

# 금속 블록에 삽입된 감쇠층의 진동저감 성능 평가

윤성호\*,#

\*금오공과대학교 기계공학과

## Evaluation of the Vibration Reduction Performance of a Cushioning Layer between Metal Blocks

Seong-Ho Yun\*,#

\*Department of Mechanical Engineering, KUMOH NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

(Received 28 May 2022; received in revised form 12 June 2022; accepted 15 June 2022)

### ABSTRACT

This study describes an evaluation of the vibration-level reduction effect of natural rubber inserted between two aluminum blocks, in which the modal parameters are predicted using two different damping systems. A numerical model with two degrees of freedom was established for both the cases. One was an eigenvalue problem analysis using a state space method and general viscous damping, whereas the other was a method using hysteretic damping. The modal parameters obtained from these two approaches were compared with those obtained from the finite element method using a commercial package. As a result, the natural frequencies observed in the complex frequency response curve were consistently less than the average of four percents. The damping ratios also showed good agreement within a reasonable range. However, the hysteretic damping system showed a relatively larger difference for all modal parameters. This suggests that the analysis procedure makes it easier to predict the vibration transmission characteristics of the shape and configuration of any cushioning layer.

**Keywords** : Modal Analysis(모달해석), Frequency Response Function(주파수응답함수), Hysteretic Damping(이력감쇠), State Space Analysis(상태공간해석) Finite Element Analysis(유한요소해석)

## 1. 서 론

산업현장에서 작업자는 각종 기계 진동에 노출되어 있다. 이러한 진동은 제품의 정밀도 저하 및 소음성 난청과 같은 여러 가지 산업재해의 원인이 된다. 이와 관련된 보호 장비의 진동저감 성능을 평가하는 일이 중요하다. 자연고무를 포함한 각종 고분자(polymer)재료가 산업현장의 다양한 분야에서 사용 사례가 증가함

에 따라서 재료의 감쇠성능 예측의 중요성이 점점되고 있다.

일반적으로 모달 해석이란 구조물에서 임의의 가진 점과 응답점에 대한 주파수 응답함수를 측정하여 모달 매개변수들을 수치적으로 도출하는 과정을 말한다. 이 방법은 수치해석에서 고유진동수 및 감쇠량의 천이현상을 파악하는데 도움이 된다.<sup>[1]</sup> 한편 실험에서는 소음 신호(noise signal) 처리 및 가진 방법을 선택하는데 유용하다. 다자유도계에서 모달 매개변수들을 파악하는 방법은 시간영역에서 다룰 것인지 주파수 영역에서 다룰 것인지 또는 어떤 감쇠계를 선택할 것인지가 관심의

# Corresponding Author : shyun@kumoh.ac.kr

Tel: +82-54-478-7324, Fax: +82-54-478-7319

Copyright © The Korean Society of Manufacturing Process Engineers. This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 3.0 License (CC BY-NC 3.0 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

대상이 된다. 감쇠계를 일반 점성감쇠, 비례 점성감쇠, 이력감쇠 중에서 어느 것을 사용하느냐에 따라서 구조물의 특성이 다르게 해석된다.<sup>[2]</sup> 최근 완충설계에 사용되는 고무의 감쇠성능을 해석하기 위해 이력감쇠곡선이 사용되어 왔다. 이력감쇠곡선(hysteretic damping curve)으로 둘러싸인 면적을 계산하여 댐퍼의 에너지 소산 능력을 평가할 수 있다.<sup>[3,4]</sup> 에너지 소산능력 및 감쇠성능을 손쉽게 파악할 수 있다. 따라서 기저층과 감쇠층으로 이루어진 단순한 모델을 이용하여 감쇠층의 감쇠성능을 평가할 필요가 있다.<sup>[4,5]</sup>

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 진동 저감의 목적을 이루고자 알루미늄 사이에 고무가 들어가 있는 3층 적층 구조물의 형태로 간소화시킨 모델을 설정할 것이다. 이 때 일반 점성감쇠와 이력감쇠를 고려한 주파수 응답함수와 감쇠 성능을 유한요소해석으로부터 도출된 결과값들과 비교하여 평가할 것이다. 차폐층(vibration isolation layer)을 포함한 구조물이 동적 거동을 할 때 모달 매개변수들의 변화를 관찰함으로써 감쇠층의 감쇠성능을 평가하고 목표 성능에 만족하는 일련의 해석 방법론을 제시할 것이다.

## 2. 이론 및 해석

### 2.1 상태공간 고유치 해석

점성감쇠가 존재하고  $n$  자유도계를 가진 동적 시스템에 외력을 적용한 강제진동의 운동방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

여기서  $M$ 은 질량 행렬,  $K$ 는 강성행렬,  $C$ 는 감쇠행렬,  $\mathbf{f}$ 는 외력벡터,  $\mathbf{x}$ 는 구하고자 하는 변위벡터이고 ( $\dot{\phantom{x}}$ )는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타낸다.

일반적인 상태공간(state space) 형태로 변환할 때  $n$ 개의 2차 미분방정식은 다음과 같이  $2n$ 개의 1차 미분방정식으로 변환된다.

$$A\dot{\mathbf{u}} + B\mathbf{u} = \mathbf{P}(t) \quad (2)$$

여기서 상태벡터  $\mathbf{u}$ 는 변위벡터  $\mathbf{x}$ 와 속도벡터  $\dot{\mathbf{x}}$ 로 구성되고 행렬  $A$ 와  $B$ 는 크기가  $2n \times 2n$ 이고 외력벡터  $\mathbf{P}(t)$ 의 크기는  $2n \times 1$ 이 되어 다음과 같이 나

타낼 수 있다.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}}]^T \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (4.a,b)$$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

일반적인 점성감쇠에 대한 고유치 해석은  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{0}$ 일 때 고유치  $\lambda$ 와 고유벡터  $\mathbf{v}$ 로 다음의 식이 성립한다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \mathbf{v} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (6)$$

$$[\lambda A + B]\mathbf{v} = 0 \quad (7)$$

모달행렬  $\mathbf{V}$ 는  $2n$ 개의 상태 고유벡터  $\mathbf{v}$ 로 이루어진다.

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_{2n}] \quad (8)$$

행렬  $A$ 와  $B$ 는 직교성을 가지며  $r$ 번째의 고유치  $\lambda_r = -\alpha_r/b_r$ 이며 행렬의 대각 요소가  $\alpha_r$ 과  $\beta_r$ 로 표현되고 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$V^T A V = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}; \quad V^T B V = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{bmatrix} \quad (9.a,b)$$

### 2.2 이력감쇠의 고유치 해석

이력감쇠가 존재하는 경우 운동방정식 (1)에 미지의 무차원 이력감쇠행렬  $B$ 를 도입하여 다음과 같이 복소강성(complex stiffness) 행렬을 도입할 수 있다.

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K(I + iB)\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (10)$$

여기서  $i$ 는 복소수를 나타낸다. 물리적인 변위벡터  $\mathbf{x}$ 에 모달 행렬  $\Phi$ 와 모달 변위벡터  $\mathbf{u}$ 를 도입하면  $\mathbf{x} = \Phi\mathbf{u}$ 와 같다. 이에 상응하는  $n$ 개의 고유치  $\lambda_r$ 와 고유벡터  $\phi_r$ 는 다음과 같이 가정하였다.

$$(K - \lambda_r M)\phi_r = 0 \quad (11)$$

식 (10)에  $\Phi^T$ 를 식의 앞에 곱하면 다음과 같이 모달 변위벡터  $\mathbf{u}$ 에 대한 운동방정식이 도출된다.

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \Omega^2(I + i\beta)\mathbf{u}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (12)$$

여기서  $Q(t) = \Phi^T f(t)$ 이고 고유치행렬  $\Omega^2$ 과 이력감쇠 행렬  $\beta$ 는 다음과 같이 대각 요소만 존재하게 된다.

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}; \Omega^2 = \Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (13.a,b)$$

$$\beta = \Phi^T B \Phi = \begin{bmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{bmatrix} \quad (14)$$

일반적으로 무차원 이력감쇠 상수  $\beta_k (k=1 \dots n)$ 는 유한요소해석 또는 실험으로부터 도출된 값으로 적용할 수 있다.

### 2.3 해석치의 검증 절차

본 연구에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 두 개의 동일한 질량  $m$ 인 알루미늄 블록 사이에 천연 고무를 삽입하였다. 적층 시스템에 변위의 크기를 증폭시켜 입력함으로써 이력감쇠를 관찰하기 위한 기본 모델의 제원을 보여주고 있다. Fig. 2는 기본 모델을 2 자유도계의 동적 수치모델로 설정하였으며 조화 가진력  $f(t)$ 의 크기가  $1N$ 이고 주파수가  $1 \sim 1,600Hz$ 를 가지는 정현파 하중을 하부 블록에 가하였다. 이 모델에서 고무의 완충 성능을 스프링 강성  $k_1$ 과 이력감쇠 계수  $h$ 와 하부의 지지대는 스프링 강성  $k_2$ 로 표현하였다.

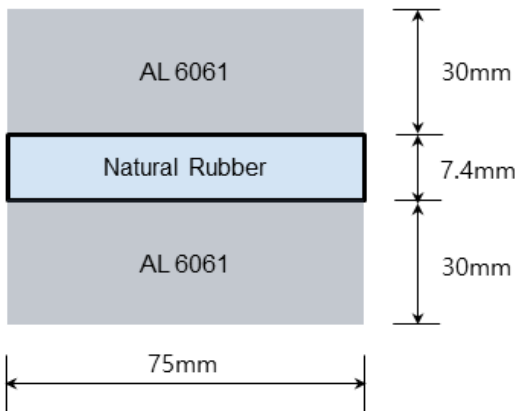


Fig. 1 A model with natural rubber inserted between two aluminum blocks

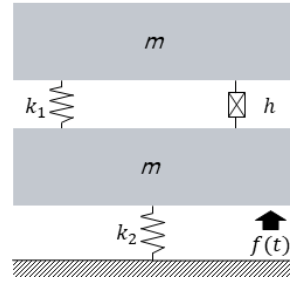


Fig. 2 A numerical model of two degree of freedom system for an observation on the hysteretic damping behavior

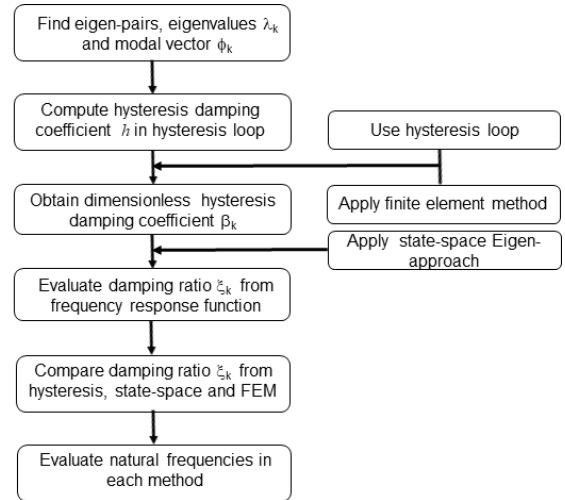


Fig. 3 A flow chart of algorithm for predictions on natural frequency and damping ratio

상기의 수치 모델로부터 감쇠비  $\xi$ 와 고유진동수를 구하는 일련의 해석 절차를 요약하여 해석 흐름도를 Fig. 3에 나타냈다.

### 2.4 수치해석

상용 유한요소해석 프로그램을 사용하여 이력감쇠곡선을 생성하기 위하여 모델의 상부 알루미늄 블록에 변위가  $-7.5 \sim 7.5mm$  범위에서 반복적으로 가해지는 과정을 Fig. 4에 나타냈다. Fig. 5는 변형되는 모습을 보여주고 있으며 이로부터 고무의 힘과 변위의 관계를 나타내는 히스테리시스 루프(hysteresis loop)를 Fig. 6과 같이 확보하였다.<sup>[6]</sup> 본 해석에서 사

용한 고무의 탄성계수  $E=0.184Mpa$ 이고 프와송 비  $\nu=0.49$ 이다. 알루미늄 블록의 질량  $m=0.456kg$ , 스프링 강성  $k_1=140.5N/mm$ 이고  $k_2=562.5N/mm$ 이다.

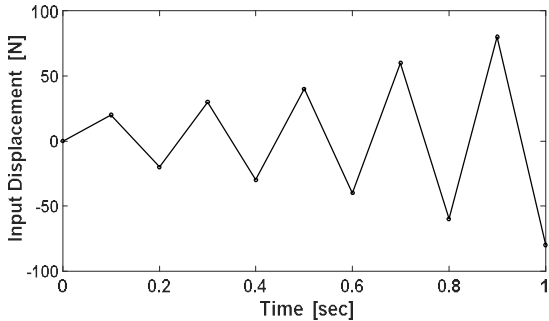


Fig. 4 A case of application of displacement input to the upper aluminum block

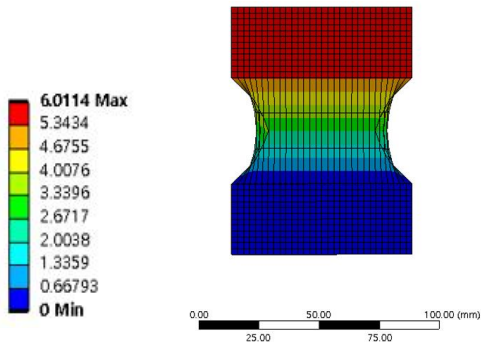


Fig. 5 A result of dynamic behaviors for the rubber layer in the finite element analysis

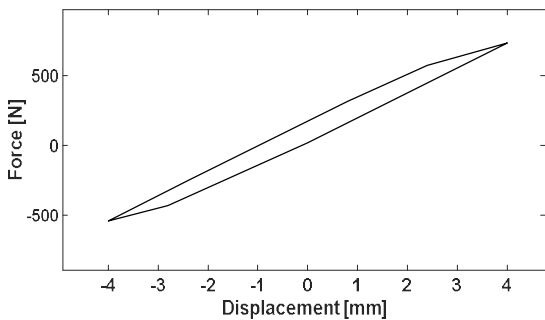


Fig. 6 A hysteresis loop for the computation of energy dissipated in one cycle

Table 1 The quantitative data for each hysteresis loop

Cycle	$\Delta W[Nmm]$	$h[N/mm]$	$\kappa[N/mm]$	$\beta$	$\xi$
loop1	17,262	43.04	193.0	0.223	0.1115
loop2	17,163	44.34	196.2	0.226	0.1130
loop3	16,918	44.49	201.3	0.221	0.1105

Fig. 6과 같은 이력감쇠곡선 루프의 한 개 사이클에서 소산되는 에너지의 양  $\Delta W$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta W = \pi s \beta X^2 \quad (14)$$

$$h = s \beta \quad (15)$$

여기서  $s$ 는 루프 장축의 기울기,  $X$ 는 최대 변위,  $h$ 는 루프의 면적으로부터 산정되는 이력감쇠계수 (hysteretic damping coefficient)를 나타낸다. 이로부터 무차원 이력감쇠 상수  $\beta$ 가 계산되고 최종적으로 시스템의 감쇠비  $\xi = \beta/2$ 가 도출된다. 그러나 이력감쇠 상수  $\beta$ 는 시계열의 동적 응답의 대수적 감쇠 (logarithmic decrement)로부터 근사적으로 평가되었음을 주의해야 된다.<sup>[7,8]</sup> 본 연구에서는 Table 1에 나타난 바와 같이 세 개의 사이클에 대하여 감쇠이력 루프를 관찰하여 이력감쇠 상수  $\beta$ 의 평균값은 0.223과 감쇠비  $\xi$ 의 평균값은 0.1117을 얻었다.

만일 시스템을 식 (2)와 같이 상태 공간으로 표현하고 가진주파수가  $\omega$ 인 조화함수 형태의 외력을 가한다고 가정한다.

이 경우  $j$  블록에서 가한 외력에 대해  $i$  블록에서의 변위에 대한 복소수 주파수응답함수  $H_{ij}(\omega)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(v_i)_r (v_j)_r}{\alpha_r (i\omega - \lambda_r)} \quad (15)$$

이력감쇠가 존재하는 경우 복소수 주파수응답함수  $H_{ij}(\omega)$  다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>[9]</sup>

$$H_{ij} = \sum_{r=1}^n \frac{(\phi_i)_r (\phi_j)_r}{k_r (1 - r_r^2) + i\beta_r} \quad (16)$$

상기의 주파수응답함수를 표현한 식 (15)와 (16)

을 적용하고 상용 유한요소해석 프로그램을 사용하여 도출한 주파수응답함수의 크기를 Fig. 7과 9에 나타냈고 이에 상응하는 위상각을 Fig. 8과 10에 나타냈다. 세 개의 주파수응답곡선에서 피크(peak) 값을 가지는 공진주파수는 세 가지 방법 모두 매우 유사하게 잘 일치하고 있음을 관찰할 수 있다. 이를 Table 2에 비교하였으며 상용 유한요소 프로그램으로 도출한 주파수와 비교하여 1차 고유진동수는 이력감쇠법의 경우 6.7%, 상태공간법은 4.9% 차이를 보여주고 있다. 2차 고유진동수는 2.6%와 0.1% 차이가 있음을 관찰하였다.

주파수응답곡선  $H_{11}$ 의 경우 1차 모드에서는 명확히 관측이 되어 위상각의 변화도  $0^\circ \sim 180^\circ$ 에서 명확함을 알 수 있지만 2차 모드에서는 구분이 고유진동수의 피크와 위상각의 변화가 미미함을 관찰할 수 있다.  $H_{22}$ 의 경우 피크의 값은 모두 명확하고 1차 및 2차 모드에서 동적 거동이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이를 바탕으로 반전력법(half power point method)에 의하여 측정된 감쇠비  $\xi$ 를 Table 3에 나타내었다.  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ 과  $H_{22}$ 를 모두 관찰하여 세 가지 해석 방법 대하여 1차 모드의 경우 약  $\xi_1 = 0.10 \sim 0.12$ , 2차 모드는  $\xi_2 = 0.11 \sim 0.12$ 에서 거동하고 있음을 관찰할 수 있다. 특히 이력감쇠의 경우 유한요소해석으로 관찰된 0.1117이 이 범위 안에 있음을 확인할 수 있다.

### 3. 결론

본 연구에서는 금속의 블록에 삽입된 고무의 완충 성능을 비교하기 위하여 감쇠계를 달리하였다. 이들의 모달 매개변수를 예측할 수 있도록 정식화하고 이를 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 일반적인 점성감쇠의 상태공간 고유치 해석치와 이력감쇠의 고유치 해석치를 상용 유한요소해석 프로그램을 사용한 결과치와 비교 평가할 수 있는 해석 절차를 제시하였다.
- (2) 주파수응답함수로부터 서로 다른 감쇠계에서 산정된 고유진동수는 평균 4% 미만에서, 감쇠비도 일정 범위 내에서 잘 일치하고 있으나 이력

감쇠계의 경우가 비교적 큰 편차를 보이고 있음을 관찰하였다.

- (3) 향후 다른 완충 재료를 차폐층으로 사용할 때 요철의 형상 및 배치에 따른 진동 전달 특성을 체계적으로 파악할 수 있는 기반을 마련하였다.

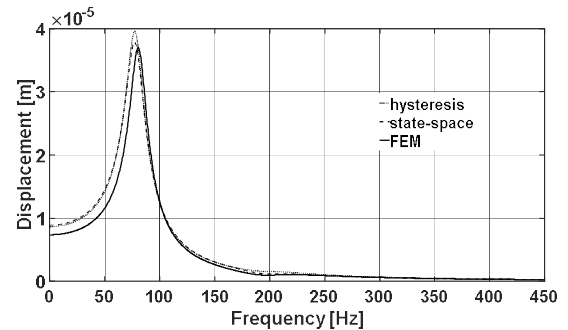
**Table 2 A comparison of natural frequencies**

	<i>hysteresis</i>	<i>state - space</i>	<i>FEM</i>
1st	74.01	75.44	79.36
2nd	202.92	197.51	197.76

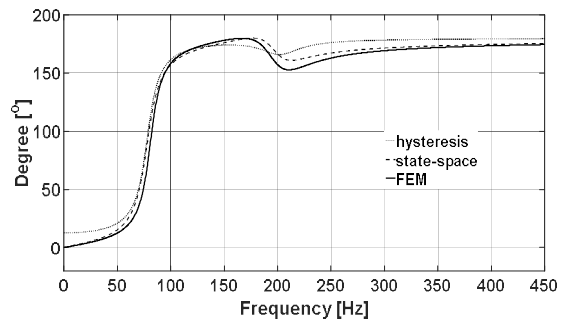
[Hz]

**Table 3 A comparison of damping ratios**

	<i>hysteresis</i>	<i>state - space</i>	<i>FEM</i>
1st	0.1163	0.1216	0.1006
2nd	0.1146	0.1198	0.1245



**Fig. 7 A comparison of three magnitudes of complex frequency response functions  $H_{11}$**



**Fig. 8 A comparison of three phases of complex frequency response functions  $H_{11}$**

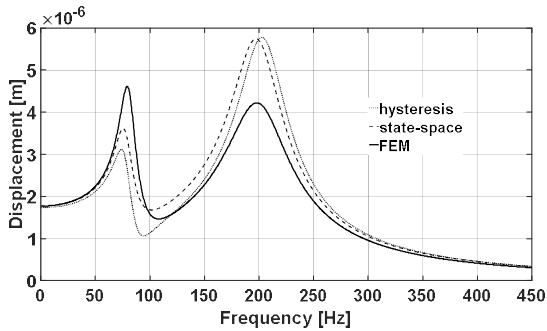


Fig. 9 A comparison of three magnitudes of complex frequency response functions  $H_{22}$

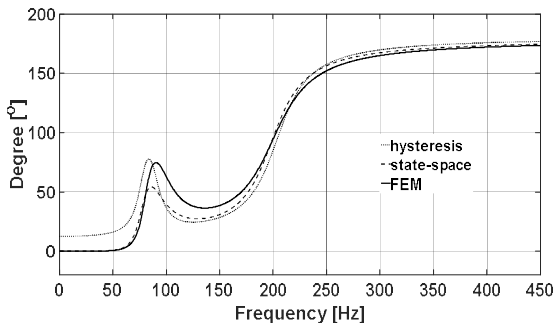


Fig. 10 A comparison of three phases of complex frequency response functions  $H_{22}$

## 후 기

“이 연구는 금오공과대학교 학술연구비로 지원되었음(과제번호 202001080001)”

## REFERENCES

1. Lee, H., Yoon, M.-C. and Kim, J.-D., “Forced Vibration Analysis and Response Characteristics of a Vehicle Dull Progress Model,” Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 19, No. 11, pp. 49-57, 2020.
2. Alati, N., Failla G., and Santini, A., “Complex Modal Analysis of Rods with Viscous Damping Devices,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 333, No. 7, pp. 2130-2163, 2014.
3. Maia, N., “Reflections on the Hysteretic Damping Model,” Shock and Vibration, Vol. 16 No. 5, pp. 529-542, 2009.
4. Yun, S.-H., “Sensitivity Analysis of Dynamic Response by Change in Excitation Force and Cross-sectional Shape for Damped Vibration of Cantilever Beam,” Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers, Vol. 20, No. 8, pp. 11-17, 2021.
5. Cortes, F. and Elejabarrieta, M. J., “Structural Vibration of Flexural Beams with Thick Unconstrained Layer Damping,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, No. 22/23, pp. 5805-5813, 2008.
6. Ansys Workbench 2021R1, Ansys Inc., USA, 2022.
7. Rao, S. S., Mechanical Vibrations, 6th ed, Pearson Education, pp. 226-231, 2019.
8. Little, J. A. and Mann, B. P., “Optimizing Logarithmic Decrement Damping Estimation through Uncertainty Propagation,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 457, pp. 368-376, 2019.
9. Nakamura, N., “Practical Causal Hysteretic Damping,” Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 36, No. 5, pp. 597-617, 2007.