 해석적 현상학을 통해 개념적 은유를 분석-을 사용하였다. 그 결과, 문제해결에 대한 가장 대중적인 은유적 표현이 학생과 교사 모두에게 공유되고 있음을 보여주었다. 세 집단-학습 부진아(learning disabilities), 평균 성취도, 영재 학생-으로 구성되어 총 66명을 대상으로 수학 문제를 풀면서 시각적 이미지를 어떻게 사용하는지를 조사한 van Garderen과 Montague(2003)는 수학적 문제해결과 시각적 공간에 있어서 사용하는 방법과 빈도가 달랐다고 하였다. 영재 학생들은 다른 두 집단보다 시각적·공간적 표현을 더 많이 사용하고, 학력이 부진할수록 수학적 문제해결에서 그림을 더 많이 표현한다고 하였다. 또한, Maccini와 Ruhl(2000)는 기초학력이 부진한 학생들에게 정수 범위에서의 뺄셈과 관련된 대수 문제를 해결하기 위한 효과를 STAR 전략을 세워 조사하였는데, 효과적으로 문제를 해결할 수 있게 되었다고 밝혔다. 한편, 이 소재를 뇌파와 연결하여 예를 통한 학습과 언어적 지식을 통한 학습 간의 차이를 조사한 Lee와 동료(2015)는 수학적 문제해결에 관여하는 것으로 알려진 전두엽과 두정엽(prefrontal and parietal)에서 더 큰 활성화가 이루어졌음을 밝혔다. 문제해결과 관련하여 여러 연구들이 진행되었고 인지적 부분에서 많은 도움이 되었음을 알려주는 연구들이라고 할 수 있다.

수학 수업에는 학생들의 문제해결 능력을 향상시키기 위해 수학적 지식뿐만 아니라 인지·초인지적 능력에 따라 이루어지는데, 그래서 학생들의 과정 습득과 발전을 지원하는 방법이 중요하다(Kuzle, 2013). Flower와 Hayes(1981)는 문제해결 능력의 향상으로 수학적 지식, 인지·초인지적 능력에 달려 있다고 하였는데, 이는 수학 수업에서 학생들이 문제해결력 과정을 습득하고 발전할 수 있도록 하는 지원 방법이 필요하다고 하였고 그 방법의 하나로 글쓰기를 제시하였다. Borasi와 Rose(1989)는 연구대상자 중 3분의 1이 일기 쓰기가 수학 내용에 대

한 지식을 늘려주었고 일반적인 학습과 문제해결 능력을 향상시키는 데에 도움이 되었다고 하였고, 절반은 일지를 작성함으로써 수학을 수행하는 방법을 더 잘 알게 되었다고 밝혔다. Ball(1993)은 문제해결에 있어서 수학적 추론을 기록하는 것보다 알고리즘 기술의 강점을 드러냈다고 하였는데, 수학적 글쓰기 능력으로는 수학적 공식, 방정식 외에도 언어와 사고를 통합할 수 있도록 확장되어야 한다고 하였다(Lee et al., 2020). 이들은 결국, 쓰기가 교육적인 전략으로 사용되는 수학 수업에서 학생들은 더 많은 수학적 내용을 학습하고 수학에서 중요한 일반적인 사고 능력을 개발하는 것으로 볼 수 있다(Stonewater, 2002).

수학적 문제해결과 관련하여 쓰기와 연결해 이루어진 연구들을 조사한 결과 다음과 같다. Pugalee(2004)는 수학적 문제해결 과정에서 글쓰기가 미치는 영향을 9학년의 대수학을 수강하는 학생들을 대상으로 조사하였다. 연구 결과에서 흥미로운 점은, 본인의 생각을 설명하는 학생들은 자신의 말로 표현한 학생들보다 문제해결 과제에서 훨씬 더 성공적이었고, 통계적으로도 유의하였음을 밝혔다. Bicer 외(2014)는 중학교 학생들을 대상으로 수학적 문제해결을 통한 글쓰기 과정에 초점을 맞춘 집단과 그렇지 않고 숙제를 부여하고 시험 준비에 있어 부담을 주는 통제 집단으로 구분하여 실험하였다고 하였다. 연구 결과에서 글쓰기 과정은 학생들이 본인의 생각을 정리할 수 있다고 하였고, 학생들은 데이터에 대해 수집, 분석, 해석할 수 있으며, 추론 능력에 발달을 촉진한다고 하였다. Craig(2016)는 Piaget의 인지 발달 이론을 근거로 문제해결에 대해 살펴보았는데, 분석 결과 문제해결 과정에 대한 글쓰기는 학생들이 불완전한 이해에 직면해 더 깊은 수준의 이해에 도달해야 할 때 잠재적으로 인지적 혼란을 초래할 수 있다고 보았다. Petersen 외(2017)는 수학에서의 글쓰기 활용과 학습자의 문제해결 전략과 개념적 이해와의 관계를 탐구하였는데, 쓰기 과제를 시행하기 전과 비교했을 때 학습자는 수학 문제를 풀 때 사용하는 전략과 설명하는 능력이 향상되었다는 것을 밝혔다. 국내에서 이루어진 대표적인 연구로, Kim과 Oh(2014)는 서술형 쓰기 활동을 초등학생에게 적용했을 때 문제해결력과 해결 과정, 수학적 성향에 통계적으로 긍정적인 영향을 미쳤다고 하였다.

종합했을 때 수학적 문제해결에 있어서 표현하는 기술과 전략을 사용해 학생들에게 많은 어려움을 해결하였는데(Bakken et al., 1997), 이는 곧 쓰기와도 연결되는 부분이라 할 수 있으며 문제 표현에 있어서 인지적 영역에서 향상되는 교육 효과를 볼 수 있게 된다고 할 수 있다. 특히 문제해결에 있어서 단순히 문제를 풀기 위한 것만으로 끝나는 것이 아니라 반성, 그리고 변수의 개념에서 이야기한다면 특수화된 문제를 풀었을 때 일반화까지 유도하는 과정을 살펴볼 수 있게 됨으로써 의사소통 역량을 더욱 함양할 수 있도록 하는 기회를 경험할 수 있다. 이는 수학 글쓰기를 통해 문제해결 과정을 설명했을 때 학생들은 시각적으로 자신이 설명하는 내용을 확인할 수 있고 이를 검토 또는 반성을 통한 피드백을 이끌어낼 수 있음(Kosko & Norton, 2012)을 뒷받침한다.

4. 수학적 추론에서 수학 쓰기

수학을 학습하면서 학생들은 논리적 사고력과 추론을 향상하도록 지도하고 있다(Dawkins & Cook, 2017). 여기서 추론은 알려진 사실을 결론에 연결하는 사고 과정으로(Rohati et al., 2023), 수학 수업과 밀접한 연관을 갖는다. 또한, 수학적 추론을 신장하기 위한 능력으로 수학 학습에 있어서 신장해야 할 목표 중의 하나로 제시하고 있고(Yang & Shin, 2014), 최근 Ministry of Education에서도 2022 개정 수학과 교육과정에서 추론 역량이 직접적으로 언급되는 만큼 중요성을 볼 수 있다. 종합적으로 국내·외 학자들이 제시한 수학적 추론의 정의를 정리하면 다음의 <표 II-3>과 같다.

<표 II-3> 수학적 추론의 정의 (Henderson et al., 2001 etc.)

구분	연구자(연도)	정의
국외	Henderson et al. (2001)	모든 분야의 문제를 해결하는 데 필요한 수학적 사고 방식
	Lannin et al. (2011)	추측하기, 일반화하기, 탐구하기, 논증하기, 발전시키기, 평가하기로 구성된 과정
	Mukaka et al. (2023)	교실 안팎에서 어려운 과제에 직면했을 때 학생들의 전반적인 비판적 사고에 중요한 기여를 하는 기술 중 하나
국내	Kang & Kim (2013)	수학적 상황에서 어떤 수학적 사실 또는 판단을 근거로 다른 수학적 주장이나 판단을 이끌어 내는 일련의 수학적 사고 과정(p. 241)
	An & Oh (2018)	물리적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 하고 있으며 이러한 추상적인 관념을 물리적 상황에서 수학적 모델로 만들고 새로운 명제와 관계를 찾는 활동(p. 500)

이러한 추론은 곧 증명(proof)과도 연결되는 내용이지만 최근 Ministry of Education에서는 증명이라는 단어보다는 설명, 정당화 등의 표현으로 개정된 점에서 수학적인 상황에 있어서 증명하는 과정을 외워서 쓰는 것보다는 아는 수학적 지식을 활용하여 논리적으로 설명할 수 있도록 제공하는 점이 바뀌었다고 할 수 있다. 2022 개정 수학과 교육과정이 발표되면서 Ministry of Education에서는 추론 영역을 아래와 같이 설명하고 있다. (p. 44)

- (관찰, 실험, 측정 등 구체적 조작 활동을 통해) 수학의 개념, 원리, 법칙에 흥미와 관심을 갖고 다양한 방법으로 탐구하고 이해하게 한다.
- 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.
- 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적이고 체계적으로 수행하고 반성하게 한다.

각 역량 함양에서는 교수·학습 방법을 어떻게 하는지를 보여줌으로써 함양할 수 있도록 안내하고 있다. 지난 2015 개정 수학과 교육과정(Ministry of Education, 2015)과 비교했을 때 전체적인 맥락은 비슷할 수 있다. 하지만, 비판적 사고력을 갖도록 하는 태도를 갖게 하는 것이 추가되었고, 수학적 절차에 대한 강조와 함께 체계적으로 수행되고 이를 반성하도록 하는 것을 직접적으로 드러낸 점에서 단순히 과정상에 올랐는지를 보는 것에서 구체화 되었음을 보여주었다.

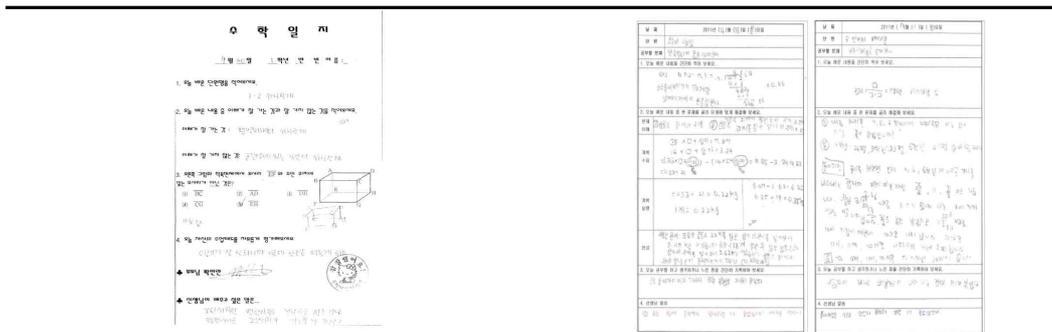
수학교육에서 추론과 관련된 연구로는 다음과 같다. 먼저, 수학적 추론의 질적 구성요소를 측정하기 위해 그래픽 모델링(graphical modeling)의 심리학적 기능을 조사한 Bennett과 동료들(1999)은 순수 수학적 문제의 경우 난이도에서 문제 구조의 영향을 받았고, 성차 연구에 대한 질적 연구를 통해 남성보다 여성이 더 높은 GRE(graduate record examination)를 받았음을 밝혔다. 토픽 모델링(topic modeling)을 활용해 수학적 추론의 연구 동향을 파악한 Hwang과 Pang(2020)은 643편의 국내·외 논문을 통해 분석하였는데, 여러 결과 중에서 국내 연구는 증명이 기하와 함께 연구되고 있음을 밝혔다. 이는 국외에서 연구하는 증명이 논증과 결합한 형태와 다소 다르다는 점을 제시하였다. Hwang과 Kim(2020)은 교양적 소양을 함양하기 위해 순수 수학에 대해 수학적 추론을 구성하였다. 비록 학교 현장에서 이루어지는 것은 아니나 대학생들에게도 미래의 교육 혁신을 위해 대학 차원에서 노력해야 한다는 점에서 연구된 것으로 판단된다. Na(2021)는 초등 예비 교사 50명을 대상으로 수학적 추론에 대한 인식 및 교수 관점에 대해 조사하였다. 그 결과, 인식에서는 주로 문제해결 방법을 탐색하는 것과 논리적 절차를 수행하는 것에 집중되었다. 수학적 추론의 지도 관련하여서는 대부분의 초등 예비 교사들은 초등 학교에서 배우는 수학적 추론을 지도할 필요가 있고, 장차 현직 교사가 되었을 때도 수학적 추론을 적극적으로 지도할 것이라 하였다. 하지만 현시점에서 수학 쓰기를 바탕으로 추론으로 이끌어낸 연구는 미비하였고, 특히

Hwang과 Pang(2020)의 연구에서 수학적 추론에 대한 관심, 연구 주제의 다변화를 지적하는 점에서 이를 뒷받침한다.

Ⅲ. 수학 쓰기의 중요성

앞선 이론적 배경을 통해 수학 쓰기가 역량에서 중요함을 파악하였다. 특히 글쓰기는 다양한 방법-창의적 글쓰기, 비판적 글쓰기, 학문적 글쓰기 등으로 접근할 수 있는 만큼 중요해졌음을 보여주었다. 이를 수학이라고 해서 글쓰기가 전혀 이루어지지 않는 것이 아니라 각 글쓰기와 연결을 통해 학습을 통해 인지적 능력을 향상시켜줄 뿐만 아니라 심리적 안정감, 수학적 태도 등 정의적 영역에도 긍정적인 변화를 가져올 수 있다는 점에서 글쓰기의 소재는 미래에도 중요한 역할이 되어줄 것이다.

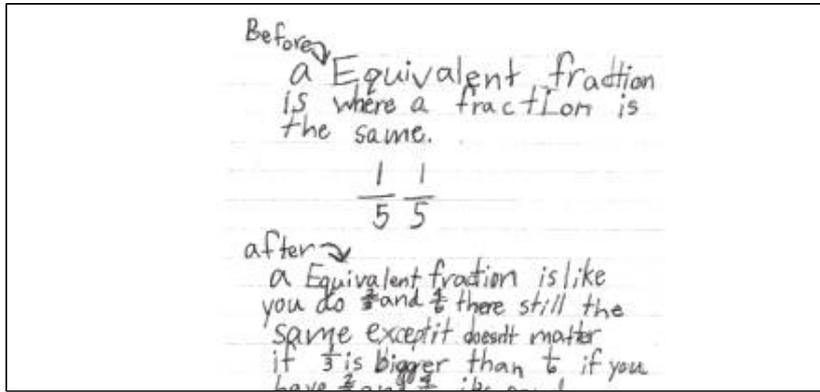
국내에서 수학 쓰기와 관련하여 활동했던 사례를 종합해 보면 다음과 같다. 먼저, Kim과 Lee(2010)는 수학적 지 쓰기에 대해 학습한 단원이 무엇인지를 쓰고, 배운 내용 중에서 이해가 잘 된 것과 잘되지 않은 것을 적도록 하였으며, 수학 내용학적 문제 풀이, 본인의 수업 태도 성찰로 하여 제시하고 있다. 추가로 교사가 해주고 싶은 말에 대해 적는 칸이 있었는데 이는 학생이 쓴 일지를 보면서 다양한 생각을 하도록 유도하거나 피드백을 제공하기 위한 것으로 해석된다. Lee와 Ahn(2013)의 경우 Polya의 문제해결 4단계에 따라 단원과 공부할 문제, 배운 내용을 적으면서 학습한 내용을 정리하기를 시작으로 문제 이해하기, 계획 수립하기, 계획 시행하기, 반성하기 순서에 맞게 문제를 분석 및 해결하기 위해 제작되었다고 밝혔다. 이때, [그림 III-1]에서 제시하는 수학 문제의 경우 단순히 선다형으로 제공된 점에서 개념을 이해하고 있는지에 대한 부분만을 파악하고자 하는 것이 강하다고 할 수 있다. 한편, [그림 III-2]에서 학생이 작성한 것을 보았을 때 문제해결 단계에 맞게 직접 작성함으로써 학생 스스로는 문제를 잘 풀었는지를 반성하여 어떻게 계획해야 하는지를 알 수 있고, 교사는 학생이 제대로 이해했는지, 수학적 상황에 맞게 문제를 잘 해결했는지를 확인할 수 있는 양식으로 확인할 수 있다. 실제로, Lee와 Ahn(2013)은 해당 양식을 학생들에게 수행했을 때 쓰기 활동에서 긍정적인 변화를 찾은 점에서 서술형 문제에서 거부감을 느끼게 된 것에서 자신감을 가지게 된 것을 언급하였는데, 이는 글을 체계적으로 정리하는 방법을 터득하고 익히는 점에서 실수가 줄었음을 보여주었다고 하였다.



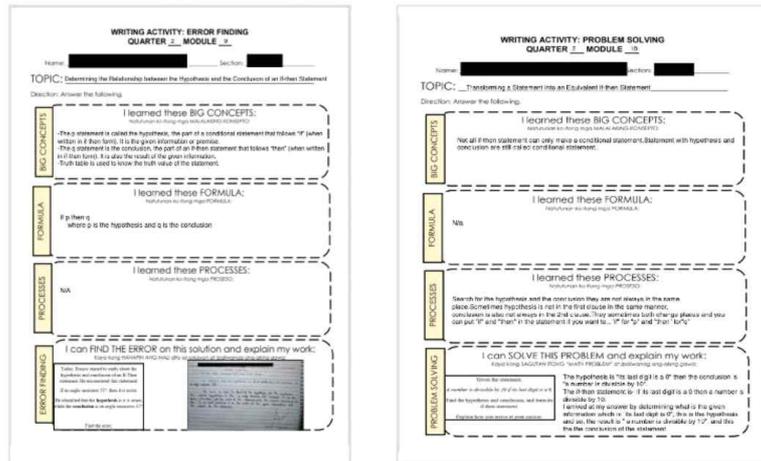
[그림 III-1] 학생들이 작성한 수학 일지 (Kim & Lee, 2010, p. 547) [그림 III-2] Polya 문제 해결 4단계에 맞춘 양식에서 학생이 쓴 결과물 (Lee & Ahn, 2013, p. 97)

한편, 해외에서 진행된 수학 쓰기의 사례를 살펴보면 다음과 같다. 먼저, Wilcox와 Monroe(2011)에 따르면, [그림 III-3]은 한 교사가 4학년 학생에게 “등가 분수가 무엇입니까?”를 물었고, 이를 답한 학생의 자료에서 등가

분수에 대해 적도록 한 것이다. 비구조화된 상황에서 학생은 글을 썼고, 초기 상태 후 교사의 피드백을 통해 다시 쓰도록 하여 이해도가 향상되었는지를 확인하였다고 밝혔다. 한편, Raquid와 Litao(2023)에서는 실험 집단과 통제 집단으로 나누어 수학 수업에서 글쓰기 활동을 한 실험 집단이 전통적 강의를 진행한 통제 집단보다 학습 성취도 향상에 효과적임을 파악하고자 하였다. 이때, 실험 집단에서는 개념, 공식, 과정을 작성할 수 있는 쓰기 활동을 제시하였고, 각 양식이 끝날 때마다 잘못된 해결책 또는 상황, 해결해야 할 문제를 제시받고 답변을 설명하도록 하였다(그림 III-4 참고). 그런 점에서 글쓰기 활동이 학습성취도가 향상되었음을 통계적으로 밝혔고, 수학을 쉽게 배울 수 있는 전략을 세울 수 있다는 점에서 큰 장점이 될 수 있다고 보았다. 이처럼 수학 학습에서 글쓰기는 매우 중요한 부분을 차지하고 있고, 개념을 정리하고 습득해 활용할 만한 학습 도구가 될 수 있음을 보여준다.



[그림 III-3] 등가 분수의 예에서 전과 후의 반응 (Wilcox & Monroe, 2011, p. 524)



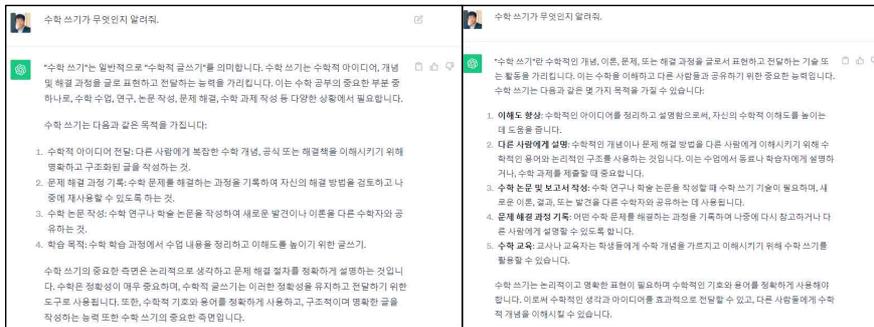
[그림 III-4] 실험 집단에서 답한 학생의 답의 표본 (Raquid & Litao, 2023, p. 184)

종합적으로 수학 쓰기와 관련한 선행 문헌들을 들여다볼 때 쓰기의 양식을 제공했을 때 학생들은 더 쉽게 글

을 쓰는 것을 확인할 수 있었으나, 대부분의 연구는 글쓰기를 공책, 양식이 없는 종이 등을 활용해 작성하고 있음을 볼 수 있었다. 글쓰기에도 학생의 수준은 다를 수 있기 때문에 이 과정이 모든 학생에게 일반화로 작용할 수는 없겠지만 적어도 청소년 시기까지는 수학 문제를 풀 때 글쓰기도 함께 함양하는 것이 중요하면서도 다양한 생각을 할 수 있도록 지원하는 도구인 글쓰기를 통해 전개해 나가는 것이 중요하다. 특히 느낀 점을 쓰도록 하는 점은 필수인데, 수업을 통해 배운 점을 상기시키도록 하여 자기반성을 하고 다음 수업 때 어떤 마음으로 임할 것인지를 다짐하는 것을 글로 남김으로써 성찰하는 기회를 제공하고 향후 수학 공부에 자신감을 가질 수 있도록 하는 것은 매우 중요한 요소라고 할 수 있다.

인공지능(artificial intelligence)이 발달하면서 도구의 가용성, 접근성, 그리고 기능이 향상됨에 따라 의사소통을 지원할 수 있게 되었다(Daniel et al., 2023). 또한, 2022년 11월에 ChatGPT가 출시되면서 많은 변화를 일으키고 있다. ChatGPT의 특징으로는 문맥 이해, 다양성, 언어 능력, 확장성, 훈련 데이터 등을 언급하고 있으면서도, 한계점에 정보의 부정확성, 개인적인 인식 부재, 장기 기억 부재, 오해, 언어 제한, 부적절한 콘텐츠 생성 가능성을 지적하였다(Noh & Hong, 2023). 여러 학자는 이 부분에서 문해력을 강조하고 있는데, Kim(2023)은 역사적으로 한자어로 구성된 신문, 책 등을 읽는 과거를 지나 이제는 컴퓨터, 스마트폰 등을 사용하고 또 알고리즘에 따라 추천하는 게시글 상단에 올려주어 읽고 싶은 글을 읽도록 구성된 점을 지적하였다. 또한, Shon(2023)은 ChatGPT가 등장하면서 읽기·쓰기 방식의 변화뿐만 아니라 글쓰기 교육의 필요성을 논의해야 한다고 하였다.

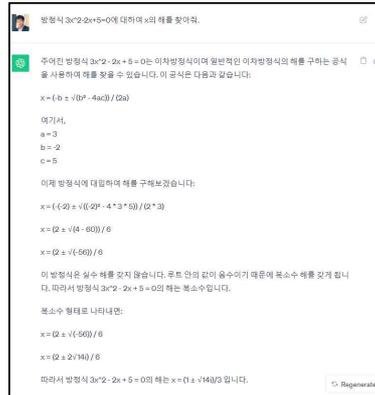
하나의 실험으로, 본 연구에서 다루는 주 소재인 ‘수학 쓰기’를 알아보기 위해 ChatGPT(GPT-3.5)를 사용한 결과 다음 [그림 III-5]와 같았다. “수학 쓰기가 무엇인지 알려줘”라는 질문을 통해 답을 얻은 것을 분석했을 때 먼저, 정의를 설명하고 이후 목적성에 대해 4가지를 제시하고 있으며, 어떤 측면에서 중요한지를 설명하고 있는 글의 구조를 보인다. 하지만 인용은 한 곳도 제시하지 않고 있는 점에서 사실에 근거해 글을 쓰고 있는지를 확인할 수 없었다. 또한, 기계학습을 통해 수학 쓰기에 대한 정의를 정리하고 있지만 검색한 시각, 검색한 날에 따라 다르게 설명하고 있는 점 또한 강력한 오류라 할 수 있다. 대표적으로 수학 쓰기에 대한 목적으로 처음에 검색했을 때는 4가지를 갖는다고 하면서 수학적 아이디어 전달, 문제해결 과정 기록, 수학 논문 작성, 학습 목적으로 두고 있지만 시간이 지나고 다시 검색했을 때는 이해도 향상, 다른 사람에게 설명, 수학 논문 및 보고서 작성, 문제해결 과정 기록, 수학교육 등 5가지로 설명하고 있는 점에서 다소 차이가 있었다. 종합적으로, 겉으로 보기에는 자세히 설명하고 있는 것처럼 보일 수 있으나 윤리적인 측면과 더불어 글의 완전성을 담고 있지 않은 점과 어떤 정의가 맞는 것인지에 대해 옳고 그름을 명확하게 표현할 수 없는 점에서 완벽한 글이라고 할 수는 없을 뿐만 아니라 시간에 따라 다르게 이야기하고 있는 점에서 제대로 된 정의, 이야기를 출처 없이 밝히지 않고 있다는 점에서 글쓰기가 왜 중요한지를 시사한다.



[그림 III-5] 수학 쓰기에 대한 정의를 ChatGPT(GPT-3.5)에 반영한 결과

(검색일: (좌) 2023.10.18. 10:32, (우) 2023.10.18. 10:39)

그렇다면, 수학에 관한 질문을 ChatGPT에 해보면 어떻게 되는지를 살펴보고자 하였다. 예를 들어, 이차방정식 $3x^2 - 2x + 5 = 0$ 에 대하여 x 의 해를 구하는 문제였다고 할 때 여러 가지 방식이 있겠으나 ChatGPT는 이차방정식의 판별식을 사용하는 것을 시작으로 하여 판별식의 식의 값을 구하는데, 실수 범위가 아니므로 복소수 범위로 나아가 문제를 해결하는 과정을 보여주고 있다([그림 III-6] 참고).



[그림 III-6] 방정식에 대한 해를 구하기 위해 ChatGPT(GPT-3.5)에 반영한 결과
(검색일: 2023.10.27. 22:48)

한편, 본 장에서 두 개를 대조하기 위해 예비교사 A학생에게 동일한 문제를 제공하고 서술하도록 안내하였다. 그 결과, ChatGPT에서 제시한 것과 다르게 간단한 풀이법으로 제시하고 있음을 볼 수 있었다. 첫째, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $a \neq 0$)인 점을 고려할 때 판별식 $D = b^2 - 4ac$ 를 사용할 수 있는데 예비교사 A학생의 경우 이차방정식에서 일차식의 계수에 해당하는 b 에 대하여 짝수 형태임을 확인하여 $\frac{b}{2} = b'$ 이라고 한 점을 확인하여 풀었음을 볼 수 있었다. 둘째, ChatGPT는 “판별식이 음수인 경우, 이차방정식의 해는 실수가 아닌 복소수입니다.”라는 설명을 통해 해의 범위를 복소수라 하여 문제를 풀고 있는 반면, A학생이 제공한 답에서는 범위가 제시되지 않은 점에서 곧바로 이차방정식의 근의 공식을 사용한 점이 차이점이었다. 셋째, 답을 별도로 쓰고 있는지에 관한 여부였다. ChatGPT는 “따라서”라는 접속사를 통해 구하고자 하는 답을 명확하게 제시하여 마무리를 짓고 있는 반면, A학생은 문장에 끝이 없는 상태에서 종결한 것으로 보아 완벽하게 답을 제시하였다고 보기에는 어려움이 있다. 물론 예비교사의 풀이를 통해 수학을 공부하는 또는 공부한 사람이 이 과정을 본다면 이해할 수 있겠으나 이 내용을 처음 접한 사람이 이 풀이를 본다면 쉽게 이해가 되지 않을 것이다. 따라서, 단순히 수학 문제를 푸는 것에 있어서 문장 단위로 구성해 쓰는 것이 아니라 기호로만 해결하고 있는 점에서 쓰기의 수준에 다소 차이가 있었고 장차 이러한 풀이가 독자가 읽었을 때 흐름이 이어질 수 있도록 하는 글을 써야 한다는 점을 강조하는 바이다.

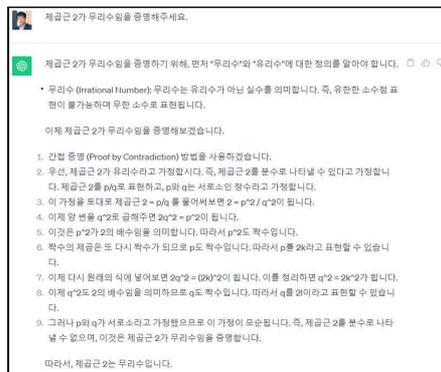
$$3x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$a=3, b=-1, c=5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-15}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{4}i}{3}$$

[그림 III-7] 동일한 문제의 예비교사 A학생이 쓴 답안

이번에는 증명과 관련하여 글쓰기를 한 데이터를 GPT-3.5와 수학 교과서와 비교해 보았다. 해당 문제는 “ $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 밝히시오.”이었고, 이는 추론과도 연결되는 사항이었다. 먼저 ChatGPT가 제시한 내용에 따르면, 무리수의 정의에 대해 제시하고 있고, 이를 증명하는 과정을 각 단계별로 증명해 나가는 것을 확인할 수 있다([그림 8] 참고). 이후 증명을 본격적으로 보여주려고 있는데 수학 교과서에서 다루는 증명법으로는 귀류법을 사용하는데 ChatGPT에서는 귀류법과 동일한 의미이지만 간접증명(proof by contradiction)이라고 해석하면서 증명해 나가는 과정을 볼 수 있었다. 이후 과정은 수학적으로 올바르게 증명하고 있음을 보여주었다.



[그림 III-8] $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하기 위해 ChatGPT(GPT-3.5)에 반영한 결과 (검색일: 2023.10.29. 15:36)

특히 증명, 넓게는 추론에서는 수학에서 사용하는 기호를 통해 어떻게 변화되었는지 설명하는 것이 매우 중요하다고 할 수 있다. 그중에서도 조건들, 예를 들면 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 밝히는 과정에서 귀류법을 증명하기 위해 유리수임을 가정한 상태에서 유리수의 정의를 사용하고 있고, 분수 $\frac{n}{m}$ 에 대하여 이 두 문자는 서로 소 (relatively prime)임을 제시하는 점과 명제가 제시된 ‘ n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.’라는 문장이 없었다면 독자가 이 증명을 읽는 데에 어려움이 있었을 것이다. 다시 말하면, 독자가 읽기 위해서는 글을 써야 하고, 그 글을 쓰기 위해서는 내용 측면도 있겠지만 문해력과도 연결되는 점에서 수학에서도 글쓰기는 중요한 부분임은 분명하다고 할 수 있다.

예제 2 $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 귀류법으로 증명하라.

증명 $\sqrt{2}$ 가 무리수가 아니라고 가정하자.
 즉, $\sqrt{2}$ 가 유리수라고 하면 서로소인 두 자연수 m, n 에 대하여

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$
 으로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면 $2 = \frac{n^2}{m^2}$, 즉

$$n^2 = 2m^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$
 이때 n^2 이 2의 배수이므로 n 도 2의 배수이다. 따라서
 $n = 2k$ (k 는 자연수)
 로 나타낼 수 있으며, 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $4k^2 = 2m^2$, 즉 $m^2 = 2k^2$
 마찬가지로 m^2 이 2의 배수이므로 m 도 2의 배수이다.
 이때 m, n 이 모두 2의 배수이므로 m, n 이 서로소라는 가정에 모순이다.
 따라서 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

[그림 III-9] $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 증명하는 교과서 제시 (Hong et al., 2015, p. 205)

미래의 글쓰기는 국어만이 아니라 다른 교과에서도 더 많은 내용, 더 다양한 교육으로 글쓰기 교육이 이루어 질지도 모른다(Park, 2014). 앞으로 쓰기의 경계가 언어에만 한정되지 않고 연결성에 기반해서 타 교과와의 융합 또는 인성교육 등으로 확장된다는 점에서 수학은 논리적인 글쓰기가 가능하고, 역량-문제해결, 의사소통, 추론 등 강화를 위해 글쓰기를 반영해 여러 가지 방식으로 접근이 가능할 것이다. 미래 사회에서 계속해서 발전되어 가는 것은 좋은 현상일 수 있으나 선행 연구에서 볼 수 있듯이 글쓰기를 통해 여러 이로운 점이 있는 만큼 이 역할은 무척 중요하다고 할 수 있다.

IV. 결론 및 제언

본 연구는 수학 쓰기가 수학교육에 주는 의미를 알아보고 각 역량에서 쓰기가 왜 중요한지를 파악하는 것이다. 이전 문헌 연구로 Powell과 동료들(2017)과 Choi-Koh(2023)가 제시한 평가(assessment), 중재(intervention), 인식(survey)으로 구분해 자료를 제시하고 분석하였으나 본 연구에서는 선행 문헌을 통해 수학 쓰기가 학교 교육에서 왜 중요한지를 설명한 점에서 본 연구의 한계점이라고 할 수 있다. 하지만 수학교육에서 수학 쓰기가 무엇인지를 정의하고 이론적 배경에서 살펴본 역량 중심-수학적 문제해결, 수학적 의사소통, 수학적 추론-을 바탕으로 수학 쓰기가 왜 중요한지를 연구가 명확하지 않았고 이를 밝혀내는 것에 있어서는 연구에서 큰 의의가 있다고 할 수 있다.

수학교육에서 수학 쓰기의 역사는 Geeslin(1997)에 의해 밝혀진 점에서 수학교육학에서 다루는 타 영역에 비해 다소 짧은 역사를 지니고 있다. 문헌 분석을 통해 국외의 경우는 지속적으로 연구가 이루어지고 있으나 국내의 경우 수학 쓰기라는 쓰기의 명확한 정의를 내리지 않은 채 연구가 진행된 점에서 불분명한 정의를 나타내고 있었다. 비로소 최근 Choi-Koh(2023)의 연구에서 “수학에서 또는 수학에 대해 단어를 사용해 글로 표현하는 것”으로 정의하였고, 사전적 정의에서 ‘쓰기’와 연결할 때 본 연구에서는 “수학을 학습하면서 자신이 표현하거나 남에게 전달할 때 수학적 기호, 도표, 그래프 등을 활용해 글로 표현하는 것”으로 정의할 수 있었다.

수학교육에서 제시하는 주요 역량과 관련해서 결론은 다음의 세 가지로 제시할 수 있다. 첫째, 수학적 문제해결을 위해 쓰기가 수반될 필요가 있다. 이는 문제해결에 있어서 향상됨을 보인 것에서 단어 문제의 명제를 다시

말하고 바꾸어 표현하도록 초점을 맞춘 Moran 외(2014)의 연구를 통해 뒷받침할 수 있다. Flower과 Hayes(1981)는 수학적 지식, 인지·초인지(cognition and meta-cognition) 능력에 따라 문제해결 능력이 향상된다고 보았는데, 이는 수학 문제를 해결하는 데 있어서 방법적 접근이 더 용이했다(Borasi & Rose, 1989)는 점에서 불완전한 이해에 직면하게 되면 글쓰기를 통해 생각하는 힘을 기를 수 있을 뿐만 아니라 인지적인 부분에서 정리할 수 있게 되면서 개념은 물론 활용하는 방법까지도 깊이 있게 다룰 수 있는 능력을 기르게 된다. 둘째, 수학적 의사소통의 경우 말하기, 듣기, 쓰기, 읽기로 구성된 점에 있어서 어느 하나도 빠질 수 없는 중요한 요소이다. 특히 쓰기는 학습에 있어서 절대적으로 필요한 요인으로 이를 통해 인지적 영역과 수학적 성향, 수학적 태도 등에 대한 정의적 영역에서도 향상시킬 수 있다는 점에서 절대적이다. 글쓰기에도 다양한 유형으로 제시되고 있는데, 수학교육에서 쓰기를 하는 경우는 설명적 글쓰기를 통해 학생들에게 적용한 사례가 있었고, 일기 쓰기를 통해 알아본 연구들도 대다수 있었다. 한편, 표현적 글쓰기의 경우 심리적인 부분을 보완하여 학생들이 수학에 자신감을 갖도록 하는 방법을 사용한 점에서 글쓰기의 종류에 따라 다양한 연구들이 이루어졌다. 마지막으로, 수학적 추론 능력에 있어서 쓰기는 단순히 기록을 남기는 것이 아니라 증명, 설명을 위해 단계적으로 어떤 부분에서 부족했는지를 교사의 직접적인 피드백을 통해 파악할 수 있는 중요한 도구가 된다. 특히 논리적으로 전개되는 수학적 정당화에서 단순히 넘어갈 수 있겠지만 제3자가 이를 읽었을 때 이해되지 않는다면 부족한 설명이라고 할 수 있다. Ministry of Education(2022b)에서 제시했듯이 추론 역량에 대한 정의에 있어서 체계적이고 논리적 근거를 바탕으로 비판적 사고 및 태도를 함양하고 수학을 다양한 방법으로 탐구해야 하는 것으로 추론은 수학에 있어서 빠질 수 없는 역량 중 하나라고 할 수 있다. 그런 점에서 비록 상대적으로 연구가 덜 이루어진 것은 사실이나 이를 쓰기와 접목했을 때 학생들이 비판적 사고력은 물론 수학적 절차를 글쓰기로써 파악하는 길은 무척 중요하다는 것을 선행 문헌을 통해 살펴볼 수 있었다.

종합적으로 본 연구에서는 역량-문제해결, 의사소통, 추론-을 중심으로 쓰기의 중요성을 밝히고자 하였고, 현재까지 이루어진 연구들을 살펴보면 어떤 부분을 강조하였으며 미래 ChatGPT 등의 인공지능이 시대적으로 발달하면서 쓰기의 역할이 계속해서 중요해지고 있음을 보여주었다. 특히 ChatGPT에서 볼 수 있듯이 문장에서 옳고 그름을 판별할 수 있는 능력을 길러야 하는 점도 하나의 중요성으로 볼 수 있다. 최근 미디어 매체를 통해 정보들을 제공하고 있지만 사실로서의 글쓰기가 아니거나 허위로의 기록 및 유포가 되기 전에 한 번 더 점검하는 힘을 갖출 필요가 있다. 무엇보다 학생들이 글을 쓰는 과정이나 글을 쓴 결과물을 바탕으로 교사의 피드백이 제공되어야 하는 것은 절대적이다. Polya가 제안한 문제해결에서도 중요한 요소 중 하나로 ‘반성하기’를 제시하고 있는 만큼 학생이 글을 잘 썼는지, 글의 흐름에 이상은 없는지를 확인해야 한다. 단순히 완성된 글이라고 해서 완벽한 글이라고 생각하는 것은 큰 오산일 것이다. 퇴고하면서 더욱 완벽한 글을 쓰는 만큼 수학에서도 글쓰기는 마찬가지로 볼 수 있다. 문제해결에 있어서 단순한 계산 문제가 결코 수학은 아니라는 점에서, 특히 문장제 및 수리논술 등에서 많은 글을 쓰게 되는 만큼 글의 흐름, 그리고 독자의 시선에서 쉽게 읽힐 수 있도록 해야 한다. 기호, 표, 그래프 등을 통해 제시했을 때 수학을 배워서 지식을 습득하고 있는 사람이라면 이해할 수 있겠지만 그렇지 않은 사람은 읽는 데에 있어 많은 불편함을 가지고 올 수밖에 없다. 책을 읽을 때 독자의 시선으로 쓰는 것처럼 수학 쓰기 또한 독자가 이해하기 쉽게 쓰는 방법, 그리고 그 글을 독자의 시선으로 흐름을 맞추는 방법은 매우 중요하다고 할 수 있다.

수학 쓰기에 관한 문헌 분석을 통해 얻은 결과를 바탕으로 다음의 네 가지를 제언하고자 한다. 첫째, Ministry of Education(2022c)는 ‘제1차 기초학력 보장 종합계획’에서 3Rs(Reading, wRiting, and aRithmetic)를 강조하였는데, 이는 초등학교에서부터 역사적으로 지속적인 관심과 평가를 받아온 영역들이다(Choi-Koh et al., 2023). 기초학력으로써 3Rs는 학생들의 주요 내용이며 이들을 함양시키는 것은 당연하다. 수학 쓰기를 주제로 논의하였는데 이는 모국어에서의 쓰기와 차별화되는 부분이다. 수학교육학에서는 모국어의 쓰기와 수학 교수·학습에서 쓰기를 비교·분석함으로써 수학 쓰기의 방향을 모색할 필요가 있다. 특히, 수학적 의사소통은 수학적 의

미와 생각을 해석하는 능력으로 수학을 읽고, 쓰고, 말하고, 듣는 4가지 영역으로 제시하고 있는데(Park & Kwean, 2008). 의사소통에서도 기초학력 신장을 위해 쓰기는 어디서나 사용되는 점에서 강조되는 것은 분명하다. 수업에서 학생들은 구두로 전하기도 하지만 수학의 경우 기호, 표, 그림 등이 존재하는 점에서 쓰기를 더 많이 하고 있어 현장에서 이루어지는 것만으로도 쓰기 영역이 큰 비중을 차지하고 있다. 이에, Choi-Koh(2023)가 제시한 제언과 일치하는 내용으로, Ministry of Education(2022b; 2022c)에서 ‘맞춤형 수업’을 강조한 점에서 학생들에게 어떤 학습으로 가르쳐야 할 것인지를 개별로 상담하도록 하고, 수학 학습클리닉과 같은 프로그램이 활성화해 기본적인 수학 쓰기에 있어서 학력 신장을 제고하고 역량을 함양할 수 있도록 활용되어야 할 것이다.

둘째, 쓰기에서도 불안은 존재할 수 있다. 즉, 쓰기 불안이 감소하기 위해서는 쓰기 능력을 갖추기 위한 필요 조건이기 때문에(Jeon, 2012) 쓰기 불안이 해소된다면 글쓰기를 잘할 수 있다는 것을 의미한다. 학생들은 글쓰기를 경험하면서 어려움 또는 불편함을 정의하는 것으로 쓰기 막힘(writing block), 쓰기 멈춤(writing pauses), 쓰기 불안(writing anxiety)으로 규정하고 있다(Oh, 2019). 이는 수학 불안과도 크게 연결될 수 있다. 수학 불안이 오는 경우는 크게 수학에 관련된 상황을 접했거나 문제를 마주했을 때 긴장 또는 불안을 경험하는 상태(Choi-Koh & Lee, 2014)로 정의하고 있는 점에서 수학은 결국 문제를 이해하는 것으로 끝나는 것이 아니라 해결하기 위해 기록을 남기고, 결국 쓰기와 직접적으로 연결된다고 할 수 있다. 수학 불안을 경험하고 있는 학생은 쓰기 불안에도 경험하고 있을 것으로 보이며 정적 관계에 미칠 수 있다고 예상할 수 있고 이 둘 사이의 연결이 매우 밀접할 것이므로 정량적 연구를 통해 관계성을 파악하는 연구가 이루어질 수 있기를 바란다. 또한, Ministry of Education(2022c)에서 제시한 학생별 상황 및 특성에 따른 지원에서 비록 다문화와 탈북을 범주로 하여 심리적 불안 해소를 위한 상담 프로그램을 지원한다고 했으나 이는 소수의 학생 특성이 아닌 전체 학생의 특성으로도 해당할 수 있는 점에서 쓰기 수준을 파악한 후 맞춤형 학습 콘텐츠를 제공하도록 하는 처치 프로그램을 개발해 적용하는 연구도 필요하다고 본다.

셋째, 선행 연구로 쓰기 평가에 대해 살펴본 점에서 수학 쓰기를 들여다보았을 때 어떤 부분을 중점적으로 또는 전체적으로 평가해야 하는지를 고민해 볼 필요가 있다. 특히, Ministry of Education(2023)에서 제시했듯이 서술·논술형이 강화되는 점에서 학교 현장에서도 글쓰기가 요구될 것이다. 물론 중간고사와 기말고사와 같은 지필 시험에도 반영되어 결과론적인 접근을 파악하는 것도 필요하겠지만 학생들이 글을 쓰면서 어떤 부분을 어려워하는지, 글쓰기 부분에서 수학적 개념을 활용하는 점에서 쓰지 못하는 것인지 등을 수시로 파악할 필요가 있다. 평가에서 계속해서 강조되는 과정 중심 평가(process-focused assessment)가 중요시해진 만큼 수학 학습 향상을 위해 학생이 쓰는 과정을 면밀하게 들여다보며 파악할 필요가 있다.

넷째, 4차 산업혁명 시대, 그리고 인공지능 사회에 접어들면서 사회는 물론 교육 환경 또한 많이 달라졌다. 이전 세대라고 했을 때 컴퓨터의 등장만으로도 충격적이었는데, 이제는 스마트폰과 함께 태블릿PC가 학교에서 보급되어 수업에 활용되고 있는 점은 대단한 변화라고 본다. 실제로 텍스트 처리 기반의 소프트웨어를 사용한 과제의 형태가 점점 많아지고 있어(Goldberg et al., 2003) 하지만 전자기기의 많은 노출로 인해 학생들이 공부할 때 시각적 자료에만 의존하는 경향이 있어 이는 작업 기억(working memory)에도 많은 영향이 있다. 정보를 얻으면서 생기는 조작으로 인해 일시적으로 저장될 수 있는 능력이 수반된다는 Baddeley와 Hitch(1974)의 내용과 함께, 작업 기억은 쓰기를 하면서 발생하는 일시적인 정보를 저장하기 위한 임시 기억 장치를 제공하는 점(Olive, 2012)에서 이를 뒷받침할 수 있다. 이런 점에서 수학 학습에서 글쓰기는 절대적으로 필요한 요소라 할 수 있고, 시대가 변한 만큼 다양한 필기 방법을 제시하여 수학적 문제해결력을 제고시키기 위한 프로그램이 개발되어 학생들에게 적용시켰을 때의 결과를 도출하는 연구가 이루어질 필요가 있다.

미래 사회에는 의사소통, 그중에서도 쓰기와 관련된 부분은 상당한 변화가 예상된다. 자동화에 따라 글쓰기 또한 교육 시스템을 제공하고 있는 등 혁신적인 컴퓨터 도구를 통해 연구가 이루어지고 있는데, Parra와 Calero(2019)는 자동 에세이 채점(Automated Essay Scoring, [AES])과 자동 작문 평가(Automated Writing

Evaluation, [AWE]), 자동 에세이 평가(Automated Essay Evaluation, [AEE])는 쓰기 과정에 있어서 평가 피드백을 제공하는 데 사용되는 교육 시스템처럼 다양한 맥락에서 사용되고 있다고 하였다. 이제는 언어 또한 컴퓨터 기술의 발달로 여러 분야에서 새로운 변화를 불러왔다고 할 수 있으며, 단순히 교사가 학생에게 일방적인 제공으로 수업하는 것이 아니라 학교 현장에서 교사와 학생이 쌍방향으로 상호 소통하면서 학생은 교사에게 많은 정보를 제공하고 이를 읽고 교사는 학생에게 적극적인 피드백을 제공하여야 한다는 점을 강조하고 있다. 이에 따라 사회적으로 빠른 변화가 일어나고 있고 이를 대응하기 위해 학교 현장에서도 빠르게 움직여야 함을 일깨워 준다.

수학 쓰기는 매우 광범위한 영역이라고 하지만 그 속에 나뉘는 유형들을 세분화했을 때 사용되는 도구들은 많다(예를 들어, 위에서 제시한 글쓰기 이외에도 창의적 글쓰기(creative writing), 비판적 글쓰기(critical writing) 등). 학생들은 글쓰기를 할 때 잘 썼는지를 점검하기 위해 체크리스트(checklist)를 제공해 자기 점검을 해보고, 동료 피드백을 통해 상호 교류가 이루어지도록 하는 방법도 고안할 필요가 있다. NCTM(2000)에서 의사소통을 위해 세 가지를 강조한 점-사과의 조직, 아이디어를 정확하게 표현하기 위한 수학적 언어의 사용, 수학적 사고를 명확하게 다른 사람에게 전달하는 능력-에서 쓰기를 통해 수학적 아이디어와 수학적 표상을 정리할 수 있는 가장 큰 도구가 될 수 있다. 수학은 결코 시각적으로 확인하고 문제를 해결해 답을 도출하는 것으로 끝나는 것이 아닌 쓰기를 통해 수업 시간에서 배우게 되는 수학과 연결되는 것이기 때문에 이러한 분야가 확장되어 향후 지속적인 관심을 가져야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 가은아 (2010). 설명문 특징 능력 발달 연구 - 초6에서 고1 학생들을 중심으로 -. 청람어문교육, **41**, 139-168.
- Ka, E. (2010). A study on development of the writing ability - Focused on the expository writing for 6th to 10th graders -. *Journal of CheongRam Korean Language Education*, **41**, 139-168.
- 강운수·김민주 (2013). 문제해결 과정에서 나타난 고등학생들의 수학적 추론 특성. 한국학교수학회논문집, **16(1)**, 241-263.
- Kang, Y., & Kim, M. (2013). High school students' reasoning characteristics in problem solving. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **16(1)**, 241-263.
- 고상숙 (2023). 수학교육에서 수학 쓰기에 대한 문헌연구. 수학교육학연구, **33(1)**, 123-144.
- Choi-Koh, S. (2023). A synthesis of research trends on mathematics writing in mathematics education. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, **33(1)**, 123-144.
- 고상숙·박만구·김정현 (2023). 초등학생의 수학 일기 쓰기 유형 분석. 수학교육 논문집, **37(1)**, 85-104.
- Choi-Koh, S., Park, M., & Kim, J. (2023). An analysis of the writing types elementary school students presented in mathematics journal. *Communications of Mathematical Education*, **37(1)**, 85-104.
- 고상숙·이창연 (2014). 수학불안증 감소를 위한 연구동향 탐색. 한국학교수학회논문집, **17(4)**, 589-611.
- Choi-Koh, S., & Lee, C. (2014). Finding the direction to the research for improvement of mathematics anxiety. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **17(4)**, 589-611.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Notification of the Ministry of Education No. 2015-74 [Vol. 8]. Ministry of Education.
- 교육부 (2021). 2022 개정 교육과정 총론 주요사항 발표. 2021-11-24 보도자료. 교육부.
- Ministry of Education (2021). *Announcement of main points of the 2022 revised National Curriculum*. Ministry of Education.

- 교육부 (2022a). 2021 국가수준 학업성취도 평가 결과 및 대응 전략 자료. 2022-06-13 보도자료. 교육부.
- Ministry of Education (2022a). *The data of results and response strategy in 2021 National Assessment of Educational Achievement*. Ministry of Education.
- 교육부 (2022b). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education (2022b). *Mathematics curriculum*. Notification of the Ministry of Education No. 2022-33 [Vol. 8]. Ministry of Education.
- 교육부 (2022c). 제1차 기초학력 보장 종합계획. 2022-10-11 보도자료. 교육부.
- Ministry of Education (2022c). *The 1st comprehensive plan for basic education security*. Ministry of Education.
- 교육부 (2023). 미래 사회를 대비하는 2028 대학입시제도 개편 시안. 2023-10-10 보도자료. 교육부.
- Ministry of Education (2023). *University entrance examination system reform plan to prepare for the future society in 2028*. Ministry of Education.
- 김민수 (2023). 디지털·AI 시대 문식성 교육이 가지는 의미 - 서평쓰기 교육을 중심으로. 교양교육연구, **17(2)**, 83-96.
- Kim, M. (2023). A study on what it means to teach literacy in the digital and AI age. *Korean Journal of General Education*, **17(2)**, 83-96.
- 김은지·진인호 (2019). 의사소통 중심의 수학 쓰기 학습 전략이 수학 학업성취도 및 수학적 성향에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, **23(3)**, 347-363.
- Kim, E., & Jeon, I. (2019). Communication-oriented mathematical writing strategies effect on mathematical achievement and mathematical propensity. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **23(3)**, 347-363.
- 김주환 (2017). 중학생들의 작문능력 실태 조사 연구. 교육과정평가연구, **20(1)**, 271-295.
- Kim, J. (2017). A study on the actual conditions of middle school students' writing abilities. *The Journal of Curriculum and Evaluation*, **20(1)**, 271-295.
- 김홍찬·이정은 (2010). 수학학습 부진아 지도방안으로써의 수학일지 쓰기. 한국학교수학회논문집, **13(4)**, 525-547.
- Kim, H., & Lee, J. (2010). Mathematical journal writing as a method of improving mathematical attitudes and achievements for underachieve students. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **13(4)**, 525-547.
- 김효선·오영열 (2014). 서술형 수학 쓰기 수업이 초등학생의 문제해결 및 수학적 성향에 미치는 효과. 수학교육 논문집, **28(1)**, 131-154.
- Kim, H., & Oh, Y. (2014). The effect of essay writing-centered mathematics teaching on problem solving and mathematical disposition. *Communications of Mathematical Education*, **28(1)**, 131-154.
- 나귀수 (2021). 초등 예비교사들의 수학적 추론에 대한 인식과 교수 관점 조사. 한국초등수학교육학회지, **25(2)**, 103-119.
- Na, G. (2021). Elementary preservice teachers' conception and instructional perspective on mathematical reasoning. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **25(2)**, 103-119.
- 노대원·홍미선 (2023). ChatGPT 글쓰기 표절 대응과 교육적 활용 전략. 국어교육연구, **82**, 71-102.
- Noh, D., & Hong, M. (2023). Strategies for solving the AI plagiarism problem and educational applications of ChatGPT. *The Journal of Korean Language and Literature Education*, **82**, 71-102.
- 박영민·최숙기 (2008). 중학생 쓰기 수행의 성별 차이 연구. 한말연구, **22**, 46-75.
- Park, Y., & Choi, S. (2008). The analysis of gender differences on writing performance of middle school students. *Korean Language Research*, **22**, 46-75.
- 박윤정·권혁진 (2008). 수학적 의사소통으로서의 쓰기활동이 고등학교 학생들의 수학 학습에 미치는 효과. 수학교육, **47(1)**, 27-47.

- Park, Y., & Kwean, H. (2008). The effect of writing activity as mathematical communication on the high school students' mathematics learning. *The Mathematical Education*, **47(1)**, 27-47.
- 박인기 (2014). 글쓰기의 미래적 가치 - 글쓰기의 미래적 효능과 글쓰기 교육의 양태(mode) -. 작문연구, **20**, 9-36.
- Park, I. (2014). For the value of the writing in future society - The efficacy of writing and the mode of writing education in future society -. *Writing Research*, **20**, 9-36.
- 서명민 · 박만구 (2021). 개방형 문제해결학습이 초등학생들의 수학적 창의성 및 수학적 태도에 미치는 영향. 수학교육 논문집, **35(3)**, 277-293.
- Seo, M., & Park, M. (2021). The effects of open-ended mathematical problem solving learning on mathematical creativity and attitudes of elementary students. *Communications of Mathematical Education*, **35(3)**, 277-293.
- 손달임 (2023). 교양 글쓰기 수업에서 ChatGPT의 활용 가능성과 한계. 사고와표현, **16(2)**, 33-65.
- Shon, D. (2023). Utilizing ChatGPT in writing class - The possibilities and limitations -. *Ratio et Oratio*, **16(2)**, 33-65.
- 안인경 · 오영열 (2018). 모듈 구성에 따른 수학적 모델링 과정 수행 및 수학적 추론 능력 분석. 한국초등수학교육학회지, **22(4)**, 497-515.
- An, I., & Oh, Y. (2018). An analysis of mathematical modeling process and mathematical reasoning ability by group organization method. *Journal for Elementary Mathematics Education in Korea*, **22(4)**, 497-515.
- 양은경 · 신재홍 (2014). 개방형 기하 문제에서 학생의 드래깅 활동을 통해 나타난 수학적 추론 분석. 수학교육학연구, **24(1)**, 1-27.
- Yang, E., & Shin, J. (2014). Students' mathematical reasoning emerging through dragging activities in open-ended geometry problems. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **24(1)**, 1-27.
- 양현수 · 김민경 (2018). 수학일지 쓰기 활동이 초등학생의 수학적 성향과 수학적 의사소통 수준에 미치는 영향: 3학년 수와연산 영역을 중심으로. 수학교육, **57(3)**, 247-270.
- Yang, H., & Kim, M. (2018). A study on the mathematical disposition and communication level in process of applying mathematical journal writing to the 3rd graders in a mathematics classroom. *The Mathematical Education*, **57(3)**, 247-270.
- 오현진 (2019). 쓰기 어려움을 나타내는 용어들에 대한 고찰. 어문론집, **80**, 417-442.
- Oh, H. (2019). A study on the terms of difficulty in writing. *The Journal of Lang. & Lit.*, **80**, 417-442.
- 이빛나 (2021). 쓰기 능력 수준에 따른 읽기 효능감, 읽기 상위인지, 읽기 능력 분석. 학습자중심교과교육연구, **21(7)**, 159-179.
- Lee, B. (2021). Analysis of reading self-efficacy, reading meta-cognition and reading ability according to writing ability level. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **21(7)**, 159-179.
- 이순영 · 김주환 · 천혜주 (2022). 중학생의 설명글 쓰기 능력 평가 연구. 한국어문교육, **40**, 71-99.
- Lee, S., Kim, J., & Cheon, H. (2022). A study on the evaluation of expository writing skills of middle school students. *Literature and Language Education*, **40**, 71-99.
- 이정혜 · 안병곤 (2013). Polya의 문제해결 단계에 따른 쓰기 활동이 학업성취도와 수학적 태도에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, **17(1)**, 87-103.
- Lee, J., & Ahn, B. (2013). The effects of writing activities based on Polya's problem solving stages on learning accomplishment and attitudes. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **17(1)**, 87-103.
- 이창근 (2013). 초등학생 작문 실태 분석 - 낱말 형태 오류를 중심으로. 디지털융복합연구, **11(3)**, 381-387.
- Lee, C. (2013). Error analysis of writing in elementary school students. *Journal of Digital Convergence*, **11(3)**, 381-387.
- 이현준 · 박영민 (2016). 쓰기 수행 수준에 따른 학생 글의 연결망 특성 비교 분석. 학습자중심교과교육연구, **16(9)**, 1039-1067.

- Lee, H., & Park, Y. (2016). Text network analysis comparison of student writing according to writing performance. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **16**(9), 1039-1067.
- 장지혜·서보영·김종철 (2020). 2018년 국가수준 성인의 쓰기 능력 평가 결과 분석. *국어교육학연구*, **55**(1), 155-204.
- Jang, J., Seo, B., & Kim, J. (2020). An analysis of the 2018 National Assessment of the Korean writing ability of adults. *Korean Language Education Research*, **55**(1), 155-204.
- 전제용 (2012). 초등학생용 쓰기 불안 검사 도구 개발과 활용. *청람어문교육*, **46**, 253-280.
- Jeon, J. (2012). A study on the developing and utilizing of writing anxiety assessment instrument in elementary school. *Journal of CheongRam Korean Language Education*, **46**, 253-280.
- 정다운·오영열 (2015). 초등 수학 수업에서 설명식 쓰기 활동이 수학적 의사소통에 미치는 영향. *한국초등수학교육학회지*, **19**(3), 435-455.
- Jung, D., & Oh, Y. (2015). Influences of expository writing on mathematical communication in elementary mathematics classes. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **19**(3), 435-455.
- 차경애·최승희 (2013). 대화식 저널 쓰기를 통한 중학생의 쓰기 능력 발달 사례 연구. *현대영어교육*, **14**(1), 243-265.
- Cha, K., & Choi, S. (2013). A case study of Korean middle school students' writing development through dialogue journal writing. *Modern English Education*, **14**(1), 243-265.
- 최명환 (2005). 글쓰기 수업 평가. *한국초등국어교육*, **27**, 71-102.
- Choi, M. (2005). Evaluation on writing lectures. *Journal of Elementary Korean Education*, **27**, 71-102.
- 최승식·김주환·이순영 (2018). 고등학생의 작문능력 실태 조사 연구. *리터러시 연구*, **9**(4), 89-123.
- Choi, S., Kim, J., & Lee, S. (2018). A study on the actual condition of high school students' writing ability. *The Korean Journal of Literacy Research*, **9**(4), 89-123.
- 하은영·장혜원 (2009). 수학저널 쓰기를 활용한 수학학습 부진학생의 기하학적 사고 수준 변화 사례 연구. *학교수학*, **11**(1), 147-164.
- Ha, E., & Jang, H. (2009). Case study on change in the geometrical thinking levels of the under achievers by using mathematical journal writing. *School Mathematics*, **11**(1), 147-164.
- 황인아·김인경 (2020). '교양적 소양(Cultivated Literacy)을 기르기 위한 수학적 추론' 교과목 개발에 대한 연구. *교양교육연구*, **14**(6), 161-173.
- Hwang, I., & Kim, I. (2020). A study on the development of the subject: 'Mathematical Reasoning for Cultivated Literacy'. *Korean Journal of General Education*, **14**(6), 161-173.
- 황지남·방정숙 (2020). 토픽모델링을 활용한 국내외 수학적 추론 연구의 동향 분석. *수학교육학연구*, **30**(4), 625-648.
- Hwang, J., & Pang, J. (2020). An analysis of domestic and international research trends of mathematical reasoning through topic modeling. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **30**(4), 625-648.
- 홍성복·이중권·신태교·이채형·이병하·신용우·전형숙·김형균·권백일·최원숙·강인우 (2018). *고등학교 수학*. 지학사.
- Hong, S., Lee, J., Shin, T., Lee, C., Lee, B., Shin, Y., Jeon, H., Kim, H., Kwon, B., Choi, W., & Kang, I. (2018). *High School Mathematics*. Jihaksa.
- Baddeley, A. D., & Hitch, G. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation* (pp. 47-90). Academic Press.
- Bakken, J. P., Mastropieri, M. A., & Scruggs, T. E. (1997). Reading comprehension of expository science material and students with learning disabilities: A comparison of strategies. *The Journal of Special*

- Education*, **31(3)**, 300-324.
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, **93(4)**, 373-397.
- Baxter, J. A., Woodward, J., & Olson, D. (2005). Writing in mathematics: An alternative form of communication for academically low-achieving students. *Learning Disabilities Research & Practice*, **20(2)**, 119-135.
- Bennett, R. E., Morley, M., Quardt, D., & Rock, D. A. (1999). *Graphical modeling: A new response type for measuring the qualitative component of mathematical reasoning*. Educational Testing Service Research Report [RR-99-21].
- Bicer, A., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2014). Integrating writing into mathematics classroom as one communication factor. *The Online Journal of New Horizons in Education*, **4**, 58-67.
- Borasi, R., & Rose, B. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, **20(4)**, 347 - 365.
- Burton, D. (1985). *The history of mathematics: An introduction*. Allyn & Bacon.
- Burton, L., & Morgan, C. (2000). Mathematicians writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31(4)**, 429-453.
- Casa, T. M., Firmender, J. M., Cahill, J., Cardetti, F., Choppin, J. M., Cohen, J., ..., Zawodniak, R. (2016). *Types of and purposes for elementary mathematical writing: Task force recommendations*. Retrieved from <http://mathwriting.education.uconn.edu>
- Cohen, J. A., Casa, T. M., Miller, H. C., & Firmender, J. M. (2015). Characteristics of second graders' mathematical writing. *School Science and Mathematics*, **115(7)**, 344-355.
- Craig, T. S. (2016). The role of expository writing in mathematical problem solving. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, **20(2)**, 57-66.
- Daniel, S., Pacheco, M., Smith, B., Burriss, S., & Hundley, M. (2023). Cultivating writerly virtues: Critical human elements of multimodal writing in the age of artificial intelligence. *Journal of Adolescent & Adult Literacy*, **67(1)**, 32-38.
- Dawkins, P. C., & Cook, J. P. (2017). Guiding reinvention of conventional tools of mathematical logic: Students' reasoning about mathematical disjunctions. *Educational Studies in Mathematics*, **94**, 241-256.
- Flower, L., & Hayes, J. R. (1981). A cognitive process theory of writing. *College Composition and Communication*, **32(4)**, 365-387.
- Goldberg, A., Russell, M., Cook, A. (2003). The effect of computers on student writing: A meta-analysis of studies from 1992 to 2002. *Journal of Technology, Learning and Assessment*, **2**, 1-52.
- Guce, I. K. (2017). Mathematical writing errors in expository writings of college mathematics students. *International Journal of Evaluation and Research in Education*, **6(3)**, 233-242.
- Henderson, P. B., Baldwin, D., Dasigi, V., Dupras, M., Fritz, J., Ginat, D., Goelman, D., Hamer, J., Hitchner, L., Lloyd, W., Marion, B., Riedesel, C., & Walker, H. (2001). Striving for mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, **33(4)**, 114-124.
- Hines, C. L., Brown, N. W., & Myran, S. (2016). The effects of expressive writing on general and mathematics anxiety for a sample of high school students. *Education*, **137(1)**, 39-45.

- Jurdak, M., & Zein, R. A. (2010). The effect of journal writing on achievement in and attitudes toward mathematics. *School Science and Mathematics*, **98(8)**, 412-419.
- Kitajroonchai, N., Kitjaroonchai, T., & Sanitchai, P. (2022). The effects of process genre-based writing and process writing approaches on Asian EFL pre-university students' writing performance. *Journal of Language Teaching and Research*, **13(4)**, 860-871.
- Knox, H. (2017). Using writing strategies in math to increase metacognitive skills for the gifted learner. *Gifted Child Today*, **40(1)**, 43-47.
- Kosko, K. W., & Norton, A. (2012). Relationships between the process standards: Process elicited through letter writing between preservice teachers and high school mathematics students. *School science and mathematics*, **112(6)**, 340-348.
- Kuzle, A. (2013). Promoting writing in mathematics: Prospective teachers' experiences and perspectives on the process of writing when doing mathematics as problem solving. *CEPS Journal*, **3(4)**, 41-59.
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliott, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in grades Pre-K-8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Lee, G. P. B., Lim, C. S., & Leong, L. M. (2020). Use mathematical writing as a practical approach to increase students' problem solving skills: A case study. *The Mathematics Enthusiast*, **17(1)**, 239-273.
- Lee, H. S., Fincham, J. M., & Anderson, J. R. (2015). Learning from examples versus verbal directions in mathematical problem solving. *Mind, Brain, and Education*, **9(4)**, 232-245.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763 - 804). Information Age Publishing.
- Maccini, P., & Ruhl, K. L. (2000). Effects of graduated instructional sequence on the algebraic subtraction of integers by secondary students with disabilities. *Education and Treatment of Children*, **23**, 465 - 489.
- Mayer, R. E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123 - 138). Lawrence Erlbaum.
- Mohamadi, Z. (2018). Comparative effect of online summative and formative assessment on EFL student writing ability. *Studies in Educational Evaluation*, **59**, 29-40.
- Moran, A. S., Swanson, H. L., Gerber, M. M., & Fung, W. (2014). The effects of paraphrasing interventions on problem solving accuracy for children at risk for math disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, **29(3)**, 97-105.
- Mukaka, A., Balimuttajjo, S., & Mutarutinya, V. (2023). Teacher efforts towards the development of students' mathematical reasoning skills. *Heliyon*, **9(4)**, E14789.
- National Center for Education Statistics (2012). *The nation's report card: Writing 2011* (NCES 2012-470). Institute of Education Science, U.S. Department of Education.
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Olive, T. (2012). Working memory in writing. In book *Past, present, and future contributions of cognitive writing research to cognitive psychology* (pp. 485-503). Psychology Press.

- Parra, G. L., & Calero, S. X. (2019). Automated writing evaluation tools in the improvement of the writing skill. *International Journal of Instruction*, **12**(2), 209-226.
- Pennebaker, J. W., & Chung, C. K. (2007). Expressive writing, emotional upheavals, and health. In H. S. Friedman & R. C. Silver (Eds.), *Foundations of health psychology* (pp. 263 - 284). Oxford University Press.
- Petersen, B., Vermeulen, C., & McAuliffe, S. (2017). Writing and mathematical problem solving in Grade 3. *South African Journal of Childhood Education*, **7**(1), 1-9.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. 우정호 역 (1986). *어떻게 풀 것인가*. 천재교육.
- Powell, S. R., Driver, M. K., Roberts, G., & Fall, A. M. (2017). An analysis of the mathematics vocabulary knowledge of third- and fifth-grade students: Connections to general vocabulary and mathematics computation. *Learning and Individual Differences*, **57**, 22-32.
- Powell, S. R., Hebert, M. A., Cohen, J. A., Casa, T. M., & Firmender, J. M. (2017). A synthesis of mathematics writing: Assessments, interventions, and surveys. *Journal of Writing Research*, **8**(3), 493-526.
- Powell, S. R., Hebert, M. A., & Hughes, E. M. (2021). How educators use mathematics writing in the classroom: A national survey of mathematics educators. *Reading and Writing*, **34**, 417-447.
- Prabavathi, R., & Nagasubramani, P. C. (2018). Effective oral and written communication. *Journal of Applied and Advanced Research*, **3**(1), S29-S32.
- Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics*, **55**, 27-47.
- Raquid, D. A. N., & Litao, R. A. (2023). Writing activities as intervention for improving academic achievement in mathematics. *European Journal of Mathematics and Science Education*, **4**(3), 181-190.
- Rohati, R., Kusumah, Y. S., & Kusnandi, K. (2023). Exploring Students' Mathematical Reasoning Behavior in Junior High Schools: A Grounded Theory. *Education Sciences*, **13**(3), 252.
- Santos, L., & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics*, **88**(1), 65-87.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Seo, B. I. (2015). Mathematical writing: What is it and how do we teach it?. *Journal of Humanistic Mathematics*, **5**(2), 133-145.
- Stonewater, J. K. (2002). The mathematics writer's checklist: The development of a preliminary assessment tool for writing in mathematics. *School Science and Mathematics*, **102**(7), 324-334.
- van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, **18**(4), 246 - 254
- Wang, Y., Luo, X., Liu, C. C., Tu, Y. F., & Wang, N. (2022). An integrated automatic writing evaluation and SVVR approach to improve students' EFL writing performance. *Sustainability*, **14**(18), 11586.
- Wilcox, B., & Monroe, E. E. (2011). Integrating writing and mathematics. *The Reading Teacher*, **64**(7), 521-529.
- Yee, S. P. (2017). Students' and teachers' conceptual metaphors for mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, **117**(3-4), 146-157.

An Overview on Importance of Writing in Mathematics Education

Kim, Jeonghyeon

Dankook University

E-mail : mathedu_kimjh1031@dankook.ac.kr

Choi-Koh, Sangsook[†]

Dankook University

E-mail : sangch@dankook.ac.kr

For a long time, mathematics education institutions such as NCTM(National Council of Teachers of Mathematics) have emphasized the essential role of writing, and recent surveys by the Ministry of Education report a decline in foundational academic skills in the post-COVID19 period. The purpose of this study is to redefine the significance of mathematics writing in mathematics education, focusing on competencies highlighted in the field, particularly in the areas of problem-solving, communication, and reasoning. The research findings indicate that writing in problem-solving enhances cognitive organization, fostering the ability to grasp concepts and methods. Writing in communication builds confidence through the meta-cognitive process, and writing in inference allows self-awareness of step-by-step identification of areas lacking understanding. Particularly in the future society where artificial intelligence(AI) is utilized, changes in the learning environment necessitate research for the establishment of authenticity judgment through writing and the cultivation of a proper writing culture.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C99

* Key words : mathematics writing, problem-solving, communication, mathematical reasoning, ChatGPT

[†] corresponding author