

J2 와 J3 불변량에 기초한 항복함수의 제안과 이방성 판재에의 적용

김영석^{1,#}, 농옌푸반², 김진재³

Yield Functions Based on the Stress Invariants J2 and J3 and its Application to Anisotropic Sheet Materials

Y. S Kim, P. V. Nguyen, J. J. Kim

(Received July 5, 2022 / Revised July 18, 2022 / Accepted July 21, 2022)

Abstract

The yield criterion, or called yield function, plays an important role in the study of plastic working of a sheet because it governs the plastic deformation properties of the sheet during plastic forming process. In this paper, we propose a novel anisotropic yield function useful for describing the plastic behavior of various anisotropic sheets. The proposed yield function includes the anisotropic version of the second stress invariant J_2 and the third stress invariant J_3 . The anisotropic yield function newly proposed in this study is as follows.

$$F(J_2) + \alpha G(J_3) + \beta H(J_2 \times J_3) = k^m$$

The proposed yield function well explains the anisotropic plastic behavior of various sheets by introducing the parameters α and β , and also exhibits both symmetrical and asymmetrical yield surfaces. The parameters included in the proposed model are determined through an optimization algorithm from uniaxial and biaxial experimental data under proportional loading path. In this study, the validity of the proposed anisotropic yield function was verified by comparing the yield surface shape, normalized uniaxial yield stress value, and Lankford's anisotropic coefficient R-value derived with the experimental results. Application for the proposed anisotropic yield function to aluminum sheet shows symmetrical yielding behavior and to pure titanium sheet shows asymmetric yielding behavior, it was shown that the yield curve and yield behavior of various types of sheet materials can be predicted reasonably by using the proposed new yield anisotropic function.

Keywords: invariant J_2 , invariant J_3 , stress deviator, anisotropic yield function, symmetric yield function, asymmetric yield function.

1. 서론

자동차 내외 판넬, 항공기 동체, 음료용 캔 등 다양한 제품의 제조에 판재 가공 기술(sheet metal forming)이 적용되고 있다. 대량 생산공정으로서 판

재 가공기술은 얇은 판재로부터 복잡한 형상의 제품을 재료의 소성변형(plastic deformation) 특성을 이용하여 제조하는 기술 중 하나이다.

이 가공 공정에서 제품의 품질확보, 생산성 제고, 제품개발 기간 단축 및 제조 비용 저감 등을 위해 제조공정을 최적화하는 것이 필요하다. 이를 위해 제조 현장에서는 전통적으로 숙련된 기술자의 경험에 기반한 시행오차 방법이 일부 사용되고 있지만

1. 경북대학교 기계공학과 교수

2. 경북대학교 대학원, 현재 Bosch Vietnam Co. 연구원

3. Depart. Mech. Engng, Univ. New Hampshire(USA), PostDoc Researcher

Corresponding Author : Young suk Kim, School of Mechanical

Engineering, Kyungpook National University, E-mail: caekim@knu.ac.kr

ORCID: 0000-0001-7525-5428

최근에는 전산모사 수치해석기술인 유한요소해석 (finite element analysis, FEA)에 기반한 가상 시뮬레이션 기술이 널리 채용되고 있는 추세이다.

이 FEA를 사용한 판재 성형 공정 시뮬레이션의 정확도를 높이려면 적합한 유한요소 유형의 선택, 충분히 작은 유한요소 메쉬 이산화, 적절한 경계 조건 및 정확한 재료의 소성 변형 모델의 도입이 필요하다. 특히 재료의 소성 변형 거동을 잘 파악하기 위해서는 기본적으로 가공경화법칙(work hardening), 소성항복함수(yield criterion) 및 소성유동법칙(flow rule) 등에 대한 정확한 이해가 요구된다. 이 일환으로 금속 재료의 소성변형 거동을 FEA를 통해 정교하게 예측하기 위해서 많은 연구자들에 의해서 다양한 형태의 가공경화법칙[4-6], 소성유동법칙[7, 8], 항복함수 등이 제안되었다. 또한, FEA의 정확도를 향상시키기 위해 다양한 구성요소에 대한 조합이 시도되고 있다[9-12].

재료의 소성 변형 모델 중에서도 이방성 항복조건(anisotropic yield criterion)은 냉간 압연된 판재의 이방성 항복거동을 잘 기술하는 역할을 하며, 다양한 응력비를 받는 판재의 탄성 및 소성상태를 결정하기 때문에 FEA 해석에서 중요한 인자 중 하나이다.

이전 연구에서 많은 학자들에 의해 다양한 이방성 항복조건들이 제안되었다. 등방성 재료의 경우 항복함수는 모든 직교 변환에 대해 불변해야 하기 때문에 Prager 가 처음 제안한 것과 같이 편차응력에 대한 제2 불변량 J_2 및 제 3 불변량 J_3 [13]을 항복조건에 활용하는 것이 가능하다.

$$g(J_2, J_3) = J_2 \left(1 - 0.73 \frac{J_3^2}{J_2^3} \right) \quad (1a)$$

이 J_2 및 J_3 는 편차 응력 텐서 s 의 항으로 다음과 같이 표현된다.

$$J_2 = \frac{1}{2}|s|; \quad J_3 = \det(s)$$

$$s_i = \sigma_i - \sigma_m \delta_{ij}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1b)$$

여기서 σ_k 및 s_k ($k=1, \dots, 3$)는 각각 코시 응력 텐서 σ 및 편차 응력 텐서 s 의 주 값을 나타낸다. Tresca [14]는 최대 전단 응력 값이 일정한 값에 달하면 항복이 일어난다고 하여 등방성 항복함수를 처음 제

안했다. Von Mises는 등방성 재료에 대해 널리 사용되는 다음과 같은 항복함수를 제안하였다[15].

$$J_2 = k^2 \quad (2)$$

여기서 k 는 순수 전단에서의 항복응력이며 $k = \sigma_T / \sqrt{3}$ 으로 계산되며 σ_T 는 단축 인장의 항복응력이다.

Drucker[16]는 응력 불변량 J_2 뿐만 아니라 J_3 도 포함하는 항복함수를 제안하였다. Drucker의 항복 기준의 주목할만한 특성은 항복곡면이 Tresca와 Von Mises 항복곡면 사이에 위치한다는 것이다. Drucker의 항복함수는 특히 알루미늄 판재의 소성거동을 잘 예측하는 것으로 알려져 있다.

냉간 압연 강판 재료에 대한 고유한 소성 이방성 특성을 설명하기 위해 다양한 형태의 이방성 항복함수가 제안되었다.(Hill-48(1948) [17], Hill-79(1979) [18], Hosford(1979) [19], Yld2000-2d (2000) [20], Cazacu-Barlat (2001) [21], Yld2004-18p (2004) [22] 및 Banabic (2010 및 2020) [23, 24]). 이들 항복함수는 2차 항복함수와 비2차 항복함수의 두 그룹으로 분류할 수 있다. Von Mises와 Hill-48(1948)은 2차 항복함수의 예이고 앞서 언급한 다른 예는 비2차 항복함수이다. 비2차 항복함수 중 하나인 Cazacu-Barlat(2001) 항복함수는 등방성 Drucker 항복기준을 확장하여 개발되었다. 그들은 J_2 및 J_3 의 등방성 버전을 각각 J_2^0 및 J_3^0 의 이방성 버전으로 교체하였다.

$$(J_2^0)^3 - c(J_3^0)^2 = k^6 \quad (3a)$$

여기서 c 는 상수이다. Cazacu-Barlat 항복함수(2001)는 알루미늄 판재에 대한 항복응력과 랭크포드의 이방성 계수값(Lankford's anisotropic coefficient R-value) 모두에 대해 합리적인 예측을 보여주었다. 그러나 이 항복함수는 J_2 및 J_3 라는 두 개의 항에 하나의 함수 $\phi(J_2, J_3)$ 만 사용하기 때문에 판재의 이방성을 잘 설명하는 데 적합하지 않다[25]. 한편 Yld2004-18p 항복함수는 이방성 소성변형 거동의 정확한 예측이 가능하지만 이방성 계수를 동정하기 위해서는 많은 실험을 요구한다. Cazacu-Barlat 항복함수(2001) 형태와 유사한 형식으로 Lou 와 Yoon(2017)[26]은 선형 변환된 응력 텐서로, $s' = L's$, 제 2 및 제 3 불변량을 나타내어 등방성 Drucker 항복함수를 수정하였다.

$$f(\sigma) = [(J_2')^3 - (J_3')^2]^{1/6} \quad (3b)$$

$$J_2' = \frac{1}{2}s's', J_3' = \det(s')$$

또한 항복함수와 다른 소성 포텐셜함수를 도입한 비연합유동법칙(non-associated flow rule, non-AFR)의 유효성에 대해서도 논하였다. 한편 Karafillis와 Boyce[27]는 이방성 항복함수를 구성하기 위해 이방성 선형변환에 대한 개념을 처음 도입하였다.

최근 Cazacu(2018) [28]는 등방성 불변량이 J_2^0 및 J_3^0 인 집합조직의 금속 재료에 대해 다음과 같은 항복함수와 등가응력을 제안하였다.

$$(J_2^0)^4 - \alpha(J_2^0) \times (J_3^0)^2 = k^8$$

$$\bar{\sigma} = B[(J_2^0)^4 - \alpha(J_2^0) \times (J_3^0)^2]^{1/8} \quad (4)$$

티타늄 및 마그네슘 합금과 같은 HCP(육각조밀층진구조) 금속의 경우에 쌍정(twin)을 통한 소성 변형은 궁극적으로 인장과 압축 하중 조건에서 뚜렷한 항복강도 차이를 나타낸다.(강도 차이 효과(strength difference effect, SD 효과)[29-36]. 이러한 인장과 압축에서의 항복응력의 비대칭 소성 거동은 항복곡면 형상에서 쉽게 확인할 수 있다. HCP 금속의 변형 거동을 확인하기 위해서는 단축 및 2축 인장뿐만 아니라 압축 시험과 같은 몇 가지 변형모드 하에서 실험을 수행해야 한다. HCP 재료에서 집합조직의 진화 및 쌍정은 특정 소성 변형 거동에 크게 영향을 미치는 것으로 알려져 있다.

Cazacu 와 Barlat(2004)[38]은 응력 불변량 J_2 및 J_3 에 기초한 다음과 같은 이방성 항복함수를 제안했다. 이 항복함수에서는 응력 편차의 제 2 불변량 및 제 3 불변량을 응력에 대한 홀수 함수로 나타내는 것에 의해 HCP 재료에서 나타나는 SD 효과를 설명하였다.

$$f = J_2^{3/2} - cJ_3 \quad (5)$$

압력에 둔감한 금속에 대한 이방성과 인장/압축 비대칭을 모두 표현하기 위해 Cazacu 등은 (2006) [39] 응력 편차에 대한 4차 선형변환을 사용하여 또 다른 항복함수(CPB'06)를 제안하였다. 또한 Gao(2011) [40] 는 다음과 같이 제 1 불변량 I_1 , 제 2 불변량, J_2 , 제 3 불변량 J_3 세 가지 모두의 효과를 결합한 항복함수를 제안하였다.

$$f = a(bl_1^6 + 27J_2^3 + cJ_3^2)^{1/6} \quad (6)$$

한편 Khan et al. (2012) [41]은 인장 및 압축 테스트에서 Ti-6Al-4V 합금의 실험적 조사를 기반으로 온도와 변형률 속도의 영향을 모두 고려하고, SD 효과를 설명하기 위해 정규화된 제 3 불변량을 포함한 이방성 항복조건을 제안하였다. 최근에 Yoon(2014)[42]은 세 가지 불변량을 기반으로 다음과 같은 항복함수를 제안하였다.

$$f = a \left[bl_1 + (J_2^{3/2} - cJ_3)^{1/3} \right] \quad (7)$$

본 연구에서는 제 2 및 제 3 이방성 불변량 (즉, J_2^0 및 J_3^0)을 두 매개변수 α 와 β 를 결합시킨 새로운 등방성 항복함수를 제안하고, 이 새로운 항복함수에서 α 및 β 매개변수의 효과에 대해 설명한다. 또한 제안된 항복조건의 유효성을 확인하기 위해 AA6016-T4, AA2090-T3 및 순수 티타늄 판재에 대해서 항복곡면 형상을 예측하였고, 압연 방향(RD)에서 가로 방향(TD)으로 15° 마다 일축 인장 하에서 판재의 이방성 (정규화된 항복응력 σ_i/σ_0 과 랭크포드의 이방성 계수값 R-값) 을 실험 데이터와 비교하였다.

2. 제안된 모델

2.1 제안된 이방성 항복함수

본 연구에서는 등방성 판재 재료에 대해 다음과 같이 J_2 와 J_3 를 포함하며 정수압력 크기에 의존하지 않는 항복함수(Kim-Van 항복함수로 명명)를 제안한다.

$$f \equiv J_2^6 + \alpha J_3^4 + \sum_{j=1}^2 \beta_j \left(J_2^{(6-\frac{3}{2})j} \times J_3^j \right) = k^{12} \quad (8)$$

여기서 J_2 와 J_3 은 서론에서 논의된 불변량, k는 순수 전단에서의 항복응력, α 와 β_j 는 재료 상수이다. 여기서 $j = 1$ 에서 $\beta_1 \neq 0$ 이고 $\beta_2 = 0$ 인 경우 제안된 항복함수는 비대칭 항복함수(asymmetric yield function, KV'21)를 나타낸다. 이 비대칭 항복함수는 티타늄, 마그네슘과 같은 HCP 재료에 적합하다. 비대칭 항복함수는 다음과 같이 표현된다.

$$f \equiv J_2^6 + \alpha J_3^4 + \beta_1 \left(J_2^{\frac{9}{2}} \times J_3 \right) = k^{12} \quad (9)$$

한편 $j = 2$ 에서 $\beta_1 = 0$ 이고 $\beta_2 \neq 0$ 인 경우 제안된 항복함수는 대칭 항복함수(symmetric yield function, KV'20)를 나타낸다. 이 대칭 항복함수는 철강 및 알루미늄과 같은 BCC(체심입방구조) 및 FCC(면심입방구조) 재료에 적합하며 다음과 같이 표현된다.

$$f \equiv J_2^6 + \alpha J_3^4 + \beta_2 (J_2^3 \times J_3^2) = k^{12} \quad (10a)$$

$$f \equiv (J_2^3 + \alpha_1 J_3^2)^2 = (J_2^6 + 2\alpha_1 J_2^3 J_3^2 + \alpha_1^2 J_3^4) = k^{12} \quad (10b)$$

여기서, α 와 β_2 는 각각 $\alpha = \alpha_1$ 과 $\beta_2 = \alpha_1^2$ 로 표현될 수 있다.

직교 이방성 판재 재료에 대해서 제 2 및 제 3 불변량이 이방성을 고려하도록 일반화한 것은 다음과 같이 표현된다.[14, 19].

$$J_2^0 = \frac{a_1}{6} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{a_2}{6} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2$$

$$+ \frac{a_3}{6} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + a_4 \sigma_{xy}^2 + a_5 \sigma_{xz}^2$$

$$+ a_6 \sigma_{yz}^2$$

$$J_3^0 = \frac{1}{27} (b_1 + b_2) \sigma_{xx}^3 + \frac{1}{27} (b_3 + b_4) \sigma_{yy}^3 + \frac{1}{27} [2(b_1 + b_4) - b_2 - b_3] \sigma_{zz}^3 - \frac{1}{9} (b_1 \sigma_{yy} + b_2 \sigma_{zz}) \sigma_{xx}^2 - \frac{1}{9} (b_3 \sigma_{zz} + b_4 \sigma_{xx}) \sigma_{yy}^2 - \frac{1}{9} [(b_1 - b_2 + b_4) \sigma_{xx} + (b_1 - b_3 + b_4) \sigma_{yy}] \sigma_{zz}^2 + \frac{2}{9} (b_1 + b_4) \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xz}^2}{3} [2b_9 \sigma_{yy} - b_8 \sigma_{zz} - (2b_9 - b_8) \sigma_{xx}] - \frac{\sigma_{xy}^2}{3} [2b_{10} \sigma_{zz} - b_5 \sigma_{yy} - (2b_{10} - b_5) \sigma_{xx}] - \frac{\sigma_{yz}^2}{3} [2b_7 \sigma_{xx} - b_6 \sigma_{yy} - (2b_7 - b_6) \sigma_{zz}] + 2b_{11} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} \quad (11)$$

위의 식에서 $a_i (i = 1, \dots, 6)$ 와 $b_j (j = 1, \dots, 11)$ 는 이방성 계수이다.

이러한 이방성 불변량을 사용하여 비대칭 및 대칭에 대한 이방성 항복함수(즉, 각각 식 (12) 및 (13))는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f(J_2^0, J_3^0) \equiv (J_2^0)^6 + \alpha (J_3^0)^4 + \beta (J_2^0)^2 \times J_3^0 = k^{12} \quad (12)$$

$$f(J_2^0, J_3^0) \equiv (J_2^0)^6 + \alpha (J_3^0)^4 + \beta (J_2^0)^3 \times (J_3^0)^2 = k^{12} \quad (13)$$

$a_i = b_j = 1$ 이면 방정식 (12)와 (13)은 등방성 항복함수가 된다.

식 (13)에서 유효 응력($\bar{\sigma}$)은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = V [(J_2^0)^6 + \alpha (J_3^0)^4 + \beta (J_2^0)^3 \times (J_3^0)^2]^{\frac{1}{12}} \quad (14)$$

여기서, V 는 압연 방향을 따라 일축 인장으로부터 유효 응력의 편차를 보정하기 위한 상수이고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V = \frac{1}{\left[\left(\frac{a_1 + a_3}{6} \right)^6 + \alpha \left(\frac{b_1 + b_2}{27} \right)^4 + \beta \left(\frac{a_1 + a_3}{6} \right)^3 \left(\frac{b_1 + b_2}{27} \right)^2 \right]^{1/12}} \quad (15)$$

식 (10a)의 항복함수 f 를 소성포텐셜 g 로 간주한 연합유동법칙(associated flow rule, $g = f$)으로부터 소성 변형률 증분은 소성포텐셜의 응력에 대한 편미분으로 다음과 같이 나타내진다.

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (16)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left\{ [6(J_2^0)^5 + 3\beta (J_2^0)^2 \times (J_3^0)^2] \frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{ij}} + [4\alpha (J_3^0)^3 + 2\beta (J_2^0)^3 \times J_3^0] \frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{ij}} \right\} d\lambda$$

주 편차 응력값(s_1, s_2, s_3)을 사용하는 기준에 제안된 다른 유형의 이방성 항복함수들과 비교하여 본 연구에서 제안된 항복함수의 장점은 변형률 증분을 결정하기 위한 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ 를 직접 계산할 수 있다는 것이다.

평면 응력 상태($\sigma_3 = 0$)에서 평면(x-y)의 등 2축 인장 하, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b$, 에서 정규화된 항복응력은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{a_2 + a_3}{6} \right)^6 + \alpha \left(\frac{2b_1 - b_2 - b_3 + 2b_4}{27} \right)^4 + \beta \left(\frac{a_2 + a_3}{6} \right)^3 \times \left(\frac{2b_1 - b_2 - b_3 + 2b_4}{27} \right)^2 \right\}^{-1/12} \quad (17)$$

한편 이방성 판재의 이방성 특성을 나타내는 랭크포드 계수값 R_θ 는 다음과 같이 표현된다.

$$R_\theta = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} (\sin^2 \theta) - \frac{\sin 2\theta}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} (\cos^2 \theta)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}} \quad (18)$$

등 2축 인장에서 랭크포드 계수값 R_b 는 다음 형식으로 계산된다.

$$R_b = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}} \quad (19)$$

또한, 압연 방향과 하중 방향 사이의 각도 θ 에 따른 정규화된 단축 항복응력 σ_θ/σ_0 (Eq. (13) 참조)은 $\sigma_{xx} = \sigma_\theta \cdot \cos^2\theta$, $\sigma_{yy} = \sigma_\theta \cdot \sin^2\theta$ and $\sigma_{xy} = \sigma_\theta \cdot \sin\theta \cos\theta$ 관계를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_\theta/\sigma_0 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{6} \right) \cos^4\theta + \left(a_4 - \frac{a_1}{3} \right) \cos^2\theta \sin^2\theta + \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6} \right) \sin^4\theta \right]^6 + \alpha \left[\cos^6\theta \frac{b_1+b_2}{27} + \sin^6\theta \frac{b_3+b_4}{27} - \right. \\ & \left. \cos^4\theta \sin^2\theta \frac{b_1+3b_5-6b_{10}}{9} - \cos^2\theta \sin^4\theta \frac{b_4-3b_5}{9} \right]^4 + \\ & \beta \left[\left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_3}{6} \right) \cos^4\theta + \left(a_4 - \frac{a_1}{3} \right) \cos^2\theta \sin^2\theta + \left(\frac{a_1}{6} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{a_2}{6} \right) \sin^4\theta \right]^3 \times \left[\cos^6\theta \frac{b_1+b_2}{27} + \sin^6\theta \frac{b_3+b_4}{27} - \right. \\ & \left. \left. \cos^4\theta \sin^2\theta \frac{b_1+3b_5-6b_{10}}{9} - \cos^2\theta \sin^4\theta \frac{b_4-3b_5}{9} \right]^2 \right\}^{-1/12} \quad (20) \end{aligned}$$

2.2 항복함수의 볼록성 조건

재료가 소성변형하는 동안에 내부의 소성일이 발생되어야 하므로 항복곡면이 볼록하다고 가정한다. (항복곡면의 볼록성(convexity)) 본 연구에서 제안된 항복조건의 볼록성을 확인하기 위해 항복곡면이 볼록한 응력 범위를 확인하였다. 등방성 항복함수가 볼록하려면 α 및 β 의 변동 범위는 $\alpha = 0$ 및 $\beta = [-4, 12]$; $\beta = 0$ 및 $\alpha = [-12, 20]$; $\alpha = (0, 3]$ 및 $\beta = (0, 12]$, $\alpha = [-6, 0]$ 및 $\beta = [-4, 0]$, $\alpha = (0, 20]$ 및 $\beta = [-4, 0]$; 및 $\alpha = [-12, 0]$ 및 $\beta = (0, 12]$ 이어야 한다. 이 결과는 전단 응력 평면 $\sigma_{xy} = 0$ 을 갖는 대칭 항복함수의 경우에 대한 것이다.

제안된 항복함수의 볼록성은 $f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy})$, $f(\sigma_{xx}, \sigma_{xy})$, $f(\sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ 의 볼록성을 확인함으로써 만족한다. 수학적으로 각 $f(\sigma_i, \sigma_j)$ 함수의 볼록성을 보장하려면 해당 헤세 행렬 H 가 양의 준정부호(positive

semidefinite)인지 확인해야 한다[44-46].

$$\begin{aligned} H_1(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy} \partial \sigma_{xx}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx} \partial \sigma_{yy}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy}^2} \end{bmatrix} \\ H_2(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xx}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy} \partial \sigma_{xx}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma_{xx} \partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma_{xy}^2} \end{bmatrix} \\ H_3(\sigma_{yy}, \sigma_{xy}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy} \partial \sigma_{yy}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{yy} \partial \sigma_{xy}} & \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{xy}^2} \end{bmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

헤세 행렬 H 의 양의 준정부호 속성은 행렬 고유값의 양수값임을 보이므로써 증명할 수 있다. 이 분석을 바탕으로 본 연구에서 제안된 항복함수는 볼록성 조건을 만족하는 것으로 확인되었다.

2.3 평면응력 하에서 항복곡면에 대한 α 와 β 의 영향

제안된 등방성 항복함수의 매개변수 α 와 β 의 역할을 확인하기 위해 이들 매개변수의 여러 조합을 채택하여 항복곡면의 형태를 관찰하였다. Fig. 1에 각 매개변수의 효과를 확인하기 위해 제안된 항복함수로부터 예측된 항복곡면을 나타내었다. 두 매개변수가 모두 0이면 제안된 항복함수는 미세스 항복곡면이 된다. α 와 β 가 모두 음수이면 항복곡면은 미세스 항복곡면 내부에 있는 반면, α 와 β 가 모두 양수이면 항복곡면은 미세스 항복곡면 외부에 있다. 그럼에도 불구하고 두 경우 모두 항복 궤적은 항상 (1, 0), (0, 1) 및 등 2축 하중 (1, 1)의 세 점을 통과한다. α 가 $\alpha = -12$ 및 $\alpha = 12$ 로 변할 때 항복곡면의 모양은 크게 변하지 않는다(Fig.1a). 대조적으로, β 가 $\beta = -3$ 및 $\beta = 3$ 으로 변할 때 항복곡면의 모양은 크게 변한다(Fig.1b). 즉 본 연구에서 제안된 항복곡면에서는 매개변수 β 가 α 보다 항복곡면의 곡률(curvature)에 더 영향을 주는 것을 알 수 있다.

또한, 제안된 항복함수의 유연성을 파악하기 위해 두 매개변수의 다양한 조합에 대해서 검토하였다. Fig.2에 매개변수 α 와 β 에 따라 다른 모양의 항복곡면을 나타내었다. α 및 β 가 음수이면($\alpha = -2$ 및 $\beta = -2$) 등 2축 인장 영역에서 항복곡면의 곡률이 작아지는 것을 알 수 있다. 즉, 본 연구에서 제안한 항복곡면은 두 매개변수 α 와 β 를 적당히 결합시키는 것으로

부터 다양한 형태의 항복곡면을 표현할 수 있다는 것을 알 수 있다.

3. 제안된 항복함수 모델의 적용

3.1 AA6016-T4 판재에 적용

Cazacu-Barlat et al. (2001) [21, 47, 48]의 실험결과로부터 AA6016-T4 판재의 단축 인장 및 액압 벌지 실험 데이터를 항복곡면의 동정에 활용하였다. 항복곡면의 형상을 결정하기 위해서는 통상의 균일변형 모드의 단축인장, 순수전단 그리고 액압 벌지 실험을 이용하는 방법과 십자형 시편(cruciform specimen)을 이용한 2축인장실험 방법이 널리 이용되고 있다.[43]

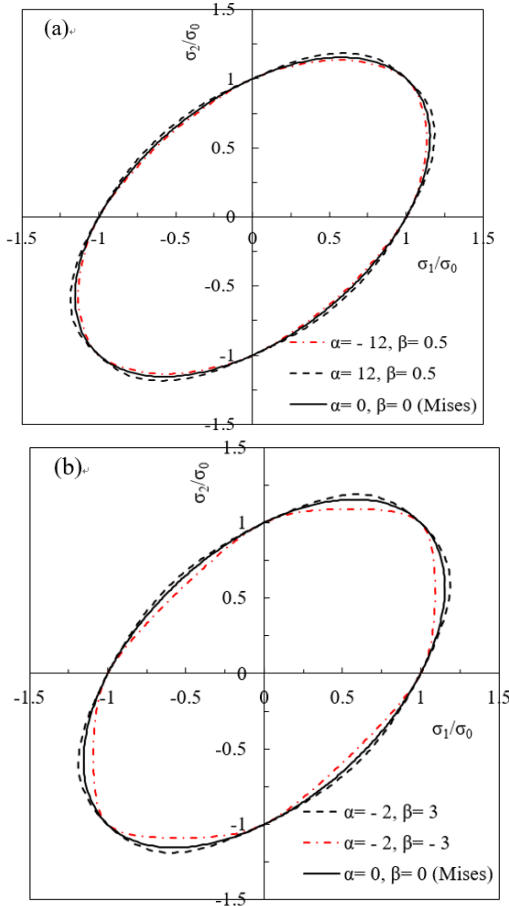


Fig. 1 Yield locus according to proposed isotropic yield function for different values of parameters α and β : (a) Effect of parameter α , and (b) effect of parameter β

제안된 항복함수의 매개변수들을 동정하기 위하여 다음과 같은 오차 함수를 사용하여 오차값을 최소화하는 과정을 거쳤다.

$$F = \sum_i^n \eta_i \left(1 - \frac{(\sigma_\theta)_i^{th}}{(\sigma_\theta)_i^{data}}\right)^2 + \sum_j^m \gamma_j \left(1 - \frac{(R_\theta)_j^{th}}{(R_\theta)_j^{data}}\right)^2 + \delta \left(1 - \frac{(\sigma_b)_l^{th}}{(\sigma_b)_l^{data}}\right)^2 + \nu \left(1 - \frac{(R_b)_l^{th}}{(R_b)_l^{data}}\right)^2 + \sum_k^t \chi_k \left(1 - \frac{(l)_k^{th}}{(l)_k^{data}}\right)^2 \quad (22)$$

여기서, n 과 m 은 각각 단축 인장실험에서 구한 θ 방향에서의 항복응력 σ_θ 및 랭크포드 계수값 R_θ 의 수를 나타낸다. σ_b 및 R_b 는 각각 등 2축 인장의 항복응력 및 랭크포드 계수이다. t 는 다양한 하중비에서 실험한 2축 인장 및 압축의 수를 나타내고, 위 첨자 th 와 $data$ 는 각각의 값이 실험값인지 계산된 값인지를 나타낸다.

또한 $\eta_i, \gamma_j, \delta, \nu$ 및 χ_k 는 오차함수에 기여하는 우변의 각 항에 대한 가중치 인자이다. 이들 가중치는 본 연구에서 실험결과가 방정식의 수 보다 많아서 어떤 인자를 더 우선으로 고려하여 a_i 와 b_j 를 결정할 것인가에 따라서 사용자가 임의로 정하는 값이다. [49,50,51] Habraken 등 [50]은 이들 가중치 인자를 1.0으로 모두 동일하게 하였으며, Nomura와 Kuwabara [51]은 1000~0.1 범위에서 항복응력과 이방성계수를 가장 잘 핏팅하는 값을 사용하였다. 본 연구에서도 문제에 따라 적절한 값을 사용하여 국부적인 최소값에 빠지지 않도록 하였다. l 및 l' 은 각각 주응력 공간에서 원점과 실험값 및 예측값 사이의 거리이다. 즉, $l = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

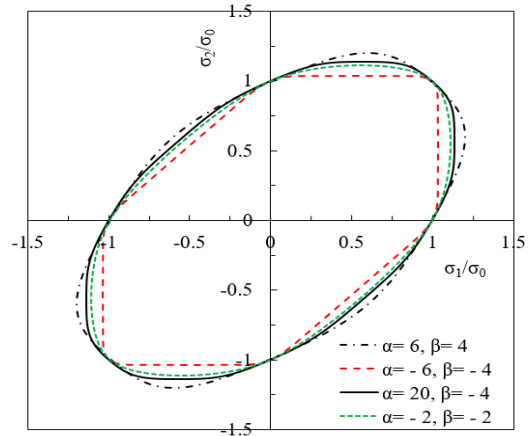


Fig. 2 General yield loci shapes obtained using the isotropic yield function

KV'20과 Cazacu-Barlat 항복함수(2001)를 이용하여 AA6016-T4 판재에 대한 항복곡면, 정규화된 항복응력, 랭크포드의 이방성 계수값을 예측하였고 Fig. 3a, 3c 및 3d에 실험 데이터와 함께 나타내었다. 평면응력 $\sigma_3 = 0$ 에 대한 KV'20 항복함수에 사용된 계

수는 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 및 90° 방향의 인장실험에서 구한 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값 중에서 10개를 택하고 등 2축 인장에서의 항복응력 $\sigma_b/\sigma_0 = 1.0$ 와 및 랭크포드 계수값 $R_b = 1.05$ [47] 을 사용하여 오차 함수(22)를 최소화하여 동정하였다. 이 계수를 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Anisotropic coefficients of the Kim–Van and the Cazacu–Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet (16 equations for fitting)

Parameters	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	b ₁	b ₂
Kim–Van	1.039	1.018	0.729	0.720	0.722	2.006
Cazacu–Barlat	0.334	0.815	0.815	0.420	0.040	-1.205

b ₃	b ₄	b ₅	b ₁₀	α	β_2	c	Error(F)
2.825	0.251	1.574	1.633	1.546	2.004	×	0.0006
-0.958	0.306	0.153	-0.020	×	×	1.4	0.0007

마찬가지로 Cazacu-Barlat 항복함수에 사용된 계수는 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ 및 90° 방향에서 실험한 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값 과 등 2축 인장 항복응력 $\sigma_b/\sigma_0 = 1.0$ [21]을 사용하여 동정하였다. AA6016-T4 판재에 대한 Kim-Van 항복함수로부터 구한 항복곡면을 Fig. 3b에 나타내어 항복곡면의 형상을 파악하였다.

Fig.3의 결과로부터 KV'20 모델에서 예측한 항복곡면, 정규화된 항복응력, 각도 θ 에 따른 랭크포드 계수값은 낮은 오차값(즉, KV'20의 경우 $F = 0.0006$, Cazacu-Barlat 모델의 경우 $F=0.0007$)을 보이고 실험 결과를 잘 나타내고 있음을 알 수 있다. 그러나 각도 θ 에 따라 예측된 단축 항복응력 σ_b/σ_0 은 $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ 및 90° 에서 해당 실험 데이터와 일부 일치하지 않고 있다. 이것은 실험 데이터를 피팅하기 위해 16개의 방정식을 사용하면 과적합(overfitting)이 발생하기 때문으로 생각된다.

이런 과적합을 방지하기 위해 Kim-Van 항복조건식에서 이방성 계수들은 식 (22)에서 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 에서의 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값 그리고 등 2축 인장에서의 항복응력 $\sigma_b/\sigma_0 = 1.0$ 및 랭크포드 계수값 $R_b = 1.05$ [47], 총 12개의 실험 데이터를 이용하여 동정한다. 그 결과를 Table 2에 요약하였다.

Fig.4a, 4b 및 4d에 Cazacu-Barlat 항복함수를 사용하여 KV'20 모델에서 예측된 항복곡면, 정규화된 항복응력 및 랭크포드 계수값을 각각 나타내었다. Fig. 4b는 KV'20 항복함수에서 전단응력의 영향을 고려한 항복곡면의 형상을 보여준다.

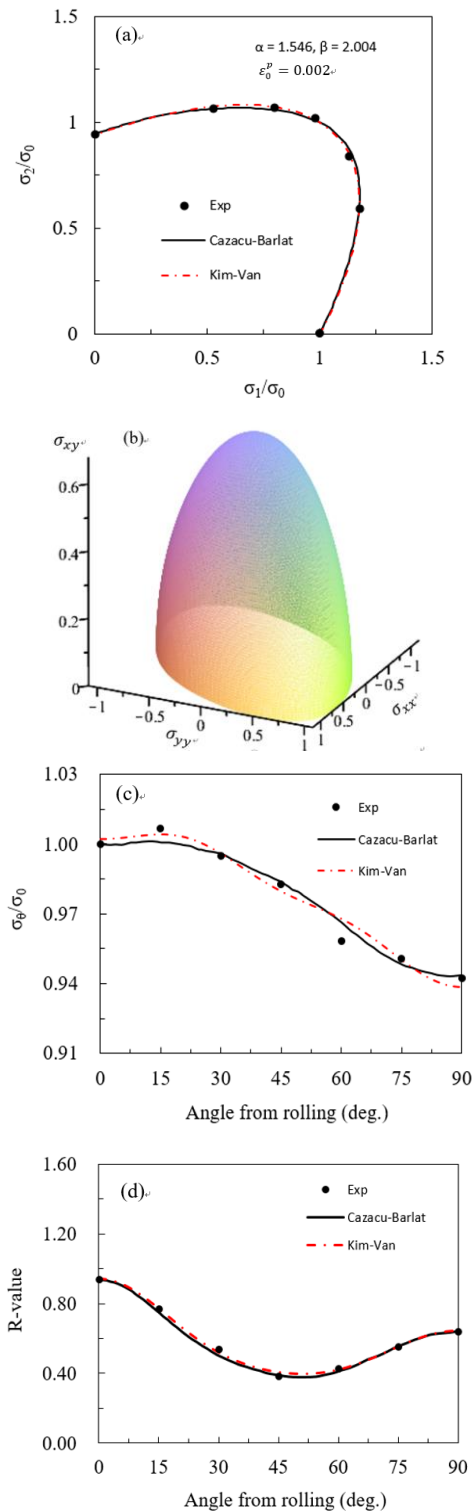


Fig. 3 Predicted anisotropy according to the Kim–Van and the Cazacu–Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet with 16 equations for fitting (a) yield locus, (b) 3D yield surface, (c) normalized uniaxial yield stresses, and (d) R- values

Fig.4b는 KV'20 항복함수에서 전단응력의 영향을 고려한 항복곡면의 형상을 보여준다. 이 Fig. 3에서 KV'20 항복함수에서 예측된 항복곡면, 정규화된 항복응력 및 랭크포드 계수값이 매개변수를 동정하기 위해 취한 각도에서 실험과 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 이 경우의 오차값($F = 0.0013$)은 Cazacu-Barlat 모델($F = 0.0007$)보다 크다. 그 이유는 다른 데이터 $\theta = 30^\circ$ 및 60° 에서의 부정확한 예측 때문이다. 따라서 재료 거동의 예측을 개선하려면 재료별로 적절한 실험 데이터를 취하는 것이 필요하다는 알 수 있다.

이 재료의 경우에 KV'20 항복함수로 재료의 소성 거동을 잘 예측하기 위해서는 단축 인장 시험에서 10개의 실험 데이터와 등 2축 인장 시험에서 2개의 실험 데이터 사용(즉, $\theta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$ 에서의 단축 인장 시험) 및 등 2축 인장 시험)을 사용하는 것이 바람직하다.

Table 2 Anisotropic coefficients in the Kim–Van and the Cazacu–Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet (12 equations for fitting)

Parameters	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2
Kim–Van	1.020	1.035	0.787	0.685	0.747	1.871
Cazacu–Barlat	0.334	0.815	0.815	0.420	0.040	-1.205

b_3	b_4	b_5	b_{10}	α	β_2	c	Error(F)
2.744	0.296	1.720	1.656	1.590	1.894	x	0.0013
-0.958	0.306	0.153	-0.020	x	x	1.4	0.0007

3.2 AA2090–T3 판재에 적용

이전 연구들에서 AA2090-T3 [52, 53] 판재의 경우 Yld2004-18p 함수를 사용하여 강한 이방성 재료의 소성 이방성 특성을 성공적으로 묘사하였다. 그러나 Yld2004-18p 항복함수는 매개변수 동정을 위해서는 많은 실험을 필요로 한다.

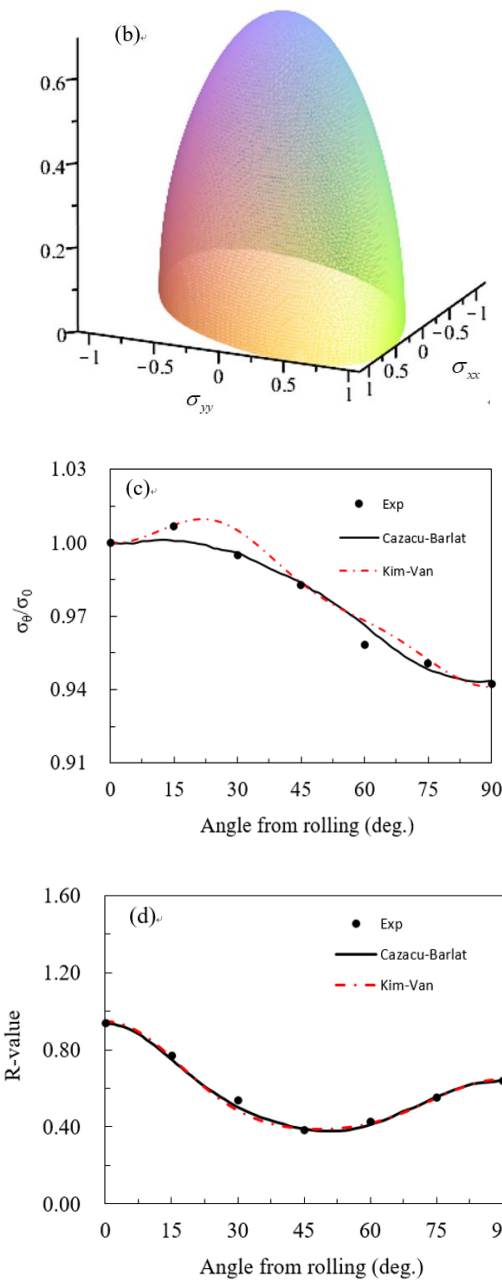
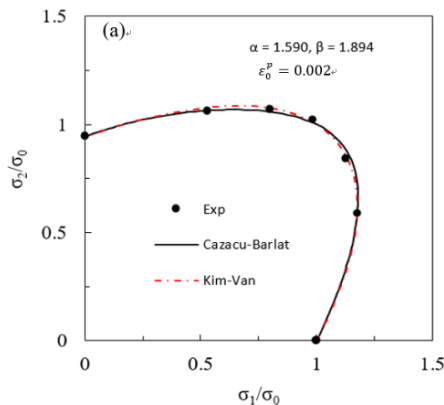


Fig. 4 Predicted anisotropy according to the Kim–Van and the Cazacu–Barlat yield functions (2001) for AA6016-T4 sheet with 12 equations for fitting (a) yield locus, (b) 3D yield surface, (c) normalized uniaxial yield stresses, and (d) R-values

여기서는 강한 이방성 재료에 대한 KV'20 항복함수의 적용가능성을 확인하기 위해 AA2090-T3 판재에 대해서 예측된 항복곡면, 정규화된 단축 항복응력 σ_b/σ_0 및 랭크포드 계수값을 실험결과와 비교하였다.

KV'20 항복함수의 매개변수를 동정하기 위해 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 45^\circ$ 및 90° 에 따른 단축 인장 항복응력 및 랭크포드 계수값, 등 2축 인장 항복응력 $\sigma_b/\sigma_0 = 1.035$, 그리고 2축 인장의 3가지 하중비(즉 $\sigma_x:\sigma_y = 1:2, 4:3, 2:1$)에서의 2축 항복응력값을 이용하였다. 한편, Cazacu 2018 항복함수(식(4) 참조)의 계수는 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 방향의 단축인장 항복응력과 랭크포드 계수값, 등 2축 항복응력 $\sigma_b/\sigma_0 = 1.035$ 을 사용하여 오차 함수(22)를 최소화하여 동정하였다. 두 항복함수의 계수를 Table 3에 나타내었다.

Fig.5a, 5c, 5d에 KV'20 및 Cazacu 2018 항복함수에서 예측된 항복곡면, 정규화된 항복응력, 랭크포드 계수값을 실험 데이터와 함께 나타내었다.

Fig.5a에서 항복곡면의 모양은 등 2축 인장에서 상당히 뾰족한 형태를 보이고 랭크포드 계수값에서 강한 이방성 거동이 나타나고 있는 것을 알 수 있다(Fig.5d). KV'20 항복함수의 예측은 실험과 잘 일치한다. 두 가지 항복함수를 사용하여 재료 거동에 대한 예측 가능성을 평가하기 위해 오차값을 계산하였다. 오차값 0.0837은 KV'20 항복함수에서 계산한 것이며 Cazacu 2018 항복함수는 계산할 수 없었다. 그 이유는 이 항복함수는 항복곡면(Fig.5a)에서 볼 수 있듯이 Cazacu 2018 항복함수의 경우에 이 경우에 불록성이 만족하지 않았기 때문이다.

두 항복함수 간의 불록성의 차이를 비교하기 위해 헤세 행렬(H)을 계산하였다. 행렬 H의 첫 번째 고유값은 항상 두 번째 고유값보다 크거나 같다. 따라서 이 연구에서는 두 번째 고유값(λ_2)만 고려한다.

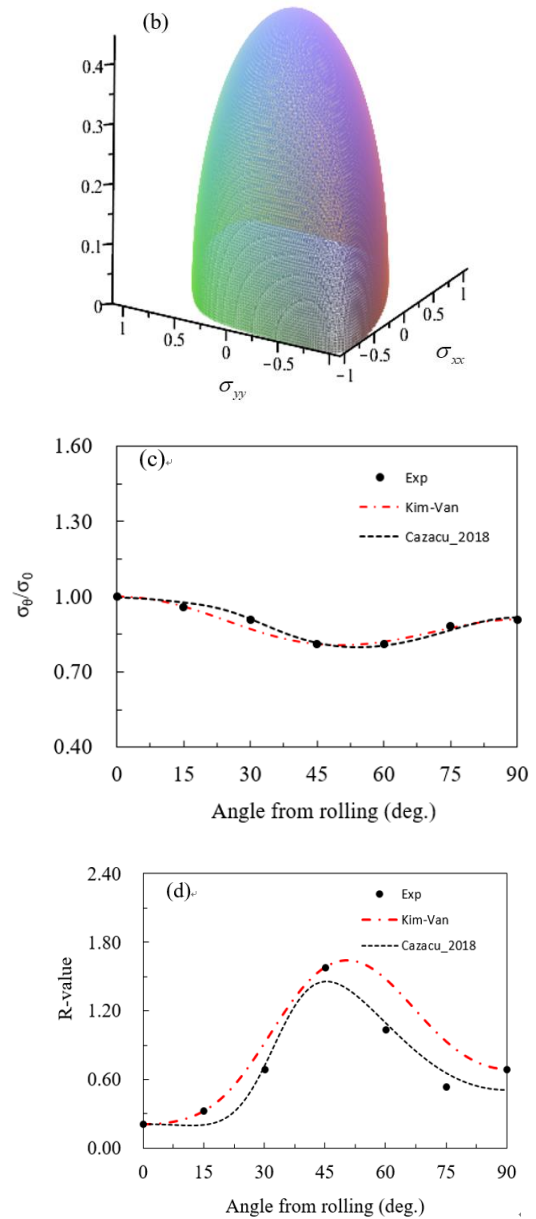
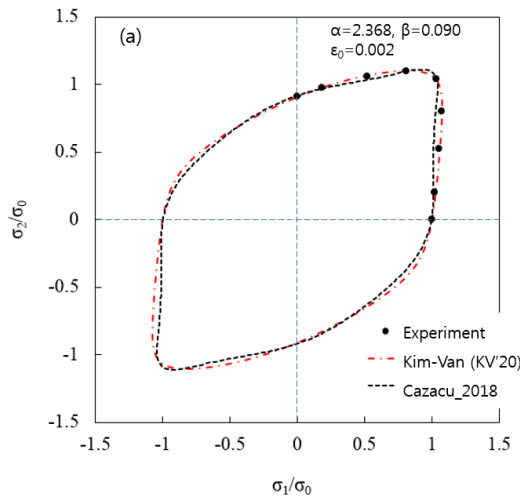


Fig. 5 Predicted anisotropy according to the Kim-Van and the Cazacu 2018 yield functions for AA2090-T3 sheet with 12 equations for fitting (a) yield locus, (b) 3D yield surface, (c) normalized uniaxial yield stresses, and (d) R-values

KV'20 항복함수의 경우는 $\sigma_1 = [-200, 200] MPa$ 및 $\sigma_2 = [-200, 200] MPa$ 인 범위에서 행렬 H의 두 번째 고유값이 항상 0보다 크거나 같다는 것을 알 수 있다(Fig.6a). 한편, Cazacu 2018 항복함수는 일부 조건에서 불록성을 만족하지 않았다(Fig.6b). 특히, $(\sigma_1, \sigma_2) = [200, 125] MPa$ 및 $(\sigma_1, \sigma_2) = [125, 200] MPa$ 범위에서 이 2차 고유값은 0보다 작다.

Fig.6c와 6d에 주 응력평면에서 제 2 불변량의 형상을 나타내었다. KV'20 항복함수의 경우 Fig. 6c와 같이 꼭짓점이 없는 형태가 매끄럽지만 Cazacu 2018 항복함수는 Fig. 6d와 같이 많은 돌기점을 가진다. 이 현상은 Cazacu 2018 모델을 사용하여 예측된 항복곡면이 강한 이방성 재료에 대한 불록성 조건을 충족하지 않는다는 것을 나타낸다. 이 결과로부터 본 연구에서 제안한 KV'20 항복함수에서 두 매개변수 α 와 β 의 조합은 강한 이방성 재료에 대한 불록성을 만족하는 항복곡면의 형상을 제어할 수 있다고 결론지을 수 있다. 즉, KV'20 항복함수는 항복곡면의 다양한 형태를 더 넓은 범위에서 제어할 수 있다.

Table 3 Anisotropic coefficients of the Kim–Van and the Cazacu 2018 yield functions for AA2090-T3 sheet

Parameters \circ	$a_{1\circ}$	$a_{2\circ}$	$a_{3\circ}$	$a_{4\circ}$	$b_{1\circ}$	$b_{2\circ}$
Kim–Van \circ	0.989 \circ	1.430 \circ	0.252 \circ	1.663 \circ	-0.544 \circ	-3.571 \circ
Cazacu 2018 \circ	0.779 \circ	1.596 \circ	1.427 \circ	1.813 \circ	2.009 \circ	0.255 \circ

$b_{3\circ}$	$b_{4\circ}$	$b_{5\circ}$	$b_{10\circ}$	$\alpha\circ$	$\beta_{2\circ}$	Error(F) \circ
0.065 \circ	0.337 \circ	-2.049 \circ	-2.148 \circ	2.368 \circ	0.090 \circ	0.0837 \circ
-0.99 \circ	0.646 \circ	1.589 \circ	2.735 \circ	-2.18 \circ	x \circ	x \circ

3.3 순수 티타늄 판재에 적용

HCP 결정 구조를 갖는 상용 순수 티타늄(CP Ti) 판재는 항복곡면에서 비대칭 형상을 나타낸다. CP Ti 재료의 비대칭 소성 항복 거동을 설명하기 위해 Yoon 등[42]은 새로운 항복함수를 제안하였고 일축 인장 및 압축을 수행했으며 항복함수를 확인하기 위해 등 2축 인장 및 압축 시험을 수행하였다.

Fig.7에 HCP 재료에 대해 식 (9)의 KV'21 비대칭 항복함수의 적용 가능성을 확인하기 위해 실험 데이터[42]와 Yoon 2014 항복함수를 함께 나타내었다.

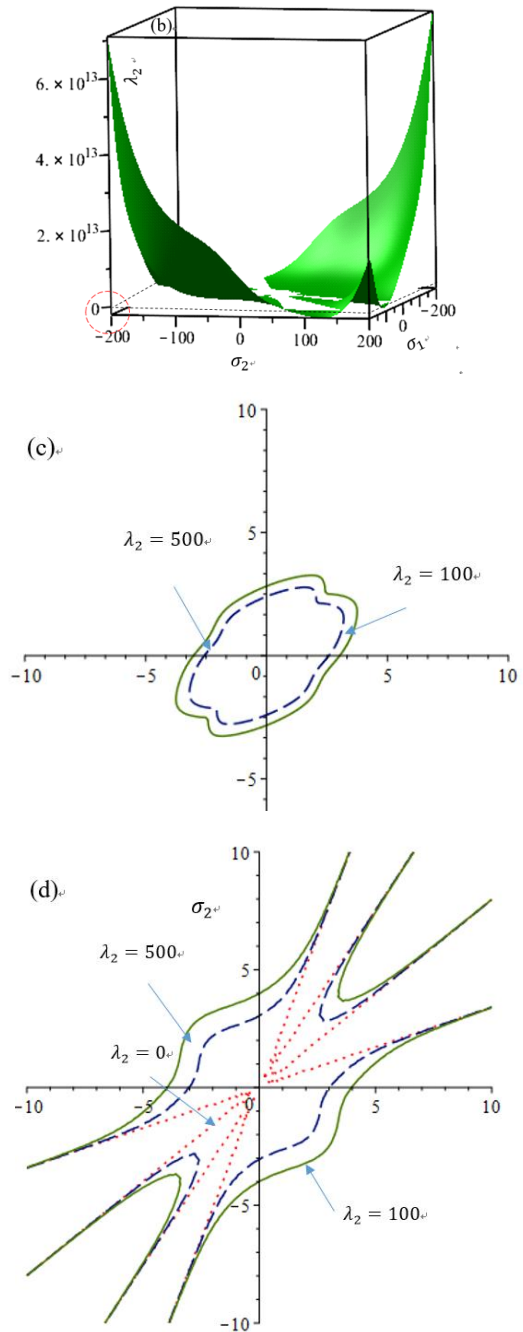
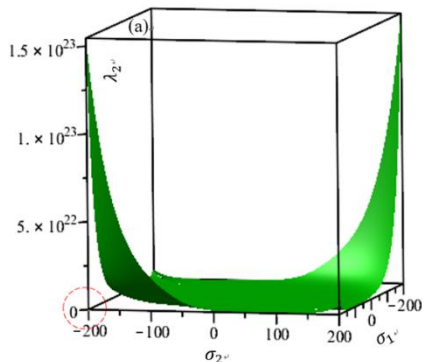


Fig. 6 Calculated second eigenvalue (λ_2) of Hessian matrix at $\sigma_{12} = 0$ for AA2090-T3 sheet: (a) Kim-Van yield function (b) Cazacu 2018 yield function (c) Contour lines of eigenvalue of Kim-Van model (d) Contour lines of eigenvalue of Cazacu 2018 model

KV'21 항복함수의 계수를 동정하기 위해서 세 개의 응력비(1:0, 1:1, 0:1)에 대한 2축 인장 데이터와 2

축 압축 데이터, 세 가지 응력비(2:1, 3:4, 1:2)에 대한 Yoon 2014 항복함수로 부터 예측한 데이터 그리고 등 2축 항복응력을 사용하여 오차 함수(22)를 최소화하였다. 도출된 매개변수를 Table 4에 나타내었다.

KV'21 및 Yoon 2014 항복함수에서 예측된 항복곡면은 등 2축 인장모드와 압축모드 하에서 약간 차이를 보이거나 전체적으로 실험결과와 잘 일치하는 것으로 판단된다.

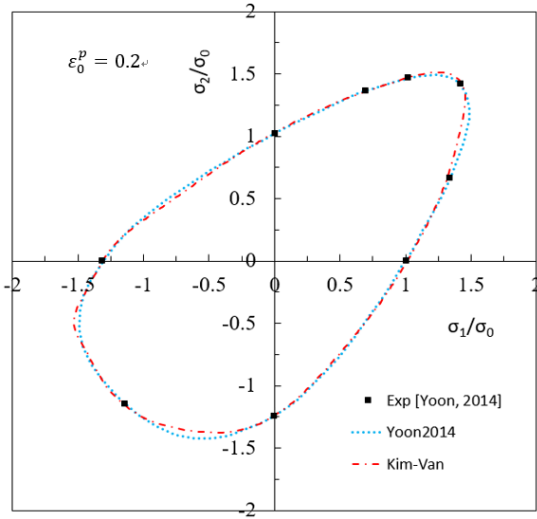


Fig. 7 Yield loci of high-purity α -titanium sheet predicted using the Kim-Van and the Yoon2014 yield functions

Table 4 Anisotropic coefficients of the Kim-Van yield function for high-purity α -titanium sheet

Parameters	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2
Kim-Van	1.014	0.673	0.660	x	1.159	1.765
b_3	b_4	b_5	b_{10}	α	β_1	
1.063	1.089	x	x	1.124	1.654	

따라서 본 연구에서 제안된 Kim-Van의 이방성 항복함수는 BCC와 FCC 결정구조에서 나타나는 대칭 항복거동뿐만 아니라 HCP 결정구조에서 나타나는 비대칭 항복거동도 잘 예측하는 것으로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 판재의 소성 이방성 거동을 잘 표현할 수 있도록 두 개의 매개변수 α 및 β 를 포함하고 J2 및 J3 불변량으로 표현되는 새로운 이방성 항

복함수를 제안하였다. 이 항복함수는 BCC 및 FCC 결정구조 재료에서 나타나는 대칭 항복곡면과 HCP 결정구조 재료에서 나타나는 비대칭 항복곡면의 두 가지 유형을 잘 표현하도록 제안되었다.

제안된 항복함수의 유효성을 확인하기 위해 대칭 항복함수(KV'20)로서 강한 이방성 재료 거동을 갖는 AA2090-T4 판재와 비대칭 항복함수(KV'21)로서 상용 순수 티타늄 판재의 소성특성들을 예측하고 실험결과 및 기존의 이방성 항복함수들과 비교하였다. 본 연구를 통해 다음과 같은 주요 결론이 도출되었다.

- (1) KV'20 항복함수는 두 매개변수 α 및 β 가 0인 경우 Von Mises 항복함수로 귀착한다.
- (2) KV'20은 또한 강한 이방성 재료를 포함하는 다양한 형태의 항복곡면을 잘 나타낼 수 있다. 제안된 항복함수는 두 개의 매개변수 α 와 β 를 결합하는 것에 의해 다양한 형상의 항복곡면 형상을 구현할 수 있음을 보였다.
- (3) 제안된 모델의 유연성을 검증하기 위해 항복곡면의 불록성을 확인하여 Cazacu 2018 항복함수와 비교하였다. KV'20은 모든 주요 응력 범위에서 불록성이 만족하였지만 본 연구에서 다른 재료에 대해서 Cazacu 2018 항복함수는 일부 응력 범위에서 불록성이 만족하지 않았다.
- (4) 매우 강한 이방성 특성을 보이는 AA2090-T4 재료에 대해서는 본 연구에서 제안한 KV'20 항복함수의 적용 결과, 일부 실험 데이터와 벗어난 결과를 보였다. 본 연구에서 제안한 항복함수의 파라미터 최적화에 사용하는 실험 데이터의 선정에 주의를 기울여야 하며, 이 경우에는 항복함수의 파라미터 최적화에 12개의 실험 데이터(예: 일축 인장 시험의 데이터 10개, 등 2축 인장 시험의 데이터 2개)를 사용하기를 권장한다.
- (5) 비대칭 항복곡면 형상의 특징이 나타나는 상용 순티타늄 판재의 항복곡면을 예측하기 위해서 KV'21 항복함수를 사용하였고 Yoon 2014 항복함수 및 실험자료와 비교하였다. 두 항복함수는 전체적으로 모두 실험과 잘 일치하였다.

향후 연구에서는 본 연구에서 제안된 이방성 항복함수를 성형한계곡선 예측에 적용하고자 한다. 또한 제안된 항복함수를 컵 드로잉 공정, 점진 성형 공정 등과 같은 판재 가공 공정의 유한요소해석에 적용하여 그 유효성을 평가하고자 한다.

이 논문은 저자들이 2021년 ICTP 컨퍼런스에서

발표된 논문[54]를 기반으로 작성되었음을 밝혀둔다.

후 기

본 연구는 경북대학교 BK21 사업단의 지원을 받아 수행되었다.

부 록

소성변형률 증분을 계산하기 위한 항복함수(소성포텐셜)의 응력에 대한 편미분 $\partial f / \partial \sigma_{ij}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = [6(J_2^0)^5 + 3\beta(J_2^0)^2 \times (J_3^0)^2] \frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{ij}} + [4\alpha(J_3^0)^3 + 2\beta(J_2^0)^3 \times$$

$$J_3^0] \frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{3} \sigma_{xx} - \frac{\alpha_1}{3} \sigma_{yy} - \frac{\alpha_3}{3} \sigma_{zz} \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{yy}} = -\frac{\alpha_1}{3} \sigma_{xx} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{3} \sigma_{yy} - \frac{\alpha_2}{3} \sigma_{zz} \quad (\text{A.1c})$$

$$\frac{\partial J_2^0}{\partial \sigma_{xy}} = 2\alpha_4 \sigma_{xy} \quad (\text{A.1d})$$

$$\frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{b_1}{9} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{b_2}{9} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 - \frac{b_1 + b_4}{9} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 - \frac{1}{3} [(b_6 + b_7)\sigma_{yz}^2 - (2b_9 - b_8)\sigma_{xz}^2 - (2b_{10} - b_5)\sigma_{xy}^2] \quad (\text{A.1e})$$

$$\frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{yy}} = \frac{b_4}{9} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - \frac{b_1 + b_4}{9} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \frac{b_3}{9} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 - \frac{1}{3} [2b_9\sigma_{xz}^2 - b_5\sigma_{xy}^2 - b_6\sigma_{yz}^2] \quad (\text{A.1f})$$

$$\frac{\partial J_3^0}{\partial \sigma_{xy}} = -\frac{2\sigma_{xy}}{3} [2b_{10}\sigma_{zz} - b_5\sigma_{yy} - (2b_{10} - b_5)\sigma_{xx}] + 2b_{11}\sigma_{xz}\sigma_{yz} \quad (\text{A.1g})$$

REFERENCES

- [1] M. Zhan, K. Guo, H. Yang, 2016, Advances and trends in plastic forming technologies for welded tubes, Chinese J. Aeronaut., Vol.29. No.2, pp.305–315.
 [2] B. Meng, M. Wan, X. Wu 2014, Inner wrinkling control

in hydrodynamic deep drawing of an irregular surface part using drawbeads, Chinese J. Aeronaut., Vol.27, No.3. pp.697–707.

- [3] X. Li, N. Song, G. Guo, 2013. Prediction of forming limit curve (FLC) for Al–Li alloy 2198-T3 sheet using different yield functions, Chinese J. Aeronaut., Vol.26, No.5, pp.1317–1323.
 [4] H. Swift, 1952, Plastic instability under plane stress, J. Mech. Phys. Solids, Vol.1, No.1, pp.1–18.
 [5] E. Voce E, 1948, The relationship between stress and strain for homogeneous deformation, J. Inst. Met., Vol.74, pp.537–62.
 [6] Q.T. Pham, S.H. Oh, Y.S. Kim, 2018, An efficient method to estimate the post-necking behavior of sheet metals, Int. J. Adv. Manuf. Technol., Vol.98, No.9–12, pp.2563–78. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.002>
 [7] T.B. Stoughton, J.W. Yoon, 2008, On the existence of indeterminate solutions to the equations of motion under non-associated flow, Int. J. Plast., Vol.24, No.4, pp.583–613.
 [8] T.B. Stoughton, J.W. Yoon, 2009. Anisotropic hardening and non-associated flow in proportional loading of sheet metals, Int. J. Plast., Vol.25, No.9, pp.1777–1817. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.02.003>
 [9] J.J. Ha, S. Coppieters, Y.P. Korkolis, 2020, On the expansion of a circular hole in an orthotropic elastoplastic thin sheet, Int. J. Mech. Sci., Vol.182, pp.105706. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105706>
 [10] Q.T. Pham, Y.S. Kim, 2017, Identification of the plastic deformation characteristics of AL5052-O sheet based on the non-associated flow rule, Met. Mater. Int., Vol.23, No.2, pp.254–263. doi: 10.1007/s12540-017-6378-5.
 [11] J.J. Kim, Q.T. Pham, Y.S. Kim, 2021, Thinning prediction of hole-expansion test for DP980 sheet based on a non-associated flow rule, Int. J. Mech. Sci., Vol.191, 106067, <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106067>
 [12] B. Wu, K. Ito, N. Mori, T. Oya, T. Taylor, J. Yanagimoto, 2019,. Constitutive equations based on non-associated flow rule for the analysis of forming of anisotropic sheet metals, Int. J. Precis. Eng. Manuf.,-Green Technol., Vol.7, pp.465-480. DOI:10.1007/s40684-019-00032-5

- [13] W. Prager, 1949, Recent development in the mathematical theory of plasticity, *J. App. Phys.*, Vol.20, pp.235-. <https://doi.org/10.1063/1.1698348>
- [14] H. Tresca, 1864, Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 59, pp.754-.
- [15] V. Mises, 1913, Mechanics of solid bodies in the plastically-deformable state, *Math. Phys.*, Vol.4, pp.582–592.
- [16] D.C. Drucker, 1949, Relations of experiments to mathematical theories of plasticity, *J. Appl. Mech.*, Vol.16, No.4, pp. 349-357. <https://doi.org/10.1115/1.4010009>.
- [17] R. Hill, 1948, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol.193, pp.281–297. <https://doi.org/10.1098/rspa.1948.0045>
- [18] R.Hill, 1979, Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.85, pp.179–191. <https://doi.org/10.1017/S0305004100055596>
- [19] W.F. Hosford, 1979, On yield loci of anisotropic cubic metals, *Proc. 7th North American Metalworking Conf.*, SME, Dearborn, MI. pp.191–197.
- [20] F. Barlat , J. Brem , J.W. Yoon, K. Chung , R.Dick , D. Lege, 2003, Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—Part 1: theory, *Int. J. Plast.*, Vol.19, N0.9, pp.1297–1319. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(02\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00019-0)
- [21] O. Cazacu , F. Barlat , 2001, Generalization of Drucker's yield criterion to orthotropy, *Math. Mech. Solids*, Vol.6, No.6, pp.613–630. <https://doi.org/10.1177/108128650100600603>
- [22] F. Barlat, H. Aretz, J.W. Yoon, M.E. Karabin, J.C. Brem, R.E. Dick, 2005, Linear transformation based anisotropic yield function, *Int. J. Plast.*, Vol.21, pp.1009–1039. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2004.06.004>
- [23] D. Banabic, 2010, Sheet metal forming processes. Constitutive modelling and numerical simulation. Springer Heidelberg Dordrecht London New York 2010.
- [24] D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara, 2020, Advances in anisotropic behaviour and formability of sheet metals, *J. Mat. Form.*, Vol.13, pp.749-787.
- [25] F. Yoshida , H. Hamasaki,, T. Uemori , 2013, A user-friendly 3D yield function to describe anisotropy of steel sheet (Poly6), *Int. J. Plast.*, Vol.45, pp.119-139. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.01.010>
- [26] Y.S. Lou, J.W. Yoon, 2017, J_2 - J_3 based anisotropic yield function under spatial loading, *Procedia Engng.*, Vol.207, pp.233-238. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.10.767>
- [27] A.P. Karafillis , M.C. Boyce, 1993, A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.41, pp.1859–1886. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90073-O](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90073-O)
- [28] O. Cazacu , 2018, New yield criteria for isotropic and textured metallic materials, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.139-140, pp.200-210. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.036>
- [29] F. Kabirian, A.S. Khan, 2015, Anisotropic yield criteria in σ - τ stress space for materials with yield asymmetry, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.67–68, pp.116–126. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.006>
- [30] Y. Koh, D. Kim, D.Y. Seoka, J. Bak, S.W. Kim, Y.S. Lee , K. Chung, 2015, Characterization of mechanical property of magnesium AZ31 alloy sheets for warm temperature forming, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.93, pp.204–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.02.001>
- [31] N. Chandola, R.A. Lebensohn, O. Cazacu, 2015, Combined effects of anisotropy and tension–compression asymmetry on the torsional response of AZ31 Mg, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.58, pp.190–200. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.01.001>
- [32] G. Tari, M.J. Worswick, 2015, Elevated temperature constitutive behavior and simulation of warmforming of AZ31BD, *J. Mater. Process. Technol.*, Vol.221, pp.40–55. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.014>
- [33] D.G. Taria, M.J. Worswicka, U. Alia, M.A. Gharghourib, 2014, Mechanical response of AZ31B magnesium alloy: experimental characterization and material modeling considering proportional loading at room temperature, *Int. J. Plast.*, Vol.55, pp.247–267. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.10.006>
- [34] W. Muhammad, M. Mohammadi, J. Kang J, R.K. Mishra, K. Inal, 2015, An elasto-plastic constitutive model for evolving asymmetric/anisotropic hardening

- behavior of AZ31B and ZEK100 magnesium alloy sheets considering monotonic and reverse loading paths, *Int. J. Plast.*, Vol.70, pp.30–59.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.03.004>
- [35] A.S. Khan, E. Pandey, T. Gnaupel-Herold, R.K. Mishra, 2011, Mechanical response and texture evolution of AZ31 alloy at large strains for different strain rates and temperatures, *Int. J. Plast.*, Vol.27, pp.688–706.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.08.009>
- [36] C. Liu, Y. Huang, M.G. Stout, 1997, On the asymmetric yield surface of plastically orthotropic materials: a phenomenological study, *Acta, Mater.*, Vol.45, pp.2397–2406. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(96\)00349-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(96)00349-7)
- [37] I. Shimizu, N.Tada, 207, Plastic behavior of polycrystalline aluminum during biaxial compression with strain path change, *Key Engineering Materials*, Vol.340-341, pp.883-888.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.883>
- [38] O. Cazacu, F. Barlat, 2004, A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals, *Int. J. Plast.*, Vol.20, pp.2027-2045.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.11.021>
- [39] O. Cazacu, B.Plunkett, F. Barlat, 2006, Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals, *Int. J. Plast.*, Vol. 22, No.7, pp.1171-1194.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.06.001>
- [40] X. Gao, T. Zhang, J.Zhou, S.M. Graham, M. Hayden, C. Roe, 2011, On stress-state dependent plasticity modeling: significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule, *Int. J. Plast.*, Vol.27, pp.217-231. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.05.004>
- [41] A.S. Khan, S. Yu, H. Liu, 2012, Deformation induced anisotropic responses of Ti-6Al-4V alloy Part II: A strain rate and temperature dependent anisotropic yield criterion, *Int. J. Plast.*, Vol.38, pp.14-26.
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.013>
- [42] J.W.Yoon, Y.S. Lou YS, J.H. Yoon, M.V. Glazoff, 2014, Asymmetric yield function based on the stress invariants for pressure sensitive metals, *Int. J. Plast.*, Vol.56, pp.184-202.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.11.008>
- [43] S. Zhang, S.L. Zang, 2014, Calibration of anisotropic yield criterion with conventional tests or biaxial test, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.85, pp.142-151.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.020>
- [44] R.P.R. Cardoso, O.B. Adetoro OB, 2017, A generalization of the Hill's quadratic yield function for planar plastic anisotropy to consider loading direction, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.128-129, pp. 253-268.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.024>
- [45] F. Barlat, J.C. Brem, J.W. Yoon, K. Chung, R.E. Dick, D.J. Lege, F. Pourboghrat, S.-H. Choi, E. Chu, 2003, Plane stress yield function for aluminum alloy sheets – part 1: theory, *Int. J. Plast.*, Vol.19, pp.1297-1319.
[https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(02\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(02)00019-0)
- [46] M.R. Laydi, C. Lexcellent 2010, Yield criteria for shape memory materials: Convexity conditions and surface transport, *Math. Mech. Solids*, Vol.15, pp.165-208.
<https://doi.org/10.1177/1081286508095324>
- [47] L. Lazarescu, I. Nicodim, D.S. Comsa, D. Banabic, 2013, Determination of material parameters of sheet metals using the hydraulic bulge test, *Acta. Metallurgica Slovaca*, Vol19. 19, No.4, pp.4-12.
 DOI:10.12776/ams.v19i1.81
- [48] S. Tamura, S. Sumikawa, T. Uemori, H. Hamasaki, F. Yoshida, 2011, Experimental observation of Elasto-Plasticity behavior of type 5000 and 6000 Aluminum alloy sheets, *Materials Trans.*, Vol.52, No.2, pp.868-875. <https://doi.org/10.2320/matertrans.L-MZ201101>
- [49] I. S. Sarraf, D. Green, 2018, Prediction of DP600 and Trip780 yield loci using Yoshida anisotropic yield function, *IDDRG 37th Annual Conf.*, Vol.418, 012089, DOI:10.1088/1757-899X/418/1/012089.
- [50] A. M. Habraken, J. Ma, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara, et.al, 2022, Analysis of ESAFORM2021 cup drawing benchmark of an Al alloy critical factors for accuracy and efficiency of FE simulations, *Int. J. Mater Forming.*, Vol.15, No.5, pp.61-. DOI:10.1007/s12289-022-01672-w.
- [51] S. Nomura, T. Kuwabara, 2022, Material modeling of hot-rolled steel sheet considering differential hardening and hole expansion simulation, *ISIJ Int*, Vol.62, No.1, pp.191-199, <https://doi.org/10.2355/isijinternational>. ISIJINT-2021-365.

- [52] D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, T. Kuwabara, 2010, Advances in anisotropy and formability, Int. J. Mater. Form., Vol.3, pp.165-189.
- [53] J.H. Yoon, O. Cazacu, J.W. Yoon, R.E. Dick, , 2010, Earing prediction for strongly textured aluminum sheets, Int. J. Mech. Sci., Vol.52, pp. 1563-1578. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.005>.
- [54] Y.S. Kim, P.V. Nguyen, J.J. Kim, 2021, A Study of Anisotropic yield function based on J2 and J3 invariants, Forming the Future, The Minerals, Metals & Materials Series, Proc. 13th Int. Conf. Technol. Plast., Daehn G, et al. (eds.), https://doi.org/10.1007/978-3-030-75381-8_165