The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)
Vol. 23, No. 6, pp.69-74, Dec. 31, 2023. pISSN 2289-0238, eISSN 2289-0246

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2023.23.6.69
JIIBC 2023-6-11

불규칙 점 집합에서의 웨이브렛에 관한 연구

A Study on the Wavelets on Irregular Point Set

지인호*

Inn-Ho Jee*

요 약 이 논문에서는 일차원과 이차원에서 불규칙한 점 집합에서의 웨이브렛을 구현하고 분석하는 기법이 기술되었다. 특히 우리는 부분할 방법과 계산에 집중하였다. 부분할은 선과 망사를 연속적인 분할 동작의 부드러운 곡선이나 곡선의 표면으로 간략화시키는 기법을 의미한다. 웨이브렛 구조를 특이한 환경에 일반화시키는 열쇠는 일반화된 부분할을 사용하는 것이다. 첫 번째 일반화 구조는 이미 부분할과 연결되었는데 그것은 이차 일반화 웨이브렛 구현에 보다 더 중요하게 되었다. 부분할 구조는 빠른 알고리즘을 제공하여주고, 자연적인 다해상도 구조를 만들어 주어 우리가 추구하려는 기본의 스케일 함수와 웨이브렛을 제공하여 준다.

Abstract In this paper we review techniques for building and analyzing wavelets on irregular point sets in one and two dimensions. In particular we focus on subdivision schemes and commutation. Subdivision means the skill that approximates the initial lines or mesh into a tender curve or a curved surface by continuous partitioning operation. The key to generalizing wavelet constructions to non-traditional settings is the use of generalized subdivision. The first generation setting is already connected with subdivision schemes, but they become even more important in the construction of second generation wavelets. Subdivision schemes provide fast algorithms, create a natural multi-resolution structure, and yield the underlying scaling functions and wavelets we seek.

Key Words : Wavelet, Irregular, Subdivision, Interpolation

Ⅰ. 서 론

웨이브렛은 일반적인 함수와 데이터 집합을 표현하는데 유용한 도구이다. 또한 신호처리, 이미지 압축 등과 같은 분야에서 광범위하게 사용되고 있다. 웨이브렛의 장점은 다른 유형의 구조뿐만 아니라 시간과 주파수 영역 모두에서 상관성을 가지는 표현 능력과 계산 능력이다. 웨이브렛 표현은 subdivision과 다해상도 분석을 사용할 수 있으므로 빠르게 계산되어 질 수 있다. 전통적인 웨이브렛 함수는 웨이브렛 모함수의 팽창과 천이에 의해서 정의된다. 우리는 이것을 1세대 웨이브렛이라고 한다. 본 연구에서는 팽창과 천이를 필요로 하지 않은 웨이브렛의 보다 일반적인 환경에 관심을 두고 있다. 이를 2세대 웨이브렛이라고 한다. 2세대 웨이브렛은 불규칙한 간격으로 표본화된 환경에서 웨이브렛 알고리즘의 장점을 얻을 수 있게 하였다[1]. 비전통적 환경에서 웨이브렛 구

*정회원, 홍익대학교 소프트웨어융합학과
접수일자 2023년 10월 5일, 수정완료 2023년 11월 5일
게재확정일자 2023년 12월 8일

Received: 5 October, 2023 / Revised: 5 November, 2023 / Accepted: 8 December, 2023
*Corresponding Author: ijee@hongik.ac.kr
Dept. of Software and Communication Engineering, Hongik University, Korea

조를 일반화하기 위한 중요한 점은 정형화된 subdivision 구조를 사용하는 것이다. 1세대 웨이브렛에서 이미 subdivision 구조가 연관되었으나 2세대 웨이브렛에서 보다 중요하게 연관되고 있다. Subdivision 구조는 고속 알고리즘을 제공하며, 자연적으로 다해상도 구조를 만들어 내며, 우리가 찾고자 하는 웨이브렛 스케일 함수를 생성한다. Subdivision은 거친 표현으로부터 출발해서 부드러운 함수를 생성하는 것을 의도한 기술이다. 미세한 irregular 격자들로부터 시작한 전체 다해상도 분석의 분야로써 subdivision을 사용하고자 한다. Subdivision은 원본 데이터의 근사값을 얻을 수 있게 한다.

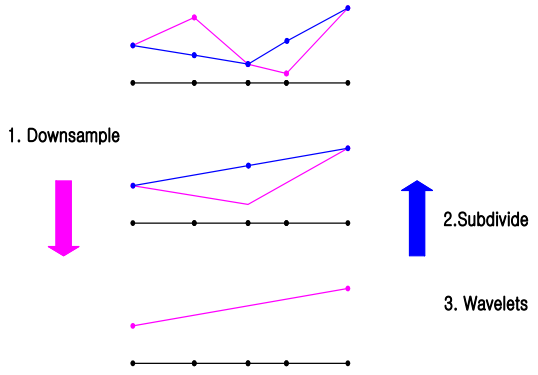


그림 1. Subdivision과 Wavelet
Fig. 1. Subdivision and Wavelet

이러한 환경에서 격자의 기하학은 가장 미세한 irregular 격자와 거칠어짐의 절차에 의해서 고정된다. 그러므로 irregular 격자에 관한 subdivision이 요구된다. 재표본화는 손실을 가지며, 일반적인 표면 환경에서는 적용이 불가능하기 때문에 우리는 원본 격자에 관한 작업을 선택한다.

1. 1D subdivision

Subdivision은 연속적인 분할 작업을 통하여 주어진 초기 선분이나 메쉬(mesh)를 부드러운 곡선이나 곡면으로 근사화 시키는 기술을 말한다. Subdivision 구조는 분할 기법에 따라 크게 interpolation 방법과 approximation 방법으로 나눌 수 있다. Interpolation 방법은 기존의 점들은 변화가 없고 단지 면(face)이나 모서리(edge)를 분할하여 새로 생성되는 점들의 위치만 규칙에 의해 정해지는 방법이다. Approximation 방법은 크게 두 단계로 이루어진다. 첫 번째 단계는 면과 모서리를 이등분하여 새로 생성되는 점들의 위치를 정하는 splitting 단계이다. 두 번째 단계는 기존의 점들의 위치를 재조정하는 averaging 단계이다.

본 연구에서는 interpolation 방법에 초점을 맞추었다. Subdivision의 주요 이론은 함수와 복잡한 기하학적 모양을 생성하기 위한 국부적 평균과 up-sampling의 반복이다. Subdivision 구조는 CAGD(Computer Aided Geometric Design) 분야에서 주로 연구되어져 왔다.

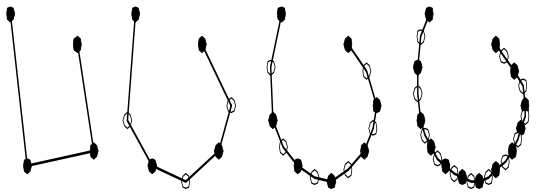


그림 2. 1D subdivision 실행의 예
Fig. 2. Example of performing 1D subdivision

기존의 연구들은 동일한 거리와 동일한 간격을 갖는 격자에 의존한다. 본 연구에서는 불규칙 점 집합에 초점을 맞추었다. 우리가 관심을 갖는 환경을 설명하기 위해 세밀한 세가지 형태로 구분하였다. Regular, Semi-regular, Irregular.

Regular 격자는 각각의 레벨에서 동일한 점 거리를 가지게 되며, 각각의 시간-공간에서 새로운 점은 기존의 두 점의 정확히 중간에 위치하게 된다. Semi-regular 격자는 불규칙의 거친 격자에서 출발한다. 그리고 새로운 점들은 계속적으로 기존의 점의 중간지점에 추가되게 된다. 그러므로 미세한 격자는 원래의 거친 레벨 점들을 제외하면 규칙적으로 위치하게 되는 것이다. Irregular 격자에서는 새로운 점의 위치는 기존에 존재하던 점들의 중간 지점에 위치할 필요는 없다[2].

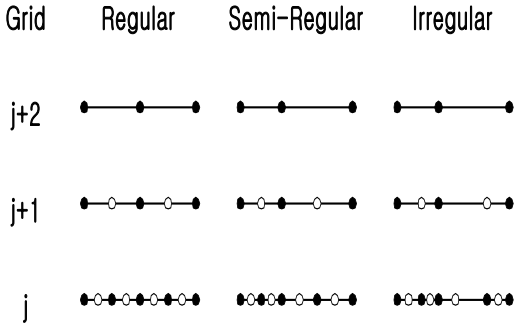


그림 3. 1D 환경에서의 regular, semi-regular, irregular grids
Fig. 3. Regular, semi-regular, irregular grids in !D environment

Subdivision 내에서 사용되는 무게 값은 subdivision과 유사하게 세 가지로 분류된다 : uniform, semi-uniform, non-uniform. Uniform 구조는 1세대 웨이브렛과 연관되며, 각각의 subdivision 레벨에서 동일한 subdivision 무게 값을 사용하게 되며, 주로 Regular 격자에서 사용되어 진다. Semi-uniform 구조는 semi-regular 격자에서 사용되어진다. Non-uniform 구조는 각각의 subdivision 레벨에서 다양한 무게 값을 가지며 이는 2세대 웨이브렛 환경과 연관된다. Irregular subdivision의 연구는 이론적으로도 흥미로울 뿐만 아니라 실제적 응용 측면에서도 매우 중요하다. 예를 들어 semi-regular 환경에서 곡선이나 표면의 모양을 보다 효과적으로 조절하기 위해 적응적 무게값이 사용될 수 있다. 거친 레벨로부터 웨이브렛과 스케일함수는 불규칙적으로 발생하는 새로운 점들을 갖는 subdivision 구조로써 생성된다. 각각의 레벨에서 무게값이 변화하기 때문에 퓨리에 변환이나 주파수 분석은 더 이상 효율적인 분석이 되지 못한다.

2. 2D subdivision

2차원 환경은 생성의 측면에서 부드러운 표면을 나타내게 한다[3]. 1차원 환경과 유사하게 보간 구조에 의하여 생성된다. 이러한 환경들은 semi-regular 환경에 속하게 된다. 이웃하는 꼭지점의 구조를 고려하기 때문에 subdivision 구조에서 무게 값은 semi-uniform이다. 어떤 미세한 불규칙 레벨이 입력에서 보여질 때, 불규칙 환경은 1차원에서와 마찬가지로 2차원에서도 나타나며, 주요 과제는 거친 레벨에서 다해상도 분석을 구성하는 것이다. 이 같은 경우 다른 표본들을 간단하게 유지함으로써 down-sampling을 정의하지 않아도 된다. 이러한 과정은 메쉬 영역의 간편화를 가져왔다[4].

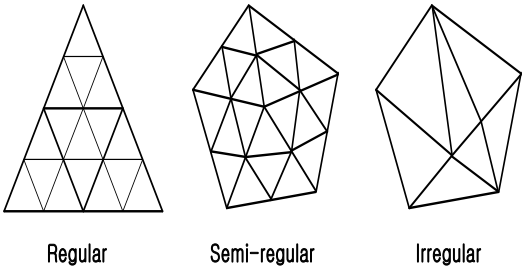


그림 4. 2D 환경에서 regular, semi-regular, irregular 삼각형 메쉬
Fig. 4. Regular, semi-regular, irregular triangle mesh in 2D environment

II. The one Dimensional case

1. Multi-level grid

격자 X_j는 증가하는 $\{x_{j,k} \in R \mid k \in Z\}$ 점들의 순열이며, 시작 격자 X_0가 연속적으로 분할될 때 $X_j \subset X_{j+1}$를 만족하며 모든 j와 k에서 $x_{j+1,2k} = x_{j,k}$가 만족된다. 그러므로 모든 세분화 과정에서 각각의 인접한 짝수 점 $x_{j,k} = x_{j+1,2k}$과 $x_{j,k+1} = x_{j+1,2k+2}$ 사이에 홀수로 목차된 점 $x_{j+1,2k+1}$을 삽입한다. $d_{j,k} = x_{j,k+1} - x_{j,k}$ 라고 정의한다. $j \to \infty$ 일 경우 우리는 밀집된 격자를 얻을 수 있다. 위에서의 다중 레벨 격자를 two-nested라고 부른다. 두 개의 이웃한 거리 사이의 비율은 일반적으로 제한되며, 이러한 격자를 homogeneous라 부른다. Homogeneous가 아닌 불규칙 two-nested 격자의 예는 $x_{j+1,2k+1} = \beta x_{j,k} + (1-\beta) x_{j,k+1}$에 의해서 얻어진다. 단 β는 $0 < \beta < 1$에서 고정된 값이다.

2. Subdivision Scheme

Subdivision은 가장 거친 격자인 X_0의 초기 함수값 $f_0 = \{f_{0,k}\}$의 집합으로부터 시작한다. Subdivision 구조 S는 선형 연산자 S_j, $j \geq 0$ 의 순열이다. 이것은 $f_{j+1} = S_j f_j$ 또는 $f_{j+1,l} = \sum_k S_{j,k,l} f_{j,k}$의 규칙을 경유해 고운 격자에서 $f_j = \{f_{j,k}\}$ 값을 반복적으로 계산하게 된다.

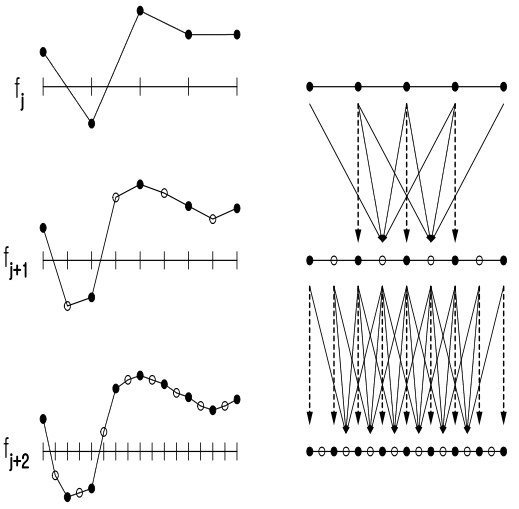


그림 5. 1차원 환경에서의 subdivision scheme
Fig. 5. Subdivision scheme in 1D environment

그림 5에서 '○'은 새롭게 생성된 함수 값을 의미하며 '●'은 기존에 존재하던 함수 값을 나타낸다. $j+1$ 레벨에서 새롭게 생성된 함수 값을 $j+2$에서는 기존에 존재하던 함수 값으로 존재하게 된다. Subdivision은 격자 지점 $x_{j,k}$에서 정의된 값을 제공하며, 이렇게 생성된 점들을 연결함으로써 그림 5에서 보듯이 구분적 선형 함수를 정의할 수 있다. $f_j(x)$ 함수에서 $j \rightarrow \infty$를 취함으로써 연속적인 극한 함수 $\varphi(x)$를 합성할 수 있게 된다. 공간적 보간을 고려한 subdivision은 Lagrangian 보간 subdivision이다.

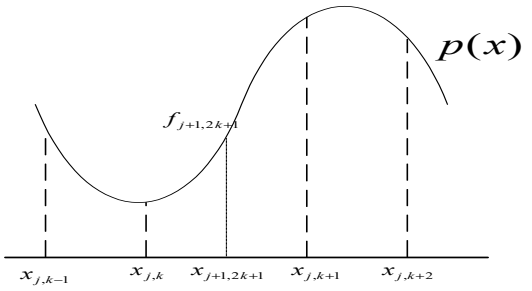


그림 6. 큐빅 Lagrangian interpolation
Fig. 6. Cubic Lagrangian interpolation

홀수 지점 $x_{j+1,2k+1}$에서의 함수 값 $f_{j+1,2k+1}$은 4개의 이웃한 짝수 지점에서 3차원 다항식 $p(x)$ 보간값의 평가에 의해서 얻어질 수 있다[5].

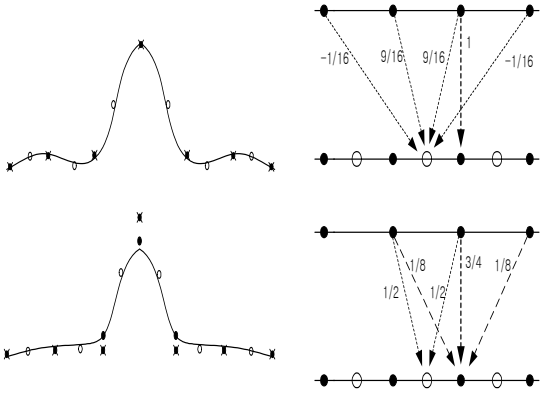


그림 7. Interpolation scheme 구조와 non-interpolation scheme 구조의 비교
Fig. 7. Comparison of interpolation scheme and non-interpolation scheme structure

홀수 지점 $x_{j+1,2k+1}$에서의 함수 값 $f_{j+1,2k+1}$은 4개의 이웃한 짝수 지점에서 3차원 다항식 $p(x)$ 보간값의 평가에 의해서 얻어질 수 있다[6].

Lagrangian subdivision은 각각의 subdivision 단계의 짝수 지점의 값들을 유지하게 되는 보간 형식이다.

즉, $f_{j+1,2k} = f_{j,k}$의 값을 유지하게 된다. 비-보간 간략화 구조에서는 $f_{j+1,2k}$가 $f_{j,k}$와 다른 값을 가지게 된다.

Irregular subdivision 환경에서 $f_{j+1,l}$ 값의 계산은 $k' = \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$ 주변에 위치한 $f_{j,k}$의 $2L+1$개의 값들만 포함하게 된다.

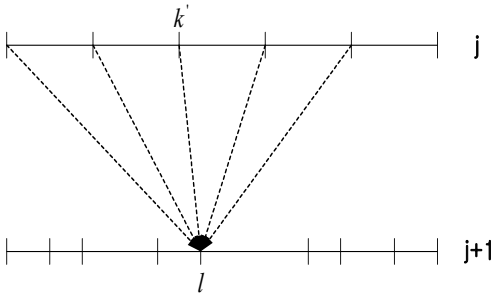


그림 8. Irregular 환경에서의 subdivision
Fig. 8. Subdivision in irregular environment

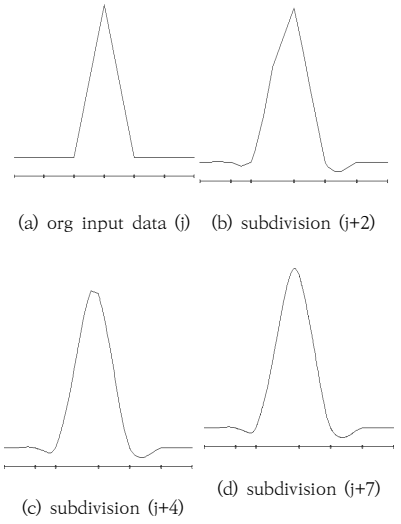


그림 9. 1차원 irregular subdivision 실행 결과,(a),(b),(c),(d)
Fig. 9. 1D irregular subdivision performing results, (a),(b),(c),(d)

그림 9에서는 1차원 irregular 환경에서의 subdivision 결과를 나타내었다. (a)는 입력 데이터를 나타내며 (b), (c), (d)는 irregular subdivision을 실행한 결과들이다. Subdivision의 단계를 높여 갈수록 부드러운 곡선을 얻을 수 있다.

3. Wavelets

Regular 환경의 경우 레벨 j에서 웨이브렛은 다해상도 분석의 어떠한 함수를 표현하기 위한 building blocks으로써 전형적으로 사용되어진다. 현재 irregular 환경에서도 유사한 웨이브렛이 소개되었다. 스케일 함수 $\phi_{j,k}$는 레벨 j에서 시작 데이터 $f_{j,k}=\delta_{l,k}$로부터의 subdivision 구조의 시작으로부터 얻어진 극한 함수이다. Subdivision 연산자 S_j에 관한 적절한 가정 아래 $\phi_{j,k}$는 독립이다. Lagrangian 경우와 마찬가지로 스케일 함수가 보간, 즉 $\phi_{j,k}(x_{j,k'})=\delta_{k,k'}$일 때 웨이브렛은 $\psi_{j,k}=\phi_{j+1,2m+1}$로써 간단하게 선택되어질 수 있다. 다시 말해 웨이브렛은 홀수 위치에서 간단한 고운 스케일 함수이다. 이를 보간 웨이브렛이라고 한다. 이것은 어떠한 vanishing moment도 가지지 않음으로써 일반적으로 우수한 웨이브렛이라고 하기는 어렵다. 이것은 또한 lifting 구조를 사용하여 vanishing moment를 갖는 웨이브렛으로 전환이 가능하다.

Irregular 환경에서의 웨이브렛은 regular의 경우와 유사하다. 스케일 함수는 level j에서 시작 데이터로부터 subdivision 구조를 시작함으로써 얻을 수 있다. 스케일 함수와 subdivision operator는 독립적이라고 가정하고 스케일 함수가 Lagrangian 경우 interpolation 일 때 웨이브렛은 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi_{j,k}(x_{j,k'})=\delta_{k,k'} \quad (1)$$

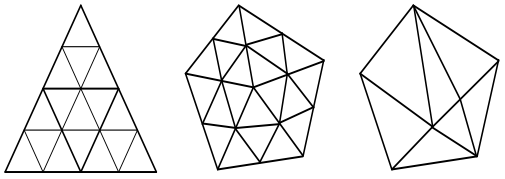
$$\psi_{j,m}=\phi_{j+1,2m+1} \quad (2)$$

Ⅲ. Applications

1차원 구성에서는 down-sampling이 거치른 단계를 나타내어 주나 irregular 2차원 구성에서는 덜 영향을 미친다. 우리는 Irregular 2차원 부분할을 탐구하여 surface setting에서 irregular down-sampling 하는 여러 기법을 사용한다. 이 기법은 컴퓨터 그래픽스 분야에서 많은 관심을 받아왔고 다각형 단순화라고도 언급된다. 다음과 같이 2차원 구성의 regular, semi-regular, irregular 분할의 실험 방법과 데이터를 나타낸다. Mesh 간략화를 위한 여러 접근 중에 가장 많이 쓰이는 방법을 “Progressive Meshes”(PM)이라 부른다. Surface setting에서 3차원 꼭지점 $p_i=(x_i,y_i,z_i)$ 연결과 임의의 기하학적인 삼각형 매시 P 로 이루어진다. 원래의 매시와 그의 PM 표현이 국부의 변수화 연결성 정보를 제공하여 준다. 만약 우리의 목적이 매시의 기하학적인 처리라면 3개 좌표축(x,y,z)를 종속 변수로 다루는 것이 중요하다. 실제로 우리는 매시의 좌표축을 실수 함수나 현재의 PM 꼭지점 집합으로 생각할 수 있다. 초기의 기하학적인 변화가 일어나기 전에 이 함수들은 일정하게 된다. 원하는 처리 동작인 필터링과 추가 조작이 이 데이터에 가해지면 이 함수들은 보다 의미 있게 작동된다. 그림10은 가능한 연구의 응용으로 스캔한 Venus 여러 머리 모델을 제시하였다. 원래 매시는 50,000 꼭지점이 있는데 PM 구조로 구성한 후 다해상도 표현을 위하여 Burt-Adelson 피라미드 기법을 사용하였다. 여러 필터들을 사용한 응용 결과를 나타내었다.

1. 2D setting

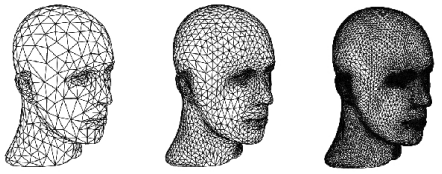
Triangular meshes



Regular Semi-regular Irregular

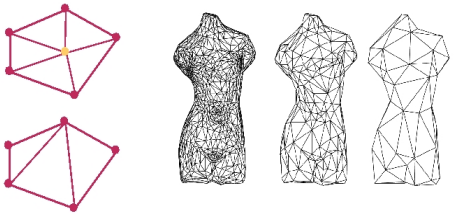
2. Semi-regular

Loop scheme



3. Irregular

down-sample



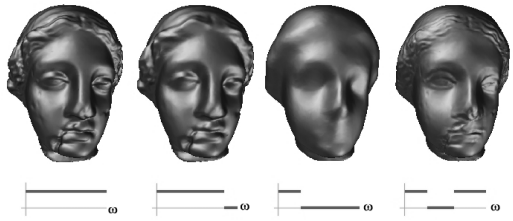


그림 10. Venus상의 smoothing과 filtering
Fig. 10. Smoothing and filtering of Venus Statue

IV. 결 론

현재의 웨이브렛 연구와 응용분야의 최첨단 연구는 규칙적인 분할을 불규칙분할로 다해상도의 개념을 일반화하는 데 있다. 우리는 이런 연구의 간단한 검토를 1차원에서 시작하여 2차원 함수와 다차원 구성으로 전개하였다. 규칙적인 분할에서 웨이브렛 구성의 분석을 위해서는 많은 기법이 존재하나 이런 기법이 불규칙 구성에 적용시키기 시작하였다. 그런 도구의 하나가 규칙적인 구성으로부터 불규칙 구성으로 변환의 일반화에 있다. 우리는 어떤 차이를 최소화시키도록 구성된 다차원 구성의 새로운 불규칙 부분할 구조에 이런 아이디어를 적용시켰다. 이런 결과의 분석적인 평탄도에도 알려진 것이 적지만 수치적인 증명으로 실제적인 응용에 사용될 수 있음을 보였다.

References

[1] D. Lee Fugal, Conceptual Wavelets In Digital Signal Processing. Space and Signals technical Publishing (S&ST), 2009.

[2] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens, "Regularity of irregular subdivision", Constr. Approx., 15:381-426, 1999.

[3] I. Guskov, W. Sweldens, and P. Schröder, "Multiresolution signal processing for meshes", In Computer Graphics Proceedings(SIGGRAPH '99), pp. 325-334, 1999.

[4] I. Guskov, "Multivariate subdivision schemes and divided differences", Technical report, Department of Mathematics, Princeton University, 1998.

[5] I. Daubechies, I. Guskov, and W. Sweldens, "Commutation for irregular subdivision", Technical Report, Bell Laboratories, Lucent Technologies, 1998.

[6] N. Dyn, J. Gregory, and D. Levin, "Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design", Constr. Approx., 7:127-147, 1991.

[7] R. Boujeibene, Y. Jemaa and M. Zribi, "An efficient codec for image compression based on spline wavelet transform and improved SPIHT algorithm",, IEEE 2017 International Conference on High Performance Computing & Simulation, 2017.

[8] Joong-Hee Lim, Jong-Hong Shin and Inn-Ho Jee, "Improvement of double density discrete wavelet transform with enhancement of directional selectivity," The Institute of Internet, Broadcasting and Communication, vol. 12, No. 2, pp 221-232, April 2012.
DOI: http:ѵdx.doi.org/lO.7236/JIWIT.2012.12.2.221

[9] Jong-Yong Lee,, "Performance comparison between hierarchical routing protocols applying new performance evaluation items," The Institute of Internet, Broadcasting and Communication, vol. 20, No. 4, pp. 51-57, Aug. 31, 2020.
DOI: https://doi.org/10.7236/JIIBC.2020.20.4.51

[10] J. S, Shin and C. W. Jeong, "Implementation of 3D Video using Time-Shortening Algorithm," The Institute of Internet, Broadcasting and Communication, vol. 20, No. 6, pp. 123-128, Dec. 31, 2020.
DOI: https://doi.org/10.7236/JIIBC.2020.20.6.123

저 자 소 개

지 인 호(정회원)

- 1980년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사
- 1983년 8월 : 서울대학교 전자공학과 공학석사
- 1995년 6월 : Polytechnic School of Engineering at New York University, USA, 전기 및 컴퓨터공학과, 공학박사
- 1982년 ~ 1988년 : 국방과학연구소 선임연구원
- 2004년 ~ 2005년 : University of Maryland at College Park, USA, 연구교수
- 2012년 ~ 2013년 : Temple University at Philadelphia, USA, 연구교수
- 1995년 ~ 현재 : 홍익대학교 소프트웨어융합학과 교수
- 주관심분야 : DSP and 3D Image Processing, Multimedia Security, Multimedia Signal Processing

※ 본 논문은 2022년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음