#### **RESEARCH ARTICLE**

# 개별요소법 기반의 삼차원 수치해석을 통한 절리성 암반의 강도특성 평가

배준봉1 · 엄정기2\* · 정호영2

1부경대학교 에너지자원공학과 석사과정, 2부경대학교 에너지자원공학과 교수

# Assessment of Rock Mass Strength Using Three-Dimensional Numerical Analysis with the Distinct Element Method

Junbong Bae<sup>1</sup> · Jeong-Gi Um<sup>2\*</sup> · Hoyoung Jeong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduate Student, Department of Energy Resources Engineering, Pukyong National University <sup>2</sup>Professor, Department of Energy Resources Engineering, Pukyong National University

#### Abstract

Joints or weak planes can induce anisotropy in the strength and deformability of fractured rock masses. Comprehending this anisotropic behavior is crucial to engineering geology. This study used plaster as a friction material to mold specimens with a single joint. The strength and deformability of the specimens were measured in true triaxial compression tests. The measured results were compared with three-dimensional numerical analysis based on the distinct element method, conducted under identical conditions, to assess the reliability of the modeled values. The numerical results highlight that the principal stress conditions in the field, in conjunction with joint orientations, are crucial factors to the study of the strength and deformability of fractured rock masses. The strength of a transversely isotropic rock mass derived numerically considering changes in the dip angle of the joint notably increases as the intermediate principal stress increases. This increment varies depending on the dip of the joint. Moreover, the interplay between the dip direction of the joint and the two horizontal principal stress directions dictates the strength of the transversely isotropic rock mass. For a rock mass with two joint sets, the set with the steeper dip angle governs the overall strength. If a rock bridge effect occurs owing to the limited continuity of one of the joint sets, the orientation of the set with longer continuity dominates the strength of the entire rock mass. Although conventional three-dimensional failure criteria for fractured rock masses have limited applicability in the field, supplementing them with numerical analysis proves highly beneficial.

**Keywords:** true triaxial compression, fractured rock mass, distinct element method, 3-D numerical analysis, principal stress

### 초 록

절리성 암반은 절리 또는 연약면에 의해 역학적인 이방성이 발현될 수 있으며 절리성 암반의 강도 및 변 형 특성에 대한 이해는 지질공학 현장에서 주된 관심사이다. 본 연구는 마찰재료로 채택된 석고를 이용 하여 단일절리를 포함하는 시료를 성형하고 진삼축시험을 통하여 진삼축 조건의 강도 및 변형 특성을 고 찰하였다. 동일한 조건에서 수행한 개별요소법 기반의 삼차원 수치해석은 진삼축시험을 통하여 검증되



\*Corresponding author: Jeong-Gi Um E-mail: jum@pknu.ac.kr

Received: 30 November, 2023 Revised: 12 December, 2023 Accepted: 13 December, 2023

 ${\rm \fbox{C}}$  2023 The Korean Society of Engineering Geology



This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attri-

bution Non-Commercial License (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. 었으며 타당성이 확보되었다. 수치해석 결과는 절리의 방향성과 더불어 현장의 주응력 조건이 절리성 암반의 강도 및 변형 특성 연구에 있어 서 필수적인 요소임을 지시한다. 수치해석을 통하여 절리의 경사각 변화에 따라 산정한 횡등방성 암반의 강도는 중간주응력이 강화함에 따라 유의미한 증가를 나타내며, 증가의 폭은 절리의 경사 조건에 큰 영향을 받는다. 또한, 절리의 경사방향과 두 수평 주응력 방향 간의 상대적인 관계는 횡등방성 암반의 강도특성을 좌우하는 요인이다. 두 개의 절리군을 포함하는 암반의 강도는 경사가 더욱 급한 절리군이 전체 암반의 강도를 좌우한다. 두 절리군 중 한 절리군의 연속성이 짧아 암교 효과를 발휘하면 연속성이 상대적으로 긴 절리군의 방향성이 전체 암반의 강 도를 좌우할 수 있다. 절리성 암반에 대한 기존의 삼차원 파괴기준식은 적용성 측면에서 한계도 있지만, 수치해석이 이를 보완하는 데 유용하 게 활용될 수 있다.

주요어: 진삼축압축, 절리성 암반, 개별요소법, 삼차원 수치해석, 주응력

### 서론

연약면으로 작용하는 층리, 엽리, 편리, 절리 등은 횡등방성(transversely isotropic) 암반의 강도 및 변형 특성에 지대한 영향을 미칠 수 있다. 평행한 연약면이 분포하는 층상의 암반 또는 여러 조의 절리군으로 이루어진 절리성 암반은 절리 또 는 연약면의 방향성에 따라 역학적인 이방성이 발현될 수 있으며 시추 또는 굴착 등의 지질공학 현장에서 주 관심사 중 하 나이다.

인공절리로 구성한 층상암반에 대한 Jaeger(1959)의 연구를 시작으로 셰일(Niandou et al., 1997; Ajalloeian and Lashkaripour, 2000; Cho et al., 2012), 편암(Behrestaghi et al., 1996), 천매암(Ramamurthy et al., 1993; Fereidooni et al., 2016) 등 퇴적암과 변성암을 대상으로 수행한 다수의 실내 암석역학시험은 층상암반의 역학적 이방성에 대한 이해를 제 공하였다. 한 방향의 연약면이 평행하게 분포하는 암석에 대한 전통적인 삼축압축시험 결과는 연약면의 경사가 증가함에 따라 강도는 감소하다 다시 증가하는 전형적인 U-shape을 나타냈다. 연약면 경사에 따른 암석의 파괴유형은 연약면을 따 라 미끄러지는 파괴와 연약을 가로지르는 파괴가 보고된 바 있다(Tien et al., 2006).

암석의 강도를 추정할 때 일반적으로 사용되는 Mohr-Coulomb 또는 Hoek-Brown 파괴기준식은 중간주응력에 대한 고 려 없이 암석의 강도를 추정하는 이차원 파괴함수이다. 그러나 인위적으로 제작한 마찰재료 또는 다양한 현장의 암종에 대한 진삼축시험 결과는 중간주응력이 암석의 강도에 미치는 영향을 간과할 수 없다는 논의를 뒷받침하였다(Tiwari and Rao, 2007; Benz and Schwab, 2008). 무결암(intact rocks)에 대하여 중간주응력의 영향을 고려한 삼차원 파괴함수는 수정 Lade 기준식(Ewy, 1999), Drucker-Prager 기준식(Drucker and Prager, 1952), 수정 Wiebols-Cook 기준식(Zhou, 1994) 등을 들 수 있다. 이러한 무결암에 대한 삼차원 파괴함수는 연약면을 따른 파괴거동을 고려할 수 없는 단점이 있다. 이를 보완하여 절리성 암반에 대한 삼차원 파괴함수로 수정 Mohr-Coulomb(Single et al., 1998; Singh and Singh, 2012), 수정 Drucker-Prager(Tiwari and Rao, 2007), 3-D Hoek-Brown(Single et al., 1998; Lee and Pietruszczak, 2008; Ismael and Konietzky, 2019) 등이 제안되었다. 이와 같은 절리성 암반에 대한 삼차원 파괴기준식은 절리 또는 연약면에 의한 강도감 소 효과를 반영하는 상수를 파괴기준식에 포함하는 방식인데, 적용성에 있어서 일반화하기 어려운 한계도 있다.

최근들어 수치해석은 진삼축 조건의 암반에 대한 파괴거동을 이해하는 데 큰 역할을 담당하고 있다. 특히, 중간주응력 이 암반의 거동에 미치는 영향을 평가하기 위해 다양한 수치해석 기법을 통한 연구가 수행되었다. 수치해석은 대부분 유 한차분법(Feng et al., 2019), 유한요소법(Wang et al., 2018) 및 개별요소법(Fjær and Ruistuen, 2002; Zhang et al., 2014; Liu et al., 2017; Faizi et al., 2020) 기반인데, 이중 개별요소법(discrete element method, DEM)은 불연속체의 역학적 거동 을 모사하기 위한 수치해석 기법으로 매우 유용하다. Cundall(1971)은 변형 가능한 다각형 블록의 암반역학적 거동을 해 석하기 위하여 DEM을 발전시켜 이차원 불연속체 모델링을 위한 UDEC(Universal distinct element code)을 제안하였다. 이후 삼차원으로 확장한 3DEC(3D distinct element code)은 정적 또는 동적 하중을 받는 불연속체의 역학적 거동을 분석 하는 삼차원 수치해석 도구로 많은 연구에 적용된 바 있다. 여기서, 불연속체는 개별블록의 집합체로 모사되며 불연속면 은 블록 간의 경계면으로 취급하였다.

본 연구는 마찰재료로 채택된 석고를 이용하여 단일절리를 포함하는 시료를 성형하고 진삼축시험을 통하여 진삼축 조 건의 강도 및 변형 특성을 고찰하였다. 또한, 진삼축시험과 동일한 조건으로 수치해석이 수행되었으며 실내시험과 수치해 석 결과를 바탕으로 수치해석의 타당성 및 수용성이 검토되었다. 마지막으로 본 연구는 절리의 방향성 및 중간주응력의 변화가 절리성 암반의 강도에 미치는 영향을 평가하기 위하여 한 조 또는 두 조의 절리군이 분포하는 암반에 대하여 수치 해석을 수행하고, 수치해석 결과를 삼차원 파괴기준식에 적용하여 절리의 조건에 따른 삼차원 파괴함수의 추이를 고찰하 였다.

## 실내시험 및 수치해석

이 연구는 한 절리군에 의한 횡등방성 암반 또는 직교하는 두 절리군이 분포하는 절리성 암반에 대한 진삼축 강도특성 및 중간주응력이 미치는 영향을 평가하기 위하여 3차원 개별요소법 기반의 3DEC을 활용한 수치해석을 수행하였다. 횡등 방성 암반은 암석 블록과 불연속면으로 구성하였으며 해석영역은 변형 가능한 블록의 집합체로 취급하였다. 불연속면은 두 블록 사이의 접촉면으로 작용하며, 이와 같은 블록의 접촉부에서 응력 조건에 따른 변위가 산정될 수 있다. 본 연구는 절리성 암반에 대한 수치해석을 수행하기 위한 전 단계로서 단일절리를 포함하는 단순한 조건의 블록 시료에 대하여 실내 시험과 수치해석을 선행하여 수치해석의 타당성과 수용성을 검토하였다.

실내 진삼축시험을 위한 마찰재료는 선행연구(Bae et al., 2022)와 같이 석고를 사용하여 52(w) × 52(l) × 104(h) mm 크 기의 직육면체 시료로 제작하였으며 30° 및 60°의 경사를 이루는 단일절리를 시료의 중앙에 배치하였다. Fig. 1은 단일절 리를 포함하는 석고 재료의 사진과 수치해석을 위한 블록 내 절리의 형상을 보여준다. 진삼축시험에 사용된 장비에 관한 자세한 사항은 선행연구(Bae et al., 2022)를 참고할 수 있다. 진삼축시험은 절리의 경사방향 및 주향으로 주응력을 설정하 여  $\sigma_3$ 가 절리의 경사방향일 경우  $\sigma_2$ 는 주향으로, 또한,  $\sigma_3$ 가 절리의 주향일 경우  $\sigma_2$ 는 경사방향으로 배치하였다. 이와 같은 수평 구속압의 범위는  $\sigma_3 = 0.8 \sim 1.5$  MPa 및  $\sigma_2 = 3.0 \sim 3.8$  MPa이며 절리의 경사가 30° 및 60°인 경우에 대하여 구속압의 조건을 각각 4개 및 2개로 설정하여 총 6개의 구속압 조건이 고려되었다. 진삼축시험은 삼축가압챔버에서  $\sigma_2$  및  $\sigma_3$ 를 일정 하게 유지한 후  $\sigma_1$ 을 재하하는 방식으로 구속압 조건당 2회씩 총 12회 수행하였다.



**Fig. 1.** Photographs and corresponding block models of friction materials for true triaxial compression tests: specimens with a dip angle of (a) 30° and (b) 60°.

Table 1은 3DEC 수치해석에 사용한 입력변수인데, 무결암 시료 대한 밀도, 일축압축강도, 영률, 포아송비와 전통적인 삼축압축실험을 통해 추정된 재료의 내부마찰각, 점착력 그리고 직접전단실험을 통해 산출된 절리전단강성(JKS), 절리 점착력, 절리마찰각이 수록되어있다. 또한, 진삼축시험과 수치해석 시 절리의 경사각(β)에 따른 주향과 경사방향에 작용 하는 구속압 조건이 Table 2에 나타나 있다. 수치해석은 실내 진삼축시험과 동일한 구속압 조건에서 수직축 방향에서 0.01 mm/s의 일정속도 경계조건으로 완전소성변형이 나타날 때까지 하중을 재하하였다. 이때 강성체 블록 및 절리의 거 동은 각각 Mohr-Coulomb 모델 및 Coulomb 슬립 모델을 적용하였다.

Mechanical property	Value	Remarks	
Density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1,850		
Uniaxial compressive stress, $\sigma_{\rm c}$ (MPa)	19.70		
Young's modulus, E (GPa)	iodulus, E (GPa) 7.80		
Poisson's ratio, $\nu$	0.31		
Internal friction angle, $\phi$ (degrees)	42.60	Based on triaxial tests	
Cohesion, c <sub>0</sub> (MPa)	4.30		
Joint shear stiffness, JKS (GPa/m)	1.00		
Joint cohesion, C <sub>j</sub> (MPa)	0.07	Based on direct shear tests	
Joint friction angle, $\phi_j$ (degrees)	36.30		

Table 1. Mechanical properties of the studied friction material

Joint	Confining stress (MPa)		Block strength, $\sigma_1$ (MPa)	
	Strike dir.	Dip dir.	Triaxial tests	Numerical analysis
$\beta = 30^{\circ}$	$\sigma_3 = 0.8$	$\sigma_2 = 3.8$	23.31	22.92
	$\sigma_2 = 3.8$	$\sigma_3 = 0.8$	23.03	22.92
	$\sigma_3 = 1.5$	$\sigma_2 = 3.0$	27.47	26.64
	$\sigma_2 = 3.0$	$\sigma_3 = 1.5$	26.96	26.39
$\beta = 60^{\circ}$	$\sigma_3 = 1.5$	$\sigma_2 = 3.0$	11.61	11.51
	• •		6.05	

 $\sigma_3 = 1.5$ 

Table 2. Results obtained from true triaxial tests and numerical analysis

 $\sigma_2 = 3.0$ 

Fig. 2는 수평으로 직교하는 두 방향의 구속압이 1.5 MPa 및 3.0 MPa일 때 진삼축시험과 수치해석을 통해 얻은 응력-변형 관계를 보여준다. Fig. 2a와 Fig. 2b는 β가 30°인 경우의 결과이며, Fig. 2c와 Fig. 2d는 β가 60°인 경우의 결과이다. 여기서, 진삼축시험 결과와 수치해석 결과는 각각 점선과 실선으로 구분하였다. 경사방향으로 3.0 MPa과 주향으로 1.5 MPa의 구속압을 설정한 Fig. 2a의 경우, 진삼축시험 결과는 σ<sub>3</sub> 방향인 주향으로의 변형이 σ<sub>2</sub>의 경사방향보다 크게 일어났 음을 보여준다. 수치해석 결과에서도 주향으로의 변형이 약간 우세함을 알 수 있지만 차이는 미소하며 탄성구간에서 그래 프의 경사도 거의 유사함을 인지할 수 있다. 본 연구에서 마찰재료로 사용한 석고시료의 진삼축시험 결과는 설정된 구속 압 조건에서 수치해석 결과와 같은 완벽한 탄성거동을 보이지 않지만 σ<sub>3</sub> 방향으로 변형이 더욱 크게 나타난 점과 시료의 최대강도가 수치해석 결과에 부합하는 점은 절리성 암반의 강도특성에 관한 연구에 있어서 3DEC을 통한 수치해석의 수 용성을 지지한다고 볼 수 있다. 경사방향으로 1.5 MPa과 주향으로 3 MPa의 구속압을 설정한 Fig. 2b의 결과는 Fig. 2a의

6.27

5.88

결과와 유사하게  $\sigma_3$  방향으로 시료의 변형이 크게 측정되었다. Fig. 2a와 Fig. 2b는 강도 및 변형 특성에 있어서 전반적으 로 큰 차이를 보이지 않는데, 특히, 수치해석 결과는 구속압( $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )의 방향에 따른 강도 및 변형 특성이 유의미한 차이를 보이지 않고 거의 유사하다. 이는 시료에 포함된 절리의 경사각이 절리마찰각보다 작은 데에 기인한다. 반면에 절리의 경 사각이 절리마찰각보다 큰 60°의 경우 도출된 Fig. 2c와 Fig. 2d의 결과는 절리의 경사방향이 블록의 강도 및 변형에 미치 는 효과를 확인할 수 있다. 시료의  $\sigma_1$ 은 Fig. 2c의 경사방향으로 3 MPa의  $\sigma_2$ 를 가한 진삼축 조건에서 Fig. 2d의 경사방향 으로 1.5 MPa의  $\sigma_3$ 를 가하였을 때 보다 더욱 강하게 나타났다. 또한, 두 경우 모두 구속압( $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )의 방향과 관계없이 경사 방향으로 소성변형이 일어남을 알 수 있다. 이는 60° 절리에서 경사를 따라 미끄러짐이 발생한 데에 기인하며 Gao et al.(2020)의 연구에서도 유사한 결과가 보고된 바 있다.



**Fig. 2.** Stress versus directional strain derived from true triaxial tests and numerical analysis for different  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  directions: specimens with a dip angle of (a) & (b) 30° and (c) & (d) 60°.

Table 2는 설정된 구속압 조건에 대한 진삼축시험 및 수치해석을 통해 얻은 최대블록강도 σ1을 비교하였는데, 모든구 속압 조건에서 두 강도 값이 유사함을 확인할 수 있다. 절리의 경사각이 30°일 때 구속압(σ2, σ3)이 (3.8 MPa, 0.8 MPa)인 조건에서 σ2를 경사방향으로 설정한 경우와 주향으로 설정한 경우의 σ1은 진삼축시험을 통하여 각각 23.31 MPa과 23.03 MPa로 측정되어 두 결과가 유사하게 도출되었다. 또한, 수치해석에 의한 결과는 두 경우 공히 22.92 MPa로 산정되었다. 구속압(σ2, σ3)이 (3.0 MPa, 1.5 MPa)인 조건에서 σ2를 경사방향으로 설정한 경우와 주향으로 설정한 경우에도 진삼축시 험을 통한 σ1은 각각 27.47 MPa과 26.96 MPa로 측정되어 두 결과 간에 유의미한 차이를 거론하기 어렵다. 하지만 구속압 (σ2, σ3)이 (3.8 MPa, 0.8 MPa)인 경우의 σ1은 (3.0 MPa, 1.5 MPa)인 경우의 σ1 대비 85% 정도로 약 15%의 강도 저하를 나타냈다. 이는 σ2와 σ3의 산술 평균((σ2+σ3)/2)이 비슷해도 σ2와 σ3의 차이가 암반의 강도특성에 영향을 미칠 수 있음을 지시하며 진삼축 기반의 암반강도에 대한 연구의 필요성을 뒷받침한다. 한편, 동일한 수평 구속압 조건에서 동일한 석고 재료에 대한 무결암의 강도는 29.3 MPa로 측정된 바 있으며(Bae et al., 2022), 절리를 포함한 경우의 뚜렷한 강도의 저하 가 본 연구의 진삼축시험을 통하여 관찰되었다. Table 2에서 절리의 경사각이 60°인 경우에도 진삼축시험 및 수치해석에 의한  $\sigma_1$ 이 서로 잘 일치함을 알 수 있으며, 이는 개별요소 기반의 수치해석이 진삼축 조건에서 절리성 암반의 강도특성을 파악하는 데 유용하게 활용될 수 있음을 지시한다. 절리의 경사각이 60°와 30°에서 동일한 구속압 조건의 진삼축시험 결과를 서로 비교하면 경사각이 60°의 경우 구속 압( $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ )의 방향에 따라, 즉, 절리의 경사방향으로  $\sigma_2$ 보다  $\sigma_3$ 가 작용할 때 강도의 저하가 더욱 크게 나타났는데, 이는 앞에서도 언급하였듯이 절리의 경사가 절리마찰각보다 큰 데에 기인한다.

본 연구의 진삼축시험 및 수치해석 결과는 절리의 방향성과 중간주응력에 대한 이해가 절리성 암반의 강도 및 변형 특 성 연구에 있어서 간과할 수 없는 요소임을 제시한다. 특히, 한 개의 주 절리군이 지배적인 결정질의 암반 또는 횡등방성이 강하게 나타나는 퇴적암 및 변성암 암반에 대한 강도 및 변형 특성은 불연속면의 방향성과 더불어 현지응력 조건을 필수 적으로 고려하여 파악되어야 한다. 다음은 수치해석을 통하여 진삼축 조건에서 절리의 방향성이 횡등방성 암반의 강도에 미치는 영향을 평가하였다.

#### 횡등방성 암반의 진삼축 강도특성

대표적인 횡등방성 암반으로 퇴적암의 층상암반을 들 수 있으며 퇴적 층리는 무결암 대비 낮은 전단강도을 갖고 뚜렷한 이방성을 띠므로 전체 암반의 역학적 거동에 큰 영향을 미칠 수 있다. 본 연구는 층리와 같은 연약면이 암반의 강도에 미치 는 영향을 평가하기 위하여 절리로 구성된 횡등방성 암반의 수치모형을 수립하고 진삼축 조건에서 절리의 방향성이 암반 강도에 미치는 효과를 수치해석을 통하여 분석하였다.

Fig. 3은이 연구에서 설정한 가장 기본적인 형태의 횡등방성 암반을 모사한 모형을 보여준다. 한 방향의 절리가 같은 간 격으로 분포하는 횡등방성 암반의 해석영역은 150(w) × 150(l) × 150(h) mm 규격의 정육면체이다. 여기서, 절리의 법선 방향으로 절리간격은 25 mm이며 절리의 경사방향은 N(000)을 향한다. 이와 같은 횡등방성 암반에 대한 경계조건은 σ2를 NS방향으로, 그리고 σ3를 절리의 주향인 EW방향으로 설정하였다. 이때 σ3는 1.5 MPa로 일정하게 고정하였으며, 중간주 응력의 변화에 따른 블록강도의 변화를 분석하기 위하여 σ2를 σ3와 같은 1.5 MPa에서 σ3의 3배인 4.5 MPa까지 3단계로 증가시키며 수치해석이 수행되었다. 또한, 절리의 경사를 0°에서 90°까지 10° 간격으로 증가시키며 총 30개 횡등방성 암



Fig. 3. Typical analysis domain of a transversely isotropic rock mass with a single joint set.

반의 강도 변화를 고찰하였다. 수치해석은 직교하는 수평방향으로 설정된 (σ<sub>2</sub>, σ<sub>3</sub>) 조건에서 수직축 방향으로 0.01 mm/s 의 일정속도 경계조건으로 완전소성 변형이 충분히 확인될 때까지 재하하는 방식으로 수행되었다. σ<sub>1</sub>에 대한 모니터링은 정육면체 상부면에 등간격으로 5 × 5의 총 25 포인트에서 이루어졌으며 이들 자료를 평균하여 최대블록강도 σ<sub>1</sub>을 산정하 였다.

Fig. 4는 절리의 중간주응력  $\sigma_2$ 와 절리 경사각의 변화에 따라 산정된  $\sigma_1$ 을 그래프에 도시한 결과이다. 중간주응력과 최 소주응력이 동일한  $\sigma_2/\sigma_3 = 1$ 의 경우 절리의 경사각이 0°, 즉, 수평절리로 구성된 횡등방성 암반에서  $\sigma_1$ 은 최대값을 도출 하였으며 절리의 경사각이 증가함에 따라 30°까지 약하게 감소하는 경향을 나타냈다. 절리의 경사각이 절리마찰각보다 커져서 40°에 이르면  $\sigma_1$ 은 현저하게 저하되었으며 이후 급격히 감소하여 60°에서 최소값을 갖는다.  $\sigma_1$ 은 절리의 경사가 70°에서 다시 증가하였으며 80° 이후 더욱 급격히 강화되어 90°의 수직절리로 구성된 횡등방성 암반에서 다시 최대값을 나타냈다. 이와 같은  $\sigma_2 = \sigma_3$  조건의 수치해석 결과는 횡등방성 암반에 대해 중간주응력을 고려하지 않는 Jaeger(1960)의 강 도 이론식과도 매우 잘 일치한다. 한편,  $\sigma_2$ 가 3 MPa로  $\sigma_3$ 의 2배인 경우( $\sigma_2/\sigma_3 = 2$ ) 절리의 경사각이 증가함에 따라  $\sigma_1$ 은 수 평 및 수직절리 조건에서 최대값 그리고 60° 절리 경사에서 최소값을 가지며 전반적으로 앞의  $\sigma_2 = \sigma_3$  조건과 유사한 강도 의 저하 및 증가 양상을 보이지만, 같은 경사각 조건에서  $\sigma_2$ 가 증가함에 따라 강도가 강해졌음을 알 수 있다.  $\sigma_2$ 가 4.5 MPa 로  $\sigma_3$ 의 3배인 경우( $\sigma_2/\sigma_3 = 3$ )에도 최소값 부근(50~70°)에서 더욱 큰 강도 증가를 관찰할 수 있는데, 이는 절리의 경사방향 으로 작용하는 응력의 크기가 횡등방성 암반의 강도에 영향을 미치는 것을 의미한다. 또한,  $\sigma_2$ 가 중가함에 따라 절리의 경사에 해석에서도 언급된 바 있다. 이와 같은 결과는 절리 또는 연약면을 포함하는 횡등방성 암반의 강도특성을 평가할 때 중간 주응력에 대한 고려가 필히 전제되어야 함을 시사한다.



**Fig. 4.** Estimated  $\sigma_1$  for transversely isotropic rock mass based on joint dip angle and  $\sigma_2$ .

절리의 방향성은 절리의 경사각뿐만 아니라 경사방향에도 좌우된다. Fig. 5는  $\sigma_2$  방향을 N(000)으로 설정하였을 때 절 리의 경사방향이 N에서 시계방향으로 30° 간격으로 증가하여  $\sigma_3$  방향인 E(090)에 이르는 횡등방성 암반에 대한 해석영 역을 보여준다. 본 연구는 절리의 경사방향을 000에서 090까지 10°씩 증가시키면서 각 경사방향에서 절리의 경사를 0°에 서 90°까지 10° 간격으로 총 100개의 횡등방성 암반블록에 대한 수치해석을 수행하여  $\sigma_1$ 을 산정하였다. 이때 경계면에서  $\sigma_3 = 1.5$  MPa,  $\sigma_2 = 3.0$  MPa로 고정하였다.



Fig. 5. The transversely isotropic rock mass with dip directions of (a) 000, (b) 030, (c) 060, and (d) 090.

Fig. 6에 나타난 수치해석 결과에서 절리의 경사방향과 경사각에 따른 횡등방성 암반의 σ1은 경사각의 증가에 따라 50°에서 현저한 강도의 저하가 일어나 60~70°에서 최소값에 이르고 다시 증가하는 방식의 전형적인 U-Shape의 변화양상을 나타냈다. 여기서, 주안점은 절리의 경사방향이 σ1에 미치는 영향인데, σ1은 경사방향이 σ2 방향(000)과 일치할 때 최대값을 가지며 경사방향이 10°씩 증가함에 따라 σ1은 지속적으로 저하되어 경사방향이 σ3 방향(090)과 일치할 때 최소값을 도출하였다. 이는 절리의 경사방향으로 작용하는 주응력이 감소하면 절리면을 따른 변형이 증가하고 결과적으로 암반의 강도가 저하될 수 있기 때문이다. Mogi(1979)의 편암에 관한 진삼축시험 연구는 편리의 경사방향이 σ3 방향인 경우보다 σ2 방향으로 설정하였을 때 압축강도가 더욱 강하게 측정되었음을 보고한 바 있다. 이처럼 절리의 방향성과 중간주응력 방향의 의상대적인 관계는 횡등방성 암반의 강도에 매우 유의미한 영향을 미칠 수 있다.



**Fig. 6.** Estimated  $\sigma_1$  for transversely isotropic rock mass based on joint dip angle and dip direction.

# 절리성 암반의 진삼축 강도특성

퇴적 또는 변성 기원의 횡등방성 암반은 한 방향의 연약면이 지배적이지만 일반적인 결정질 암반은 다수의 절리군을 포 함하는 경우가 대부분이다. 이 연구는 두 개의 절리군을 포함하는 암반의 강도특성을 고찰하기 위하여 정육면체 해석영역 에 Fig. 7과 같이 두 개의 절리군을 25 mm의 등간격으로 배치하고 절리의 경사 변화에 따른 진삼축 조건의 강도특성을 평 가하였다. 본 연구에서 고려한 두 절리군은 서로 직교하도록 해석영역에 구성하였는데, Fig. 7a와 같이 가장 단순한 형태 로 두 절리군 모두 연장성이 해석영역의 경계까지 이르는 경우와 Fig. 7b와 같이 두 절리군 중 하나는 12.5 mm의 스태핑 (s = 절리간격/2) 만큼 엇갈리게 배치한 경우로 구분하여  $\sigma_1$  산정을 위한 수치해석이 수행되었다. 이와 같은 두 부류의 삼 차원 해석영역에 대한 경사방향 단면이 Fig. 8에 나타나 있다. Fig. 8a는 한 절리군의 경사가 0°로 수평을 이룰 때 다른 절 리군이 스태핑 없이 직교하는 경우와 스태핑으로 어긋난 경우를 보여준다. Figs. 8b~8d는 한 절리군의 경사가 반시계방향 으로 30°씩 증가하였을 때 직교하는 다른 절리군에 의한 전체 절리성 암반의 형태를 보여주는데, Fig. 8b와 Fig. 8c를 서로 비교하여 절리분포를 관찰하면 스태핑에 의한 절리성 암반은 암교(rock bridges)를 포함하는 횡등방성 암반과 유사한 형 태임을 인식할 수 있다.







**Fig. 8.** Comparison of cross-sections for rock mass with two joint sets, both without and with stepping; dip angle,  $\beta = (a) 0^{\circ}$ , (b) 30°, (c) 60°, and (d) 90°.

수치해석을 위한 해석영역의 재원 및 경계조건은 앞에서와 같이 150 mm 큐브 크기의 정육면체 영역에 대하여 수평방 향으로 σ<sub>3</sub>를 1.5 MPa로 고정하고 σ<sub>2</sub>를 1.5~4.5 MPa 까지 3단계로 증가시키는 방식의 구속압 조건에서 σ<sub>1</sub>이 재하되는 수 직축 방향으로 0.01 mm/s의 일정속도 경계조건을 설정하였다. Fig. 9a는 스태핑 없이 직교하는 두 절리군을 10°씩 회전시 키면서 진삼축 조건으로 수치해석을 수행하여 산정한 σ<sub>1</sub>을 도시한 것이다. σ<sub>1</sub>은 한 절리군의 경사각이 30°와 60°에서 최 소값으로 산정되었으며 45°를 기준으로 대칭을 이루는 것을 알 수 있다. 이는 두 절리군이 직교하는 경우 한 절리군의 경 사각이 30°일 때 다른 절리군의 경사가 60°를 이루기 때문이다. 한편, σ<sub>2</sub>가 증가함에 따라 σ<sub>1</sub>이 뚜렷하게 강화되는 것으로 나타났는데, 특히, 10°와 80°에서의 강도 변화가 특징적이다.

Fig. 9b는 한 절리군이 스태핑에 의해 암교를 형성한 경우의 결과이다. 연속성이 우수한 주 절리군의 경사를 10° 간격으 로 증가시키면서 수치해석을 통하여 산정한 σ<sub>1</sub>은 앞에서 논의한 횡등방성 암반에서 도출된 결과와 유사한 경향을 나타냈 다. 이와 같은 결과는 두 개의 주 절리군이 분포하는 암반에서 연속성이 우수한 절리군이 전체 암반의 강도를 좌우할 수 있 음을 의미한다. 또한, σ<sub>2</sub>가 증가할수록 σ<sub>1</sub>의 최대값과 최소값의 차이가 감소하였는데, 이는 절리성 암반의 강도 및 변형 특 성을 이해하는 데에 진삼축 기반의 연구가 필수적임을 시사한다.

Tiwari and Rao(2007)는 절리성 암반에 대한 일반화된 von Mises 이론(Mogi, 1971)을 기초로 삼차원 파괴기준식을 다음과 같이 제안하였다.

$$\sqrt{\frac{2J_2}{3}} = D_m \sigma_{ci} \left(\frac{I_1}{3}\right)^{e_m} \tag{1}$$

여기서, D<sub>m</sub> 및 e<sub>m</sub>은 절리의 기하학적 특성을 반영하는 진삼축 강도정수이며, σ<sub>ci</sub>는 무결암의 압축강도이다. 또한, *I*<sub>1</sub>과 *J*<sub>2</sub>는 각각 응력텐서의 일차 불변량과 편차응력텐서의 이차 불변량이다(Bae et al., 2022). D<sub>m</sub> 및 e<sub>m</sub>은 진삼축시험을 통하여 *I*<sub>1</sub>과 *J*<sub>2</sub>를 얻은 후 식 (1)에 대한 비선형 회귀분석을 수행하여 결정할 수 있다. 기존에 절리성 암반의 삼차원 파괴기준으로 제안 된 Mohr-Coulomb 및 Drucker-Prager 함수는 자오면(meridian plane)에서 정수압축과 팔면체 전단응력 간에 선형 관계 를 이루지만, 식 (1)은 비선형 관계를 고려할 수 있는 장점이 있다.



**Fig. 9.** Estimated  $\sigma_1$  for rock mass with two joint sets based on joint dip angle,  $\beta$ , and  $\sigma_2$ ; (a) without stepping and (b) with stepping.

이 연구의 (σ<sub>2</sub>, σ<sub>3</sub>) 조건에서 절리 경사각의 변화에 따라 수치해석을 통해 산정된 σ<sub>1</sub>(Fig. 9)을 사용하여 추정한 D<sub>m</sub>과 e<sub>m</sub> 값이 Table 3에 나타나 있다. 절리의 경사각에 따른 D<sub>m</sub> 값의 변화는 스태핑이 없는 경우 경사각이 30°와 60°에서 낮은 값을 가지며 Fig. 9a의 σ<sub>1</sub>과 유사한 변화의 추이를 나타냈다. 또한, 스태핑이 있는 경우도 Fig. 9b의 σ<sub>1</sub> 변화와 유사하게 경사

각 60~70°에서 최소값을 도출하였다. 따라서 식 (1)의 강도정수 D<sub>m</sub>은 암반의 강도특성을 반영하는 것으로 사료된다. e<sub>m</sub> 은 σ<sub>2</sub>의 변화에 따른 σ<sub>1</sub>의 변화폭을 반영한다고 볼 수 있는데, 절리의 특정 경사각 조건에서 σ<sub>2</sub>의 증가에 따른 σ<sub>1</sub>의 변화폭 이 클수록 더욱 높은 e<sub>m</sub> 값이 추정되기 때문이다.

β (°) —	D <sub>m</sub>		e <sub>m</sub>	
	Without stepping	With stepping	Without stepping	With stepping
10	0.037	0.368	1.146	0.175
20	0.028	0.301	1.249	0.252
30	0.026	0.137	1.270	0.576
40	0.034	0.072	1.177	0.846
50	0.033	0.034	1.190	1.171
60	0.028	0.027	1.241	1.234
70	0.030	0.026	1.211	1.271
80	0.038	0.042	1.137	1.094

Table 3. Estimated D<sub>m</sub> and e<sub>m</sub> with respect to joint dip angle

Fig. 10은 절리의 경사각 조건에 따라 추정된 D<sub>m</sub>과 e<sub>m</sub>을 식 (1)의 삼차원 파괴기준식에 대입하였을 때 주응력 좌표계의 원점에서 *ξ*(=*I*<sub>1</sub>/√3) = 5 MPa인 경우의 편차응력면을 도시한 결과이다. 이는 세 주응력의 합이 5√3 MPa로 낮은 현지응 력 조건에서 도출된 원형의 파괴함수 궤적을 보여주는데, 궤적의 크기 증가는 강도의 증가를 의미한다. 스태핑 없이 직교 하는 두 절리군의 암반에 대한 원 궤적(Fig. 10a)은 스태핑에 의해 횡등방성을 나타내는 암반에 대한 궤적(Fig. 10b)과 비 교할 때 궤적의 크기 차이를 뚜렷하게 인지할 수 있다. 스태핑이 없는 Fig. 10a의 결과에서 파괴함수 궤적의 크기 변화는 주 절리의 방향성에 따른 강도의 변화를 반영하는데, 궤적 간에 크기 차이가 미약하여 강도의 변화가 작음을 알 수 있다. 이에 반하여 스태핑이 존재하는 Fig. 10b의 결과는 주 절리의 경사각이 10°에서 60°까지 변화할 때 이를 반영하여 원 궤적 의 크기도 뚜렷하게 감소함을 알 수 있으며 70° 이후 다시 증가하는 것을 확인할 수 있다. 특히, 경사각이 50~80°인 경우는 스태핑이 없는 경우와 비슷한 크기의 궤적을 가지며 유사한 강도특성을 나타냈다.



**Fig. 10.** Failure surfaces plotted on the octahedral plane derived for rock mass with two joint sets; (a) without stepping and (b) with stepping.

Fig. 11은 Fig. 10b의 스태핑이 존재하는 절리성 암반에 대하여 σ<sub>3</sub>를 0.4 MPa로 매우 낮게 고정하고 식 (1)의 삼차원 파 괴기준식을 통하여 σ<sub>2</sub>의 변화에 따라 산정한 σ<sub>1</sub>을 그래프로 나타낸 결과이다. 여기서, 비교를 위해 추가한 무결암은 수정 Wiebols-Cook 파괴함수(Bae et al., 2022)를 적용하였다. 전반적으로 절리성 암반은 무결암 대비 낮은 강도를 나타내며 σ<sub>2</sub>가 증가함에 따른 σ<sub>1</sub>의 변화는 무결암과 유사한 양상이지만, 변화의 폭은 절리의 경사에 따라 현저히 다르게 나타난다. 특히, 낮은 σ<sub>2</sub> 조건에서 절리 경사각의 증가에 따른 강도의 감소가 특징적으로 나타났다. 또한, 절리성 암반의 절리 경사가 급할수록 σ<sub>1</sub>은 σ<sub>2</sub>의 변화에 더욱 민감하게 반응한다. 그러나 σ<sub>2</sub>가 증가함에 따라 σ<sub>1</sub>은 절리의 경사와 상관없이 유사한 강 도에 도달하는데, 이는 Fig. 9에서도 알 수 있듯이 σ<sub>2</sub>가 증가할수록 절리의 기하학적 특성이 암반의 강도에 미치는 영향이 감소하기 때문이다.



Fig. 11. Three-dimensional failure criteria in the  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  plane derived for rock mass having two joint sets with stepping.

# 결론

절리성 암반의 진삼축 강도특성은 전통적인 삼축압축시험 또는 현장시험을 통하여 연구하기 어려운 과제이다. 본 연구 는 한 절리군을 연약면으로 취급한 횡등방성 암반 또는 직교하는 두 절리군이 분포하는 절리성 암반에 대한 진삼축 강도 특성과 중간주응력이 암반의 강도에 미치는 영향을 평가하기 위하여 삼차원 개별요소법 기반의 3DEC을 활용한 수치해 석을 수행하였다. 수치해석의 타당성과 수용성은 단일절리를 포함하는 마찰재료에 대한 진삼축시험과 이에 대응하는 수 치해석 결과를 통하여 확보하였다.

단일절리를 포함하는 마찰재료로 성형된 석고 시료에 대한 진삼축시험 결과는 무결암 대비 뚜렷한 강도의 저하를 보이 며, 시료 중앙에 배치된 절리의 경사각이 절리 마찰각보다 작은 경우와 큰 경우 서로 다른 강도특성을 나타냈다. 절리의 경 사각이 절리 마찰각보다 완만할 때 절리의 경사방향이  $\sigma_2$  또는  $\sigma_3$ 인 두 경우 모두 유사한  $\sigma_1$ 이 도출되었다. 절리의 경사각 이 절리 마찰각보다 가파른 경우  $\sigma_1$ 은 절리의 경사방향으로  $\sigma_3$ 가 작용할 때 더욱 크게 저하되었으며, 절리의 경사방향에 대한 수평주응력( $\sigma_2, \sigma_3$ )의 상대적인 방향에 따라 저감되는 양상이 다르게 나타났다. 이와 같은 진삼축시험 조건에 상응하 는 수치해석 결과는 진삼축시험에 의한 강도 및 변형 특성과 비교적 잘 일치하는 것으로 분석되었다. 마찰재료의 강도 및 변형 특성을 좌우하는 요인으로 절리의 방향성 이외에도  $\sigma_2$ 의 영향을 간과할 수 없는데, 삼차원 개별요소법 기반의 수치 해석은 상기 요인들을 고려할 수 있는 장점이 있다. 이는 횡등방성이 강하게 나타나는 퇴적암 및 변성암 암반에 대한 강도 및 변형 특성에 대한 평가에 있어서 삼차원 개별요소법 기반의 수치해석이 유용하게 활용될 수 있음을 의미한다.

수치해석을 통하여 절리의 경사각 변화에 따라 산정한 횡등방성 암반의 강도는 수평 구속압이  $\sigma_2 = \sigma_3$  조건에서 전통적 인 U-shape의 이론해와 잘 일치하였다. 이와 같은 절리의 경사각에 따른 횡등방성 암반의 강도는  $\sigma_2$ 가 증가함에 따라 유의 미한 증가를 나타내며, 더불어 강도의 증가폭은 절리의 경사 조건에 큰 영향을 받는다. 또한, 절리의 경사방향과 두 수평 주응력 간의 상대적인 관계는 횡등방성 암반의 강도특성을 좌우하는 요인이다. 이는 절리 또는 연약면을 포함하는 횡등방 성 암반의 강도특성을 평가할 때 중간주응력에 대한 고려가 필수적으로 전제되어야 함을 지시한다.

두 개의 절리군을 포함하는 암반의 강도는 경사가 더욱 급한 절리군이 전체 암반의 강도를 좌우한다. 두 절리군 중 한 절 리군의 연속성이 짧아 암교 효과를 발휘하면 연속성이 상대적으로 긴 절리군의 방향성이 전체 암반의 강도를 좌우할 수 있다. 또한, 두 절리군의 절리성 암반에서도  $\sigma_2$ 가 증가함에 따라  $\sigma_1$ 이 뚜렷하게 강화되는데, 절리 경사가 급할수록  $\sigma_1 은 \sigma_2$ 의 변화에 더욱 민감하게 반응한다. Tiwari and Rao(2007)가 제안한 절리성 암반에 대한 삼차원 파괴기준식은 적용성이 우수하다고 판단되지만, 이 삼차원 파괴기준식은 직교하는 두 절리군을 포함하는 암반에 관한 실험적 연구로부터 도출된 식이므로 일반적인 현장의 절리성 암반에 적용하기 어려울 수도 있다. 이를 보완할 수 있는 개별요소법 기반의 수치해석 은 절리성 암반의 강도특성에 관한 연구에 유용하게 활용될 수 있다.

#### 사사

이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2021R1F1A1062585).

### References

- Ajalloeian, R., Lashkaripour, G.R., 2000, Strength anisotropies in mudrocks, Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 59, 195-199.
- Bae, J., Um, J.G., Jeong, H., 2022, Evaluation of strength and deformability of a friction material based on true triaxial compression tests, The Journal of Engineering Geology, 32(4), 597-610 (in Korean with English abstract).
- Behrestaghi, M.H.N., Rao, K.S., Ramamurthy, T., 1996, Engineering geological and geotechnical responses of schistose rocks from dam project areas in India, Engineering Geology, 44(1-4), 183-201.
- Benz, T., Schwab, R., 2008, A quantitative comparison of six rock failure criteria, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 45(7), 1176-1186.
- Cho, J.W., Kim, H., Jeon, S., Min, K.B., 2012, Deformation and strength anisotropy of Asan gneiss, Boryeong shale, and Yeoncheon schist, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 50, 158-169.
- Cundall, P.A., 1971, A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock system, Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics, Nancy, 2-8.
- Drucker, D.C., Prager, W., 1952, Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quarterly of Applied Mathematics, 10, 157-165.
- Ewy, R.T., 1999, Wellbore-stability predictions by use of a modified Lade criterion, SPE Drilling & Completion, 14, 85-91.

Faizi, S.A., Kwok, C.Y., Duan, K., 2020, The effects of intermediate principle stress on the mechanical behavior of trans-

versely isotropic rocks: Insights from DEM simulations, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 44(9), 1262-1280.

- Feng, F., Li, X., Rostami, J., Peng, D., Li, D., Du, K., 2019, Numerical investigation of hard rock strength and fracturing under polyaxial compression based on Mogi-Coulomb failure criterion, International Journal of Geomechanics, 19(4), 04019005.
- Fereidooni, D., Khanlari, G.R., Heidari, M., Sepahigero, A.A., Kolahi-Azar, A.P., 2016, Assessment of inherent anisotropy and confining pressure influences on mechanical behavior of anisotropic foliated rocks under triaxial compression, Rock Mechanics and Rock Engineering, 49, 2155-2163.
- Fjær, E., Ruistuen, H., 2002, Impact of the intermediate principal stress on the strength of heterogeneous rock, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 107(B2), ECV-3.
- Gao, Y., Feng, X.T., Wang, Z., Zhang, X., 2020, Strength and failure characteristics of jointed marble under true triaxial compression, Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 79, 891-905.
- Ismael, M., Konietzky, H., 2019, Constitutive model for inherent anisotropic rocks: Ubiquitous joint model based on the Hoek-Brown failure criterion, Computers and Geotechnics, 105, 99-109.
- Jaeger, J.C., 1959, The frictional properties of joints in rock, Pure and Applied Geophysics, 43, 148-158.
- Jaeger, J.C., 1960, Shear failure of anistropic rocks, Geological Magazine, 97(1), 65-72.
- Lee, Y.K., Pietruszczak, S., 2008, Application of critical plane approach to the prediction of strength anisotropy in transversely isotropic rock masses, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 45(4), 513-523.
- Lin, H., Cao, P., Wang, Y., 2013, Numerical simulation of a layered rock under triaxial compression, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 60, 12-18.
- Liu, Y., Liu, H., Mao, H., 2017, DEM investigation of the effect of intermediate principle stress on particle breakage of granular materials, Computers and Geotechnics, 84, 58-67.
- Mogi, K., 1971, Fracture and flow of rocks under high triaxial compression, Journal of Geophysical Research, 76(5), 1255-1269.
- Mogi, K., 1979, Flow and fracture of rocks under general triaxial compression, Proceedings of the 4th ISRM Congress, Montreux, Switzerland.
- Niandou, H., Shao, J.F., Henry, J.P., Fourmaintraux, D., 1997, Laboratory investigation of the mechanical behaviour of Tournemire shale, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 34(1), 3-16.
- Ramamurthy, T., Rao, G.V., Singh, J., 1993, Engineering behaviour of phyllites, Engineering Geology, 33(3), 209-225.
- Singh, M., Singh, B., 2012, Modified Mohr-Coulomb criterion for non-linear triaxial and polyaxial strength of jointed rocks, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 51, 43-52.
- Single, B., Goel, R.K., Mehrotra, V.K., Garg, S.K., Allu, M.R., 1998, Effect of intermediate principal stress on strength of anisotropic rock mass, Tunnelling and Underground Space Technology, 13(1), 71-79.
- Tien, Y.M., Kuo, M.C., Juang, C.H., 2006, An experimental investigation of the failure mechanism of simulated transversely isotropic rocks, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 43(8), 1163-1181.
- Tiwari, R.P., Rao, K.S., 2007, Response of an anisotropic rock mass under polyaxial stress state, Journal of Materials in Civil Engineering, 19(5), 393-403.
- Wang, H., Dyskin, A., Pasternak, E., Dight, P., Sarmadivaleh, M., 2018, Effect of the intermediate principal stress on 3-D crack growth, Engineering Fracture Mechanics, 204, 404-420.
- Zhang, S.R., Sun, B., Wang, C., Yan, L., 2014, Influence of intermediate principal stress on failure mechanism of hard rock with a pre-existing circular opening, Journal of Central South University, 21(4), 1571-1582.
- Zhou, S., 1994, A program to model the initial shape and extent of borehole breakout, Computers & Geosciences, 20, 1143-1160.