

https://doi.org/10.7236/JIIBC.2022.22.5.159
JIIBC 2022-5-23

작업자 배정 문제의 다항시간 알고리즘

Polynomial Time Algorithm for Worker Assignment Problem

이상운*

Sang-Un, Lee *

요약 선형배정문제 (LAP)와 선형병목배정문제 (LBAP)는 다항시간으로 최적 해를 구하는 알고리즘이 알려져 있지 않은 NP-난제로 분류되어 메타휴리스틱 방법이나 $O(m^4)$ 계산 복잡도의 선형계획법 (LP) 소프트웨어 패키지나 헝가리안 알고리즘 (HA)을 적용하고 있다. 본 논문은 LAP와 LBAP에 대해 $O(mn) = O(m^2), m = n$ 복잡도의 다항시간 알고리즘을 제안하였다. LAP에 대해서는 선택-삭제 방법을, LBAP에 대해서는 삭제-선택 방법을 단순히 적용하였다. 모든 데이터에 적합한 유일한 알고리즘이 존재하지 않는 실험 데이터에 제안된 알고리즘을 적용한 결과, 제안된 알고리즘은 모든 데이터에 대해 최적 해를 구할 수 있었다.

Abstract The linear assignment problem (LAP) and linear bottleneck assignment problem (LBAP) has been unknown the algorithm to solve the optimal solution within polynomial-time. These problems are classified by NP-hard. Therefore, we can be apply metaheuristic methods or linear programming (LP) software package or Hungarian algorithm (HA) with $O(m^4)$ computational complexity. This paper suggests polynomial time algorithm with $O(mn) = O(m^2), m = n$ time complexity to LAP and LBAP. The select-delete method is simply applied to LAP, and the delete-select method is used to LBAP. For the experimental data without the unique algorithm can be apply to whole data, the proposed algorithm can be obtain the optimal solutions for whole data.

Key Words : Linear assignment problem, Linear bottleneck assignment problem, Select, Delete, Serial, Parallel

1. 서 론

m 명의 작업자($W_i, i = 1, 2, \dots, m$)를 n 대의 기계($M_j, j = 1, 2, \dots, n$)에 배정하여 작업을 수행하는 경우, 주어진 함수는 생산성(또는 이득)인 경우 p_{ij} , 작업시간(또는 소요 비용)인 경우 c_{ij} 가 된다. p_{ij} 의 경우 최대치를 얻도록 작업자를 기계에 1:1로 배정하는 것이 목적이며, c_{ij} 의 경

우 반대로 최소값을 얻도록 배정해야 한다. 작업은 병렬(parallel)로 수행되어 n 개 제품을 별도로 생산하는 경우와 하나의 제품을 n 개 공정으로 직렬(serial)로 수행하는 경우로 구분된다. 병렬처리인 경우를 단순히 선형 배정 문제(linear assignment problem, LAP)라 하며, 직렬로 수행하는 경우를 선형 병목 배정 문제(linear bottleneck assignment problem, LBAP)라 한다.^[1,2]

*정회원, 강릉원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 : 2022년 2월 21일, 수정완료 : 2022년 9월 21일
게재확정일자 : 2022년 10월 7일

Received: 21 February, 2022 / Revised: 21 September, 2022 / Accepted: 7 October, 2022

*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr

Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University, Korea

LAP와 LBAP는 다항시간으로 최적 해를 얻는 알고리즘이 제안되지 않아 NP-난제(NP-hard)로 분류되어 있다.^[3]

LAP에 대해서는 유전자 알고리즘(genetic algorithm, GA)이나 담금질 기법(simulated annealing, SA) 등과 같은 메타휴리스틱 기법들이 제안되고 있으며^[4], 다항시간으로 최적 해를 얻기 위한 헝가리안 알고리즘(Hungarian algorithm, HA)^[5,6]이나 선형계획법(linear programming, LP)^[7], CPLEX^[8] 등을 적용하고 있다. 그러나 헝가리안 알고리즘과 선형계획법의 수행 복잡도는 $O(m^4)$ 로 알려져 있다.^[6,9]

LBAP에 대해서는 한계점 알고리즘(threshold algorithm, TA), 이중법(dual method, DM), 증대경로법(augmenting path method, APM) 등이 알려져 있다.^[2,10,11]

본 논문은 LAP와 LBAP에 대해 $O(mm) = O(m^2)$, ($m = n$)의 다항시간 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 LP 패키지를 활용하지 않고, 단지 Excel로 간단하게 최적 해를 결정할 수 있는 방법을 제안한다. 2장에서는 작업자 배정 문제의 개념과 연구 사례를 고찰해 본다. 3장에서는 단지 Excel을 활용하여 최적 해를 $O(m^2)$ 복잡도로 얻을 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘을 실제 데이터에 적용하여 알고리즘 적합성을 평가해 본다.

II. 작업자 배정 문제

본 장에서는 m 명의 작업자를 n 대의 기계에 배정하는 문제를 고찰한다. 한 작업장(workshop)에 n 대의 기계가 존재할 경우, 각 기계에 한 명씩의 작업자를 배정해야 기계들을 완전 가동할 수 있다. 각 작업자는 모든 기계들에 대한 생산성을 검증받았다. 표 1은 Guéret et al.^[7]과 Edvall^[8]에서 인용된 6명의 작업자가 6대의 기계에 대한 생산성 (시간당 제품 생산량)을 나타내고 있다. 이 문제에서 작업장의 최대 생산성을 얻기 위해 누구를 어느 기계로 배정할 것인가를 결정하는 것이다.

작업자 배정 문제에서, 기계를 병렬(parallel, P)로 작동하는 경우를 LAP, 순차적 직렬(serial, S)로 작동하는 경우를 LBAP라 한다. LAP는 각 기계에서 별도의 제품을 생산하는 경우로 n 개의 선택된 생산성들의 총합이 최대가 되어야 생산성을 최대로 얻을 수 있다.

표 1. P_1 데이터의 시간당 생산성

Table 1. Productivity in pieces per hour of P_1 data

| Productivity (per hour) | | Machines | | | | | |
|----------------------------|----|----------|----|----|----|----|----|
| | | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
| Workers | W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| | W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| | W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| | W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| | W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| | W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

LBAP는 n 대의 기계 각각이 하나의 공정을 수행하는 형태로 하나의 제품을 n 개 공정으로 생산하는 경우로 볼 수 있다. 이 경우, 제품의 생산성은 n 개의 선택된 생산성들 중에서 최소치가 병목(bottleneck)으로 단위 시간당 생산은 병목이 발생한 생산성 값(최소 생산성)으로 결정된다.

LAP는 주어진 함수가 생산성(또는 이득)일 경우 최대치를 얻는 것이 목적이며, 반대로 작업시간 또는 소요 비용인 경우 최소치를 얻는 것이 목적이다. 따라서 LAP의 생산성(또는 이득)의 최적 해는 식 (1)을, 작업시간(또는 비용)의 최적 해는 식 (2)로 얻을 수 있다. LBAP의 경우 병목을 찾는 문제로 생산성(또는 이득)의 최적 해는 식 (3)을, 작업시간(또는 비용)의 최적 해는 식 (4)로 얻을 수 있다.

[LAP]

- 생산성(또는 이득) : $z_{pp} = \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij}$ (1)

such that $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = 1, 2, \dots, m)$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

- 작업시간(또는 비용) : $z_{pc} = \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ (2)

such that $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = 1, 2, \dots, m)$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$$

[LBAP]

- 생산성(또는 이득) : $z_{sp} = \max \min p_{ij} x_{ij}$ (3)

such that $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i = 1, 2, \dots, m)$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, (j=1,2,\dots,n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$$

• 작업시간(또는 비용): $z_{sc} = \min \max c_{ij} x_{ij}$ (4)

such that $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (i=1,2,\dots,m)$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, (j=1,2,\dots,n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$$

표 1의 예제에 대해 LAP와 LBAP의 경우 생산성을 최대로 할 수 있도록 작업자들을 기계에 배정하여 보자. 이 문제에 대해 Guéret et al.^[7]은 선형계획법(LP)을, Edvall^[8]은 CPLEX 소프트웨어 프로그램 패키지를 적용하여 표 2의 결과를 얻었다.

표 2. P₁ 데이터에 대한 LP와 CPLEX의 최적 배정
 Table 2. Optimal assignment of LP and CPLEX for P₁ data

| LAP | | | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | 계 |
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 | 31 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 | 43 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 | 25 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 | 28 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 | 36 |
| $z_{pp} = 31 + 43 + 25 + 30 + 28 + 36 = 193$ | | | | | | | 193 |

| LBAP | | | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | 선택 |
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 | 30 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 | 34 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 | 26 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 | 28 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 | 27 |
| $z_{pp} = \min\{29, 30, 34, 26, 28, 27\} = 26$ | | | | | | | 26 |

3장에서는 LAP와 LBAP에 대해 $O(mn)$ 의 다항시간으로 최적 해를 결정하는 휴리스틱 알고리즘을 제안한다.

III. LAP와 LBAP의 다항시간 알고리즘

본 장에서는 생산성(또는 이득) 행렬을 대상으로 알고리즘을 설명한다. 만약, 주어진 함수가 작업시간(또는 비용) 행렬일 경우 제안된 알고리즘에서 $p_{ij} \leftarrow c_{ij}, \max \rightarrow \min, \min \rightarrow \max$ 로 치환하면 된다. LAP의 경우, 행과 열에서 최대 생산성인 셀 2개씩을 선택하고, 행과 열에서 1개 셀만 선택된 경우 해당 셀의 열이나 행의 다른 셀들을 삭제

한다. 만약, 행과 열에서 1개 셀만 선택된 것이 없을 경우 선택된 셀들 중 최소 생산성 셀을 삭제한다. 이 과정을 반복 수행하여 n 개 셀을 선택한다. 이를 선택-삭제 알고리즘(select- delete algorithm, SDA)이라 하자.

LBAP에 대해서는 행이나 열에서 1개 셀만 남은 때까지 최소 생산성 셀들을 삭제한다. 만약, 행이나 열에서 1개 셀만 남은 경우, 해당 셀의 열이나 행의 나머지 셀들을 삭제한다. 이 과정을 반복 수행하여 n 개 셀을 선택한다. 이를 삭제-선택 알고리즘(delete-select algorithm, DSA)라 하자. 제안된 SDA와 DSA는 그림 1과 같이 수행된다.

- 생산성 (이득) 행렬 $P: p_{ij}, (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$
- 작업시간 (비용) 행렬 $C: c_{ij}, (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$

$|p_i|$: 행의 선택 개수, $|p_j|$: 열의 선택 개수

[LAP] /* 수행 복잡도 : $O(mn) = O(m^2)$, if $m = n^*$

Step 1. 행열에서 최대 생산성 ($\max p_i$ 과 $\max p_j$) 2개씩 선택

Step 2. 셀 선택

```

until  $\forall ij, |p_i| = 1, |p_j| = 1$  do
    if  $\exists p_{ij}, (|p_i| = 1 \text{ or } |p_j| = 1)$  then
         $p_{ij}$  선택,  $p_{ij}$ 의 행열에 존재하는 나머지 셀들 모두 삭제
    else  $\min p_{ij} \in p_{ij} x_{ij}, (x_{ij} = 1)$  삭제
end
    
```

(a) SDA algorithm

[LBAP] /* 수행 복잡도 : $O(mn) = O(m^2)$, if $m = n^*$

Step 1. 셀 삭제와 선택

```

until  $\forall ij, |p_i| = 1, |p_j| = 1$  do
    if  $\forall p_{ij}, (|p_i| \geq 2 \text{ or } |p_j| \geq 2)$  then
         $\min p_{ij} \in p_{ij} x_{ij}, (x_{ij} = 1)$  삭제
    else if  $\exists p_{ij}, (|p_i| = 1 \text{ or } |p_j| = 1)$  then
         $p_{ij}$  선택,  $p_{ij}$ 의 행열에 존재하는 나머지 셀들 모두 삭제
    end
end
    
```

(b) DSA algorithm

그림 1. LAP와 LBAP 최적화 알고리즘
 Fig. 1. Optimization algorithm for LAP and LBAP

제안된 알고리즘은 입력 변수 $m \times n$ 에 대해 $O(mn) = O(m^2), (m = n)$ 의 수행 복잡도로 최적화를 시킬 수 있으며, 단순히 Excel로 쉽게 적용할 수 있어 실무에 즉시 활용 가능한 장점을 갖고 있다.

표 1의 데이터에 대해 SDA를 수행한 과정은 표 3에, DSA를 수행한 과정은 표 4에 제시하였다.

표 1의 데이터에 적용된 알고리즘들의 성능을 비교한 결과는 표 5에 제시하였다. SDA와 DSA는 LP에 비해 수행 복잡도를 $O(m^4)$ 에서 $O(m^2)$ 로 감소시켰음에도 불구하고, 동일한 해를 얻었음을 알 수 있다.

IV. 실험 및 결과 분석

본 장에서는 표 6의 실험 데이터에 대해 DSA로 LBAP 최적 해를 얻을 수 있는지 검증해 본다.

표 3. P_1 데이터의 LAP에 대한 SDA의 최적 배정
Table 3. Optimal assignment of SDA for LAP of P_1 data

| 행, 열에서 최대값 2개씩 선택 | | | | | | | |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | Max |
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 | 40 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 | 43 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 | 34 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 | 37 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 | 38 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 | 45 |
| Max | 28 | 36 | 34 | 27 | 45 | 33 | 45 |

최소 생산성 (W4,M1)=23 삭제 → $|J_1| = 1, (W5,M1)=28$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

(W5,M1)=28 선택, W5행,M1열 삭제 → $|J_2| = 1, (W6,M2)=36$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

(W6,M2)=36 선택, W6행,M2열 삭제 → $|J_3| = 1, (W3,M4)=25$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

(W3,M4)=25 선택, W3행,M4열 삭제 → $|J_4| = 1, (W4,M6)=30$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

(W4,M6)=30 선택, W4행,M6열 삭제 → $|J_5| = 1, (W1,M3)=31$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

(W1,M3)=31 선택, W1행,M3열 삭제 → $|J_6| = 1, (W2,M5)=43$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 | 선택 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 | 31 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 | 43 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 | 25 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 | 28 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 | 36 |
| 생산성 | | | | | | | 193 |

$z = 31 + 43 + 25 + 30 + 28 + 36 = 193$

표 4. P_1 데이터의 LBAP에 대한 DSA의 최적 배정
Table 4. Optimal assignment of DSA for LBAP of P_1 data

13,15,17,18,19,20,22,23 삭제 → $|J_1| = 1, (W5,M1)=28$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|----|----|----|----|----|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

W5행 삭제 → 24,24,25,25,25 삭제 → $|J_2| = 1, (W6,M4)=27$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

W6행 삭제 → $|J_3| = 1, (W4,M2)=26$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|----|-----------|----|----|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

27,30 삭제 → $|J_4| = 1, (W1,M3)=31$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|----|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

W1행 삭제 → $|J_5| = 1, (W3,M6)=33$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

W3행 삭제 → $|J_6| = 1, (W2,M5)=43$ 존재

| Productivity | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 | M6 |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| W1 | 13 | 24 | 31 | 19 | 40 | 29 |
| W2 | 18 | 25 | 30 | 15 | 43 | 22 |
| W3 | 20 | 20 | 27 | 25 | 34 | 33 |
| W4 | 23 | 26 | 28 | 18 | 37 | 30 |
| W5 | 28 | 33 | 34 | 17 | 38 | 20 |
| W6 | 19 | 36 | 25 | 27 | 45 | 24 |

$z = \min\{31, 43, 33, 26, 28, 27\} = 26$

표 5. P_1 데이터에 대한 알고리즘 성능 비교
Table 5. Compare with algorithm performance for P_1 data

| 알고리즘 | 수행 복잡도 | LAP | LBAP |
|-----------|----------|------------|-----------|
| 휴리스틱 [7] | - | 193 | - |
| LP [7] | $O(m^4)$ | 175 | 26 |
| CPLEX [8] | - | 193 | 26 |
| SDA | $O(m^2)$ | 193 | - |
| DSA | | - | 26 |

표 6. 실험 데이터
 Table 6. Experimental data

(a) P_2 data

| Cost | M1 | M2 | M3 |
|------|----|----|----|
| W1 | 4 | 3 | 7 |
| W2 | 1 | 6 | 6 |
| W3 | 0 | 2 | 5 |

$z_{sc} = \max\{3, 1, 5\} = 5$

(b) P_3 data

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 |
|------|----|----|----|----|
| W1 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| W2 | 2 | 7 | 5 | 8 |
| W3 | 0 | 9 | 8 | 4 |
| W4 | 2 | 5 | 6 | 3 |

$z_{sc} = \max\{2, 5, 0, 3\} = 5$

(c) P_4 data

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------|----|----|----|----|----|
| W1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| W2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 8 |
| W3 | 7 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| W4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| W5 | 6 | 3 | 8 | 7 | 9 |

$z_{sc} = \max\{5, 2, 3, 2, 6\} = 6$

(d) P_5 data

| Benefit | Set 1 | | | Set 2 | | | Set 3 | | |
|---------|-------|----|----|-------|----|----|-------|----|----|
| | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 |
| M1 | 10 | 6 | 7 | 8 | 6 | 3 | 5 | 6 | 3 |
| M2 | 9 | 8 | 9 | 4 | 7 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| M3 | 8 | 8 | 3 | 5 | 8 | 3 | 6 | 3 | 5 |

$\mathcal{M}_1 = \{W1, W4, W8\} = 10 + 8 + 6 = 24$
 $\mathcal{M}_2 = \{W3, W6, W7\} = 9 + 6 + 6 = 21$
 $\mathcal{M}_3 = \{W2, W5, W9\} = 8 + 8 + 5 = 21$
 $z_{sp} = \min\{24, 21, 21\} = 21$

표 6의 실험 데이터들에 제안된 DSA로 LBAP의 최적 해를 구한 결과는 표 7에 제시되어 있다.

표 7. 실험 데이터에 대한 DSA 결과
 Table 7. Result of DSA for experimental data

(a) P_2 data

7,6,6 삭제 $\rightarrow |W_2|=1, |M_3|=1 : (W2,M1)=1, (W3,M3)=5$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 |
|------|----|----|----|
| W1 | 4 | 3 | 7 |
| W2 | 1 | 6 | 6 |
| W3 | 0 | 2 | 5 |

M1 열, W3 행 삭제 $\rightarrow (W1,M2)=3$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 |
|------|----|----|----|
| W1 | 4 | 3 | 7 |
| W2 | 1 | 6 | 6 |
| W3 | 0 | 2 | 5 |

$z_{sc} = \max\{3, 1, 5\} = 5$

(b) P_3 data

9,8,8,7,6,5,5 삭제 $\rightarrow |M_2|=1, (W1,M2)=2$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 |
|------|----|----|----|----|
| W1 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| W2 | 2 | 7 | 5 | 8 |
| W3 | 0 | 9 | 8 | 4 |
| W4 | 2 | 5 | 6 | 3 |

W1 행 삭제 $\rightarrow |M_3|=1, (W2,M3)=5$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 |
|------|----|----|----|----|
| W1 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| W2 | 2 | 7 | 5 | 8 |
| W3 | 0 | 9 | 8 | 4 |
| W4 | 2 | 5 | 6 | 3 |

W2 행 삭제 $\rightarrow (W3,M4)=4$ 삭제 $\rightarrow |W_3|=1, |M_4|=1 : (W3,M1)=0, (W4,M4)=3$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 |
|------|----|----|----|----|
| W1 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| W2 | 2 | 7 | 5 | 8 |
| W3 | 0 | 9 | 8 | 4 |
| W4 | 2 | 5 | 6 | 3 |

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 |
|------|----|----|----|----|
| W1 | 8 | 2 | 3 | 3 |
| W2 | 2 | 7 | 5 | 8 |
| W3 | 0 | 9 | 8 | 4 |
| W4 | 2 | 5 | 6 | 3 |

$z_{sc} = \max\{2, 5, 0, 3\} = 5$

(c) P_4 data

14,11,10,9,9,9,8,8,8,7,7,7 삭제 $\rightarrow |W_3|=1, |M_5|=1 : (W3,M2)=3, (W4,M5)=2$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------|----|----|----|----|----|
| W1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| W2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 8 |
| W3 | 7 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| W4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| W5 | 6 | 3 | 8 | 7 | 9 |

M2 열, W4 행 삭제 $\rightarrow |W_3|=1, |M_4|=1 : (W5,M1)=6, (W2,M4)=2$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------|----|----|----|----|----|
| W1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| W2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 8 |
| W3 | 7 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| W4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| W5 | 6 | 3 | 8 | 7 | 9 |

M1 열, W2 행 삭제 $\rightarrow |M_3|=1 : (W1,M3)=5$ 존재

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------|----|----|----|----|----|
| W1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| W2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 8 |
| W3 | 7 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| W4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| W5 | 6 | 3 | 8 | 7 | 9 |

| Cost | M1 | M2 | M3 | M4 | M5 |
|------|----|----|----|----|----|
| W1 | 3 | 6 | 5 | 9 | 8 |
| W2 | 6 | 7 | 4 | 2 | 8 |
| W3 | 7 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| W4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 2 |
| W5 | 6 | 3 | 8 | 7 | 9 |

$z_{sc} = \max\{5, 2, 3, 2, 6\} = 6$

(d) P_5 data

3,6,7 삭제 $\rightarrow |W_3|=1$, 3,3 삭제 $\rightarrow |W_6|=1$, 3,3,3 삭제 $\rightarrow |W_9|=1$

| Benefit | Set 1 | | | Set 2 | | | Set 3 | | |
|---------|-------|----|----|-------|----|----|-------|----|----|
| | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 |
| M1 | 10 | 6 | 7 | 8 | 6 | 3 | 5 | 6 | 3 |
| M2 | 9 | 8 | 9 | 4 | 7 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| M3 | 8 | 8 | 3 | 5 | 8 | 3 | 6 | 3 | 5 |

M2 행 삭제 $\rightarrow |W_2|=1$, 5 삭제 $\rightarrow |W_5|=1$, 4 삭제 $\rightarrow |W_6|=1$, $|M_1|=1$

| Benefit | Set 1 | | | Set 2 | | | Set 3 | | |
|---------|-------|----|----|-------|----|----|-------|----|----|
| | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 |
| M1 | 10 | 6 | 7 | 8 | 6 | 3 | 5 | 6 | 3 |
| M2 | 9 | 8 | 9 | 4 | 7 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| M3 | 8 | 8 | 3 | 5 | 8 | 3 | 6 | 3 | 5 |

| Benefit | Set 1 | | | Set 2 | | | Set 3 | | |
|---------|-------|----|----|-------|----|----|-------|----|----|
| | W1 | W2 | W3 | W4 | W5 | W6 | W7 | W8 | W9 |
| M1 | 10 | 6 | 7 | 8 | 6 | 3 | 5 | 6 | 3 |
| M2 | 9 | 8 | 9 | 4 | 7 | 6 | 6 | 3 | 4 |
| M3 | 8 | 8 | 3 | 5 | 8 | 3 | 6 | 3 | 5 |

$\mathcal{M}_1 = \{W1, W4, W8\} = 10 + 8 + 6 = 24$
 $\mathcal{M}_2 = \{W3, W6, W7\} = 9 + 6 + 6 = 21$
 $\mathcal{M}_3 = \{W2, W5, W9\} = 8 + 8 + 5 = 21$
 $z_{sp} = \min\{24, 21, 21\} = 21$

P_2, P_3 데이터는 Burkard et al.^[2]에서, P_4 데이터는 Garfinkel^[10]에서, P_5 데이터는 Zhu et al.^[11]에서 인용되었다. 여기서는 알려진 최적해도 함께 표기하였다. P_5 데이터는 3명이 한 팀을 이루어 9명이 3개 팀으로 3대의 기계에서 작업하는 경우이다.

표 6의 실험 데이터들에 대해 해를 비교한 결과는 표 8에 제시하였다. 제안된 DSA는 4개 데이터 모두에서 알려진 최적 해를 구하였음을 알 수 있다.

표 8. 실험 데이터에 대한 해 비교
Table 8. Compare with solution for experimental data

| 문제 | 목적함수 | 알려진 최적 해 | DSA의 해 |
|-------|----------|----------|--------|
| P_2 | z_{sc} | 5 | 5 |
| P_3 | z_{sc} | 5 | 5 |
| P_4 | z_{sc} | 6 | 6 |
| P_5 | z_{sp} | 21 | 21 |

V. 결 론

LAP와 LBAP는 다항시간으로 해를 구하는 알고리즘이 알려져 있지 않아 NP-난제로 분류되어 있다. 이러한 난제에 대해 본 논문은 LAP와 LBAP에 대해 $O(mn)$ 의 다항시간으로 해를 구할 수 있는 휴리스틱 알고리즘을 제안하였다. LAP에 대해서는 단순히 선택-삭제 방법을, LBAP에 대해서는 삭제-선택 방법을 적용하였다.

실험 결과 $O(m^4)$ 복잡도의 선형계획법 뿐 아니라 메타휴리스틱 방법으로도 모든 데이터에 대해 해를 구하지 못한 반면에, 제안된 알고리즘은 $O(mn)$ 의 다항시간으로 간단히 해를 구할 수 있음을 보였다.

제안된 알고리즘은 Excel을 활용하여 LAP에 대해서는 선택-삭제를, LBAP에 대해서는 삭제-선택 방법을 적용하였다.

결론적으로, LAP와 LBAP의 해를 구하는 실제 문제에 직면한 경우 제안된 알고리즘을 적용하면 간단하고 쉽게 해를 구할 수 있는 관계로 실질적인 큰 도움을 줄 수 있을 것이다.

References

[1] B. Rainer, M. Dell'Amico, and S. Martello, "Assignment Problems," SIAM, 2012, <https://doi.org/10.1137/1.9781611972238>

[2] R. Burkard, M. Dell'Amico, and S. Martello, "Assignment Problems, Chapter 6.2: Linear Bottleneck Assignment Problem," SIAM, pp. 172-191, 2009.

[3] D. S. Du and P. M. Pardalos, "Handbook of Combinatorial Optimization: Supplement A. Linear Assignment Problems and Extensions," pp. 75-150, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[4] A. Sahu and R. Tapadar, "Solving the Assignment Problem using Genetic Algorithm and Simulated Annealing," IAENG International Journal of Applied Mathematics, Vol. 36, No. 1, pp. Feb. 2007.

[5] Y. Cao, "Hungarian Algorithm for Linear Assignment Problems," <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/20652-hungarian-algorithm-for-linear-assignment-problems>, Jul. 2008.

[6] X-RAY, "Assignment Problem and Hungarian Algorithm," <http://community.topcoder.com/tc?module=Static&d1=tutorials&d2=hungarianAlgorithm>, 2014.

[7] C. Guéret, X. Prins, and M. Sevaux, "Applications of Optimization with Xpress-MP: 14.1 Assigning Personnel to Machines," Dash Optimization Ltd., pp. 210-212, Feb. 2005.

[8] M. Edvall, "Assigning Personnel to Machines," Tomlab Optimization Inc, http://tomsym.com/examples/tomsym_assignpersonnel.html, Apr. 2009.

[9] N. Karmarkar, "New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming," COMBINATORICA, Vol. 4, No. 4, pp. 373-395, Dec. 1984, <https://doi.org/10.1007/BF02579150>

[10] R. S. Garfinkel, "Technical Note-An Improved Algorithm for the Bottleneck Assignment Problem," Operations Research, Vol. 19, No. 7, pp. 1747-1751, Dec. 1971, <https://doi.org/10.1287/opre.19.7.1747>

[11] X. X. Zhu, R. J. Wang, and G. P. Du, "General Bottleneck Assignment Problem and Its Algorithm," Proceedings of the Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Honk Kong, pp. 19-22, Aug. 2007, <https://doi.org/10.1109/ICMLC.2007.4370581>

저 자 소 개

이 상 운(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수

- 2007.3 ~ 2015.3 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
- 2015.4 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 인공지능과 빅데이터분석, 최적화 알고리즘
- e-mail : sulee@gwnu.ac.kr