

## J2 와 J3 불변량에 기초한 비대칭 항복함수의 제안(II)

김영석<sup>1#</sup>, 농옌푸반<sup>2</sup>, 안정배<sup>3</sup>, 김진재<sup>4</sup>

### Asymmetric Yield Functions Based on the Stress Invariants J<sub>2</sub> and J<sub>3</sub>(II)

Y. S Kim, P. V. Nguyen, J.B. Ahn, J. J. Kim

(Received September 12, 2022 / Revised October 22, 2022 / Accepted October 28, 2022)

#### Abstract

The yield criterion, or called yield function, plays an important role in the study of plastic working of a sheet because it governs the plastic deformation properties of the sheet during plastic forming process. In this paper, we propose a modified version of previous anisotropic yield function (Trans. Mater. Process., 31(4) 2022, pp. 214-228) based on J<sub>2</sub> and J<sub>3</sub> stress invariants. The proposed anisotropic yield model has the 6th-order of stress components. The modified version of the anisotropic yield function in this study is as follows.

$$f(J_2^0, J_3^0) \equiv (J_2^0)^3 + \alpha(J_3^0)^2 + \beta(J_2^0)^{3/2} \times (J_3^0) = k^6$$

The proposed anisotropic yield function well explains the anisotropic plastic behavior of various sheets such as aluminum, high strength steel, magnesium alloy sheets etc. by introducing the parameters  $\alpha$  and  $\beta$ , and also exhibits both symmetrical and asymmetrical yield surfaces. The parameters included in the proposed model are determined through an optimization algorithm from uniaxial and biaxial experimental data under proportional loading path. In this study, the validity of the proposed anisotropic yield function was verified by comparing the yield surface shape, normalized uniaxial yield stress value, and Lankford's anisotropic coefficient R-value derived with the experimental results. Application for the proposed anisotropic yield function to AA6016-T4 aluminum and DP980 sheets shows symmetrical yielding behavior and to AZ31B magnesium shows asymmetric yielding behavior, it was shown that the yield locus and yielding behavior of various types of sheet materials can be predicted reasonably by using the proposed anisotropic yield function.

**Keywords:** invariant J<sub>2</sub>, invariant J<sub>3</sub>, 6<sup>th</sup>- order of stress component, anisotropic yield function, asymmetric yield function.

### 1. 서론

자동차 내외 판넬, 항공기 동체, 음료용 캔 등 다양한 제품의 제조에 판재 가공 기술(sheet metal

forming)이 적용되고 있다. 대량 생산공정으로서 판재 가공기술은 얇은 판재로부터 복잡한 형상의 제품을 재료의 소성변형(plastic deformation) 특성을 이용하여 제조하는 기술 중 하나이다.

이 가공 공정에서 제품의 품질확보, 생산성 제고, 제품개발 기간 단축 및 제조 비용 저감 등을 위해 제조공정을 최적화하는 것이 필요하다. 이를 위해 제조 현장에서는 전통적으로 숙련된 기술자의 경험

1. 경북대학교 기계공학과, 교수  
2. 경북대학교 대학원, 협재 Bosch Vietnam Co. 연구원  
3. 경북대학교 기계공학과, 대학원생  
4. Depart. Mech. Engng, Univ. New Hampshire(USA), PostDoc Researcher  
# Corresponding Author : Young Suk Kim, School of Mechanical Engineering, Kyungpook National University, E-mail: caekim@knu.ac.kr  
ORCID: 0000-0001-7525-5428

에 기반한 시행오차 방법이 일부 사용되고 있지만 최근에는 전산모사 수치해석기술인 유한요소해석(finite element analysis, FEA)에 기반한 가상 시뮬레이션 기술이 널리 채용되고 있는 추세이다. [1-3]

이 FEA를 사용한 판재 성형 공정 시뮬레이션의 정확도를 높이려면 적합한 유한요소 유형의 선택, 충분히 작은 유한요소 메쉬 이산화, 적절한 경계 조건 및 정확한 재료의 소성 변형 모델의 도입이 필요하다. 특히 재료의 소성 변형 거동을 잘 파악하기 위해서는 기본적으로 가공경화법칙(work hardening), 소성항복함수(yield criterion) 및 소성유동법칙(flow rule) 등에 대한 정확한 이해가 요구된다. 이 일환으로 금속 재료의 소성 변형 거동을 FEA를 통해 정도 높게 예측하기 위해서 많은 연구자들에 의해서 다양한 형태의 가공경화법칙[4-6], 소성유동법칙[7, 8], 항복함수[2,3,8,20-24] 등이 제안되었다. 또한, FEA의 정확도를 향상시키기 위해 다양한 구성요소에 대한 조합이 시도되고 있다[9-12].

재료의 소성 변형 모델 중에서도 이방성 항복조건(anisotropic yield criterion)은 냉간 압연된 이방성 판재의 이방성 항복거동을 잘 기술하는 역할을 하며, 다양한 형태의 응력을 받는 판재의 탄성 및 소성상태를 기술하기 때문에 FEA 해석에서 중요한 인자 중 하나이다.

이전 연구에서 많은 학자들에 의해 다양한 이방성 항복조건들이 제안되었다. 등방성 재료의 경우 항복함수는 모든 직교 변환에 대해 불변해야 하기 때문에 Prager 가 처음 제안한 것과 같이 편차응력에 대한 제 2 불변량  $J_2$  및 제 3 불변량  $J_3$  [13]을 항복조건에 활용하는 것이 가능하다.

$$g(J_2, J_3) = J_2 \left( 1 - 0.73 \frac{J_3^2}{J_2^3} \right) \quad (1a)$$

이  $J_2$  및  $J_3$  는 편차 응력 텐서(deviatoric stress tensor)  $s$  의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$J_2 = \frac{1}{2} |s|; \quad J_3 = \det(s)$$

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m \delta_{ij}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1b)$$

여기서  $\sigma_k$  및  $s_k$  ( $k=1, \dots, 3$ )는 각각 코시 응력 텐서  $\sigma$  및 편차 응력 텐서  $s$  의 주 값을 나타낸다. Tresca

[14]는 최대 전단 응력 값이 일정한 값에 달하면 항복이 일어난다고 하여 등방성 항복함수를 처음 제안했다. Von Mises는 등방성 재료에 대해 널리 사용되는 다음과 같은 항복함수를 제안하였다[15].

$$J_2 = k^2 \quad (2)$$

여기서  $k$ 는 순수 전단에서의 항복응력이며  $k = \sigma_T / \sqrt{3}$ 으로 계산되며  $\sigma_T$ 는 단축 인장의 항복응력이다. 또한  $J_2$ 는 응력에 대한 2차 불변량이다.

Drucker[16]는 응력 2차 불변량  $J_2$  뿐만 아니라 응력에 대한 3차 불변량  $J_3$ 도 포함하는 항복함수를 제안하였다. Drucker의 항복 기준의 주목할만한 특성은 항복곡면이 Tresca와 Von Mises 항복곡면 사이에 위치한다는 것이다. Drucker의 항복함수는 특히 알루미늄 판재의 소성거동을 잘 예측하는 것을 알려져 있다.

냉간 압연 강판 재료에 대한 고유한 소성 이방성 특성을 설명하기 위해 다양한 형태의 이방성 항복함수가 제안되었다.(Hill-48(1948) [17], Hill-79(1979) [18], Hosford(1979) [19], Barlat(1989) [20], Yld2000-2d (2000) [21], Cazacu-Barlat (2001) [22], Yld2004-18p (2004) [23] 및 Banabic (2010 및 2020) [24]). 이들 항복함수는 2차 항복함수와 비2차 항복함수의 두 그룹으로 분류할 수 있다. Von Mises와 Hill-48은 2차 항복함수의 예이고 앞서 언급한 다른 예는 비2차 항복함수이다. 비2차 항복함수 중 하나인 Cazacu-Barlat(2001)[22] 항복함수는 등방성 Drucker 항복기준을 확장하여 개발되었다. 그들은 등방성 재료에 대한 불변량  $J_2$  및  $J_3$ 를 각각 이방성 버전  $J_2^0$  및  $J_3^0$ 로 교체하였다.

$$(J_2^0)^3 - c(J_3^0)^2 = k^6 \quad (3a)$$

여기서  $c$ 는 상수이다. 이하에서  $J_2^0$  및  $J_3^0$ 의 윗첨자 0은 이방성 특성을 나타낸다. 구체적인 형태는 식 (12), 식 (13)에 나타내었다.

Cazacu-Barlat 항복함수는 알루미늄 판재에 대한 항복응력과 랭크포드의 이방성 계수값(Lankford's anisotropic coefficient R-value) 모두에 대해 합리적인 예측을 보여주었다. 그러나 이 항복함수는  $J_2$  및  $J_3$ 라는 두 개의 항에 하나의 함수  $\phi(J_2, J_3)$ 만 사용하기 때문에 판재의 이방성을 잘 설명하는 데 적합하

지 않다[24]. 한편 Yld2004-18p 항복함수는 이방성 소성변형 거동의 정확한 예측이 가능하지만 이방성 계수를 동정하기 위해서는 많은 실험을 요구한다. Cazacu-Barlat 항복함수 형태와 유사한 형식으로 Lou와 Yoon(2017)[26]은 선형변환된 응력텐서 표현을 이용하여,  $s' = L'\sigma$ , 등방성 Drucker 항복함수를 이방성 형태로 수정하였다.

$$f(\sigma) = [(J'_2)^3 - (J'_3)^2]^{1/6}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s's', \quad J_3 = \det(s') \quad (3b)$$

$J_2$ 와  $J_3$ 는 텐서표시로  $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$ ,  $J_3 = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}$ 으로 표시된다.

4계 선형변환 텐서  $L'$ 의 구체적인 형태는 문헌 [26]의 식(19)에 기술되어 있다. 또한 항복함수와 다른 소성 포텐셜함수를 도입한 비연합유동법칙(non-associated flow rule, non-AFR)의 유효성에 대해서도 논하였다. 한편 Karafillis와 Boyce[27]는 이방성 항복함수를 구성하기 위해 이방성 선형변환에 대한 개념을 처음 도입하였다.

최근 Cazacu(2018) [28]는 불변량이  $J_2^0$  및  $J_3^0$ 인 집합조직의 금속 재료에 대해 다음과 같은 항복함수와 등가응력을 제안하였다.

$$(J_2^0)^4 - \alpha(J_2^0) \times (J_3^0)^2 = k^8$$

$$\bar{\sigma} = B[(J_2^0)^4 - \alpha(J_2^0) \times (J_3^0)^2]^{1/8} \quad (4)$$

티타늄 및 마그네슘 합금과 같은 HCP(육각조밀층진구조) 금속의 경우에 쌍정(twin)을 통한 소성 변형은 궁극적으로 인장과 압축 하중 조건에서 뚜렷한 항복강도 차이를 나타낸다.[29a, 30-36] 또한 Cu-Al-B이나 Ni-Ti 합금과 같은 형상기억합금(shape memory alloy, SMA) 역시 변형 중에 응력유기변태(stress-induced phase transformation)에 의해서 오스테나이트 조직이 마르텐사이트 조직으로 변하면서 항복강도의 차이를 보인다. [29b, 41, 46, 47] 이 현상들을 강도 차이 효과(strength difference effect, SD 효과)라고 부른다. 이러한 인장과 압축에서의 항복응력의 비대칭 소성 거동은 항복곡면 형상에서 쉽게 확인할 수 있다. 이런 재료들의 변형 거동을 확인하기 위해서는 단축 및 2축 인장뿐만 아니라 압축 시험과 같은 몇 가지 변형모드 하에서 실험을 수행해야 한다. Cazacu와 Barlat(2004)[37]은 등방성 재료에 대한 응

력 불변량  $J_2$  및  $J_3$ 을 이용하여 항복함수를 응력에 대한 홀수 함수로 나타내는 것에 의해 HCP 재료에서 나타나는 SD 효과를 설명하였다.

$$f = (J_2)^{3/2} - cJ_3 = \tau_f^3 \quad (5a)$$

여기서 단축인장과 단축압축에서의 항복응력을  $\sigma_T$ 와  $\sigma_C$ 라고 하면 파라미터  $c$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$c = \frac{3\sqrt{3}(\sigma_T^3 - \sigma_C^3)}{2(\sigma_T^3 + \sigma_C^3)} \quad (5c)$$

이 항복조건은  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  하에서  $c \in [-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$  조건이 만족할 때 항복곡면의 볼록성이 성립하는 것으로 알려져 있다.

Cazacu와 Barlat(2004)은 등방성 재료에 대한 응력 불변량  $J_2$  및  $J_3$ 을 직교 이방성 재료로 확장시켜 이방성 항복함수를 제안했다.

$$f = (J_2^0)^{3/2} - cJ_3^0 = \tau_f^3 \quad (5d)$$

최근에 Chen 등[38]은 Khan 등[34]이 원래 제안한 접근 방식을 사용하여 Barlat 1989의 이방성 항복조건을 인장-압축 비대칭으로 확장한 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$f = \left\{ a|K_1 + K_2|^M + a|K_1 - K_2|^M + c|2K_2|^M \right\} e^{-\lambda(\xi+1)} = 1 \quad (6)$$

압력에 둔감한 금속에 대한 이방성과 인장/압축 비대칭을 모두 표현하기 위해 Cazacu 등은 (2006) [39] 응력 편차에 대한 4차 선형변환을 사용하여 또 다른 항복함수(CPB'06)를 제안하였다. 또한 Gao(2011) [40]는 다음과 같이 제 1 불변량  $I_1$ , 제 2 불변량  $J_2$ , 제 3 불변량  $J_3$  세 가지 모두의 효과를 결합한 등방성 항복함수를 제안하였다.

$$f = a(bI_1^6 + 27J_2^3 + cJ_3^2)^{1/6} \quad (7)$$

한편 Khan 등 (2012) [34]은 인장 및 압축 테스트에서 Ti-6Al-4V 합금의 실험적 조사를 기반으로 온도와 변형률 속도의 영향을 모두 고려하고, SD 효과를 설명하기 위해 정규화된 제 3 불변량을 포함한 이방성 항복조건을 제안하였다. 최근에 Yoon(2014)[42]은 세 가지 불변량을 기반으로 다음과 같은 압력 크기에 의존하는 항복함수를 제안하였다.

$$f = b\tilde{I}_1 + [(J_2')^3 - J_3'']^{1/3} \quad (8)$$

여기서  $\tilde{I}_1, J_2', J_3''$  각각의 항의 구체적인 형태는 문헌[42]의 식 (19)~식(25)에 기술되어 있다.

저자들은 전 호에서[43] 제 2 및 제 3 이방성 불변량 (즉,  $J_2^0$  및  $J_3^0$ )을 두 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 결합시킨 응력의 12 승인 새로운 등방성 항복함수를 제안하였고 알루미늄 판재, 순수 티타늄 판재에 적용하여 그 타당성을 보였다.

본 연구에서는 전 호의 이방성 항복조건을 응력의 6승 형태로 수정하여 AA6016-T4, DP980, AZ31B 판재에 적용하여 이들 판재의 소성거동 - 평면응력 상태에서의 항복곡면, 방향별 항복응력, 방향별 랭크포드의 이방성계수 -을 평가하였다.

## 2. 제안된 모델

### 2.1 제안된 이방성 항복함수

본 연구에서는 등방성 판재 재료에 대해 다음과 같이  $J_2$ 와  $J_3$ 를 포함하며 정수압력 크기에 의존하지 않는 응력에 대해 6승 형태의 항복함수를 제안한다.

$$f \equiv (J_2)^3 + \alpha(J_2)^2 + \beta J_2^{3/2} \times J_3 = \tau_f^6 \quad (9a)$$

이 식은 Cazacu와 Barlat(2004)이 제안한 식 (5a)의 변형된 형태와 기본적으로는 같다. 즉, 이 경우에  $f = (J_2^{3/2} - cJ_3)^2$ 를 고려하면  $\alpha = c^2$ ,  $\beta = -2c = -2\sqrt{\alpha}$ 가 된다.

그러나 본 연구에서는  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 서로 의존적이지 않고 독립적으로 부여하는 것에 의해서 다양한 항복곡면의 형태를 구현하도록 하였다.

제안된 항복함수는 Yoshida [24] 및 Yoon [25]의 Poly6와 같이 응력에 대해서 6차식 형식을 가지며 인장과 압축에서 항복응력의 크기가 다른 특성을 표현할 수 있는 수정된 Kim-Van 비대칭 항복함수 (asymmetric yield function, KV'6a)를 나타낸다. 이 비대칭 항복함수는 티타늄, 마그네슘과 같은 HCP 재료의 소성거동을 표현하는데 적합하다. 물론 식 (8)은  $\alpha=\beta=0$ 인 경우는 Mises의 항복함수로 귀착한다.

여기서  $J_2$ 와  $J_3$ 는 응력 불변량,  $k$ 는 순수 전단에서의 항복응력,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 재료 상수이다. 여기서  $\beta = 0$ 인 경우 제안된 항복함수는 Drucker[16]의

항복함수 및 Cazacu-Barlat의 대칭 항복함수 (symmetric yield function, KV'6s)와 같은 형식을 갖는다. 이 대칭 항복함수는 철강 및 알루미늄과 같은 BCC(체심입방구조) 및 FCC(면심입방구조) 재료에 적합한 것으로 알려져 있다.

$$f \equiv (J_2)^3 + \alpha(J_2)^2 = \tau_f^6 \quad (9b)$$

여기서 단축인장과 단축압축에서의 항복응력을  $\sigma_T$ 와  $\sigma_c$ 라고 하면 파라미터  $\alpha$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\alpha = 6.75 \left( \frac{\sigma_T^6 - \sigma_c^6}{\sigma_T^6 + \sigma_c^6} \right) \quad (9c)$$

만일  $\sigma_T > \sigma_c > 0$  이라면  $\alpha \in (0, 6.75)$  이고,  $0 < \sigma_T < \sigma_c$  이라면  $\alpha \in (-6.75, 0)$  이다. 그러나 항복조건 of 불록성을 고려하면  $\alpha$ 와  $\beta$ 는  $(-3.37, 3.37)$  범위에 있어야 한다.

식 (9b)의 대칭 항복함수 및 식 (9a)의 비대칭 항복함수를 이방성 불변량을 사용하여 수정하면 직교 이방성 재료에 대한 항복함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f \equiv (J_2^0)^3 + \alpha(J_3^0)^2 = k^6 \quad (10)$$

$$f \equiv (J_2^0)^3 + \alpha(J_3^0)^2 + \beta(J_2^0)^{3/2} \times (J_3^0) = k^6 \quad (11)$$

여기서  $J_2^0$  및  $J_3^0$  불변량은 직교 이방성 판재 재료에 대해서 이방성을 고려하도록 일반화한 것으로 다음과 같이 표현된다. [22,28]

$$\begin{aligned} J_2^0 &= \frac{a_1}{6} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{a_2}{6} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 \\ &+ \frac{a_3}{6} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + a_4 \sigma_{xy}^2 + a_5 \sigma_{xz}^2 \\ &+ a_6 \sigma_{yz}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} J_3^0 &= \frac{1}{27} (b_1 + b_2) \sigma_{xx}^3 + \frac{1}{27} (b_3 + b_4) \sigma_{yy}^3 + \frac{1}{27} [2(b_1 + b_4) - b_2 - b_3] \sigma_{zz}^3 - \frac{1}{9} (b_1 \sigma_{yy} + b_2 \sigma_{zz}) \sigma_{xx}^2 - \frac{1}{9} (b_3 \sigma_{zz} + b_4 \sigma_{xx}) \sigma_{yy}^2 - \frac{1}{9} [(b_1 - b_2 + b_4) \sigma_{xx} + (b_1 - b_3 + b_4) \sigma_{yy}] \sigma_{zz}^2 + \frac{2}{9} (b_1 + b_4) \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xz}^2}{3} [2b_9 \sigma_{yy} - \end{aligned}$$

$$b_8\sigma_{zz} - (2b_9 - b_8)\sigma_{xx}] - \frac{\sigma_{xy}^2}{3} [2b_{10}\sigma_{zz} - b_5\sigma_{yy} - (2b_{10} - b_5)\sigma_{xx}] - \frac{\sigma_{yz}^2}{3} [2b_7\sigma_{xx} - b_6\sigma_{yy} - (2b_7 - b_6)\sigma_{zz}] + 2b_{11}\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} \quad (13)$$

위의 식에서  $a_i(i = 1, \dots, 6)$  와  $b_j(j = 1, \dots, 11)$  는 이방성 계수이다.

식 (11)에서 유효 응력( $\bar{\sigma}$ )은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = V[J_2^0]^3 + \alpha(J_3^0)^2 + \beta(J_2^0)^{3/2} \times (J_3^0) \Big]^{1/6} \quad (14)$$

여기서,  $V$ 는 압연 방향을 따라 일축 인장으로부터 유효 응력의 편차를 보정하기 위한 상수이고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V = \frac{1}{\left[ \left( \frac{a_1+a_3}{6} \right)^3 + \alpha \left( \frac{b_1+b_2}{27} \right)^2 + \beta \left( \frac{a_1+a_3}{6} \right)^{3/2} \left( \frac{b_1+b_2}{27} \right) \right]^{1/6}} \quad (15)$$

식 (11)의 항복함수  $f$  를 소성포텐셜  $g$  로 간주한 연합유동법칙(associated flow rule,  $g=f$ )으로부터 소성 변형률 증분은 소성포텐셜의 응력에 대한 편미분으로 다음과 같이 나타내진다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (16)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left\{ \left[ 3(J_2^0)^2 + \left( \frac{3}{2} \right) \beta (J_2^0)^{3/2} \times (J_3^0) \right] \frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{ij}} + \left[ 2\alpha(J_3^0) + \beta(J_2^0)^{3/2} \times 1 \right] \frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{ij}} \right\} d\lambda$$

주 편차 응력값( $s_1, s_2, s_3$ )을 사용하는 기준에 제안된 다른 유형의 이방성 항복함수들과 비교하여 본 연구에서 제안된 항복함수의 장점은 변형률 증분을 결정하기 위한  $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ 를 직접 계산할 수 있다는 것이다.

평면 응력 상태( $\sigma_3 = 0$ )에서 평면(x-y)의 등 2축 인장 하,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b$ , 에서 정규화된 항복응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_b / \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left( \frac{a_2 + a_3}{6} \right)^3 + \alpha \left( \frac{2b_1 - b_2 - b_3 + 2b_4}{27} \right)^2 \right\}^{-1/6} + \beta \left( \frac{a_2 + a_3}{6} \right)^{3/2} \times \left( \frac{2b_1 - b_2 - b_3 + 2b_4}{27} \right) \quad (17)$$

한편 이방성 판재의 이방성 특성을 나타내는 랭크포드 계수값  $R_\theta$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$R_\theta = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}(\sin^2\theta) - \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}(\cos^2\theta)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}} \quad (18)$$

등 2축 인장에서 랭크포드 계수값  $R_b$ 는 다음 형식으로 계산된다.

$$R_b = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}} \quad (19)$$

또한, 압연 방향과 하중 방향 사이의 각도  $\theta$ 에 따른 정규화된 단축 항복응력  $\sigma_\theta / \sigma_0$  은  $\sigma_{xx} = \sigma_\theta \cdot \cos^2\theta$ ,  $\sigma_{yy} = \sigma_\theta \cdot \sin^2\theta$  and  $\sigma_{xy} = \sigma_\theta \cdot \sin\theta \cos\theta$  관계를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_\theta / \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[ \left( \frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{6} \right) \cos^4\theta + \left( a_4 - \frac{a_1}{3} \right) \cos^2\theta \sin^2\theta \right]^3 + \left( \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6} \right) \sin^4\theta \right. \\ \left. + \alpha \left[ \cos^6\theta \frac{b_1 + b_2}{27} + \sin^6\theta \frac{b_3 + b_4}{27} - \cos^4\theta \sin^2\theta \frac{b_1 + 3b_5 - 6b_{10}}{9} - \cos^2\theta \sin^4\theta \frac{b_4 - 3b_5}{9} \right]^2 \right\}^{-1/6} \\ + \beta \left[ \left( \frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{6} \right) \cos^4\theta + \left( a_4 - \frac{a_1}{3} \right) \cos^2\theta \sin^2\theta \right]^{3/2} \times \left[ \left( \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6} \right) \sin^4\theta \right. \\ \left. + \left[ \cos^6\theta \frac{b_1 + b_2}{27} + \sin^6\theta \frac{b_3 + b_4}{27} - \cos^4\theta \sin^2\theta \frac{b_1 + 3b_5 - 6b_{10}}{9} - \cos^2\theta \sin^4\theta \frac{b_4 - 3b_5}{9} \right] \right] \quad (20)$$

## 2.2 항복함수의 볼록성 조건

재료가 소성변형하는 동안에 내부의 소성일이 발생되어야 하므로 항복곡면이 볼록하다고 가정한다.

(항복곡면의 볼록성(convexity) 조건) 본 연구에서 제안된 응력의 6승 형태의 이방성 항복조건의 볼록성을 확인하기 위해 항복곡면이 볼록한 응력 범위를 확인하였다. 등방성 항복함수가 볼록하려면 허용가능한  $\alpha$  및  $\beta$ 의 변동 범위에 대해서 다음의 헤세 행렬 H가 양의 준정부호(positive semidefinite)인지 확인해야 한다[44-46].

$$\begin{aligned}
 H_1(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy} \partial \sigma_{xx}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx} \partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy}^2} \end{bmatrix} \\
 H_2(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy} \partial \sigma_{xx}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma_{xx} \partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma_{xy}^2} \end{bmatrix} \\
 H_3(\sigma_{yy}, \sigma_{xy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy} \partial \sigma_{yy}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy} \partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy}^2} \end{bmatrix} \quad (21)
 \end{aligned}$$

헤시안 행렬 H의 양의 준정부호 속성은 행렬 고유값의 양수값임을 보이므로써 증명할 수 있다. 이 분석을 바탕으로 본 연구에서 제안된 응력에 대해서 6승 형태의 이방성 항복함수, 식 (9)와 식(8)은 볼록성 조건을 만족하는 것으로 확인되었다.

### 2.2 평면응력 하에서 항복곡면에 대한 $\alpha$ 와 $\beta$ 의 영향

제안된 등방성 항복함수의 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 역할을 확인하기 위해 Fig. 1에 이들 매개변수의 여러 조합에 대하여 항복곡면의 형태를 나타내었다.

Fig. 1의 (a)와 (b)에서 파라미터  $\alpha=0$ 에서  $\beta$ 가 양의 값으로 커질수록 Ti-6Al-4V 타이타늄 합금[34,35] 또는 Cu-Al-B 형상기억합금의 초기 항복곡선[41, 46,47]과 같이 단축 압축에서 단축 인장보다 더 큰 항복응력을 가지며 등 2축 인장 쪽에서 뾰족한 비대칭 형태로 변화하고 있음을 알 수 있다.

한편 Fig.1의 (c)와 (d)에서는  $\beta=0$ 에서  $\alpha$ 가 양의 값에서 음의 값으로 변해갈 때 Hosford[19]와 Barlat (1989)[20]의 항복곡면과 같이 등 2축 인장모드에서 항복곡면의 곡률이 작아지고 있음을 알 수 있다.

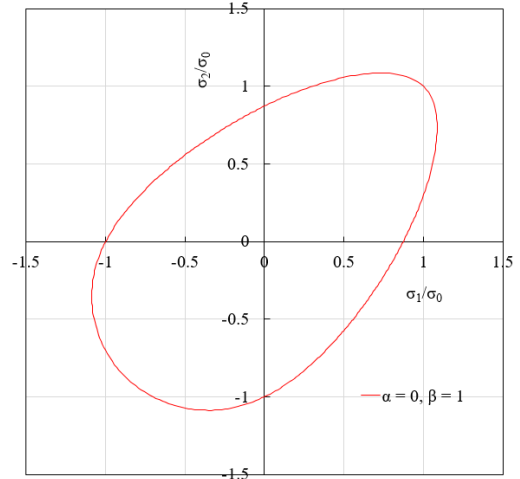
또한 Fig.1의 (e)와 (f)에서는  $\alpha=0$ 에서  $\beta$ 가 음의 값으로 커질수록 마그네슘 합금[29a, 30-33]이나 항공기

브레이드용으로 개발된 Ni-Ti, Ni<sub>3</sub>Al 계통의 초합금(supper alloy)의 항복곡선[29b]과 같이 단축 인장에서 단축 압축보다 더 큰 항복응력을 가지며 등 2축 압축 쪽에서 뾰족한 비대칭 형태로 변화하고 있음을 알 수 있다.

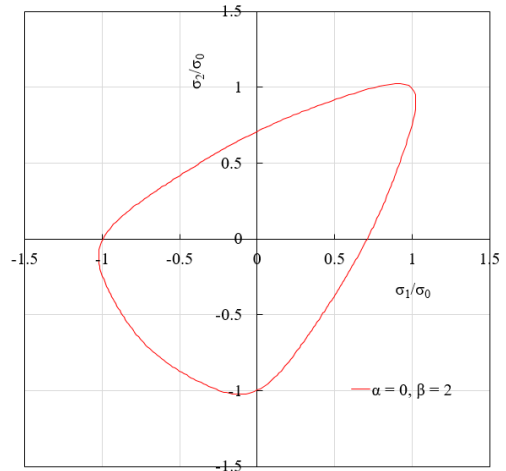
Fig.2는 Fig.1의 (a)와 (e)와 유사한 형태이지만  $\alpha$ 값이 음의 값( $\alpha=-1$ )을 갖는 경우에 각각 등 2축 압축과 등 2축 인장모드에서 곡률이 작아지고 있음을 알 수 있다.

이와 같이 본 연구에서 제안한 이방성 항복조건 곡면은 두 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 적당히 결합시키는 것으로부터 다양한 형태의 항복곡면을 표현할 수 있다는 유연성을 갖는다는 것을 알 수 있다.

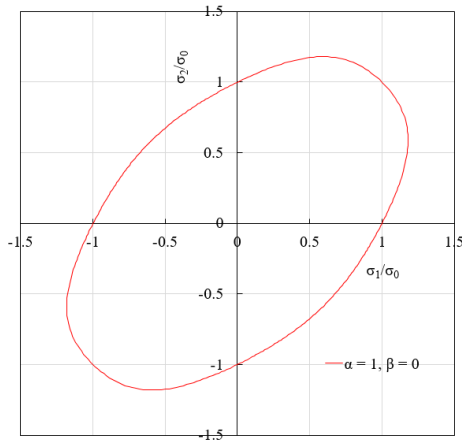
(a)  $\alpha = 0, \beta = 1$



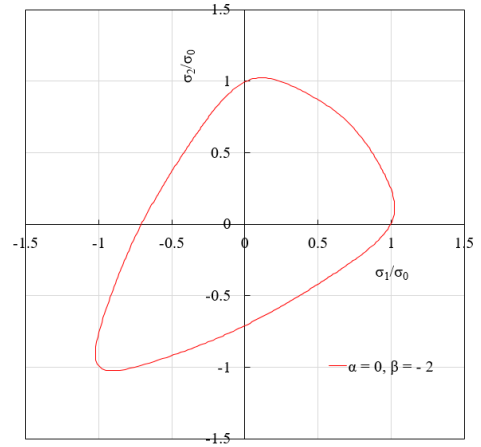
(b)  $\alpha = 0, \beta = 2$



(c)  $\alpha = 1, \beta = 0$

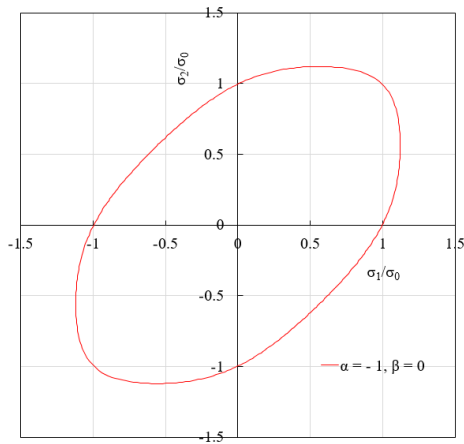


(f)  $\alpha = 0, \beta = -2$

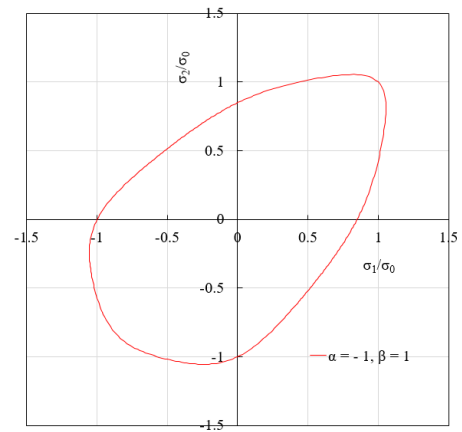


**Fig. 1** Yield locus according to proposed isotropic yield function for different values of parameters  $\alpha$  and  $\beta$ :

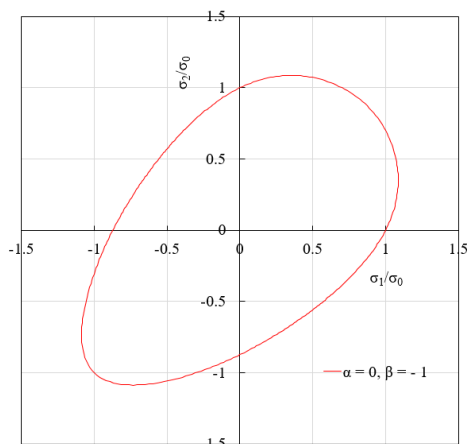
(d)  $\alpha = -1, \beta = 0$



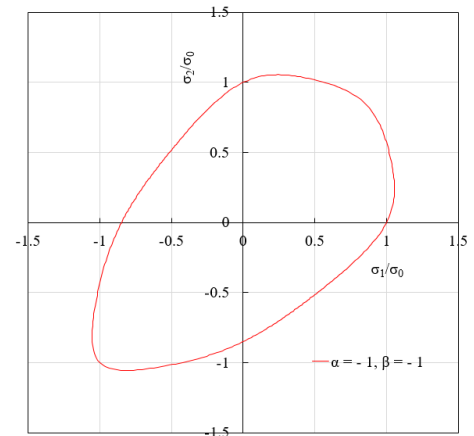
(g)  $\alpha = -1, \beta = 1$



(e)  $\alpha = 0, \beta = -1$



(h)  $\alpha = -1, \beta = -1$



**Fig. 2** Yield locus according to proposed isotropic yield function for negative of parameters  $\alpha$

### 3. 제안된 항복함수 모델의 적용

#### 3.1 AA6016-T4 판재에 적용

Cazacu-Barlat(2001) [22, 48]의 실험결과로부터 AA6016-T4 판재의 단축 인장 및 액압 벌지 실험 데이터를 항복곡면의 동정에 활용하였다. 항복곡면의 형상을 결정하기 위해서는 통상의 균일변형 모드의 단축인장, 순수전단 그리고 액압 벌지 실험을 이용하는 방법과 십자형 시편(cruciform specimen)을 이용한 2축 인장실험 방법이 널리 이용되고 있다.[2]

제안된 항복함수의 매개변수들을 동정하기 위하여 다음과 같은 오차 함수를 사용하여 오차값을 최소화하는 과정을 거쳤다.

$$F = \sum_i^n \eta_i \left(1 - \frac{(\sigma_\theta)_i^{th}}{(\sigma_\theta)_i^{data}}\right)^2 + \sum_j^m \gamma_j \left(1 - \frac{(R_\theta)_i^{th}}{(R_\theta)_i^{data}}\right)^2 + \delta \left(1 - \frac{(\sigma_b)_i^{th}}{(\sigma_b)_i^{data}}\right)^2 + \nu \left(1 - \frac{(R_b)_i^{th}}{(R_b)_i^{data}}\right)^2 + \sum_k^t \chi_k \left(1 - \frac{(l)_k^{th}}{(l)_k^{data}}\right)^2 \quad (22)$$

여기서, n과 m은 각각 단축 인장실험에서 구한  $\theta$  방향에서의 항복응력  $\sigma_\theta$  및 랭크포드 계수값  $R_\theta$ 의 수를 나타낸다.  $\sigma_b$  및  $R_b$ 는 각각 등 2축 인장의 항복응력 및 랭크포드 계수이다. t는 다양한 하중비에서 실험한 2축 인장 및 압축의 수를 나타내고, 위 첨자 th와 data는 각각의 값이 실험값인지 계산된 값인지를 나타낸다.

또한  $\eta_i, \gamma_j, \delta, \nu$  및  $\chi_k$ 는 오차함수에 기여하는 우변의 각 항에 대한 가중치 인자이다. 이들 가중치는 본 연구에서 실험결과가 방정식의 수 보다 많아서 어떤 인자를 더 우선으로 고려하여  $a_i$ 와  $b_j$ 를 결정할 것인가에 따라서 사용자가 임의로 정하는 값이다. [49,50,51] Habraken 등 [50]은 이들 가중치 인자를 1.0으로 모두 동일하게 하였으며, Nomura와 Kuwabara [51]은 1000~0.1 범위에서 항복응력과 이방성계수를 가장 잘 핏팅하는 값을 사용하였다. 본 연구에서도 문제에 따라 적절한 값을 사용하여 국부적인 최소값에 빠지지 않도록 하였다. l 및 l'은 각각 주응력 공간에서 원점과 실험값 및 예측값 사이의 거리이다. 즉,  $l = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

본 연구에서는 제안된 이방성 항복함수의 매개변수들을 동정하기 위해서 수치적 최적화 기법을 채용하고 있다. 반면 Yoon 등[25]은 응력에 대해서 6차항으로 정의되는 Poly6 항복함수에 대해서 해석적으로 매개변수들을 구하는 방법을 제안한 바 있다.

KV'6s와 Cazacu-Barlat 항복함수를 이용하여 AA6016-T4 판재에 대한 항복곡면, 정규화된 항복응력, 랭크포드의 이방성 계수값을 예측하였고 Fig. 3a, 3c 및 3d에 실험 데이터와 함께 나타내었다.

Fig. 3b에는 KV'6s 항복함수에서 전단응력의 영향을 고려한 항복곡면의 형상을 나타내었다.

평면 응력  $\sigma_3 = 0$ 에 대한 KV'6s 항복함수에 사용된 계수는  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$  및  $90^\circ$  방향의 인장 실험에서 구한 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값 10개를 택하고 등 2축 인장에서의 항복응력  $\sigma_b/\sigma_0 = 1.0$ 와 및 랭크포드 계수값  $R_b = 1.05$  [47]을 사용하여 오차 함수(22)를 최소화하여 동정하였다. 이 계수를 Table 1에 나타내었다.

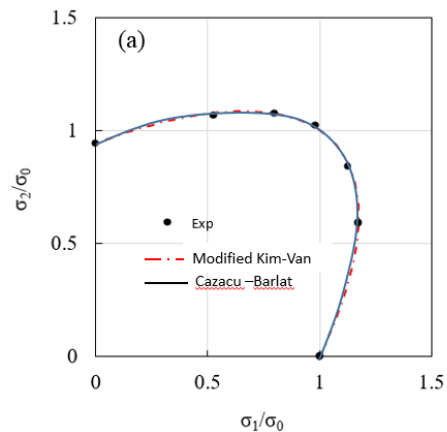
**Table 1 Anisotropic coefficients of the Kim-Van and the Cazacu-Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet**

Parameters	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$
Kim-Van	1.085	0.846	0.696	0.697	0.384	1.616
Cazacu-Barlat	0.334	0.815	0.815	0.420	0.040	-1.205

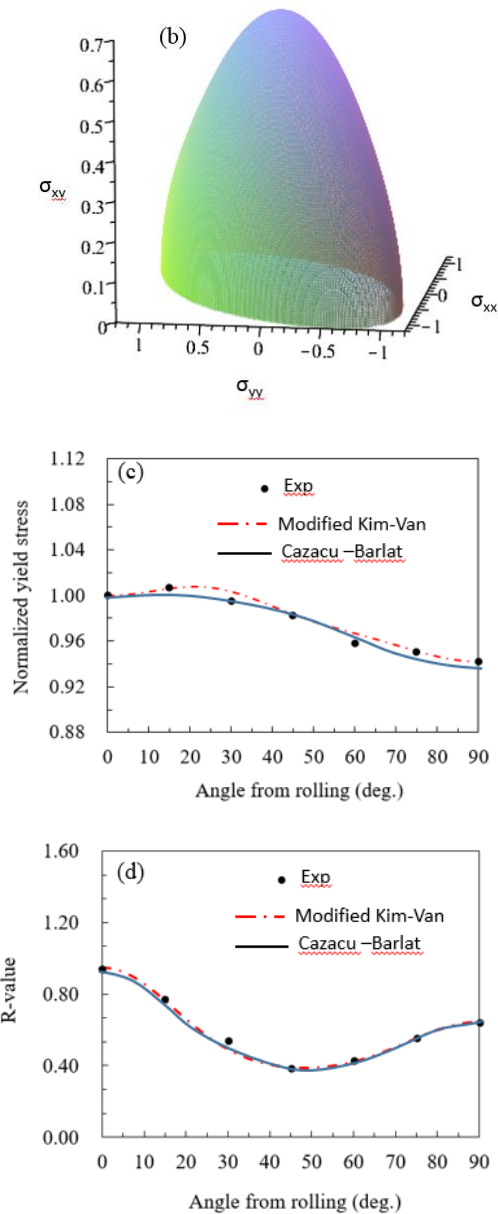
  

$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_{10}$	$\alpha$	$\beta_2$	c	Error(F)
2.408	0.271	1.315	1.257	1.986	0	×	0.0007
-0.958	0.306	0.153	-0.020	×	×	1.4	0.0007

Cazacu-Barlat 항복함수에 사용된 계수는  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$  및  $90^\circ$  방향에서 실험한 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값 과 등 2축 인장 항복응력  $\sigma_b/\sigma_0 = 1.0$  [21]을 사용하여 동정하였다. AA6016-T4 판재에 대한 Kim-Van 항복함수로부터 구한 항복곡면을 Fig. 3b에 나타내어 항복곡면의 형상을 파악하였다.







**Fig. 3** Predicted anisotropy according to the modified Kim–Van and the Cazacu–Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet with 16 equations for fitting (a) yield locus, (b) 3D yield surface, (c) normalized uniaxial yield stresses, and (d) R-values

### 3.2 DP980 판재에 적용

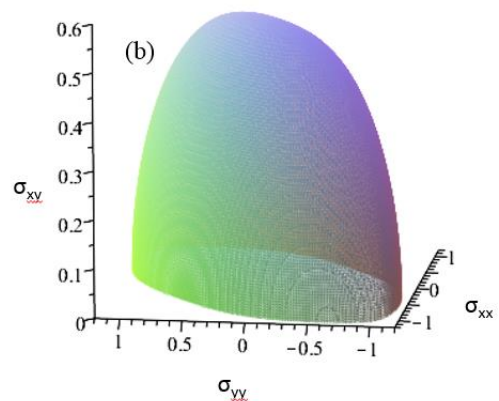
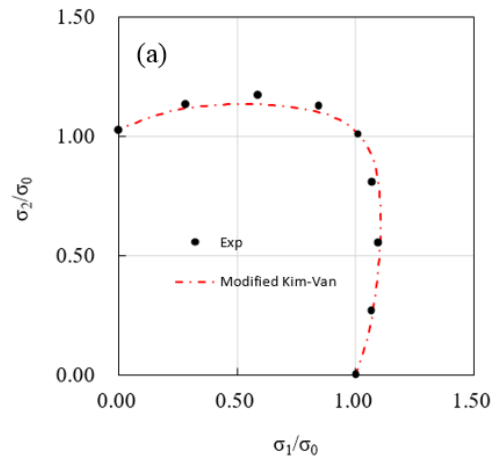
자동차용 고강도강판 DP980 [52,53]에 대하여 본 연구에서 제안한 이방성 항복조건식의 적용 가능성을 확인하기 위해서 DP980 판재에 대해서 예

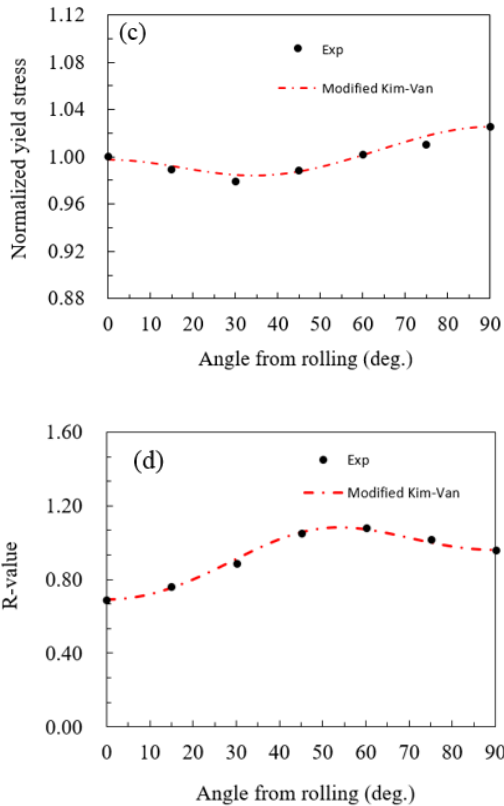
측된 항복곡면, 정규화된 단축 항복응력  $\sigma_b/\sigma_0$  및 랭크포드 계수값을 실험결과와 비교하였다.

여기서는 KV'6s 항복함수의 매개변수를 동정하기 위해  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  및  $90^\circ$ 에 따른 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값, 등 2축 인장 항복응력  $\sigma_b/\sigma_0 = 1.01$ , 그리고 2축 인장의 3가지 하중비 (즉  $\sigma_x:\sigma_y = 1:2, 4:3, 2:1$ )에서의 2축 항복응력값을 이용하였다. DP980 판재에 대한 KV'6s 항복함수의 계수를 Table 2에 나타내었다.

**Table 2** Anisotropic coefficients of the modified Kim–Van yield function for DP980 sheet

Parameters	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$
Kim–Van	0.965	1.028	1.157	1.129	1.402	0.570
	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_{10}$	$\alpha$	$\beta_1$
	0.931	0.746	1.275	1.341	-1.251	-





**Fig. 4 Predicted anisotropy from the modified Kim-Van yield function for DP980 sheet with 12 equations for fitting (a) yield locus, (b) 3D yield surface, (c) normalized uniaxial yield stresses, and (d) R-values**

Fig.4a, 4c, 4d에 KV'6s 항복함수에서 예측된 항복곡면, 정규화된 항복응력, 랭크포드 계수값을 실험 데이터와 함께 나타내었다. KV'6s 항복함수의 예측은 실험과 잘 일치하는 것을 알 수 있다

### 3.3 AZ31B 마그네슘 판재에 적용

HCP 결정 구조를 갖는 AZ31B 마그네슘 합금은 항복곡면에 비대칭 형상을 보이는 것으로 알려져 있다.

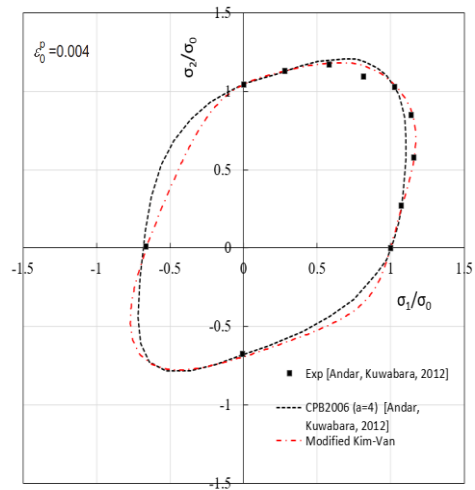
AZ31B 마그네슘 합금 판재의 비대칭 소성 항복 거동을 설명하기 위해 Andar 등[29a]은 등 2축 인장 및 압축실험을 수행하였고 CPB2006 항복함수[39]를 이용하여 실험결과를 피팅하였다. 그 결과 CPB2006이 인장과 압축에서의 항복곡면의 차이와 비대칭성을 잘 표현한다고 하였다.

Fig.5에 AZ31B 마그네슘 합금 판재에 대해 식 (8)

의 KV'6a 비대칭 항복함수의 적용 가능성을 확인하기 위해 Andar의 실험 데이터[29a]와 CPB2006 항복함수를 함께 나타내었다. AZ31B 판재의 경우에 인장에서의 항복응력이 압축 보다 높게 평가되고 또한 등 2축 압축모드 하에서 항복곡선의 곡률이 매우 작아 뾰족한 비대칭 형태를 나타내고 있음을 알 수 있다.

KV'6a 항복함수의 계수를 동정하기 위해서 세 개의 응력비(1:0, 1:1, 0:1)에 대한 2축 인장 데이터와 2축 압축 데이터, 세 가지 응력비(2:1, 3:4, 1:2)에 대한 CPB2006 항복함수로 부터 예측한 데이터 그리고 등 2축 항복응력을 사용하여 오차 함수(22)를 최소화하였다. AZ31B 합금 판재에 대한 KV'6a 항복함수의 계수를 Table 4에 나타내었다.

KV'6a 항복함수가 전체적으로 제 1상한의 인장모드에서 CPB2006 항복함수 보다 항복응력을 더 잘 예측하는 것을 알 수 있다.



**Fig. 5 Yield loci of AZ31B magnesium alloy sheet predicted using the modified Kim-Van and CPB2006 yield functions**

**Table 3 Anisotropic coefficients of the modified Kim-Van yield function for AZ31B magnesium alloy sheet**

Parameters	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$
Kim-Van	1.385	1.439	1.441	x	1.526	3.932
	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_{10}$	$\alpha$	$\beta_1$
	3.810	0.316	x	x	3.324	-3.105

따라서 본 연구에서 제안된 Kim-Van의 이방성 항복함수 식 (8)은 BCC와 FCC 결정구조에서 나타나는 대칭 항복거동뿐만 아니라 HCP 결정구조에서 나타나는 비대칭 항복거동도 잘 예측하는 것으로 판단된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 전 보에서 제안한 두 개의 매개변수  $\alpha$  및  $\beta$ 를 포함하고  $J_2^0$  및  $J_3^0$  불변량으로 표현되는 응력에 대해서 12 승 형태의 이방성 항복함수를 수정하여 6승 형태의 이방성 함수를 제안하였다.

이 항복함수는 BCC 및 FCC 결정구조 재료에서 나타나는 대칭 항복곡면과 HCP 결정구조 재료에서 나타나는 비대칭 항복곡면의 두 가지 유형을 잘 표현하도록 제안되었다.

수정된 항복함수의 유효성을 확인하기 위해 대칭 항복함수(KV'6s)로서 AA6061-T4 판재, DP980 판재와 비대칭 항복함수(KV'6a)로서 AZ31B 마그네슘 합금 판재의 소성특성들을 예측하고 실험결과 및 기존의 이방성 항복함수들과 비교하였다. 본 연구를 통해 다음과 같은 주요 결론이 도출되었다.

(1) KV'6s 항복함수는 AA6061-T4 및 DP980 재료의 실험 데이터와 비교한 결과, 대칭 형태의 항복곡선 형태와 방향별 항복응력 및 이방성 계수값을 잘 나타내었다.

(2) 제안된 항복함수는 두 개의 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 결합하는 것에 의해 다양한 형상의 항복곡선 형상을 구현할 수 있음을 보였다.

(3) KV'6a 비대칭 항복함수는 AZ31B 마그네슘 합금 판재의 항복곡선의 특징 -인장에서의 항복응력이 압축 보다 높게 평가되고 또한 압축모드 하에서 뾰족한 비대칭 형태- 을 잘 나타내고 있다.

#### 후 기

본 연구는 교육부의 BK21 사업단의 지원을 받아 수행되었다. (4199990314305)

#### REFERENCES

- [1] R.H. Wagoner, J.-L. Chenot, Metal forming analysis, Cambridge University Press, 2001
- [2] D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara, 2020, Advances in anisotropy of plastic behavior and formability, Int. J. Mater. Form., Vol.13, pp.749-787.
- [3] D.Banabic, Sheet Metal Forming Processes – Constitutive Modelling and Numerical Simulation, Springer, 2010.
- [4] H. Swift, 1952, Plastic instability under plane stress, J. Mech. Phys. Solids, Vol.1, No.1, pp.1-18.
- [5] E. Voce, 1948, The relationship between stress and strain for homogeneous deformation, J. Inst. Met., Vol.74, pp.537-62,
- [6] Q.T. Pham, S.H. Oh, Y.S. Kim, 2018, An efficient method to estimate the post-necking behavior of sheet metals, Int. J. Adv. Manuf. Technol., Vol.98, No.9-12, pp.2563-78, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.002>
- [7] T.B. Stoughton, J.W. Yoon, 2008, On the existence of indeterminate solutions to the equations of motion under non-associated flow, Int. J. Plast., Vol.24, No.4, pp.583-613.
- [8] T.B. Stoughton, J.W. Yoon, 2009. Anisotropic hardening and non-associated flow in proportional loading of sheet metals, Int. J. Plast., Vol.25, No.9, pp.1777-1817, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.02.003>
- [9] J.J. Ha, S. Coppieters, Y.P. Korkolis, 2020, On the expansion of a circular hole in an orthotropic elastoplastic thin sheet, Int. J. Mech. Sci., Vol.182, pp.105706, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105706>
- [10] Q.T. Pham, Y.S. Kim, 2017, Identification of the plastic deformation characteristics of AL5052-O sheet based on the non-associated flow rule, Met. Mater. Int., Vol.23, No.2, pp.254-263, doi: 10.1007/s12540-017-6378-5.
- [11] J.J. Kim, Q.T. Pham, Y.S. Kim, 2021, Thinning prediction of hole-expansion test for DP980 sheet based on a non-associated flow rule, Int. J. Mech. Sci., Vol.191, 106067, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106067>
- [12] J. Cao, M. Banu, 2020, Opportunities and Challenges in Metal Forming for Lightweighting: Review and Future Work, J. Manuf. Sci. Engng., Vol. 142 / 110813-1 <https://doi.org/10.1115/1.4047732>

- [13] W. Prager, 1949, Recent development in the mathematical theory of plasticity, *J. App. Phys.*, Vol.20, pp.235-, <https://doi.org/10.1063/1.1698348>
- [14] H. Tresca, 1864, Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 59, pp.754-,
- [15] V. Mises, 1913, Mechanics of solid bodies in the plastically-deformable state, *Math. Phys.*, Vol.4, pp.582–592.
- [16] D.C. Drucker, 1949, Relations of experiments to mathematical theories of plasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol.16, No.4, pp. 349-357, <https://doi.org/10.1115/1.4010009>.
- [17] R. Hill, 1948, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.193, pp.281–297, <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0045>
- [18] R.Hill, 1979, Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.85, pp.179–191, <https://doi.org/10.1017/S0305004100055596>
- [19] W.F. Hosford, 1979, On yield loci of anisotropic cubic metals, *Proc. 7<sup>th</sup> North American Metalworking Conf.*, SME, Dearborn, MI. pp.191–197,
- [20] F. Barlat, J. Lian, 1989, Plastic behavior and stretchability of sheet Metals. Part I: Yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. *Int. J. Plast.*, Vol.5, pp.51–66. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(89\)90019-3](https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90019-3)
- [21] F. Barlat, J. Brem, J.W. Yoon, K. Chung, R. Dick, D. Lege, 2003, Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—Part 1: theory, *Int. J. Plast.*, Vol.19, No.9, pp.1297–1319, [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(02\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00019-0)
- [22] O. Cazacu, F. Barlat, 2001, Generalization of Drucker's yield criterion to orthotropy, *Math. Mech. Solids*, Vol.6, No.6, pp.613–630, <https://doi.org/10.1177/108128650100600603>
- [23] F. Barlat, H. Aretz, J.W. Yoon, M.E. Karabin, J.C. Brem, R.E. Dick, 2005, Linear transformation based anisotropic yield function, *Int. J. Plast.*, Vol.21, pp.1009–1039, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.06.004>
- [24] F. Yoshida, H. Hamasaki, T. Uemori, 2013, A user-friendly 3D yield function to describe anisotropy of steel sheet (Poly6), *Int. J. Plast.*, Vol.45, pp.119-139, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.01.010>
- [25] Q. Hu, W. Yoon, T.B. Stoughton, 2021, Analytical determination of anisotropic parameters for Poly6 yield function, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 201, 106467 <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106467>
- [26] Y.S. Lou, J.W. Yoon, 2017,  $J_2$ - $J_3$  based anisotropic yield function under spatial loading, *Procedia Engng.*, Vol.207, pp.233-238, <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.767>
- [27] A.P. Karafillis, M.C. Boyce, 1993, A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.41, pp.1859–1886, [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90073-O](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90073-O)
- [28] O. Cazacu, 2018, New yield criteria for isotropic and textured metallic materials, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.139-140, pp.200-210, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.036>
- [29a] M.O. Andar, T. Kuwabara and D. Steglich, 2012, Material modeling of AZ31 Mg sheet considering variation of r-values and asymmetry of the yield locus, *Materials Science and Engineering A*, Vol. 549, pp. 82–92. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2012.04.009>
- [29b] D.J. Hart, B. Kiefer, R. Schulte, A. Menzel, Computationally-efficient modeling of inelastic single crystal responses via anisotropic yield surfaces: Applications to shape memory alloys, *Int. J. Solids Struct.*, 136-137, (2018), pp. 38-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.12.002>
- [30] Y. Koh, D. Kim, D.Y. Seoka, J. Bak, S.W. Kim, Y.S. Lee, K. Chung, 2015, Characterization of mechanical property of magnesium AZ31 alloy sheets for warm temperature forming, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.93, pp.204–217, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.001>
- [31] N. Chandola, R.A. Lebensohn, O. Cazacu, 2015, Combined effects of anisotropy and tension–compression asymmetry on the torsional response of AZ31 Mg, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.58, pp.190–200, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.01.001>
- [32] G. Tari, M.J. Worswick, 2015, Elevated temperature constitutive behavior and simulation of warm forming of AZ31BD, *J. Mater. Process. Technol.*, Vol.221, pp.40–55,

- <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.014>
- [33] D.G. Taria, M.J. Worswicka, U. Alia, M.A. Gharghourib, 2014, Mechanical response of AZ31B magnesium alloy: experimental characterization and material modeling considering proportional loading at room temperature, *Int. J. Plast.*, Vol.55, pp.247–267, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.10.006>
- [34] A.S.Khan, S.J. Yu, H.W. Liu, 2012, Deformation induced anisotropic responses of Ti–6Al–4V alloy Part II: A strain rate and temperature dependent anisotropic yield criterion. *Int. J. Plast.*, Vol. 7, pp.14–26. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.013>
- [35] A.S.Khan, S.J. Yu, 2012, Deformation induced anisotropic responses of Ti–6Al–4V alloy, Part I: Experiments. *Int. J. Plast.*, Vol. 38, pp.1–13. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.015>
- [36] C. Liu, Y. Huang, M.G. Stout, 1997, On the asymmetric yield surface of plastically orthotropic materials: a phenomenological study, *Acta, Mater.*, Vol.45, pp.2397–2406, [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(96\)00349-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(96)00349-7)
- [37] O. Cazacu, F. Barlat, 2004, A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals, *Int. J. Plast.*, Vol.20, pp.2027–2045, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021>
- [38] L. Chen, H. Zhang, M. Song, 2020, Extension of Barlat’s Yield Criterion to Tension–Compression Asymmetry: Modeling and Verification, *Metals*, Vol. 10(6), pp. 713 <https://doi.org/10.3390/met10060713>
- [39] O. Cazacu, B.Plunkett, F. Barlat, 2006, Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals, *Int. J. Plast.*, Vol. 22, No.7, pp.1171–1194, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001>
- [40] X. Gao, T. Zhang, J.Zhou, S.M. Graham, M. Hayden, C. Roe, 2011, On stress-state dependent plasticity modeling: significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule, *Int. J. Plast.*, Vol.27, pp.217–231, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.05.004>
- [41] L.Chen, H. Zhang, M. Song, X. Yue, J. Zhang, 2021, Modeling the stress-induced transformation behavior of shape memory alloys under multiaxial loading conditions, *Crystals*, Vol.11, 1191 <https://doi.org/10.3390/cryst11101191>
- [42] J.W.Yoon, Y.S. Lou YS, J.H. Yoon, M.V. Glazoff, 2014, Asymmetric yield function based on the stress invariants for pressure sensitive metals, *Int. J. Plast.*, Vol.56, pp.184–202, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.11.008>
- [43] Y.S.Kim, P.V.Nguyen, J.J.Kim, 2022, Yield Functions Based on the Stress Invariants J2 and J3 and its Application to Anisotropic Sheet Materials, *Trans. Mater. Process.*, Vol.31 (4), pp.241–228, doi: 10.5228/KSTP.2022.31.4.214
- [44] R.P.R. Cardoso, O.B. Adetoro OB, 2017, A generalization of the Hill’s quadratic yield function for planar plastic anisotropy to consider loading direction, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.128–129, pp. 253–268, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.024>
- [45] F. Barlat, J.C. Brem, J.W. Yoon, K. Chung, R.E. Dick, D.J. Lege, F. Pourboghra, S.-H. Choi, E. Chu, 2003, Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part 1: theory, *Int. J. Plast.*, Vol.19, pp.1297–1319, [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(02\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00019-0)
- [46] M.R. Laydi, C. LExcellent, 2010, Yield criteria for shape memory materials: Convexity conditions and surface transport, *Math. Mech. Solids*, Vol.15, pp.165–208, <https://doi.org/10.1177/1081286508095324>
- [47] C. Bouvet, S. Calloch, C. LExcellent, 2002, Mechanical behavior of a Cu–Al–Be shape memory alloy under multiaxial proportional and non-proportional loadings, *J. Eng. Mater. Technol.*, Vol. 124, pp. 112–124. DOI:10.1115/1.1448324
- [48] L. Lazarescu, I. Nicodim, D.S. Comsa, D. Banabic, 2013, Determination of material parameters of sheet metals using the hydraulic bulge test, *Acta. Metallurgica Slovaca*, Vol19. 19, No.4, pp.4–12, DOI:10.12776/ams.v19i1.81
- [49] I. S. Sarraf, D. Green, 2018, Prediction of DP600 and Trip780 yield loci using Yoshida anisotropic yield function, *IDDRG 37th Annual Conf.*, Vol.418, 012089, DOI:10.1088/1757-899X/418/1/012089.
- [50] A. M. Habraken, J. Ma, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara, et.al, 2022, Analysis of ESAFORM2021 cup drawing benchmark of an Al alloy critical factors for accuracy and efficiency of FE simulations, *Int. J. Mater*

- Forming., Vol.15, No.5, pp.61-, DOI:10.1007/s12289-022-01672-w .
- [51] S. Nomura, T. Kuwabara, 2022, Material modeling of hot-rolled steel sheet considering differential hardening and hole expansion simulation, ISIJ Int, Vol.62, No.1 , pp.191-199, <https://doi.org/10.2355/isijinternational.ISIJINT-2021-365>.
- [52] P.Q.Tuan, Y.S.Kim, 2018, An alternative procedure to identify stress-strain relation for DP980 sheet over a large strain range, Proceedings of NUMISHEET 2018 Conference, Tokyo, Japan, 2018. DOI:10.1088/1742-6596/1063/1/012115
- [53] T.Hama, M. Kuroda, T. Kuwabara, S.Takahashi, A. Yamanaka, 2018, DP980 material characterization for benchmark 1 of Numisheet 2018. In Proceedings of the 11th International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Metal Forming Processes, Tokyo, Japan, 30 July–3 August