



Research Article

The concept of the angle presented in the middle school mathematics textbooks

Kim, Soo mi¹ · Heo, Hae ja^{2*}

¹Professor, Gyeongin National University of Education

²Professor, Catholic Kwandong University

*Corresponding Author: Heo, Haeja (hjheo@cku.ac.kr)

ABSTRACT

Angle has a variety of aspects, such as figure, measurement, and rotation, but is mainly introduced from a figure perspective and a quantitative perspective of the angle is also partially experienced in the elementary mathematics textbooks. The purpose of this study was to examine how the angle concept introduction and development pattern in elementary school mathematics textbooks are linked or changed in middle school mathematics textbooks, and based on this, was to get the direction of writing math textbooks and implications for guidance. To this end, 57 math textbooks for the first grade of middle school were collected from the first to the 2015 revised curriculum. As a result of the study, it was found that middle school textbooks had a greater dynamic aspect of each than elementary school textbooks, and the proportion of quantitative attributes of angle was higher in addition to qualitative and relational attributes. In other words, the concept of angle in middle school textbooks is presented in a more multifaceted and complex form than in elementary school textbooks. Finally, matters that require consensus within elementary, secondary, and secondary schools were also proposed, such as the use of visual expression or symbol, such as the use of arrows and dots, and the use of mathematical terms such as vertex of angle and side of angle.

Key words: angle, angle measure, side of angle, vertex of angle, elementary math textbook, middle school math textbook

중학교 수학교과서에 제시된 각 개념 제시 양상

김수미¹ · 허혜자^{2*}

¹경인교육대학교 교수 ²가톨릭관동대학교 교수

*교신저자: 허혜자 (hjheo@cku.ac.kr)

초록

이 연구의 목적은 중학교 수학교과서에 제시된 각 개념 도입 및 전개 양상을 살펴보고, 이를 토대로 수학교과서의 집필 방향 및 각 지도를 위한 시사점을 도출하고자 하였다. 이를 위해 1차부터 2015 개정 교육과정까지 중학교 1학년 수학교과서 57권을 수집하여 각 및 각 주변 개념들의 표현 방식을 분석하였고, 그것을 바탕으로 결론을 도출하였다. 분석 결과, 중학교 교과서에서는 각을 제시할 때 초등학교와 달리 각의 회전 관점 및 동적 관점을 추가하여 다면적으로 접근하고 있으며, 각의 기술적 정의는 2009개정 교육과정 이후로는 기호 사용을 제외하고 대체로 초등학교 교과서와 일치하는 것으로 나타났다.

주요어: 각, 각도, 각의 변, 각의 꼭짓점, 초등학교 수학교과서, 중학교 수학교과서

Received February 28, 2022

Revised March 17, 2022

Accepted April 01, 2022

2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

Copyright © 2022 The Korean Society of Mathematical Education.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

각은 도형, 측정, 회전 등을 아우르는 다면적 개념으로 학생들이 각 및 각 주변 개념들을 이해하는 데 많은 어려움을 겪는다고 한다. 초등학생들을 대상으로 한 연구에서는 각, 각의 변, 각의 꼭짓점에 대한 용어 이해도가 낮으며(Kwon & Ahn, 2005), 각과 각도를 구분하지 못하며(Choi & Kim, 2012), 각의 내포적 정의를 진술하는데 어려움을 겪는 것(Kim, 2015) 등이 보고된 바 있다. 이같이 하나의 수학 용어에 여러 가지 다양한 특성이나 개념이 담겨 있는 경우, 학교 수학에서 이를 어떻게 다루는 것이 바람직한가는 수학교육학 연구에서 매우 중요한 이슈이다. 예를 들어 분수는 전체-부분, 몫, 연산자, 측정, 비 등의 다양한 성격을 지닌 개념으로, 성인들에게서조차 오개념이 쉽게 발견되는 어려운 개념인 만큼 분수를 어떻게 지도할 것인가의 문제는 여전히 수학교육학연구 분야의 뜨거운 이슈이다(Yu, 1993).

이처럼 다면적 성격의 개념을 어린 학생들에게 지도할 경우 가장 어려운 문제는 여러 가지 특성을 한 번에 다 보여주지 못한다는 것이다. 따라서 여러 가지 측면 중 어떤 것을 가장 먼저 제시하고, 그 이후 지도 계열을 어떻게 구성하면 좋을 지에 대해서는 많은 연구가 요구된다. 이런 관점에서 보면, 다양한 속성을 내포하고 있는 각 개념 역시 학교수학에서 어떻게 전개시켜 나가는 것이 좋은가에 대해서는 좀 더 많은 연구와 논의가 필요하다고 생각된다.

각은 우리나라 수학과 교육과정에서 전통적으로 초등학교 3학년에 처음으로 도입되며, 이후 4학년에서 각도(각의 크기)를 다루게 된다. 중학교에서는 1학년에서 각과 각의 크기가 다시 한번 등장하고, 이후 고등학교 교육과정에서 일반각 개념으로 확장된다. 이처럼 각은 초중고 교육과정에 지속적으로 등장하는 만큼, 각 학교급의 교사들은 각 개념이 학교수학에서 어떻게 전개되어 가는지를 알고 있어야 효율적인 지도가 가능하다. 하나의 개념이 초등과 중등에서 모두 제시되는 경우, 초등교사나 중등교사는 자신이 담당하고 있는 학교급 이외의 수준에서 그 개념이 어떻게 다루어지는지를 알아야 한다. 특히 개념이 다면적이고 복합적인 경우, 학년이나 학교급에 따라 상이한 내용이나 방식이 제시될 가능성이 높기 때문에, 초등학교 교사라면 지금 지도하고 있는 내용이 중학교에서는 어떻게 다루어질 지, 혹은 중학교 교사라면 이 개념이 초등학교에서는 어떻게 다루어진 것인지를 이해하고 있어야 효과적인 지도가 가능할 것이다. 그러나 아쉽게도 학교수학에서 각이 어떻게 다루어지고 있는가에 대한 연구는 많지 않다. 초등학교 수학교과서를 분석한 연구로는 Kim (2018a)과 Kim (2018b)의 연구가 있지만, 중학교 이후 학년의 수학교과서를 분석한 연구는 찾아보기 어렵다.

이 연구의 목적은 초등학교 수학교과서에서 나타나는 각 개념 도입 및 전개 양상이 중학교 수학교과서에서는 어떤 식으로 연계 혹은 변화되어 나타나는지 살펴보고, 이를 토대로 초등학교와 중학교 수학교과서의 집필방향 및 각 지도를 위한 시사점을 도출하고자 한다. 이를 위해 1차부터 2015개정 교육과정까지 중학교 1학년 수학교과서 57권을 수집하여 각 및 각 주변 개념들의 표현 방식을 살펴보고, 그 결과를 초등학교 수학 교과서를 대상으로 한 연구 결과와 비교한다.

각의 의미와 초등학교 수학교과서의 각 개념 제시 양상

각의 의미와 다양한 속성

수학사에서 각은 ‘기울기’, ‘발산비’, ‘방향차’, ‘회전’, ‘회전량’, ‘모양’, ‘평면’, ‘점집합’ 등 매우 다양하게 정의되어 온 다면적 개념이다(Kim, 2018b). 이들 정의는 관점에 따라 구성의 과정에 초점을 둔 동적 측면과 구성의 결과 즉 완결 상태에 초점을 둔 정적 측면으로 구분된다. 또한 벌어진 정도 혹은 회전량과 관련된 양, 모양과 관련된 질, 선분이나 반직선 등 도형의 구성요소에 관련된 관계적 측면으로 구분되며, 혹은 이들의 복합적 형태로 표현되어왔다.

먼저 각의 정적 측면과 동적 측면을 좀 더 자세히 살펴보자. 각은 두 반직선에 의해 만들어진 점집합의 합집합 혹은 두 반평면의 교집합 등과 같이 각의 완성된 형태를 기술하는 식의 정적 접근과 회전 혹은 회전량 등 각의 구성 과정을 기술하는 식의 동적 접근으로도 구분할 수 있다(Lee, 2001). Van de Walle (1998)는 교사교육용 교재에서 각을 ‘길이가 무한인 두 반직선으로 구성된 것’으로

정의하고, 각의 주요 특징을 ‘두 반직선의 벌어짐(spread of the angle’s rays)’으로 보았다. 그는 각을 회전(turn)보다는 벌어짐(spread)의 관점으로 보아야 한다고 주장했다. 즉 각의 한 변이 회전해서 다른 변에 도달한 것이 아니라 처음부터 각의 두 변이 벌어진 채로 있었다는 것이다. 그 이유는 우리가 삼각형에서 각을 볼 때, 삼각형의 한 변이 다른 변으로 회전한 것으로 보지 않기 때문이다. 반면, Monroe (2006)의 정의에서 각은 형성되는 것(is formed), 즉 동적인 것으로 규정되고 있다. 그는 각을 한 공통 끝점을 공유하는 두 선분 혹은 반직선이 만나 형성된 것(p. 6)으로 표현하는 동시에, 한 선분 또는 한 반직선이 한 점을 중심으로 다른 쪽으로 회전하는 양으로도 설명하고 있다. 각에 대한 정적 관점과 동적 관점을 정리한 것이 Figure 1이다.

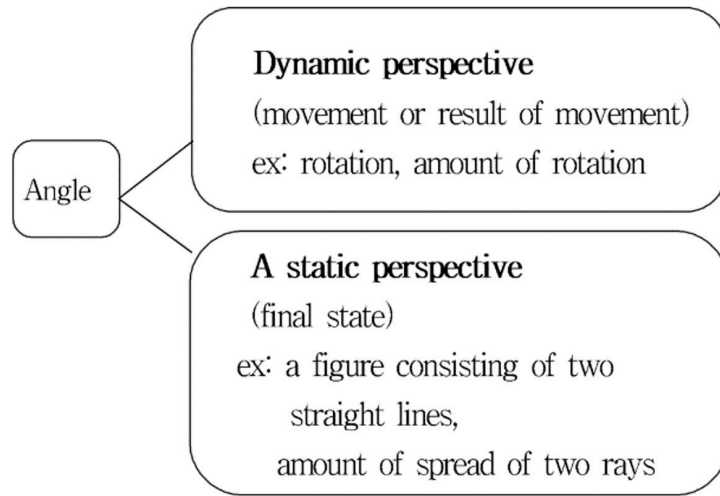


Figure 1. Multi-faceted properties of angle (1).

각에 대한 동적 관점은 각을 회전각과 동의어로 보는 것이라 할 수 있다. 수학에서 회전각은 Figure 2와 같이 유클리드 평면의 회전변환 f의 회전중심이 A일 때, A가 아닌 점 P에 대하여 ∠PAf(P) 또는 이 각의 크기를 의미한다(Korean Mathematical Society, 2015a).

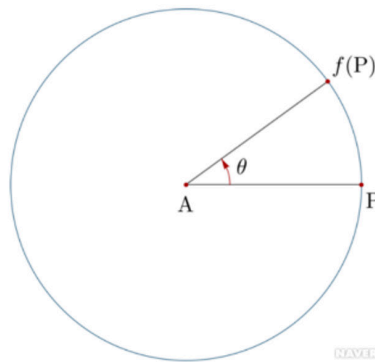


Figure 2. Example of rotational angle.

각을 회전의 관점으로 해석한다면 ‘방향’은 각의 주요한 특성이 될 수 있다. 보통 반시계방향으로 회전하여 생긴 각을 양의 각, 시계방향으로 회전하여 생긴 각을 음의 각이라 한다. 각의 개념을 회전하는 방향과 얼마나 많이 회전했는지 그 회전한 수(n)까지 생각하여 각의 의미를 더 확장한 것이 ‘일반각’이며, 그 양(θ)은 다음과 같이 나타낸다(Korean Mathematical Society, 2015b).

$$\theta = 360^\circ n + a \text{ (n은 정수) 또는 } \theta = 2\pi n + a \text{ (n은 정수)}$$

Browning 외 (2007)는 각을 한 점을 공유하는 두 반직선(rays), 두 반직선 사이의 공간(space), 회전에 대한 표상(representation) 등 세 가지 측면으로 구성된 복합적 아이디어로 보고 있으며, 학생들은 이러한 다양한 관점을 모두 경험해야 한다고 주장한다. 즉 각은 ‘모양’, ‘공간’, ‘회전’이라는 정적 측면과 동적 성격을 동시에 가지고 있는 복합적 아이디어라는 것이다.

한편 각을 양적 측면, 질적 측면, 관계적 측면으로 구분하여 보는 관점도 있다. Proclus에 의하면, 각은 크기와 상등을 생각할 수 있으므로 양적 측면이, 형태로 생각할 수 있으므로 질적 측면이, 직선 간에 존재하므로 관계적 측면이 모두 관련된다(Close, 1982). 이전 교육과정의 초등학교 수학교과서를 분석한 Kim (2018b)의 연구에 의하면, ‘~보다 큰 각’, ‘~보다 작은 각’ 등과 같은 표현이 5차, 7차, 2007개정 교과서에서 발견되었다. 또한 ‘직각보다 큰 각’, ‘직각보다 작은 각’ 등의 표현이 1차, 5차, 6차, 7차, 2007개정, 2009개정 초등학교 수학교과서에서 발견되었다. 이것은 수학 교과서 저자들이 각의 정의를 질적으로 혹은 관계적으로 기술해도, 각에 대한 양적 관념을 무의식적으로 표출하는 것이라 볼 수 있다. 각에 대한 양적 관념은 우리가 일상생활에서 사용하는 국어사전에서도 발견된다. National Institute of Korean Language (2022)에서 각의 정의를 찾으면 다음과 같은 세 가지 내용이 제시되어 있다.

- ① 면과 면이 만나 이루어지는 모서리
- ② (수학) 한 점에서 갈리어 나간 두 직선의 벌어진 정도
- ③ (수학) 한 점에서 나간 두 개의 반직선이 이루는 도형

사전에 제시된 ③은 최근 초등학교 수학교과서에 제시된 각의 정의와 가장 흡사하다. 즉 각을 도형으로 정의함으로써 각에 대한 질적 측면을, 각의 구성요소인 반직선을 기술함으로써 각에 대한 관계적 측면을 표현하고 있다. 그러나 ②는 각을 ‘두 직선의 벌어진 정도’로 묘사함으로써 수학교과에서 ‘각도’로 지칭하는 개념을 각과 동일시 하고 있다. 즉, 각의 양적 관념을 드러내고 있다. 물론 양적 관념도 회전량과 같이 회전이라는 움직임의 결과로 해석하는 것과 한 점에서 교차하는 두 직선의 벌어진 정도로 해석하는 두 가지 경우가 있다. 이처럼 각이라는 하나의 용어 이면에는 다양한 속성이 내재되어 있으며, 우리는 그것을 의식하지 못한 채 다양한 맥락에서 각을 여러 용도로 활용하고 있는 것이다. 지금까지 살펴본 내용을 바탕으로 각의 두 번째 다면적 속성을 정리한 것이 Figure 3이다.

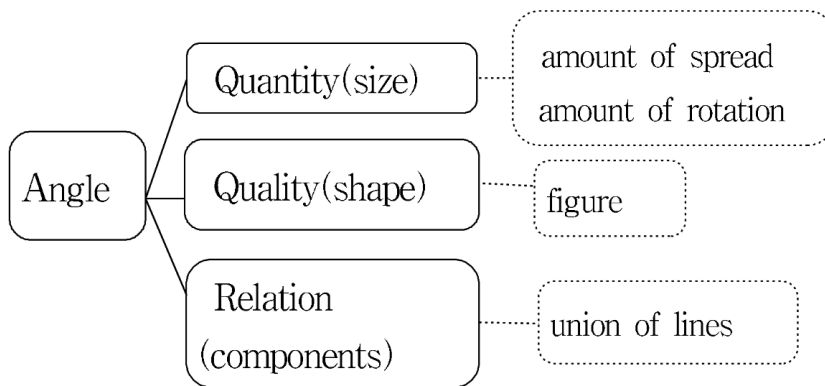


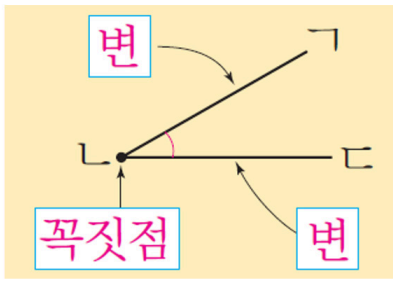
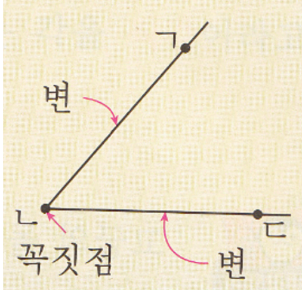
Figure 3. Multi-faceted properties of angle (2).

초등학교 수학교과서의 각 개념 제시 양상

우리나라 수학교과서에 제시된 각 개념에 대한 연구로는 Kim (2018a)과 Kim (2018b)의 연구가 있다. Kim (2018b)의 연구는 1차 교육과정부터 2009개정 교육과정까지 초등학교 수학교과서를 분석대상으로 하여, 각의 정의 방식과 정의에 함께 제시된 그림 보기의 성격을 분석하였다. 분석결과 각의 정의 진술에서는 대부분의 교육과정 교과서에서 각을 도형으로 정의하고 있었지만, 1차, 7차, 2007개정 교육과정 교과서의 그림 보기에서는 각의 벌어진 정도를 나타내는 호(\frown)를 각의 두 변 사이에 표시함으로써, 각에 대한

양적 속성을 담아낸 시기도 몇 차례 있었다(Table 1). 또한 대부분의 교육과정 교과서에서는 각의 구성 요소로서 선분, 사선, 직선, 반직선 등이 명시됨으로써 각의 관계적 속성도 담고 있었다. 이를 통해 우리나라 초등학교 수학교과서에 제시된 각의 정의는 대체로 질적 속성과 관계적 속성이 관련되며, 정의와 함께 제시된 그림 보기에서 호를 이용하여 양적 속성을 드러낸 경우가 몇 차례 있었으나 최근 교육과정 교과서에서는 이러한 예시를 찾아볼 수 없다.

Table 1. Definition and picture example of angle presented in the math textbooks.

2007 revised curriculum textbook	2009 revised curriculum textbook
A figure consisting of two straight lines drawn from a point (relational and qualitative aspects)	A figure consisting of two straight lines at a point (relational and qualitative aspects)
 <p>(qualitative aspect)</p>	

우리나라 초등학교 수학교육과정을 보면, 전통적으로 각은 3학년의 도형영역에서, 각도는 4학년의 측정영역에서 도입하면서 각과 각도를 다른 것으로 구분하고, 각에서 양적 관념을 배제하려고 노력한 듯하다. 2009개정이나 2015개정 교육과정과 같이 최근의 교육과정 교과서들을 보면, 각의 정의에서는 양적 관념이 완전히 제거되었다고 볼 수 있다. 그러나 교수요목기부터 2015개정 교육과정의 초등학교 수학교과서를 분석대상으로 한 Kim (2018a)의 연구에 의하면, 각의 정의 도입 차시 활동은 질적 측면과 관계적 측면만 아니라 양적 측면도 경험할 수 있도록 고안되어 있다. 예를 들어 3차, 5차, 6차, 2015개정 교육과정 교과서의 각 정의 도입 차시에서 ‘각을 포개어 보기’, ‘각의 벌어진 정도로 크기 비교하기’, ‘각의 분을 겹쳐서 크기 비교하기’, ‘두 자를 벌여서 여러 가지 각을 만들기’ 등을 각의 양적 측면으로 분석하였다. 그뿐만 아니라 Kim (2018b)의 연구에서는 ‘~보다 큰 각’, ‘~보다 작은 각’ 등과 같은 표현을 5차, 7차, 2007개정 교과서에서 발견하였으며, ‘직각 보다 큰 각’, ‘직각 보다 작은 각’과 같은 표현을 1차, 5차, 6차, 7차, 2007개정, 2009개정에서 발견하였다. 이것은 수학 교과서 집필진들조차 무의식적으로 각과 각도를 구분하지 않음을 의미하는 것이다.

이상의 내용을 종합하면, 우리나라 초등학교 수학교과서에서 각은 질적 측면과 관계적 측면으로 정의되지만, 그림 보기나 이후 활동에서 양적 측면을 부분적으로 경험하도록 고안되었다고 볼 수 있다. 각이 다면적 개념이므로 학생들은 각의 다양한 측면을 경험하는 것이 마땅하나, Kim (2018b)은 각의 정의에서는 이러한 측면을 드러내지 않고 있다가 이후 활동에서 어떤 안내도 없이 갑자기 경험하도록 하는 것은 학생들에게 혼란을 줄 수 있는 점을 지적하고 있다. 또한 Kim (2018a)은 각의 동적 관념, 즉 회전이라는 관점이 초등학교 교과서에서 거의 다루어지고 있지 않음도 지적하였다.

초등학교 수학교과서에서 각과 관련하여 제기되고 있는 다른 문제들로는 각의 구성 요소, 화살표 사용 유무, 각과 관련된 수학 용어 등이 있다. 먼저 각의 구성요소와 관련하여서는 선분, 사선, 직선, 반직선 등의 다양한 기본 도형들이 각을 정의하는데 사용되어 왔다. 2009개정 교육과정과 2015개정 교육과정에서는 반직선을 이용해 각을 도입하고 있지만, Kim (2018b)의 연구에서는 삼각형이나 사각형과 같이 선분으로 구성된 도형에서 각을 따지는 활동을 예로 들어 각의 정의와 이후 활동 사이의 모순성을 지적하기도 하였다.

각을 그림으로 시각화하는데 있어 화살표의 사용 유무도 교육과정별로 차이가 있는 것으로 조사되었다. 2차, 3차, 4차 교육과정 교과서에서는 화살표를 사용했으나 그 이후부터 현재에 이르기까지 화살표는 사용되고 있지 않다. 또한 각의 변 위에 점을 명시적으로 표현하는 것도 교육과정별로 차이가 있으며, 2009 개정, 2015 개정과 같이 최근 교육과정에서는 점을 명시적으로 표현하는 추세이다.

끝으로 각과 관련된 수학용어로는 ‘각의 꼭짓점’과 ‘각의 변’이 있다. 2015개정 교육과정에서는 ‘(각의) 변’, ‘(각의) 꼭짓점’과 같이 괄호를 이용하여 변과 꼭짓점 앞에 ‘각의’를 붙일 수 있음을 명시하고 있다(Ministry of Education, 2015, p. 17). 그러나 3학년 수학교과서에 제시된 각의 정의에는 ‘변’과 ‘꼭짓점’만 진하고 붉은색으로 처리하고 있어(Figure 4), 학습자 입장에서 볼 때 ‘각의 변’, ‘각의 꼭짓점’을 수학용어로 인식하기보다는 ‘변’과 ‘꼭짓점’을 수학용어로 인식할 가능성이 높다. 게다가 정의와 함께 제시된 그림 보기에는 ‘변’과 ‘꼭짓점’이 명기되어 있어 교육과정에서 의도하는 바가 구현되었는지 의문이다.

한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 **각**이라고 합니다.

그림의 각을 **각 $\angle L$** 또는 **각 $\angle D$** 이라 하고, 이때 점 L 을 각의 **꼭짓점**이라고 합니다.

반직선 LG 과 반직선 LD 을 각의 **변**이라 하고, 이 변을 **변 LG** 과 **변 LD** 이라고 합니다.

Figure 4. Definition of angle in 2015 revised curriculum textbook 3-1 (Ministry of Education, 2019, p. 34).

이상으로 각의 다양한 의미가 초등학교 수학교과서에서 어떻게 다루어지고 있으며 제기되고 있는 문제점은 무엇인지 간략히 살펴보았다. 이후 장에서는 중학교 수학교과서에 각이 어떻게 다루어지고 있는지에 대해 살펴보기로 한다.

중학교 수학교과서 분석

분석대상

중학교에서 각과 각도는 1학년에 도입되므로, 1차 교육과정부터 2015개정 교육과정까지 수집가능한 중학교 1학년 수학교과서 57권을 분석대상으로 하였다(Table 2). 중학교는 3차와 4차 교육과정 시기에만 국정 교과서 1종이고, 나머지는 검인정교과서로 출판사가 다른 10여종의 교과서가 존재하여 자료수집에 상당한 어려움을 겪었다. 이런 이유로 교육과정 시기마다 수집된 교과서 권수가 다른 것은 이 연구의 제한점이다.

Table 2. The number of textbooks to be analyzed by curriculum period.

Curriculum	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev	2009 rev	2015 rev	Sum
Number of books	1	4	1	1	5	4	12	15	4	10	57

분석기준

중학교 수학교과서에서는 각 개념이 어떤 관점을 취하고 있으며, 각 개념 표현 방식의 특징은 무엇인지 알아보기 위해, 이 연구에서는 교과서에 제시된 각, 각도의 정의 및 정의와 함께 제시된 그림 보기를 살펴보기로 한다. 이 때의 분석 기준은 Table 3과 같다.

Table 3. Criteria for analyzing math textbooks in middle school.

Targets	Criteria for analyzing
Definition and picture example of angle and angle measure	A. What perspective does the textbook take on the angle concept?
	A-1. What's more focused on, a static aspect or a dynamic aspect?
	A-2. What's more focused on, a qualitative, relational or quantitative aspect?
	B. What are the characteristics of the expression of angle?
	B-1. What line does the side of angle take as a component of the angle?
	B-2. What are the characteristics of using dots and arrows?
	B-3. What are the characteristics of using symbols?
	B-4. What are the characteristics of using math terminology?

분석결과

각 개념에 대한 관점

정적 측면 vs. 동적 측면

각 개념의 정적 측면과 동적 측면은 각을 구성된 결과, 즉 최종 상태로 보는가 혹은 구성되는 과정 혹은 움직임 그 자체로 보느냐와 관련된다. Kim (2018a)과 Kim (2018b)의 연구에 의하면 초등학교 수학교과서는 각을 도형(모양)과 측도(양)의 관점에서 다루는 반면, 회전의 관점으로는 거의 다루지 않고 있다. 따라서 초등학교에서의 각 개념은 대체로 정적 관점으로 다루어진다고 볼 수 있다. 각에 대한 기술적 정의만 놓고 본다면 중학교 수학교과서와 초등학교 수학교과서는 거의 차이가 없다(Table 4). 6차 교육과정 이후의 중학교 수학 교과서가 채택하는 가장 보편적인 각의 정의는 ‘한 점 O에서 시작하는 두 반직선 OA, OB로 이루어진 도형’으로, 초등학교 수학교과서와 마찬가지로 각을 도형으로 정의하고 있다. 그 외의 교육과정 교과서 역시 대체로 ‘한 점에서 그은 두 개의 반직선(또는 선분, 또는 직선, 또는 사선)으로 이루어진 도형’으로 정의하고 있으므로, 각의 정의가 정적 관점을 취하는 것으로 볼 수 있다. 다만 초등학교는 ‘한 점에서 그은’이라는 표현을 주로 사용하는 대신 중학교는 ‘한 점에서 시작하는’이라는 표현을 사용하는 것만 놓고 본다면 초등학교 표현이 좀 더 역동적인 면을 내포하고 있다고 할 수 있다. 그러나 두 학교급 모두 회전 관점을 제시하지는 않고 있다.

반면 ‘각의 크기(또는 각도)’의 정의는 초등학교와 중학교가 상당히 다르다. 초등학교 교과서에서는 3학년에서 각이 도형으로 도입된 후, 4학년에서 각의 크기가 ‘벌어진 정도(양)’로 도입된다. 즉, 각에 이어 각도에서도 여전히 정적 관점을 취하고 있다. 반면 대부분의 중학교 교과서는 각에 이어서 바로 각의 크기가 같은 지면에 도입되는데 이때 ‘ $\angle AOB$ 에서 반직선 OA가 점 O를 중심으로 반직선 OB까지 회전한 양을 $\angle AOB$ 의 크기라고 한다.’와 같이 회전량으로 각의 크기가 도입된다. 이와 같은 방식은 분석대상 교과서의 약 86%에 해당하는 수치로(Table 5), 중학교에서는 각의 크기에 회전 관점을 부여하는 식으로 각에 대한 동적 관점을 보완하고 있다고 볼 수 있다. 이상의 내용을 종합해 볼 때, 각과 각의 크기에 대한 기술적 정의만 놓고 본다면 중학교에서는 각에 대해 정적 관점과 동적 관점을 모두를 취한다고 볼 수 있다.

Table 4. Definitions and picture examples of angle presented in the math textbooks of elementary and middle school by curriculum period.

Curriculum	Elementary school		Middle school	
	Descriptive definition	Picture example	Descriptive definition	Picture example
1st	삼각형을 그려봅시다. 모(를 '각'이라고 합니다.)		두 직선이 한 점에서 만나면 이 두 직선은 반드시 어떠한 각을 이룬다. ... 각에서와 같이, 직선 또는 그들의 모임으로 된 그림을 <u>도형</u> 이라고 한다.	
2nd	다각형에서 꼭짓점이 있는 곳의 모난 모양		-한 점 O에서 두 개의 사선을 그릴 때 생기는 <u>도형</u> -한 점 O에서 그은 두 반직선 OA, OB로 된 <u>도형</u>	
3rd	끝점이 같은 두 사선으로 이루어지는 그림		한 점 O에서 시작하는 두 개의 사선 \vec{OA} , \vec{OB} 가 있을 때, 이 두 사선의 합집합 $\vec{OA} \cup \vec{OB}$ 을 각이라 하고,	
4th	끝점이 같은 두 반직선으로 이루어지는 도형		한 점 O에서 시작하는 두 반직선 OA, OB로 이루어진 도형	
5th	한 점에서 만나는 두 선분으로 이루어지는 <u>도형</u>		-한 점에서 시작되는 두 반직선으로 이루어진 도형 -한 점 O에서 시작한 두 반직선 OA, OB로 이루어지는 도형	
6th	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형			
7th	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형		한 점 O에서 시작하는 두 반직선 OA, OB로 이루어진 도형	
2007 rev.				
2009 rev.	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형			
2015 rev.				

Table 5. Number of textbooks that introduces 'angle measure' as 'the amount of rotation'.

Curriculum period	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev	2009 rev	2015 rev	Sum
Rotation	0	3	1	1	4	4	10	13	4	10	50 (86%)
Non-rotation	1	1	0	0	1	0	2	2	0	0	7 (14%)

질적 측면 vs. 관계적 측면 vs. 양적 측면

이 세 가지 측면은 Proclus에 의한 것으로, 각의 질적 측면은 대상들의 형태로 기술하는 것, 관계적 측면은 한 점과 두 반직선과 같이 각에 포함된 요소 사이의 관계로 기술하는 것, 양적 측면은 크고 작음과 같이 각의 크기로 기술하는 것을 말한다(Close, 1982). 먼저 질적 측면을 살펴보자. Table 4에 의하면 각은 초등학교에서 ‘모(1차)’, ‘모양(2차)’, ‘그림(3차)’을 거쳐, 4차 이후에는 줄곧 ‘도형’으로 정의되어왔다. 반면 중학교에서는 1차부터 2015개정 교육과정까지 줄곧 ‘도형’으로 정의되어왔다. 모, 모양, 그림은 도형의 초보적 용어로 모두 형태와 관련된 것이므로, 초등학교나 중학교 교과서 모두 각의 정의에 질적 관점을 부여하고 있다고 볼 수 있다.

다음은 관계적 측면을 살펴보자. 초등학교와 중학교 수학교과서에서 다루는 각의 변은 교육과정별로 사선, 직선, 반직선, 선분 등 다르게 채택되어 왔으나, 거의 모든 각 정의에서 한 점과 두 변의 관계가 지속적으로 언급되어온 점을 미루어 볼 때, 초등학교나 중학교 교과서 모두 각의 정의에 대해 관계적 관점을 부여하고 있다고 볼 수 있다.

마지막으로 양적 측면을 살펴보자. 상술한 바에 의하면 각의 기술적 정의에서는 질적 측면과 관계적 측면은 볼 수 있지만 양적 측면을 볼 수 없다. 그러나 기술적 정의와 함께 제시되는 그림 보기에는 양적 측면으로 볼 수 있는 부분이 있다. Kim(2018b)는 각의 그림 보기에서 각의 두 변 사이에 벌어진 정도를 나타내는 호(∩)가 표현된 경우를 양적 측면과 관련지었는데, 초등학교는 1차, 7차, 2007개정 교육과정 교과서가 해당된다. 반면 중학교는 2차 교과서의 절반 정도와 4차 이후 대부분의 교과서에서 각의 그림 보기에 호가 표시되어 있는 것을 볼 수 있다(Fig. 5) 중학교에서는 각을 도입할 때 그림 보기에 호를 넣어서 각을 표현할 뿐만 아니라 각의 도입 직후에 각의 크기를 도입하는 식으로 초등학교보다 각의 양적 측면에 훨씬 많은 비중을 두고 있는 것으로 보인다.

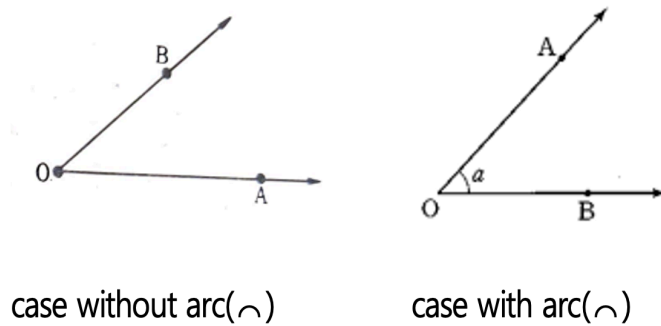


Figure 5. Use of arc in the picture example of angle.

이상의 내용을 종합해 보면, 각에 대한 초등학교 교과서의 관점은 도형이 만들어진 상태에 주목하는 정적 관념에 가까우며, 형태와 도형의 요소를 언급함으로써 질적, 관계적 속성으로 규정하고 있다고 볼 수 있다. 반면 중학교 교과서의 관점은 초등학교에서 제시된 각 개념 보다 한층 확장되고 복합적이다. 각과 각도를 함께 제시함으로써 회전이라는 각의 역동적 측면을 함께 보여주고 있다. 또한 각의 그림을 제시하는 상황에서 각의 벌어진 정도를 표시함으로써 각을 질적, 관계적 속성 이외에도 양적 속성을 지닌 개념으로 확장하고 있다.

각 개념의 표현 방식

기술적 정의에서 변의 속성

초등학교 교과서에서 각의 구성요소인 각의 변은 선분→반직선→선분→직선→반직선 등 교육과정에 따라 다양한 관점을 취해왔다(Kim, 2018b, p. 271). 초등학교는 4차 교육과정까지는 3학년에서 선분, 직선과 함께 반직선을 다루었으나, 5차 교육과정부터 2007개정 교육과정까지 반직선이 삭제되어 각을 정의하는 방식에도 영향을 미쳤다(Kim, 2018a, p. 208). 중학교 교과서에서 각의 구성요소인 각의 변은 1차 교육과정 교과서에서 ‘직선’으로 정의되었으나, 2차 교육과정 교과서에는 사선과 반직선으로 정의된 교과

서가 혼재한다. 국정교과서였던 3차에서는 사선으로 정의되다가, 4차 교육과정 이후부터는 모든 교과서에서 반직선으로 정의되어 왔다. 즉, 중학교에서는 각의 변이 직선→사선, 반직선→사선→반직선으로 변화가 있었으나, 사선이 반직선의 한 종류임을 생각하면 대부분 반직선으로 정의되어왔다고 할 수 있다. 반직선은 한 점에서 시작하여 한 방향으로만 무한히 곧게 뻗은 선을 의미한다. 반직선은 직선의 일부라 할 수 있으며, 그 시작점을 포함할 수도 있고 포함하지 않을 수도 있다(Doopedia, 2022). 반면 사선은 끝점을 포함하는 반직선이므로, 새수학이 반영된 2, 3차 교과서에서 엄밀성을 위해 사선을 사용한 것으로 생각된다. 4차 교육과정 이후 교과서에 제시되는 반직선은 사선과 같은 의미로 시작점을 포함하는 폐반직선을 의미한다.

각의 변이 초등학교와 중학교에서 각각 도입되므로, 정의 방식의 일관성은 중요하다. 중학교는 상술한 바와 같이 대체로 반직선으로 각의 변을 제시하지만, 초등학교는 5차, 6차, 7차, 2007개정 교육과정에서 선분이나 직선으로 각의 변을 제시함으로써, 중학교에서 제시하는 내용과 일치하지 않는 문제가 발생했다(Table 6). 이와 같이 동일 개념이 초등학교와 중학교에서 다르게 제시된다면 학생뿐만 아니라 교사 입장에서도 혼란은 불가피하다. 초등학교에서 5차부터 각의 변으로 반직선이 빠진 이유에 대해 산수 3-1 교사용지도서에는 엄격한 의미의 각을 정의하려면 반직선을 지도하고, 두 반직선의 합집합으로 정의하고, 각의 내부와 외부 등을 구분하며, 각의 일부인 삼각형, 사각형의 각도 별도로 이름을 붙여야 되겠지만 3학년 어린이에게는 이러한 정의들이 어렵다고 판단하여 직관에 의해 이해하는 수준으로 하향한 것임에 유의해야 한다고 밝히고 있다(Ministry of Education, 1989). 그러나 2009개정 교육과정 개정 시안 연구에서는 각에 대한 정확한 의미를 지도하기 위해 반직선 개념이 필요하므로 학생들로 하여금, 반직선을 선분 및 직선과 구별할 수 있도록 지도하여야 함을 강조하였으며, 이에 따라 2009개정 교육과정 3-4학년군 수학용어에 반직선이 추가되었다. 초등수준에서 반직선 개념의 지도는 핀란드 교육과정에서도 지지받고 있다(Hwang and others, 2011, p. 83)

Table 6. Sides of angle presented in the elementary and middle school textbooks.

Sides of angle	Curriculum									
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev	2009 rev	2015 rev
Elementary school	line segment	oblique line	oblique line	ray	line segment	straight line	straight line	straight line	ray	ray
Middle school	straight line	oblique line, ray	oblique line	ray	ray	ray	ray	ray	ray	ray

그림 보기에서 점과 화살표의 사용

각의 정의를 제시할 때 같이 제시되는 그림 보기를 보면, 초등학교와 중학교 교과서 모두 각의 변 위에 점이 있는 것과 없는 경우, 변의 끝에 화살표가 붙은 경우와 없는 경우로 구분할 수 있다(Figure 6). 초등학교는 3차와 4차를 제외하고 대체로 점을 표시하지 않다가 최근 2009개정과 2015개정 교육과정 교과서에서 점이 표시되고 있다. 반면 중학교는 1차와 2차를 제외한 3차 이후 교육과정의 대부분의 교과서에서 점이 표시되어 있다(Table 7). 점이 표시되어 있지 않은 교과서도 A, B 등과 같이 알파벳 기호를 변의 끝부분에 넣음으로써 변의 뒷부분 어디엔가 점이 있음을 암시하고 있다(Figure 6). 이처럼 초등학교와 달리 중학교 교과서에, 각의 변 위에 점이 있는 경우가 많은 것은 초등학교에서 반직선을 선분의 확장으로 도입하는 것과 달리 중학교에서는 직선을 두 점을 지나는 선으로 도입한 후, 그것의 부분으로 반직선과 선분을 도입하기 때문일 것으로 예상된다.

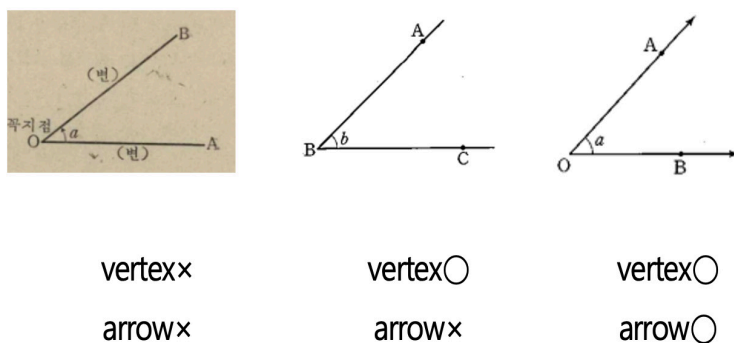


Figure 6. Vertex and arrow in the pictures of angle.

Table 7. Cases of marking vertex on the side of angle in picture examples of angle.

Marking vertex	Curriculum									
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev	2009 rev	2015 rev
Elementary	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
Middle	0/1	1/4	1/1	1/1	4/5	4/4	12/12	15/15	4/4	10/10

각의 그림 보기에 제시된 화살표 사용 유무도 초등학교와 중학교 교과서 간에 차이가 있지만, 최근에는 두 곳 모두 화살표를 사용하지 않는 경향을 보이고 있다(Table 8). 초등학교는 5차에서 각을 선분으로 정의했으므로 화살표를 사용하지 않았고, 그 이후 교육과정에서도 각을 직선이나 반직선으로 정의함에도 불구하고 교과서에서 화살표를 사용하지 않고 있다. 중학교는 초등학교보다 화살표를 사용하는 경향이 높았다. 그러나 중학교 역시 7차 교육과정 이후 최근까지 교과서에서 화살표 사용 비중이 점차 줄고 있으며, 2015 개정 교육과정 교과서의 경우 분석대상 10권 중 화살표를 사용한 교과서는 단 한 종에 불과했다.

Table 8. Cases of marking arrow on the side of angle in picture examples of angle.

Marking arrow	Curriculum									
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev	2009 rev	2015 rev
Elementary	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Middle	0/1	1/4	1/1	1/1	2/5	1/4	6/12	5/15	2/4	1/10

마지막으로 교과서 내에서 화살표 사용의 일관성을 살펴보자. 중학교 수학1에서 각을 정의하기 전에 기본도형인 점, 선, 면을 다루고, 직선을 정의한 후 선분 또는 반직선을 다룬다. 따라서 가장 먼저 도입하는 직선에 화살표를 붙인다면 이후 도입되는 반직선과 각의 그림에도 화살표를 붙이는 것이 당연하다. 마찬가지로 직선에 화살표를 붙이지 않았다면 이후 반직선과 각에도 화살표를 붙이지 않아야 한다. 그런데 57권의 중학교 교과서를 분석한 결과 한 교과서 내에서 화살표 사용의 일관성이 결여된 경우가 8건이 발견되었다(Table 9). 그러나 다행스럽게도 2009개정 및 2015개정과 같이 최근 교육과정의 교과서에서는 그러한 불일치 사례가 한 건도 발견되지 않았다.

Table 9. Cases of inconsistency in the picture of straight line, ray, angle with respect of using arrow.

	Curriculum	Straight line	Ray	Angle	Proportion
5th	1	×	○	×	40% (2/5)
	2	○	○	×	
6th	1	×	○	×	50% (2/4)
	2	○	○	×	
7th	1	×	○	×	33.3% (4/12)
	2	×	○	×	
	3	○	○	×	
	4	×	×	○	
2007 rev.		×	○	×	6.7% (1/15)

기호의 사용

같은 개념이 초등학교에 이어 중학교 교과서에 재차 등장하는 경우라 해도, 학생들의 발달적 특징을 고려해 중학교 교과서에는 좀 더 세련되고 수준 높은 어휘와 기호가 사용된다. 각도 예외는 아니어서 초등학교와 중학교에 제시되는 정의가 거의 유사하지만, 중학교 교과서에는 좀 더 추상적인 표현으로 수학 기호가 이용된다. 각의 정의에 대해 가장 형식적이고 엄밀한 표현을 한 교과서는 새수학이 반영된 3차 교육과정 시기의 교과서이다(Table 10). 초등학교의 ‘두 사선’ 대신 ‘사선 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} 로, ‘두 사선으로 이루어지는’ 대신 ‘두 사선의 합집합 $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ ’와 같은 표현이 사용되었다. 3차 교육과정에서의 엄밀한 기호 표현은 4차부터는 약화되었다.

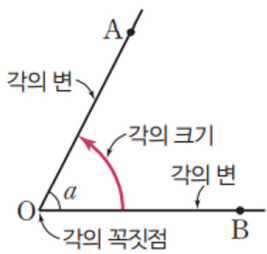
2015개정 초등학교 교과서와 중학교 교과서의 정의는 대동소이하나, 초등학교 교과서에서는 ‘점, 반직선’과 같이 기호를 붙이지 않거나, 기호를 붙인다면 ‘각 \angle 또는 각 \angle ’과 같은 정도로 한글을 사용한 반면, 중학교 교과서에서는 ‘점 O’, ‘반직선 OA’, ‘ \angle AOB 또는 \angle BOA’와 같이 영문자와 기호(\angle)를 사용하는 것이 초등학교 교과서와 다른 점이라 하겠다(Table 10).

Table 10. Use of math symbols in the descriptive definition of angle.

Curriculum	Textbooks	
	Elementary school	Middle school
3rd	끝점이 같은 두 사선으로 이루어지는 그림을 각이라고 합니다.	한 점 O에서 시작하는 두 개의 사선 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} 가 있을 때, 이 두 사선의 합집합 $\overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$ 을 각이라 하고
2015 rev.	한 점에서 그은 두 반직선으로 이루어진 도형을 각이라고 합니다. 그림의 각을 각 \angle 또는 각 \angle 라고 합니다.	한 점 O에서 시작하는 두 반직선 OA, OB로 이루어진 도형을 각이라고 하고, 기호로는 \angle AOB 또는 \angle BOA와 같이 나타낸다

중학교 교과서에서 특징적인 것 중의 하나는 전술한 바와 같이 ‘각의 크기(각도)’를 ‘각’에 이어 바로 도입한다는 것이다. 이것은 3학년에서 각을, 4학년에서 각도를 분리해서 도입하는 초등학교 상황과는 차이가 크다. 중학교는 한 차시 내에 각과 각도를 도입한다. 그뿐만 아니라 분석대상 교과서의 17.5%는 하나의 그림에 각과 각의 크기를 모두 표현하고 있으며(Table 11), 4차 교육과정 이후의 교과서에서는 각과 각의 크기에 해당하는 기호가 동일하다. 3차 교육과정에서는 ‘ \angle AOB에서 점 O를 중심으로 사선 \overrightarrow{OA} 가 각의 내부를 거쳐 \overrightarrow{OB} 의 위치까지 회전한 양을 \angle AOB의 크기로 정한다. \angle AOB의 크기를 기호로 m(\angle AOB)와 같이 나타낸다.’라고 기술되어 있다. 즉 각은 \angle AOB로, 각의 크기는 m(\angle AOB)로 다르게 나타내었다. 그러나, 4차 교육과정에서 m(\angle AOB)과 같은 기호를 간단히 \angle AOB로 나타내기로 하면서(Ministry of Education & Human Resources Development, 2007, p. 22) 그 이후 교육과정 교과서에서는 각과 각의 크기에 대해 같은 기호를 사용하고 있다. 이러한 현상은 중학교에서 각 개념의 위상을 보여주는 것이기도 하다. 즉 중학교에서의 각 개념은 질적, 관계적 측면을 넘어서 양적 측면으로 확장되고 있다. 그러나 이같이 각의 다면적 특성을 이해하지 못하고 교과서를 통해 각을 배운다면 교사나 학생들 입장에서는 혼란스러울 수 있다.

Table 11. Cases of presenting both angle and angle measure in a picture example.

Curriculum	7th	2007 rev.	2009 rev.	2015 rev.	Sum (percentage)
	2	3	1	4	10 (17.5%)

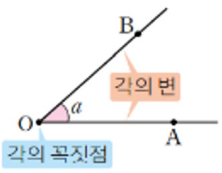
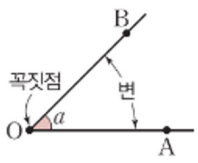
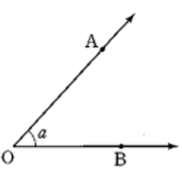
수학 용어의 사용

각의 꼭짓점과 각의 변

각의 구성요소인 ‘각의 꼭짓점’과 ‘각의 변’ 용어는 교육과정에서 초등학교 3-4학년군 도형의 학습요소이다. 2015개정 교육과정에서는 ‘(각의) 꼭짓점’, ‘(각의) 변’과 같은 식으로 괄호를 사용하여, ‘각의’를 붙이지 않아도 무방함을 나타내고 있다, 초등학교 각의 정의에 대한 그림 보기에도 ‘꼭짓점’과 ‘변’이라고 용어를 표시한 경우만 보일 뿐 ‘각의 꼭짓점’, ‘각의 변’을 표시한 경우는 1차부터 2015개정 교육과정 교과서에서 단 한 건도 찾아볼 수 없다. 하지만 중학교 교과서의 그림 보기에는 ‘각의 꼭짓점’, ‘각의 변’을 표시한 경우를 볼 수 있다.

7차 교육과정 이전 교과서는 ‘각의 꼭짓점’과 ‘각의 변’을 정의했다 해도 각의 그림 보기에는 대체로 ‘꼭짓점’과 ‘변’을 표시하였으나, 7차 이후부터 2015개정까지 약 63%의 교과서에서 각의 그림 보기에까지 ‘각의 꼭짓점’과 ‘각의 변’을 표시하는 것으로 나타났다 (Table 12). 우리나라 교육과정에 의하면 ‘꼭짓점, 변’과 ‘각의 꼭짓점, 각의 변’ 가운데 어떤 용어를 사용해도 무방하지만 중학교에서는 ‘각의 꼭짓점과 각의 변’을 더 많이 사용하는 추세라 하겠다. 보통 ‘꼭짓점’과 ‘변’은 삼각형, 사각형, 다각형 등과 같은 폐곡선이나 각기둥, 각뿔, 다면체 등과 같은 폐곡면에서 주로 사용되는 경향이 강해서, 각과 같이 닫혀있지 않은 도형에 대해서는 ‘각의’를 붙임으로서 다소 차별성을 주고자한 것은 아닌지 추측해 볼 뿐이다.

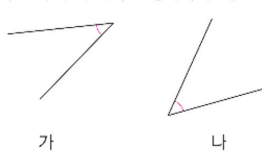



Table 12. Math terminologies used in picture examples of angle in the middle school textbooks

Picture examples	Terminology	Curriculum												
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	2007 rev.	2009 rev.	2015 rev.	Sum		
	side of angle vertex of angle									6	9	4	7	26
	side vertex	1	4		1	5	3	5	2			2	2	23
	no use terminology			1				1	1	4			1	8

각도와 각의 크기

각도(角度)는 ‘각의 크기’의 한자어이다. 그런데 수학교과서를 보면, 이 두 용어가 혼용되고 있으며, 상황에 따라 각도나 각의 크기가 선호되어 사용되는 것을 볼 수 있다. 또한 아이러니하게 초등학교 교과서에서는 ‘각도’가 자주 사용되는 반면, 중학교에서는 ‘각의 크기’가 자주 사용되는 경향을 발견하였다. 2015개정 초등학교 4학년 1학기 수학교과서에서는, 각도를 사용하여 각의 벌어진 양을 수치화하는 상황에서는 ‘각도’를 사용하고, 추론을 통해 각의 크기를 판단해야하는 상황에서는 ‘각의 크기’를 사용하고 있다 (Table 13). 실제로 다수의 중학교 교과서는 각의 크기를 회전량으로 정의하고, 이후 학습에서 평각, 직각, 동위각, 엇각, 맞꼭지각, 내각, 외각 등을 학습하게 된다. 이러한 각들은 각도를 이용한 측정을 통해서가 아니라 도형의 성질을 이용해서 그 크기를 가늠하기 때문에 이럴 경우 ‘각도’라는 용어가 다소 어색할 수 있다. 이런 이유에서인지 중학교 교과서에서는 대체로 ‘각의 크기’라는 용어가 사용되며, ‘각의 크기’가 ‘각도’와 같은 용어임을 밝히는 교과서는 소수이다.

Table 13. Contexts of using ‘amount of angle’ and ‘angle measure’ in the elementary textbook 4-1.

Amount of angle (각의 크기)	Angle measure (각도)
<p>각의 크기를 비교해 봅시다. 준비물 3</p> <p>어느 각이 더 작다고 생각하나요?</p>  <p>각의 크기는 얼마일까요</p> <p>이 두 선우의 발과 야구 방망이와 선우의 발과 야구 방망이와 어떤 차이가 있을지 생각해 봅시다.</p> 	<p>각도기를 이용하여 각도를 재어 봅시다.</p> <p>각도를 어렵하고, 각도기로 재어 확인해 봅시다.</p>  <p>직각 삼각주와 각도 리본에 어떻게 쓰지요.</p>  <p>이런편 각도 야 <input type="text"/> 정 각도 <input type="text"/></p>

각도와 각의 크기 용어의 혼용 현상은 교육과정 문서에서도 볼 수 있다. 7차부터 2015개정까지 수학과 교육과정의 성취기준을 비교하면, 7차 교육과정에서 ‘주어진 각의 크기에 맞는 각을 그릴 수 있다.’가 2007개정부터 ‘주어진 각도와 크기가 같은 각을 그릴 수 있다.’로 용어가 변경되었다(Ministry of Education, 1997; Ministry of Education & Human Resources Development, 2007; Ministry of Education, Science and Technology, 2011; Ministry of Education, 2015). 교육과정의 변화에 따라 수학교과서에서 ‘각의 크기’가 사라졌을까 생각되지만, ‘각의 크기를 각도라고 합니다’라는 정의와 함께 ‘각의 크기’가 여전히 사용되고 있다. 이상의 내용을 정리하면, 초등학교에서는 수학용어로 ‘각의 크기’와 ‘각도’를 모두 사용하지만, ‘각도’에 더 초점이 맞추어져 있는 반면, 중학교에서는 주로 ‘각의 크기’를 사용하고, ‘각도’에 대한 사용은 드물다고 할 수 있다.

결론 및 제언

이 연구는 각이 도형, 측정, 회전 등 다양한 속성을 지닌 복합적인 개념임에도 불구하고, 이에 대한 연구가 많지 않으며, 특히 중학교 수학교과서를 분석 대상으로 한 연구가 거의 없다는 점에 착안하였다. 초등학교 수학교과서의 각 개념 제시 양상에 대해서는 Kim (2018a)과 Kim (2018b)의 연구가 있으며, 이 두 연구 결과를 통해 초등학교 수준에서의 각 개념은 도형과 측정의 관점에서 제시되며, 회전의 관점으로는 거의 제시되지 않고 있음을 알게 되었다. 이에 따라 이 연구에서는 1차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지 중학교 1학년 수학교과서 57권을 수집하여, 중학교 수학교과서에 제시된 각 개념 제시 양상을 분석하였다.

수학사 및 선행연구에 의하면, 각 개념은 각이 만들어지는 구성 과정, 즉 움직임에 초점을 둔 동적 관점과 구성의 결과로 만들어진 최종 상태, 즉 움직임이 없는 정적 관점 두 가지로 구분된다. 또한 각을 형태로 해석하는 질적 측면과 선분이나 반직선과 같은 각의 구성 요소들의 관계로 해석하는 관계적 측면, 그리고 두 변의 벌어진 정도로 해석하는 양적 측면, 이 세 가지 측면으로도 구분하여, 결과적으로 각 개념을 이원적으로 분석하였다. 또한 각 개념의 표현과 관련하여, 기술적 정의에 사용된 각의 구성요소, 시각적 표현에 사용된 점과 화살표의 사용, 기호와 수학용어의 사용 등에 대해서도 각의 정의를 세밀하게 살펴보았다.

이상의 기준으로 중학교 수학교과서를 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 중학교에서의 각 개념은 초등학교에서의 각 개념의 확장판이라고 볼 수 있다. 초등학교에서는 각을 두 반직선으로 이루어진 도형으로 제시하고, 각도를 각의 벌어진 정도로 정의하는 반면, 중학교에서는 각의 정의가 유사하지만 각도를 회전량으로 제시하고, 각 도입 직후 각도를 제시함으로써 각에 대한 동적 관념과 양적 관념을 추가로 부여하고 있다. 또한 교과서에 따라 각과 각도를 하나의 그림에 표현하거나 각과 각도를 동일한 기호로 표현하는 등, 각과 각도를 뚜렷하게 구분하고 각에서 양의 관념을 덜어내려고 하는 초등학교의 노력과는 상당히 다른 양상을 보이고 있었다. 이러한 현상은 학생들로 하여금 각을 움직이는 것, 양을 생각할 수 있는 것 등과 같이 다면적이고 복합적인 개념으로 생각할 수 있는 여지를 제공하겠지만, 동시에 과연 각이란 무엇이며, 각도란 무엇인가에 대한 개념적 혼란을 야기할 가능성도 높다. 실제로 이 연구의 출발점도 연구자가 가지고 있던 각 개념의 혼란에서 시작되었으므로, 초등학교생이나 중학교생들이 각에 대해 겪을 개념적 혼란은 쉽게 예상된다. 따라서 중학교 교과서에서 각 개념의 다양한 속성이 노출되어 확장되는 것은 바람직하지만, 그것이 다시 한 곳에 모아지고 통합될 수 있는 교육적 기회가 추가로 주어져야 할 것이다.

둘째, 중학교 수학교과서에서 각 개념의 표현은 교육과정에 따라 초등학교 수학교과서와 일치하지 않은 부분이 어느 정도 있어 왔지만, 교육과정이 경과됨에 따라 일치성이 개선되는 것으로 보인다. 5차, 6차, 7차, 2007개정 교육과정 교과서를 보면 각의 변에 대해 초등에서는 선분이나 직선을, 중등에서는 반직선을 이용해 정의함으로써 상당 기간 초등과 중등 정의 간에 괴리가 발생하였다. 그러나 2009 개정 이후 최근 교육과정에서는 초등과 중등 둘 다 반직선을 이용하여 각을 정의함으로써 기술적 정의 간의 괴리 문제는 더 이상 찾기 어렵다.

각의 변에 화살표나 점을 표시하는 문제도 최근 교육과정에서는 초등학교와 중학교 간에 점은 표시하고 화살표는 표시하지 않는 형태로 점차 일치되는 모습을 보이고 있다. 그러나 지난 교육과정의 교과서를 보면 대체로 중학교에서 화살표를 사용하는 빈도가 높았으며, 2015 개정 교과서에서도 여전히 화살표를 사용하는 중학교 교과서가 있는 것은 사실이다.

기호의 사용은 초등과 대비되는 중학교 수학 교과서만의 특징이었으나, 4차 교육과정 이후 교과서들이 각과 각도에 대해 동일한 기호를 사용하고 있는 점은 논의의 여지가 있다. 3차 교육과정 중학교 교과서는 국정으로 1권인데, 거기서는 각이 $\angle AOB$ 로, 각의 크기가 $m(\angle AOB)$ 로 다르게 표현되었다. 그러나 4차 이후 교과서들은 대체로 각과 각도를 모두 $\angle AOB$ 와 같은 형태로 표현하고 있는데, 이것은 결과적으로 각과 각도를 구분하지 않겠다는 의도로도 해석된다.

또한 ‘각도’와 ‘각의 크기’가 초등과 중등 교과서에 공통적으로 혼용되고 있지만 대체로 초등에서는 ‘각도’를, 중등에서는 ‘각의 크기’를 더 많이 사용한다는 점이 특이하다. 각도는 각의 크기에 해당하는 한자어로 같은 개념을 나타내는 수학용어이다. 그러나 교과서에서는 각도기를 이용하여 각의 벌어진 정도를 수량화해야 하는 상황에서는 대체로 각도라는 용어를 사용하며, 맞꼭지각, 엇각, 동의각 등 추론을 이용해서 각의 크기를 가늠해야 하는 상황에서는 각의 크기라는 용어를 사용하는 경향성을 발견하였다. 이런 이유에서인지 모르겠으나 중학교 교과서에서는 대체로 각도라는 용어를 사용하지 않고 각의 크기라는 용어를 사용하는 것을 볼 수 있었다.

이상의 분석결과를 토대로 초등 및 중등 수학교과서 집필 및 각의 지도를 위해 추후 연구되고 논의되어야 할 사항들을 정리하면 다음과 같으며, 이는 곧 이 연구에서 실행하지 못한 연구의 제한점이기도 하다.

첫째, 각의 다면적 속성을 살펴보았지만, 여전히 정적인 동시에 동적이며, 질적, 관계적, 양적 속성이 동시에 존재하는 개념이란 무엇인가에 대한 개념적 혼란이 깨끗하게 사라진 것은 아니다. 많은 선행연구자들이 각의 다면적 속성을 인정하고 학생들에게 각에 대한 다양한 측면을 경험하도록 하고 궁극적으로 이를 통합하도록 지도해야 한다고 주장하지만, 다면적 개념을 통합한다는 것의 교수학적 의미는 무엇인지가 불명확하다. 현행 교과서와 같이 각과 각도의 정의를 다르게 하더라도 근접 시기에 제시하거나 하나의 그림에 두 개념을 동시에 표현하거나 같은 기호를 사용하는 식으로 두 개념의 구분을 어렵게 하는 것이 개념의 통합인지, 혹은 각과 각도는 사실상 하나의 개념임을 명시적으로 선언하는 것이 바람직한 것인지 등과 같이 개념적이고 동시에 교수학적 문제들이 여전히 해결되어야 할 과제로 남아 있다.

이 연구에서는 중학교 교과서가 초등학교 교과서에 비해 각에 대한 다양하고 확장적인 관점을 제시하고 있다고 결론내렸다. 그러나 이것은 대체로 회전량으로서의 각도(각의 크기)를 각과 근접한 시기에 도입함으로써 가능했다. 또한 각의 벌어진 정도를 호(\frown)로 시각화하거나, 각과 각도를 같은 기호로 나타내는 식으로 수학교과서에는 각과 각도의 구분이 애매한 경우가 너무나 많다. 이와 같은 식의 접근은 각과 각도를 같은 것으로 간주하게도 하지만, 한편으로는 각과 각도에 대한 개념적 혼란을 야기할 수도 있다. 따라서 각에 대한 개념적 의미와 학생과 교사를 대상으로 한 각 개념 인식 실태 조사, 그리고 그에 따른 교수학적 지도 전략에 대한 연구는 앞으로 계속 되어야 할 것으로 생각된다.

둘째, 최근 초등학교와 중학교 수학교과서가 공통적으로 취하는 각의 정의는 반직선을 이용하고 있다. 따라서 두 학교 급간의 일치성이 상당히 높다. 그러나 우리는 삼각형이나 사각형에서도 각을 다루기 때문에 실제로 반직선이 아닌 선분에 대해서도 각을 논한다. 이 문제는 Kim (2018b)의 연구에서 비중있게 다루어졌지만, 이 연구에서는 다루지 못했다. 중학교에서도 삼각형, 사각형, 다각형 등 선분으로 이루어진 도형에서 각을 고찰하는 활동이 여전히 많기 때문에, 각을 반직선으로 정의했을 때 발생할 수 있는 문제가 여전히 존재한다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해 각의 변을 반직선에 제한하고 있는 현재의 정의를 재고할 필요가 있다.

셋째, 이 연구에서는 기술적 정의나 그림 보기에 한정하여 각 개념을 분석하였다. 그러나 정의 이후에 제시되는 다양한 활동에서도 각에 대한 여러 가지 속성들을 충분히 드러낼 수 있으므로, 차후 연구에서는 정의 이외의 활동을 고찰할 필요가 있다. 특히 최근에는 다양한 공학적 도구를 이용해 수학을 역동적으로 학습할 수 있는 환경이 마련된 만큼 각의 다면적 모습을 경험할 수 있는 다양한 활동에 대한 연구가 요구된다.

References

- Bae, J. S., Park, J. R., Yoon, H. W., Yoo, J. W., Kim, M. W., Min, K. Y., ..., Woo, H. C. (2000). *Middle School Math 7-na*. Book Publishing Hansung Education Research Institute.
- Browning, C. A., Garza-Kling, G., & Sundling, E. H. (2007). What's your angle on angles?. *Teaching children mathematics*, 14(5), 283-287. <https://doi.org/10.5951/TCM.14.5.0283>
- Cho, S. H., & Kim, G. Y. (2021). Investigating mathematics teachers' understanding of and intention to use textbooks. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 60(1), 111-131. <https://doi.org/10.7468/mathedu.2021.60.1.111>
- Cho, T. G., Lim, S. M., Jung, S. K., Lee, J. H., & Lee, S. J. (2000). *Middle School Math 7-na*. Kumsung Publishing.
- Choi, S. I., & Kim, S. J. (2012). A study on defining and naming of the figures in the elementary mathematics-focusing to 4th grade geometric domains. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 15(4), 719-745.
- Choi, Y. J., & Lee, H. G. (1994). *Middle School Mathematics 1*. Chunjae Education.
- Chung, E. T. (1971). *Middle School New Math 1*. Minjung Seogwan.
- Close, G. S. (1982). *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer stage* [master's thesis, Polytechnic of the South Bank].
- Doopedia (2022). *Half-line*. Doosan Encyclopedia. <https://terms.naver.com/entry.naver?docId=1098856&cid=40942&categoryId=32224>
- Geum, J. H., Lee, M. G., Lee, M. R., & Kim, Y. J. (2000). *Middle School Math 7-na*. Goryeo Publishing.
- Go, S. E., Park, B. H., Kim, J. H., Choi, S. I., Kang, U. J., & So, S. Y. (2000). *Middle School Math 7-na*. Black box.
- Hwang, S. G., & Lee, J. D. (2000). *Middle School Math 7-na*. Hanseo Publishing House.
- Hwang, S. W., Hwang, H. J., Lee, S. G., Baek, S. Y., Park, K. M., Park, S. H., ..., Oh, E. J. (2011) *A study on creative future-oriented mathematics, improvement of content and curriculum revision proposals*. Korea Foundation for the Advancement of Science & Creativity 2011-4.
- Hwang, S. W., Kang, B. G., Park, J. A., & Kim, S. Y. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Truebook.Sinsago.
- Hwang, S. W., Kang, B. G., Yoon, G. J., Lee, K. Y., Jang, H. W., Jung, J. S., & Cho, S. Y. (2018). *Middle School mathematics 1*. Mirae-N.
- Jang, K. Y., Kang, H. Y., Kim, D. W., Ahn, J. M., Lee, D. H., Park, J. H., ..., Goo, N. Y. (2018). *Middle School mathematics 1*. Jihak Publishing.
- Jeong, S. Y., Kwon, H. C., Kang, W. J., Lee, H. C., Shin, J. Y., & Seol, J. S. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Doosan Publishing.
- Joo, M. K., Kang, E. J., Kang, S. Y., Lee, H. G., Kang, S. J., Oh, H. P., & Kwon, S. S. (2018). *Middle School mathematics 1*. Kumsung Publishing.
- Jung, C. H., Kim, C. D., Lee, S. E., Lee, C. H., & Min, J. B. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Daekyo.
- Jung, S. K., Lee, J. H., Park, H. S., Hong, J. G., Seo, H. S., Park, B. S., & Kim, E. J. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Kumsung Publishing.
- Kang, H. G., Lee, H. Y., Park, S. K., Park, J. S., Lee, Y. W., Han, K. G., ..., Park, J. S. (2000). *Middle School Math 7-na*. Institute For Better Education.
- Kang, O. G., Kwon, E. G., Lee, H. J., Woo, H. J., Yoon, S. H., Kim, T. H., ..., Yoon, H. M. (2018). *Middle School mathematics 1*. Dong-A Publishing.
- Kang, O. K., Jeong, S. Y., & Lee, H. C. (2000). *Middle School Math 7-na*. Doosan Publishing.
- Kang, O. K., Kwon E. K., Hwang H. J., Jeon D. Y., Noh, J. H., Woo, H. J., ..., Jung, K. H. (2018). *Middle School mathematics 1*. Dong-A Publishing.
- Kang, S. Y., Jang, J. S., & Choi, W. S. (1967). *Middle School Mathematics 1*. Jangwonsa.
- Ki, W. R., Park, J. S., Hwang, S. G., & Lee, J. D. (1988). *Middle School Mathematics 1*. Gyooyugyeongusa.
- Kim, B. Y., Song, Y. M., Kim, C. S., Lee, S. J., Kim, I. E., Kwon, S. G., ..., Joo, S. Y. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Textbook Daum.
- Kim, E. T., Park, S. A., Oh, Y. J., & Shin, H. Y. (1994). *Middle School Mathematics 1*. Hanssem Publishing.
- Kim, H. J., Gye, S. H., Oh, J. E., & Won, A. K. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Sungji Publications.

- Kim, H. K., Na, G. S., Lee, M. R., Lee, A. K., & Kwon, Y. G. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Truebook.Sinsago.
- Kim, H. W., Park, G. S., Shin, J. G., & Jeong, E. S. (1994) *Middle School Mathematics 1*. Jihak Publishing.
- Kim, M. J. (2015). *A Study on Sixth Graders' Definitions of Geometric Terms* [Master's thesis, Korea National University of Education].
- Kim, S. M. (2018a). Angle concepts and introduction methods of angles in elementary mathematics textbooks. *Education of Primary School Mathematics*, 21(2), 209-221. <https://doi.org/10.7468/jksmec.2018.21.2.209>
- Kim, S. M. (2018b). Research on the Definitions of Angle in the Past Korean Elementary Mathematics Textbooks. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(3), 265-282. <https://doi.org/10.29275/jerm.2018.08.28.3.265>
- Kim, S. R., Lee, J. R., Sunwoo, H. S. Lee, J. H., Kim, W., Kim, Y. S., ..., Joo, W. J. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Chunjae Education.
- Kim, W. K., Cho M. S., Bang, G. S., Lim, S. H., Kim, D. H., Kang, S. J., ..., Kim, Y. H. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Visang Education.
- Kim, W. K., Cho M. S., Bang, K. S., Kim, S. M., Bae, S. K., D., Oh, H. J., ..., Hwang, J. H. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Visang Education.
- Kim, W. K., Jo, M. S., Kim, Y. J., Kim, Y. H., Bang, H. S., Yoon, G. W., & Lee, C. S. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Visang Education.
- Kim, Y. S., & Kim, H. G. (1988). *Middle School Mathematics 1*. Dong-A Publishing.
- Kim, Y. S., & Kim, H. G. (1994). *Middle School Mathematics 1*. Doosan Dong-A Publishing.
- Korean Mathematical Society (2015a). *Rotation angle. Mathematics Encyclopedia*. <https://terms.naver.com/entry.naver?docId=3405422&cid=47324&categoryId=47324>
- Korean Mathematical Society (2015b). *General angle. Mathematics Encyclopedia*. <https://terms.naver.com/entry.naver?docId=5669331&cid=60207&categoryId=60207>
- Ko, H. K., Kim, E. H., Kim, I. S., Lee, B. J., Han, J. C., Choi S. Y., ..., Choi, H. J. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Kyohak.
- KOFAC(2011). *Study of mathematics curriculum according to 2009 revised curriculum: Policy research 2001-11*.
- Koo, K. J. (1988). *Middle School Mathematics 1*. Jihak Publishing.
- Koo, K. J., Yoo, H. S., & Jo, K. H. (1970). *Middle School Mathematics 1*. Bobmunsa.
- Kwon, Y. M., & Ahn, B. G. (2005). The analysis on students' understanding of mathematics terms being used in elementary school mathematics textbooks-centering on the field of geometry. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 9(2), 137-159.
- Lee, C. H. (2001). An analysis on angle concepts in mathematics education. *School Mathematics*, 3(1), 25-44.
- Lee, J. Y., Choi, B. R., Kim, D. J., Lee, J. R., Kim, S. M., Won, Y. M., Kang, H. G., ..., Kang, S. G. (2018). *Middle School mathematics 1*. Chunjae Education.
- Lee, J. Y., Jang, H., Choi, B. R., Nam, H. Y., & Lee, S. E. (2000). *Middle School Math 7-na*. Didimdol Publishing.
- Lee, J. Y., Kim, B. W., Kim, D. G., Song, Y. J., Yoon, S. H., Hwang, S. M., & Lim, Y. W. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Chunjae Education.
- Lee, S. H. (1960). *Middle School Mathematics 1*. Daedong Munhwasa.
- Lee, Y. H., Heo, M., Park, Y. H., & Yeo, T. K. (2000). *Middle School Math 7-na*. Gyomoon.
- Ministry of Education (1979). *Middle School Mathematics 1*. Korean Educational Development Institute.
- Ministry of Education (1988). *Middle School Mathematics 1*. Korean Educational Development Institute.
- Ministry of Education (1989). *Mathematics 3-1*. The state-authored textbook corporation.
- Ministry of Education (1997). *Mathematics Curriculum: Ministry of Education Notice No. 1997 - 15*.
- Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum: Ministry of Education Notice No. 2015-74*.
- Ministry of Education (2019). *Mathematics 3-1*. Chunjae Education.
- Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum: Ministry of Education, Science and Technology Notice No. 2011-361*.
- Ministry of Education & Human Resources Development (2007). *Elementary School Curriculum: Ministry of Education and Human Resources Notice No. 2007-79*.
- Ministry of Education & Human Resources Development (2007). *A middle school curriculum commentary book*. Ministry of Education & Human Resources Development.
- Monroe, E. E. (2006). *Math Dictionary*. Boyds Mills Press.
- National Institute of Korean Language (2022). *Standard Korean Dictionary*. Retrieved Feb. 19, 2022, from <https://stdict.korean.go.kr/search/searchView.do>

- Pang, J. S., & Hwang, J. N. (2021). An Analysis of Mathematical Competencies Intended in Elementary Mathematics Textbooks for Third and Fourth Grade. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics*, 24(1), 21-41. <https://doi.org/10.7468/jksmec.2021.24.1.21>
- Park, D. I., Shin, D. S., & Kang, Y. H. (1988). *Middle School Mathematics 1*. Kyohak.
- Park, G. H., Han, O. D., Kim, S. G., Lim, C. W., Go, S. G., Kim, Y. T., Yuk, S. K., & Park, J. Y. (2000). *Middle School Math 7-na*. Dure Education.
- Park, H. S. (1988). *Middle School Mathematics 1*. Jihak Publishing.
- Park, J. R., Yoo, J. G., Lee, C. J., Hong, B. N., Kim, D. J., & Park, W. R. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Didimdol Publishing.
- Park, K. H., Choi, B. C., Ahn, S. Y., Kim, J. S., & Yu, M. Y. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Dhbook.
- Park, K. S., Lee, J. H., Kim, J. H., Nam, J. Y., Kim, N. H., Lim, J. H., ..., & Hwang, J. Y. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Dong-A Publishing.
- Park, S. H., Choi, S. G., Yoon, S. W., & Jeong, D. H. (1969). *Middle School New Math 1*. Tamgudang.
- Park, Y. B., Park, H. S., Kwon, H. C., & Yuk, I. S. (2000). *Middle School Math 7-na*. Korean textbooks.
- Ryu, H. C., Ryu, S. L., Han, H. J., Kim, S. M., Je, S. Y., Kim, M. S. ..., Kim, M. J. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Korean Textbooks.
- Ryu, H. C., Sunwoo, H. S., Shin, B. M., Jeong, D. S., Jang, Y. H., Sul, J. S., & Park, S. H. (2018). *Middle School Mathematics 1*. Chunjae Education.
- Shin, H. G., Lee, K. Y., Yoon, H. Y., & Lee, J. H. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Jihak Publishing.
- Shin, H. K. (2000). *Middle School Math 7-na*. Hyungseul Publishing.
- Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics. (3rd ed)*. Addison Wesley Longman.
- Woo, J. H., Park, K. S., Lee, J. H., Park, K. M., Kim, N. H., Lim, J. H., ..., Kim, J. S. (2013). *Middle School Mathematics 1*. Dong-A Publishing.
- Woo, J. H., Park, G. S., Park, K. M., Lee, K. W., Kim, N. H., Lim, J. H., ..., Choi, I. S. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Doosan Publishing.
- Yoo, B. H., Lee, D. W., Lee, Y. W., Kim, Y. H., Lee, S. H., Park, E. O. ..., Jung, J. Y. (2009). *Middle School Mathematics 1*. Bobmunsa.
- Yoon, S. S., Jo, N. S., Kim, H. Y., Jo, J. M., Jang, H. W., & Kim, H. K. (2009). *Middle School Mathematics 1*. THETEXT.
- Yu, H. J. (1993). A phenomenological study on rational number concept. *Journal of the Korea society of Educational Studies in Mathematics*, 3(1). 93-104.