

가우스-헬머트 모델 전최소제곱: 평면방정식과 측지좌표계 변환 TLS (Total Least-Squares) within Gauss-Helmert Model: 3D Planar Fitting and Helmert Transformation of Geodetic Reference Frames

배태석¹⁾ · 홍창기²⁾ · 임수현³⁾

Bae, Tae-Suk · Hong, Chang-Ki · Lim, Soo-Hyeon

Abstract

The conventional LESS (LEAST-Squares Solution) is calculated under the assumption that there is no errors in independent variables. However, the coordinates of a point, either from traditional ground surveying such as slant distances, horizontal and/or vertical angles, or GNSS (Global Navigation Satellite System) positioning, cannot be determined independently (and the components are correlated each other). Therefore, the TLS (Total Least Squares) adjustment should be applied for all applications related to the coordinates. Many approaches were suggested in order to solve this problem, resulting in equivalent solutions except some restrictions. In this study, we calculated the normal vector of the 3D plane determined by the trace of the VLBI targets based on TLS within GHM (Gauss-Helmert Model). Another numerical test was conducted for the estimation of the Helmert transformation parameters. Since the errors in the horizontal components are very small compared to the radius of the circle, the final estimates are almost identical. However, the estimated variance components are significantly reduced as well as show a different characteristic depending on the target location. The Helmert transformation parameters are estimated more precisely compared to the conventional LESS case. Furthermore, the residuals can be predicted on both reference frames with much smaller magnitude (in absolute sense).

Keywords : GNSS (Global Navigation Satellite System), VLBI (Very Long Baseline Interferometry), IVP (InVariant Point), TLS (Total Least-Squares), GHM (Gauss-Helmert Model)

초 록

일반적인 조정계산에서는 독립변수의 오차는 없다고 가정하고 종속변수의 오차만을 고려하는 최소제곱해를 구한다. 그러나 지상측량에 의해 결정된 3차원 공간좌표나 GNSS (Global Navigation Satellite System) 기반 추정좌표는 성분별로 독립적으로 결정되지 않으므로 모든 성분에 오차가 있을 뿐만 아니라 공분산도 존재한다. 따라서 좌표쌍을 이용한 평면 추정이나 좌표계 변환에서는 모든 성분의 오차를 고려하는 전최소제곱을 적용해야 한다. 이를 위한 다양한 모델이 존재하며, 특별한 제약조건을 제외하면 동등한 해를 제공한다. 본 연구에서는 가우스-헬머트 모델(GHM: Gauss-Helmert Model) 기반 전최소제곱으로 VLBI 타겟이 형성하는 자취를 이용하여 평면의 법선벡터를 추정했으며, 지역좌표계를 세계측지계로 변환하는 계수 결정에도 적용했다. 평면방정식의 경우 기존 최소제곱 방법과 비교해서 법선벡터는 동일하지만 분산요소의 안정성과 타겟 위치에 따른 분산요소 특성을 명확히 확인할 수 있었다. 좌표계 변환계수는 가우스-헬머트 모델을 적용하면 변환 전후 두 좌표계에서 모두 잔차를 계산할 수 있으며, 기존 방식보다 잔차가 더 작아진다.

핵심어 : GNSS (Global Navigation Satellite System), VLBI (Very Long Baseline Interferometry), IVP (InVariant Point), 전최소제곱(TLS: Total Least-Squares), 가우스-헬머트 모델(GHM: Gauss-Helmert Model)

Received 2022. 08. 01, Revised 2022. 08. 12, Accepted 2022. 08. 15

1) Member, Professor, Dept. Geoinformation Engineering, Sejong University (E-mail: baezae@sejong.ac.kr)

2) Corresponding Author, Member, Professor, Dept. Geoinformatics Engineering, Kyungil University (E-mail: ckhong@kiu.ac.kr)

3) Member, Ph.D. student, Geoinformation Engineering, Sejong University (E-mail: Isooh0612@gmail.com)

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서론

최소제곱 원리는 18세기 이후 측지학 문제뿐만 아니라 다양한 분야에 유용하게 활용되고 있다(Snow, 2012). 일반적인 최소제곱 조정계산은 관측값에 일정량의 오차(관측값 사이의 공분산 포함)가 있다고 가정하고 이를 여인자행렬(cofactor matrix)에 반영한다. 다시 말해서, 독립변수에 포함된 오차는 무시하고 종속변수 오차만을 고려하여 오차제곱합 또는 가중값을 고려한 오차제곱합을 최소로 하는 미지수를 추정한다. 따라서 어떤 변수를 독립변수로 선택하는가에 따라 결과가 달라질 수 있다. 그러나 평면 또는 3차원 공간에서의 좌표값에 기반한 응용업무에서는 독립변수와 종속변수 모두 좌표값의 한 성분이고, 이 좌표는 일반적으로 지상측량 등의 방법으로 동시에 추정된다. 따라서 모든 좌표에 오차가 포함되어 있을 뿐 아니라, 좌표성분 간 공분산 역시 존재하므로 이를 고려하지 않으면 정확한 미지수 추정에 영향을 미칠 수밖에 없다.

전최소제곱(TLS: Total Least-Squares)은 GLS (General Least-Squares) 방법이라고도 불리며(Ghilani and Wolf, 2006), 직교회귀(orthogonal regression)라는 용어로 설명하기도 한다. 이 조정계산은 종속변수뿐만 아니라 독립변수에 포함된 오차를 고려하므로 일반적으로 좌표값에 기반한 조정계산에 적합하다. 가장 단순한 형태의 독립동일분포(iid: independent and identically distributed)를 따르는 2차원 직선점합 문제에서 TLS는 모든 관측값을 x 또는 y 축이 아닌 접합하는 직선에 수직이 되도록 투영한다. 그러나 가중값 행렬을 포함하면 문제가 더 복잡해지고 표준편차의 비율에 따라 사영 방향이 결정된다(Schaffrin and Wieser, 2008; Snow, 2012).

본 연구는 VLBI (Very Long Baseline Interferometry) 안테나의 참조점(IVP: InVariant Point)을 추정하기 위한 연구의 일부분으로서 안테나에 부착된 타겟의 3차원 좌표를 이용하여 안테나 수평회전 평면을 결정하고 이를 바탕으로 안테나 수직축을 결정한다. 또한, 경사거리와 수평/수직각 등 지상측량에 기반한 지역좌표계에서 결정된 안테나 참조점은 GNSS (Global Navigation Satellite System) 기반 세계측지계(ITRF: International Terrestrial Reference Frame)로 변환해야 하며 (ITRF, 2020), 이를 위해 일반적으로 헬머트변환(Helmert transformation)을 이용한다. 헬머트변환 역시 변환 전후 두 좌표계에서의 좌표값에 기반하여 변환계수를 추정하는 과정이고, 이 좌표값 역시 오차(분산-공분산)를 가진다. 따라서 두 사례 모두 독립변수와 종속변수에 오차(좌표쌍)에 연관된 오

차를 가지므로 TLS를 적용하는 것이 바람직하다. 본 연구에서는 가우스-헬머트모델(GHM: Gauss-Helmert Model) 기반의 TLS를 이용한 매개변수 추정을 다룬다.

2. 전최소제곱(TLS)

앞서 설명한대로 TLS는 종속변수와 독립변수에 포함된 오차를 모두 포함하여 전체 오차벡터를 최소화하는 것이다. TLS는 여러 다양한 모델을 통해서 구현할 수 있다. Snow (2012)에 따르면 TLS는 1) 가우스-마코프 모델(GMM: Gauss-Markov Model)에 무관심(nuisance) 매개변수를 추가하는 방법, 2) 가우스-헬머트 모델을 이용하여 최소제곱해를 구하는 방법, 3) EIV (error-in-variables) 모델을 이용하는 방법으로 구현할 수 있다. 세 가지 방법 모두 동등한 최소제곱 추정값과 잔차를 제시하지만, GMM 기반 접근방법의 경우 데이터 포인트가 많으면 미지수 벡터가 커지므로 계산 과정에 많은 시간이 소요된다. EIV 모델 기반 TLS는 모든 관측오차를 최소화하여 GHM, GMM과 동일한 추정값과 잔차를 계산하며, 가중값 행렬에 대한 제약조건(비특이행렬 또는 계수조건 등) 없이 더 일반적인 가중값 행렬을 사용할 수 있다. GMM은 관측방정식 형태로 최소제곱해 계산에 일반적으로 활용하고 있으므로 본 논문에서는 GHM과 EIV 모델에 대해서 설명한다.

2.1 EIV 모델

EIV 모델에 기반한 TLS 조정계산 방법에 대한 연구는 2000년대 중반 이후 여러 연구자에 의해 수행되고 있으며, 사전정보(prior information)를 모델에 도입하여 EIV-REM (Random Effect Model)으로 발전하였다(Schaffrin and Wieser, 2008; Snow, 2012; Neitzel and Schaffrin, 2016). EIV 모델 기반 TLS는 가중값의 유형에 따라 다양한 연구가 진행되었고, 최근에는 singular cofactor 행렬을 포함한 다양한 모델이 측지 문제에 적용되고 있다.

$n \times 1$ 관측값 벡터 y 와 $n \times m$ 데이터 행렬 A 에서 오차(y 와 A 공분산 포함)가 서로 상관성이 있다고 할 때, EIV 모델은 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$y = (A - E_X) \beta_u + e_y$$

$$\begin{bmatrix} e_y \\ e_X \end{bmatrix}_{(m+1) \times 1} := \begin{bmatrix} e_y \\ \text{vec } E_X \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_y & Q_{yX} \\ Q_{Xy} & Q_X \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \right) \quad (1)$$

where the cofactor matrix Q is symmetric, and the

remaining, unexplained symbols are commonly used in general Gauss-Markov Model (Bae, 2022). 편의상 여인자 행렬이 비특이행렬(non-singular matrix)이라고 하면 가중값 행렬($P := Q^{-1}$)은 유일하게 결정된다. 가중값 행렬은 통상 역행렬이 존재한다고 가정하지만, Snow (2012)는 이 모델이 특이행렬(singular matrix)에도 적용할 수 있음을 보였다. 또한 데이터 행렬 A 에 포함된 관측값 역시 확률오차를 내포하고 있고, 편의상 선형화되었다고 가정한다. 공분산을 가지는 EIV 모델에서 가중값을 고려한 전최소제곱해는 반복계산을 통해 계산할 수 있다.

2.2 가우스-헬머트 모델(GHM)

EIV 모델에서 새로운 기호를 도입하여 정리하면 가우스-헬머트 모델로 나타낼 수 있다(Schaffrin, 2007; Schaffrin and Snow, 2010; Snow, 2012). 위에서 설명한 EIV 모델에서 아래 기호를 정의하면

$$\begin{aligned} Y &:= \text{vec}[y, X] \\ e &:= \text{vec}[e_y, E_X] \\ \Xi &:= \beta_\mu \end{aligned} \quad (2)$$

EIV 모델을 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} b(Y - e, \Xi) &:= \begin{bmatrix} I_k & -(\Xi \otimes I_k)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - e_y \\ \text{vec}(X - E_X) \end{bmatrix} = 0 \\ e &\sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

where the symbol \otimes represents Kronecker-Zehfuss product, which is defined by $G \otimes H := [g_{ij} H]_{p \times q \times r \times s}$ for $G = [g_{ij}]_{p \times q}$ and $H = [h_{ij}]_{r \times s}$. The operator “vec” converts a matrix into a vector by stacking columnwise. Lastly, the functional relation $b := \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^{m+r}$ is a multivariate nonlinear function that relates $(m+n)$ unknowns to $(m+r)$ equations. 따라서 Eq. (3)은 비선형 가우스-헬머트 모델을 나타내므로 EIV 모델은 비선형 GHM으로 분류할 수 있다. 관측대상의 $n \times 1$ 참값 벡터 $\mu := Y - e = E\{Y\}$ 와 $b(\mu, \Xi) = 0$ 조건을 이용해서 최소제곱해를 정의할 수 있다.

$$e^T P e = (Y - e)^T P (Y - e) = \min. \quad (4)$$

비선형 GHM의 경우 반복 선형화와 일반적인 최소제곱해 계산 방식으로 최종 추정값, 잔차, 분산요소 등을 구할 수 있다.

3. GHM 기반 전최소제곱 적용

3.1 3D 평면 적합

VLBI 타겟은 양각 90° (천정각 0°)에서 수평방향(방위각) 회전을 수행하면 이상적인 상황에서는 수평면에 평행한 동일 평면에서 원을 이룬다. 이 3차원 공간에서의 평면은

$$z = ax + by + c \quad (5)$$

로 표현할 수 있고, 이 때 $(-a, -b, 1)$ 은 평면의 법선벡터(normal vector)를 나타낸다. 이상적인 상황에서 이 벡터는 지역평면에서 수직방향 $(0, 0, 1)$ 을 나타내야 하며, 따라서 이 두 벡터의 사잇각은 안테나의 수평방향 평면이 기울어진 정도를 나타낸다고 판단할 수 있다.

일반적인 최소제곱해는 3차원 좌표 중 x, y 성분오차는 무시하고 z 성분 좌표오차만을 고려하여 법선벡터를 추정한다.

$$\begin{aligned} [z_i] &= [x_i \quad y_i \quad 1] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + e_{z_i} \\ e &:= [e_{z_i}] \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

그러나 3차원 공간에서의 타겟은 VLBI 안테나 주위에 설치한 다섯 개의 필라에 토탈스테이션을 설치하고, 경사거리와 수평/수직각 뿐만 아니라, 수준측량 등 지상관측을 통해 좌표를 결정한다. 세종우주측지관측센터의 지역좌표계와 세계측지계를 연결하기 위한 GNSS 캠페인도 위성기준점(SEJN)과 필라에 설치한 GNSS 수신기를 이용해서 진행했다. 지역좌표계 결정을 위해서는 좌표계 왜곡을 최소화하기 위해 기준이 되는 필라 좌표의 보정량이 가장 작아지도록 PMINOLESS (Partial Minimum Norm LESS)를 적용한다. 따라서 모든 성분에 대한 분산과 공분산이 존재하므로 이를 고려하면 가우스-헬머트 모델로 표현할 수 있다.

i 번째 변수쌍 $(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}, \mu_{z_i})$ 와 비확률 미지수인 법선벡터 (a, b, c) 를 연계하는 함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h_i(a, b, c, \mu_{x_i}, \mu_{y_i}, \mu_{z_i}) = \mu_{z_i} - a\mu_{x_i} - b\mu_{y_i} - c = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad (7)$$

여기서 미지 참값 변수 $(\mu_{x_i}, \mu_{y_i}, \mu_{z_i})$ 와 관측값 (x, y, z) 의 관계는 아래와 같다(Bae, 2022).

$$\begin{aligned} x_i &= \mu_{x_i} + e_{x_i}, & E\{e_{x_i}\} &= 0 \\ y_i &= \mu_{y_i} + e_{y_i}, & E\{e_{y_i}\} &= 0 \\ z_i &= \mu_{z_i} + e_{z_i}, & E\{e_{z_i}\} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$e := \begin{bmatrix} \vdots \\ e_{x_i} \\ e_{y_i} \\ e_{z_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (9)$$

따라서 Eq. (7)을 전미분(total derivative) 형태로 표현하면,

$$h_i^0 + d\mu_{z_i} - a^0 d\mu_{x_i} - b^0 d\mu_{y_i} - \mu_{x_i}^0 da - \mu_{y_i}^0 db - dc = 0 \quad (10)$$

where the superscript $(^0)$ represents the initial approximation of the unknowns and the true values. 미소 보정량 $d\mu_{x_i}$ 는 아래와 같이 쓸 수 있고($d\mu_{y_i}, d\mu_{z_i}$ 역시 동일한 방식으로 표현 가능),

$$d\mu_{x_i} = \mu_{x_i} - \mu_{x_i}^0 = (x_i - \mu_{x_i}^0) - e_{x_i} \quad (11)$$

이를 정리하면 Eq. (12)와 같이 표현할 수 있다.

$$\underbrace{[h_i^0 + z_i - \mu_{z_i}^0]}_{w_i} = \underbrace{[\mu_{x_i}^0 \quad \mu_{y_i}^0 \quad 1]}_{A_i} \underbrace{\begin{bmatrix} da \\ db \\ dc \end{bmatrix}}_{\xi} + \underbrace{[-a^0 \quad -b^0 \quad 1]}_{B_i} \underbrace{\begin{bmatrix} e_{x_i} \\ e_{y_i} \\ e_{z_i} \end{bmatrix}}_{e_i} \quad (12)$$

따라서 최종적인 가우스-헤르미트 모델은 아래와 같이 쓸 수 있고,

$$w = A \xi + B e, \quad e \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (13)$$

미지수 벡터와 잔차 최소제곱해, 추정 미지수와 분산요소는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= [A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} A]^{-1} A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} w \\ \tilde{e} &= P^{-1} B^T (BP^{-1}B^T)^{-1} (w - A\hat{\xi}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}\{\hat{\xi}\} &= \hat{\sigma}_0^2 [A^T (BP^{-1}B^T)^{-1} A]^{-1} \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{(B\tilde{e})^T (BP^{-1}B^T)^{-1} (B\tilde{e})}{r} = \frac{\tilde{e}^T P \tilde{e}}{r} \\ r &:= \text{rk} B - \text{rk} A \end{aligned} \quad (15)$$

앞서 설명한대로, VLBI 안테나를 양각 90°에 고정하고 수평회전을 실시하면 안테나에 부착된 타겟은 이론상 수평면에서 원을 이룬다. 미지수 추정에 사용한 좌표값과 분산-공분산 행렬은 앞서 설명한 PMINOLESS 결과를 적용했다. Table 1은 각 타겟이 형성하는 평면을 추정한 결과이며, (v_1, v_2, v_3) 은 평면의 직교벡터(normal vector)를 나타낸다. $\|\hat{\xi}\|$ 은 초기값에 대한 파라미터 보정량에 대한 벡터 norm, $\hat{\sigma}_0^2$ 은 분산요소 추정값, n 은 각 타겟에서 평면벡터 추정에 관여한 관측값 개수, θ 는 평면 직교벡터를 (이상적인) 수직벡터와 비교한 이격도를 가리킨다.

평면방정식 모델은 선형방정식이므로 별도의 반복계산은 필요없다. 분산요소는 타겟 번호에 따라 대략적인 크기가 다르게 나타나는데, No. 1-7까지는 수평/수직회전이 동시에 가능한 안테나 뒷면에 부착된 반면, 타겟 No. 8-11은 수평회전만 가능한 하부 받침대에 부착되어 있다(Fig. 1 참고). 결과적



Fig. 1. Location of targets on VLBI antenna (NGII, 2019)

Table 1. The normal vector of each plane comprised of VLBI targets (TLS within GHM)

Target No.	v_1	v_2	v_3	$ \hat{\xi} $	$\hat{\sigma}_0^2$	n	$\theta ["]$
01	-0.000407	0.000726	1.000000	0.001865	0.134513	23	171.644065
02	-0.000294	0.000894	1.000000	0.009907	0.376771	22	194.052169
03	-0.000394	0.000689	1.000000	0.001439	0.133438	23	163.618174
04	-0.000349	0.000780	1.000000	0.005220	0.130186	26	176.182405
05	-0.000344	0.000892	1.000000	0.007750	0.250967	24	197.315187
06	-0.000535	0.000827	1.000000	0.001182	0.117846	24	203.095118
07	-0.000489	0.000851	1.000000	0.001843	0.168305	19	202.478511
08	-0.000162	0.000268	1.000000	0.000591	0.046386	9	64.503857
09	-0.000087	0.000269	1.000000	0.003126	0.026754	8	58.313248
10	-0.000112	0.000248	1.000000	0.001631	0.017624	15	56.076471
11	-0.000018	0.000229	1.000000	0.004661	0.022693	15	47.376351

으로 수평/수직회전이 가능한 안테나에 부착된 타겟의 위치 정확도가 낮게 추정되는 것을 알 수 있다. 동일한 평면에서 높이(z) 성분만 고려하는 Conventional LESS (Least-Squares Solution)로 추정된 경우에도 가우스-헬머트 모델과 동일한 결과가 도출되었다. 이는 타겟이 이루는 원의 반지름에 비해 수평성분(x, y) 오차가 매우 작아서 평면의 직교벡터 추정에는 영향을 미치지 않은 것으로 판단된다.

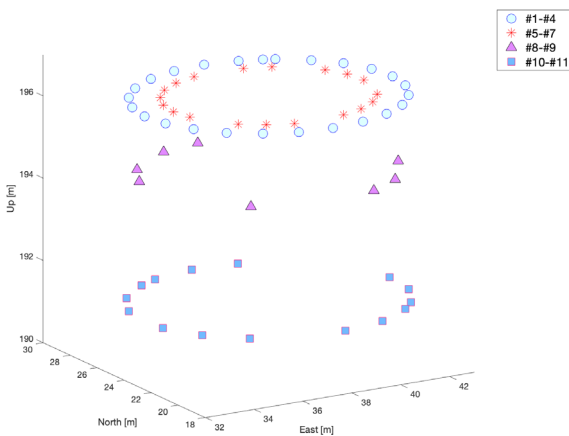


Fig. 2. Azimuthal rotation of the targets in 3-dimensional space

그러나 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 두 추정방법에서 분산요소 추정값($\hat{\sigma}_0^2$)은 가우스-헬머트 모델에서 훨씬 작아지며, 특히 수평/수직회전이 모두 가능한 안테나 뒷면에 부착한 타겟에서 두드러지게 관찰할 수 있다.

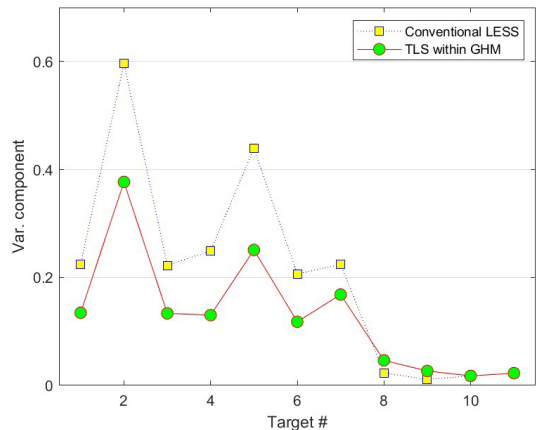


Fig. 3. Comparison of variance component estimates for two different estimation models

3.2 좌표계 변환

VLBI 관측에 기반한 결과를 다른 우주측지 해와 결합하기 위해서 VLBI 안테나의 IVP는 최종적으로 ITRF (International Terrestrial Reference Frame) 좌표계로 표현되어야 한다. IVP는 경사거리, 수평/수직각 등 지상측량에 기반하여 결정되므로 지역좌표계에서 결정된 IVP를 ITRF로 변환하는 과정이 필요하다.

세종 우주측지관측센터에는 안테나 주변에 설치한 고정 필라에서 지상관측뿐만 아니라 GNSS 관측을 수행하여 세계측지계에 정렬된 좌표를 얻을 수 있다. 따라서 두 좌표계에서 표현된 좌표값에 기반하여 지역좌표계에서 세계측지계로 변환하는 매개변수를 결정할 수 있다. GNSS를 이용해서 자료

를 측정하고, 이를 IGS 상시관측소와 동시에 자료처리하여 ITRF에 정렬하는 부분은 이 논문의 주제가 아니므로 자세한 내용은 생략한다.

좌표계 변환계수 개수와 모델은 다양하게 제시되어 있으나(Andrei, 2006; Watson, 2006; Zavoti and Kalmar, 2016; Ioannidou and Pantazis, 2020), 두 측지좌표계 사이의 변환은 일반적으로 헬머트 변환(Helmert transformation)으로 표현할 수 있다(Altamimi *et al.*, 2016; Jekeli, 2016; Métivier *et al.*, 2020).

$$X_t = X_f + T + D \cdot X_f + R \cdot X_f \quad (16)$$

where

X_t, X_f : 3×1 coordinates of **to** and **from**

T : 3×1 translation vector

D : Scale factor (usually given in ppm or ppb)

R : Rotation matrix

세 축을 기준으로하는 회전각을 각각 (α, β, γ)라고 할 때, 측지좌표계 사이 회전각은 매우 작으므로 작은 값 근사를 이용하면 회전행렬을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

마찬가지로, 변환 전후 좌표쌍에 대한 오차는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$e_{6 \times 1} := \begin{bmatrix} \vdots \\ e_t \\ e_f \\ \vdots \end{bmatrix} \sim (0, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad \text{where } e_t = \begin{bmatrix} e_{x_t} \\ e_{y_t} \\ e_{z_t} \end{bmatrix}_{to}, \quad e_f = \begin{bmatrix} e_{x_f} \\ e_{y_f} \\ e_{z_f} \end{bmatrix}_{from} \quad (18)$$

따라서 i 번째 데이터와 미지 비확률 매개변수를 연결하는 (비선형) 함수는 다음과 같고,

$$b_i(T_x, T_y, T_z, D, \alpha, \beta, \gamma) = \mu_{x_t} - \mu_{x_f} - T - D \cdot \mu_{x_f} - R \cdot \mu_{x_f} = 0 \quad (19)$$

이를 전미분식을 이용해서 구체적으로 표현하면 Eq. (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_i = b_i^0 + \begin{bmatrix} d\mu_{x_t} \\ d\mu_{y_t} \\ d\mu_{z_t} \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} d\mu_{x_f} \\ d\mu_{y_f} \\ d\mu_{z_f} \end{bmatrix}_f - \begin{bmatrix} dT_x \\ dT_y \\ dT_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{x_t}^0 \\ \mu_{y_t}^0 \\ \mu_{z_t}^0 \end{bmatrix} dD - \begin{bmatrix} \mu_{z_t}^0 d\beta - \mu_{y_t}^0 d\gamma \\ -\mu_{z_t}^0 d\alpha + \mu_{x_t}^0 d\gamma \\ \mu_{y_t}^0 d\alpha - \mu_{x_t}^0 d\beta \end{bmatrix}_f = 0 \quad (20)$$

Eq. (11)과 같은 방식으로 차분값을 대입하면 가우스-헬머트 모델로 변환할 수 있다.

$$b_i^0 - \underbrace{\begin{bmatrix} x_t - \mu_{x_t}^0 \\ y_t - \mu_{y_t}^0 \\ z_t - \mu_{z_t}^0 \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} x_f - \mu_{x_f}^0 \\ y_f - \mu_{y_f}^0 \\ z_f - \mu_{z_f}^0 \end{bmatrix}_f}_{w_i} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu_{x_t}^0 & 0 & \mu_{z_t}^0 & -\mu_{y_t}^0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu_{y_t}^0 & -\mu_{z_t}^0 & 0 & \mu_{x_t}^0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu_{z_t}^0 & \mu_{y_t}^0 & -\mu_{x_t}^0 & 0 \end{bmatrix}_f}_{A_i} \begin{bmatrix} dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dD \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{bmatrix}_{\xi} = 0 \quad (21)$$

Eq. (21)은 최종적으로 Eq. (13)과 동일한 형태의 가우스-헬머트 모델로 표현할 수 있고, 해는 Eqs. (14)-(15)와 같이 계산할 수 있다.

Table 2는 헬머트 변환을 위한 좌표쌍과 분산-공분산을 나타낸 것으로서, 변환 전(FROM) 좌표쌍은 지상측량 데이터를 조정계산한 것으로서 GNSS를 포함한 모든 필라를 기준으로 Partial MINOLESS (PMINOLESS)를 적용한 결과이다 (Snow, 2002). 개별 좌표에서 좌표성분(x, y, z) 사이의 분산-공분산은 모두 적용했으나, 좌표쌍 사이의 공분산은 고려하지 않았으므로 최종적으로 블록 대각행렬(block diagonal) 형태가 된다.

변환 후(TO) 좌표와 분산은 Bernese GNSS Software (Dach *et al.*, 2015)를 이용하여 자료처리한 결과로서 공분산은 사용하지 않았다. 지역좌표계와 세계측지계는 최종적으로 GNSS 성과를 기반으로 연결된다. 따라서 필라의 지역좌표계는 1번 필라를 중심으로 결정되어 있으나 좌표계 변환계수 추정을 위해서 모든 좌표를 GNSS 필라 기준 상대값으로

정리했다.

또 하나 언급할 점은 위에서 설명한대로 두 좌표계 사이의 변환식은 “매우 작은” 각을 전제로 2차식 이상의 작은 항은 무시하고 표현한 형태이다. 따라서 Eq. (17)에서 좌표계 회전 각 (α, β, γ)은 작은 값이어야 하지만, 실제 세종 우주측지관 측센터에 설치한 필라 지역좌표 방위각은 측지 방위각과 차이가 있다(약 -16.5°). 따라서 본 실험에서는 해당 각도만큼 z 축 회전을 사전에 실시하였으며, 공분산 전파법칙을 적절히 적용하면 좌표계 변환계수 추정 정확도에 영향을 미치지 않는다.

Table 3은 두 변환방법에 의해 결정된 Helmert 변환계수와

추정 정밀도를 나타낸다. 변환계수 추정값 자체는 큰 차이를 보이지 않으나 추정 정밀도는 성분에 따라 약간 차이가 있으며 가우스-헬머트 모델에 기반한 TLS 방법이 약간 우수한 것으로 판단된다.

그러나 변환계수 추정 정밀도보다 변환 전후 좌표에 대한 잔차를 분석하면 두 방법의 차이는 좀 더 명확해진다(Fig. 4). 잔차는 양수 또는 음수 값을 가지므로 그 자체로 비교하기보다는 절대값을 이용하여 크기를 비교하는 것이 바람직하다. 기존 최소제곱해는 변환 전 좌표쌍(FROM)에 포함된 오차는 무시하고 변환 후 좌표쌍(TO) 오차만 고려하므로 변환 전 좌

Table 2. Coordinates and the variance-covariance of two frames. “FROM” represents the local frame (e,n,u) based on ground surveying, and “TO” is obtained from GNSS data processing. Unit: [m], [10^{-6} mm²]

	Pillar	x e	y n	z u	σ_x^2	σ_y^2	σ_z^2	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
FROM	VP1	-14.3316	23.2012	-3.2860	0.078	0.100	0.086	-0.023	0.000	0.000
	VP2	30.2906	36.3985	-0.3612	0.075	0.109	0.091	0.003	0.000	0.000
	VP3	43.5645	56.4603	-0.2439	0.067	0.139	0.092	-0.010	-0.000	-0.000
	VP4	3.5357	96.8418	-0.6114	0.101	0.092	0.090	-0.006	0.000	-0.000
	VP5	-27.7147	72.1762	4.3960	0.062	0.106	0.086	-0.000	0.000	-0.000
	SP1	-42.3220	-111.8810	-7.2246	0.256	0.332	0.282	-0.021	-0.002	0.001
	SP2	-30.0276	-145.1603	-1.7997	0.252	0.274	0.263	-0.027	-0.001	0.000
	SP3	-13.4730	-124.7110	0.1208	0.192	0.306	0.264	-0.017	-0.001	-0.001
	GNSS	0	0	0	3.103	5.529	0.716	-0.060	0.023	-0.069
TO	VP1	-14.3255	23.1983	-3.2752	0.233	0.219	0.232	-	-	-
	VP2	30.2907	36.3831	-0.3567	0.207	0.196	0.206	-	-	-
	VP3	43.5558	56.4328	-0.2665	0.233	0.219	0.232	-	-	-
	VP4	3.5337	96.8078	-0.6367	0.373	0.336	0.372	-	-	-
	VP5	-27.7065	72.1744	4.3817	0.216	0.217	0.221	-	-	-
	SP1	-42.3055	-111.8878	-7.2319	0.174	0.162	0.169	-	-	-
	SP2	-30.0160	-145.1528	-1.7856	0.168	0.148	0.157	-	-	-
	SP3	-13.4836	-124.7294	0.1202	0.180	0.168	0.174	-	-	-
	GNSS	0	0	0	0.160	0.140	0.149	-	-	-

Table 3. Estimated Helmert transformation parameters: TLS within GHM vs. Conventional LESS

Parameter	TLS (GHM)		Conventional LESS		
	Value	Sigma	Value	Sigma	
Translation [mm]	Tx	1.971	± 3.839	2.235	± 4.003
	Ty	-12.092	± 4.021	-10.781	± 3.862
	Tz	-4.886	± 3.905	-4.560	± 4.008
Scale [ppm]	D	-87.81814	± 43.370	-73.47175	± 41.099
Rotation [arcsec]	Rx	-18.04032	± 10.995	17.33080	± 11.356
	Ry	-1.32066	± 33.005	8.84352	± 36.994
	Rz	-1.95467	± 8.781	-0.06191	± 8.793

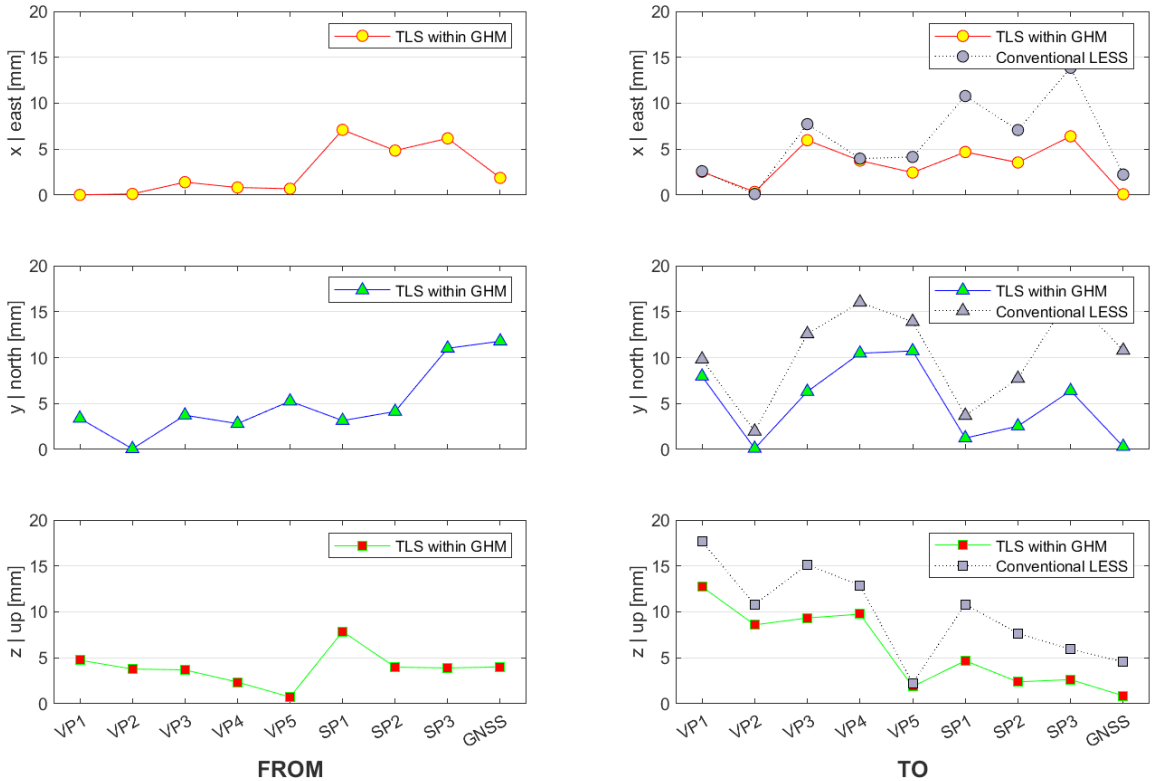


Fig. 4. Estimated residuals (in absolute sense) for both reference frames

표쌍에 대한 잔차는 구할 수 없다. 변환 후 좌표쌍에 대한 잔차를 비교하면(Fig. 4 우측 열) 모든 필라, 모든 성분에 대해서 가우스-헬머트 모델 기반 전최소제곱 결과가 더 작은 값을 보여준다. 이는 기존 최소제곱조정에서는 모든 오차를 변환 후 좌표쌍에 할당하므로 발생하는 것으로 판단된다. 그러나, 실제적인 좌표값 오차는 변환 전후 좌표쌍에 모두 포함되어 있으므로 변환 후 좌표쌍 잔차는 GHM 기반 전최소제곱해 결과가 더 합리적이라고 이해할 수 있다.

4. 요약과 결론

일반적인 조정계산에서는 독립변수는 오차가 없다고 가정하고 종속변수 오차만을 고려하여 최소제곱조정 계산을 수행한다. 그러나 지상측량 등에 의한 좌표쌍 결과에 기반한 조정계산에서는 모든 성분에 포함된 오차를 고려해야 한다. 모든 오차요소를 고려한 전최소제곱(TLS) 조정계산은 다양한 모델을 이용하여 수행할 수 있으며, 가중값의 비특이성 등 세부적인 가정을 제외하면 동등한 결과를 제공하는 것으로 알

려져 있다.

본 연구에서는 가우스-헬머트 모델에 기반한 전최소제곱 조정계산 모델을 도입하여 VLBI 타겟이 3차원 공간에서 형성하는 평면의 방정식과 지역좌표계를 세계측지계로 변환하는 업무에 적용했다. 추정된 평면방정식의 법선벡터는 실제 수직벡터와 이루는 내각을 계산함으로써 평면이 실제 수평면을 이루는지 여부를 확인할 수 있다. 타겟이 이루는 원의 반지름의 크기에 비해 평면오차의 크기가 매우 작아서 실제 평면방정식에 미치는 영향은 크지 않지만, 가우스-헬머트 모델 기반 전최소제곱의 경우 추정 분산요소가 훨씬 더 작은 것을 알 수 있다. 또한 조정계산 후 분산요소를 분석하면 타겟의 설치위치에 따른 평면 법선벡터 추정 특성을 파악할 수 있다.

지상측량은 지역좌표계에서 수행하고 이를 기반으로 PMINOLESS를 적용하면 모든 타겟의 3차원 좌표와 최종적으로 VLBI 안테나의 IVP를 추정할 수 있다. 그러나 IVP는 세계측지계로 표현함으로써 다른 우주측지 기술과 결합할 수 있으므로, 필라에서 수행한 GNSS 측량을 이용하여 세계측지계로 변환할 수 있다. 이를 위해서는 필라 좌표를 이용한

좌표계 변환계수를 추정해야 하며, 마찬가지로 가우스-헬머트 모델을 적용할 수 있다. 좌표계 변환계수는 대체로 기존 최소제곱해보다 정밀하게 추정할 수 있으며, 특히 변환 전후 좌표계에서의 좌표값 잔차는 그 크기(절대값)가 충분히 작게 결정되었다.

일반적으로 지상측량을 위해서는 장비를 정준하여 중력 방향을 기준으로 측량을 수행하게 된다. 그러나 GNSS에 기반한 지역좌표계는 타원체에 수직인 방향을 기준으로 하므로 좌표계 변환시 연직선편차(deflection of the vertical)를 고려하는 연구도 시도되었다(Zhang *et al.*, 2021). 그러나 실제 연직선 편차가 있다고 하더라도 좌표계 변환은 특정 지점에서 이루어지므로 추정한 변환계수에 이 영향이 반영될 것으로 사료되지만, 이 부분에 대해서는 추가적인 검토가 필요할 것으로 판단한다.

감사의 글

본 논문은 해양수산부 재원으로 국가연구개발사업인 “지상기반 센티미터급 해양 정밀 PNT 기술개발”에 의해 수행되었습니다(1525012253). 또한 본 연구에 사용된 데이터는 국토지리정보원(NGII)에서 제공하였으며 이에 감사드립니다.

References

- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., and Collilieux, X. (2016), ITRF2014: A new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 121, pp. 6109–6131.
<https://doi.org/10.1002/2016JB013098>
- Andrei, C.-O. (2006), *3D Affine Coordinate Transformations*, Master's thesis, School of Architecture and the Built Environment, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden.
- Bae, T.-S. (2022), *Adjustment Computations*, Haum (in Korean).
- Dach, R., Lutz, S., Walser, P., and Fridez, P. (2015), *Bernese GNSS Software Version 5.2*, Vol. 1, Astronomical Institute, University of Bern.
- Ghilani, C.D. and Wolf, P.R. (2006), *Adjustment Computations: Spatial data analysis* (4th), John Wiley & Sons, Inc.
- Ioannidou, S. and Pantazis, G. (2020), Helmert transformation problem. From Euler angles method to quaternion algebra, *International Journal of Geo-Information*, Vol. 9, No. 494, pp. 1-14.
- ITRF (2020), ITRF homepage, <https://itrf.ign.fr/en/solutions/ITRF2020> (last date accessed: 28 July 2022).
- Jekeli, C. (2016), *Geometric Reference Systems in Geodesy*, Division of Geodetic Science, School of Earth Sciences, Ohio State University.
- Métivier, L., Altamimi, Z., and Rouby, H. (2020), Past and present ITRF solutions from geophysical perspectives, *Advances in Space Research*, Vol. 65, No. 12, pp. 2711-2722.
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2020.03.031>
- Neitzel, F. and Schaffrin, B. (2016), On the Gauss–Helmert model with a singular dispersion matrix where BQ is of smaller rank than B, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 291, pp. 458-467.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.03.006>
- NGII (2019), *Enhancement of National Geodetic Network*, National Geographic Information Institute, Suwon, Korea, 229p. (in Korean)
- Schaffrin, B. (2007), Connecting the dots: The straight-line case revisited, *zfi*, Vol. 132, No. 1, pp. 385-394.
- Schaffrin, B. and Snow, K. (2010), Total Least-Squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 432, pp. 2061–2076.
- Schaffrin, B. and Wieser, A. (2008), On weighted total least-squares adjustment for linear regression, *Journal of Geodesy*, Vol. 82, pp. 415–421.
<https://doi.org/10.1007/s00190-007-0190-9>
- Snow, K. (2002), *Applications of Parameter Estimation and Hypothesis Testing to GPS Network Adjustments*, OSU Report No. 465, Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
- Snow, K. (2012), *Topics in Total Least-Squares Adjustment within the Errors-In-Variables Model: Singular Cofactor Matrices and Prior Information*, OSU Report No. 502, Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Watson, G.A. (2006), Computing Helmert transformations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 197, No. 2, pp. 387-394.

<https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.06.047>

Zavoti, J. and Kalmar, J. (2016), A comparison of different solutions of the Bursa–Wolf model and of the 3D, 7-parameter datum transformation, *Acta Geod Geophys*, Vol. 51, pp. 245-256.

<https://doi.org/10.1007/s40328-015-0124-6>

Zhang, Z., Ma, X., Sun, Z., Zhang, A., Yuan, Y., and Sun, Z. (2021), Measuring the Deflection of the Vertical via Local Reference Point Surveying and Pointing Calibration of a VLBI Telescope: A Case Study at the Urumqi Station, *Earth and Space Science*, Vol. 8, No. 10, pp. 1-13.

<https://doi.org/10.1029/2021EA001781>