

# 복합재료 적층 구조물에 대한 열-기계-점탄성 연성 거동 예측을 위한 개선된 일차전단변형이론

김준식\*, 한장우\*\*,#

\*금오공과대학교 기계시스템공학과, \*\*금오공과대학교 기계설계공학과

## Enhanced First-Order Shear Deformation Theory for Thermo-Mechanical-Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Structures

Jun-Sik Kim\*, Jang-Woo Han\*\*,#

\*Department of Mechanical System Engineering, Kumoh National Institute of Technology

\*\*Department of Mechanical Design Engineering, Kumoh National Institute of Technology

(Received 11 January 2022; received in revised form 21 February 2022; accepted 24 February 2022)

### ABSTRACT

In this study, an enhanced first-order shear deformation theory is proposed to efficiently and accurately predict the thermo-mechanical-viscoelastic coupled behavior of laminated composite structures. To this end, transverse shear stress and displacement fields are independently assumed, and the strain-energy relationship between these fields is systematically established using the mixed variational theorem (MVT). In MVT, the transverse shear stress fields are obtained from the third-order zigzag model, whereas the displacement fields of the conventional first-order model are considered to amplify the benefits of numerical efficiency. Additionally, a transverse displacement field with a smooth parabolic distribution is introduced to accurately predict the thermal behavior of composite structures. Furthermore, the concept of Laplace transformation is newly employed to simplify the viscoelastic problem, similar to the linear-elastic problem. To demonstrate the performance of the proposed theory, the numerical results obtained herein were compared with those available in the literature.

**Keywords :** Laminated Composites(적층 복합재료), Thermo-Mechanical-Viscoelastic Analysis(열-기계-점탄성 해석), Laplace Transformation(라플라스 변환), Mixed Variational Theorem(혼합 변분 이론)

### 1. 서 론

최근 탄소중립, 미세먼지 저감 등과 같은 환경 이슈에 대한 관심에 따라 에너지 효율의 측면에서 고강도 경량 구조물에 대한 필요성이 지속적으로 증가하고 있으며, 이에 대한 대안으로써 질량 대비 높은 강도를

# Corresponding Author : [uddan@kumoh.ac.kr](mailto:uddan@kumoh.ac.kr)

Tel: +82-54-478-7381, Fax: +82-54-478-7319

보이는 복합재료 구조물이 다양한 산업 분야에서 적용되고 있는 실정이다. 그 중 섬유강화 복합재료 적층 구조물은 강화섬유 및 수지의 종류, 적층 배열 방식 등의 제작 공정 변수에 따라 고강도 경량 특성을 극대화할 수 있다는 장점이 있지만, 적층 구조물의 경우 면내 중심면에 수직인 방향으로 적용되는 횡방향 전단( $\sigma_{\alpha 3}$ ) 및 수직( $\sigma_{33}$ ) 응력 성분들로 인해 층간 분리, 층간 미끄러짐 등과 같은 기계적 결함이 유발될 수 있기 때문에 이를 고려한 설계/해석 모델이 지속적으로 요구되고 있다.

이에 따라 횡방향 응력 성분들을 효과적으로 예측하기 위한 다양한 해석 모델들이 제시되어 왔으며, 고전적 층판이론(CLPT : Classical Laminated Plate Theory), 일차 전단변형이론(FSDT: First-order Shear Deformation Theory)<sup>[1]</sup> 등을 시작으로 3차 다항식 변위장에 zigzag 항을 중첩시킴으로써 적층 구조물의 횡방향 응력 조건들을 모두 만족시킬 수 있는 효율적 고차이론(EHOPT: Efficient Higher-Order Plate Theory)<sup>[3]</sup>이 차적으로 개발되었다. 효율적 고차이론의 경우 적층 구조물의 거동 예측 과정에서 정확한 해석 결과를 제공하는 반면 유한요소 정식화 과정에서 C1 형상 함수(기울기가 요소 경계면에서 연속인 함수)가 필요하기 때문에 범용성의 측면에서 개선 방안이 요구되었다<sup>[4]</sup>.

상기 문제에 대한 대안으로써, 혼합 변분 이론에 기반하여 독립적으로 가해진 변위장과 횡방향 응력장 사이의 수학적 관계식을 정의해줌으로써 해석 결과의 정확도와 계산 과정의 효율성을 동시에 향상시킬 수 있는 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM: Enhanced First-order Shear Deformation Theory via Mixed formulation)이 개발되었다<sup>[5]</sup>.

한편, 다양한 산업 분야에 광범위하게 적용되고 있는 복합재료 구조물은 고온/고습 등과 같은 다양한 외부 환경에 빈번하게 노출될 수 있으며, 이에 따라 열 팽창 등과 같은 치명적인 구조적 결함 요인이 유발될 수 있다. 특히, 복합재료의 주요 구성 요소인 고분자 기지재의 경우 고온/고습 환경에서 점탄성 재료 특성을 나타낼 수 있기 때문에, 중장기적 관점에서 다양한 외부 환경에서 구동되는 복합재료 구조물의 구조적 신뢰성을 정확하게 판단하기 위해서는 열 변형 및 점탄성 거동이 종합적으로 고려된 복합소재 구조물 해석 모델이 요구되고 있는 상황이다<sup>[6-9]</sup>.

본 연구에서는 상기 요구 사항에 따라 개선된 일차전단변형이론을 활용하여 복합재료 적층 구조물의 열-기계-점탄성 거동을 효과적으로 예측할 수 있는 방안을 제시하고자 하였다. 구조물의 열적 거동을 효과적으로 예측하기 위해 횡방향 변위장을 포물선 형태로 가정하였으며, 동시에 시간 적분이 요구되는 점탄성 거동 해석 과정에서 라플라스 변환 기법을 적용함으로써 계산 효율성을 향상시키고자 하였다. 수치 예제로써 실제 산업 현장에서 적용되고 있는 GY70/339 복합재료에 대한 열-기계-점탄성 거동 해석을 수행하였으며<sup>[8]</sup>, 참고 문헌에서 활용 가능한 다양한 해석 결과들과의 비교, 분석을 통해 제안된 이론의 정확성 및 효율성을 검증하고자 하였다.

## 2. 개선된 일차전단변형이론

### 2.1 점탄성 구성 방정식

열팽창이 고려된 구조물의 점탄성 거동을 예측하기 위한 구성 방정식은 시간 적분 형태로 정의된다.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{d}{dt} [\varepsilon_{kl}(\tau) - \alpha_{kl} \Delta T(\tau)] d\tau \quad (1)$$

여기서  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ 는 각각 응력, 변형률, 열팽창 텐서를 나타내며,  $C_{ijkl}$ 은 단사정 물성치를 나타내는 탄성 텐서를 나타낸다. 또한,  $\Delta T$ 는 기준 온도에 대한 온도 변화( $T - T_0$ )를 나타낸다. 본 연구에서는 식 (1)과 같이 주어지는 점탄성 구성 방정식의 시간 적분 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 라플라스 영역에서 점탄성 거동을 정의하고자 하였다.

$$\sigma_{ij}^*(s) = s \cdot C_{ijkl}^*(s) \cdot [\varepsilon_{kl}^*(s) - \alpha_{kl} \Delta T^*(s)] \quad (2)$$

식 (2)에서  $(\square)^*$ 는 라플라스 영역에서의 변수를 나타내며, 라플라스 변환 기법을 활용함으로써 선형 탄성 거동과 유사한 관계식을 바탕으로 효율적인 점탄성 거동 해석을 수행할 수 있다.

### 2.2 혼합 변분 이론

본 연구에서는 단사정 물성치(monoclinic material property)를 갖는 복합재료 적층 구조물을 고려하였

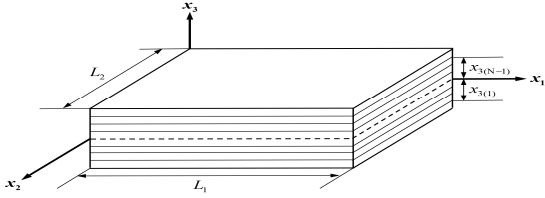


Fig. 1 Geometry and coordinate of laminated composite plates

으며, 기하학적 형상 및 좌표축은 Fig. 1과 같이 주어진다. 여기서  $x_1, x_2$  는 면내 방향 좌표축을 의미하며, 두께 방향을 나타내는 좌표축  $x_3$  은  $h/2$ 와  $-h/2$  사이의 값을 갖는다.

또한, 라플라스 영역에서 정의되는 Hellinger-Reissner 범함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_R^* = & \int_{\Omega} \langle \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^* \delta \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}^* + \bar{\sigma}_{\alpha 3}^* \delta \bar{\gamma}_{\alpha 3}^* + \bar{\sigma}_{33}^* \delta \bar{\epsilon}_{33}^* \rangle d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \langle (\bar{\gamma}_{\alpha 3}^* - \hat{\gamma}_{\alpha 3}^*) \delta \hat{\sigma}_{\alpha 3}^* + (\bar{\epsilon}_{33}^* - \hat{\epsilon}_{33}^*) \delta \hat{\sigma}_{33}^* \rangle d\Omega \\ & - \int_{S_\sigma} \hat{t}_i^* \delta \hat{u}_i^* dS_\sigma - \int_{S_u} \delta \hat{t}_i^* (\hat{u}_i^* - \hat{u}_i^*) dS_u = 0, \\ \langle \square \rangle = & \int_{-h/2}^{h/2} \langle \square \rangle dx_3 \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)으로 주어지는 범함수에서 변위장과 응력장이 독립적으로 가정되며,  $\langle \square \rangle, (\square)$  는 각각 변위장 및 응력장으로부터 정의되는 텐서를 의미한다. 또한,  $S_u, S_\sigma$  는 변위 및 응력 경계면을 나타낸다.

### 2.3 횡방향 응력장

복합재료 적층 구조물 거동 예측 과정에서 보다 정확한 솔루션을 도출하기 위해 횡방향 변위장이 포물선 형태로 가정된 효율적 고차이론(EHOPT-TN<sup>3D</sup>: Efficient Higher-Order Plate Theory with Transverse Normal effect)을 Hellinger-Reissner 범함수의 횡방향 응력장으로 고려하였다<sup>7)</sup>. 라플라스 영역에서의 초기 변위장은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{u}_\alpha^*(x_i) = & \hat{u}_\alpha^{(o)*} + \hat{u}_\alpha^{(1)*} x_3 + \hat{u}_\alpha^{(2)*} x_3^2 + \hat{u}_\alpha^{(3)*} x_3^3 \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{S}_\alpha^{(k)*} (x_3 - x_{3(k)}) H(x_3 - x_{3(k)}), \\ \hat{u}_3^* = & \hat{u}_3^{(o)*} + \hat{u}_3^{(1)*} x_3 + \hat{u}_3^{(2)*} x_3^2 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $N$  은 복합재료 적층 수,  $H(x_3 - x_{3(k)})$  는 단위 계단 함수를 나타낸다. 또한,  $\hat{S}_\alpha^{(k)*}$  는 층간 경계면에서의 변위의 기울기를 의미하며, 전단 응력 연속 조건을 부과함으로써  $\hat{S}_\alpha^{(k)*} = \hat{a}_{\alpha\beta}^{(k)*} \hat{u}_\alpha^{(3)*} + \hat{b}_{\alpha\beta}^{(k)*} \hat{u}_{3,\alpha}^{(2)*}$  의 형태로 표현된다. 식 (4)와 같이 주어지는 초기 변위장에 표면 및 층간 경계면에서의 전단 응력 조건들을 부과함으로써 개선된 형태의 변위장을 도출할 수 있으며, 이를 통해 횡방향 응력장을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\alpha 3}^* = & s \cdot C_{\alpha 3\beta 3}^* \left[ \hat{\Phi}_{\alpha\beta,3}^{(a)*} \hat{\gamma}_\alpha^{(3)*} + \hat{\Phi}_{\alpha\beta,3}^{(b)*} \hat{\gamma}_{3,\alpha}^{(2)*} \right], \\ \hat{\sigma}_{33}^* = & s \cdot \left[ C_{33\alpha\beta}^* \left( \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}^* - \alpha_{\alpha\beta} \Delta T^* \right) + C_{3333}^* \left( \hat{\epsilon}_{33}^* - \alpha_{33} \Delta T^* \right) \right], \\ \hat{\Phi}_{\alpha\beta}^{(a)*} = & 3 \left( \frac{x_3^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_3 \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{a}_{\alpha\beta}^{(k)*} f(x_3, x_{3(k)}), \\ \hat{\Phi}_{\alpha\beta}^{(b)*} = & \left( \frac{x_3^3}{3} - \frac{h^2}{4} x_3 \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{b}_{\alpha\beta}^{(k)*} f(x_3, x_{3(k)}), \\ f(x_3, x_{3(k)}) = & -\frac{x_3}{2} - \frac{x_3^2}{2h} + (x_3 - x_{3(k)}) H(x_3 - x_{3(k)}) \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.4 변위장

계산 과정에서의 효율성을 향상시키기 위해 횡방향 변위장이 포물선 형태로 주어지는 일차전단변형이론(FSDT-TN<sup>3D</sup>: First-order Shear Deformation Theory with Transverse Normal effect)의 변위장을 가정하였다<sup>7)</sup>. 라플라스 영역에서의 변위장은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_\alpha^* = & \bar{u}_\alpha^{(o)*} + \bar{u}_\alpha^{(1)*} x_3, \\ \bar{u}_3^* = & \bar{u}_3^{(o)*} + \bar{u}_3^{(1)*} x_3 + \bar{u}_3^{(2)*} x_3^2 \end{aligned} \quad (6)$$

또한, 식 (6)으로부터 변형률 및 면내 응력 성분들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta}^* = & \bar{u}_{\alpha,\beta}^{(o)*} + \bar{u}_{\alpha,\beta}^{(1)*} x_3, \\ \bar{\gamma}_{\alpha 3}^* = & \left( \bar{u}_\alpha^{(1)*} + \bar{u}_{3,\alpha}^{(o)*} \right) + \bar{u}_{3,\alpha}^{(1)*} x_3 + \bar{u}_{3,\alpha}^{(2)*} x_3^2, \\ \bar{\epsilon}_{33}^* = & \bar{u}_3^{(1)*} + 2\bar{u}_3^{(2)*} x_3, \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^* = & s \cdot \left[ C_{\alpha\beta\gamma\alpha}^* \left( \bar{\epsilon}_{\gamma\alpha}^* - \alpha_{\gamma\alpha} \Delta T^* \right) + C_{\alpha\beta 33}^* \left( \bar{\epsilon}_{33}^* - \alpha_{33} \Delta T^* \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.5 독립된 두 이론 사이의 관계식

혼합 변분 이론의 두 번째 항으로 주어지는 혼합

항을 구속 방정식으로 활용함으로써, 독립적으로 가정된 횡방향 응력장과 변위장 사이의 타당한 수학적 관계식을 도출할 수 있다. 여기서, 가정된 두 이론의 횡방향 수직 변형률( $\epsilon_{33}$ )은 동일하기 때문에 아래와 같은 관계식이 성립된다.

$$\bar{\epsilon}_{33}^* = \hat{\epsilon}_{33}^* \rightarrow \bar{\sigma}_{33}^* \approx \hat{\sigma}_{33}^* \quad (8)$$

식 (8)을 통해 최종적으로 아래와 같은 구속 방정식을 고려할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \langle (\bar{\gamma}_{\alpha 3}^* - \hat{\gamma}_{\alpha 3}^*) \delta \hat{\sigma}_{\alpha 3}^* \rangle d\Omega = 0 \quad (9)$$

또한, 식 (5)에서 정의되는 횡방향 응력 성분  $\hat{\sigma}_{\alpha 3}^*$ 에 대한 결과력들은 아래와 같이 주어진다.

$$(10)$$

여기서 식 (8) 및 식 (9)를 바탕으로 횡방향 응력장의 변수들을 변위장의 변수들로 표현할 수 있으며, 그 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{u}_{\alpha}^{(3)*} = (\tilde{A}_{\alpha 3 \gamma 3}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{A}_{\gamma 3 \beta 3}^{(0)*} & \hat{A}_{\gamma 3 \beta 3}^{(1)*} & \hat{A}_{\gamma 3 \beta 3}^{(2)*} - \tilde{B}_{\gamma 3 \beta 3}^* \\ \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(0)*} \\ \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(1)*} \\ \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(2)*} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{\alpha 3 \beta 3}^* = \langle s \cdot \Phi_{\alpha \gamma}^{(a)*} C_{\gamma 3 \omega 3}^* \Phi_{\omega \beta}^{(a)*} \rangle,$$

$$\tilde{B}_{\alpha 3 \beta 3}^* = \langle s \cdot \Phi_{\alpha \gamma}^{(a)*} C_{\gamma 3 \omega 3}^* \Phi_{\omega \beta}^{(b)*} \rangle,$$

$$\bar{\gamma}_{\beta 3}^{(0)*} = \bar{u}_{\alpha}^{(1)*} + \bar{u}_{3, \alpha}^{(o)*}, \quad \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(1)*} = \bar{u}_{3, \alpha}^{(1)*}, \quad \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(2)*} = \bar{u}_{3, \alpha}^{(2)*} \quad (11)$$

전단 변형률에 대한 관계식인 식 (11)을 식 (10)에 대입함으로써, 아래와 같이 횡방향 응력장으로부터 정의되는 전단 결과력( $\hat{Q}_{\alpha}^{(0)*}$ ,  $\hat{Q}_{\alpha}^{(1)*}$ ,  $\hat{Q}_{\alpha}^{(2)*}$ )들을 변위장의 변수들로 표현할 수 있게 된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_{\alpha}^{(0)*} \\ \hat{Q}_{\alpha}^{(1)*} \\ \hat{Q}_{\alpha}^{(2)*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^* & \Gamma_{12}^* & \Gamma_{13}^* \\ \Gamma_{21}^* & \Gamma_{22}^* & \Gamma_{23}^* \\ \Gamma_{31}^* & \Gamma_{32}^* & \Gamma_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(0)*} \\ \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(1)*} \\ \bar{\gamma}_{\beta 3}^{(2)*} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{i1}^* = \hat{A}_{\alpha 3 \gamma 3}^{(i-1)*} (\tilde{A}_{\gamma 3 \omega 3}^*)^{-1} \hat{A}_{\omega 3 \beta 3}^{(0)*},$$

$$\Gamma_{i2}^* = \hat{A}_{\alpha 3 \gamma 3}^{(i-1)*} (\tilde{A}_{\gamma 3 \omega 3}^*)^{-1} \hat{A}_{\omega 3 \beta 3}^{(1)*},$$

$$\Gamma_{i3}^* = \hat{A}_{\alpha 3 \gamma 3}^{(i-1)*} (\tilde{A}_{\gamma 3 \omega 3}^*)^{-1} (\hat{A}_{\omega 3 \beta 3}^{(2)*} - \tilde{B}_{\omega 3 \beta 3}^*) + \hat{B}_{\omega 3 \beta 3}^{(i-1)*} \quad (12)$$

## 2.6 개선된 일차전단변형이론

횡방향 응력장과 변위장 사이의 수학적 관계식이 정의됨에 따라, 횡방향 변위장이 포물선으로 주어지는 개선된 일차전단변형이론(EFSDTM-TN: Enhanced First-order Shear Deformation Theory via the Mixed variational theorem with Transverse Normal effect)의 지배 방정식은 아래와 같이 주어진다<sup>7)</sup>.

$$\int_{\Omega} \left[ \langle \bar{\sigma}_{\alpha \beta}^* \delta \bar{\epsilon}_{\alpha \beta}^* + \hat{\sigma}_{\alpha 3}^* \delta \bar{\gamma}_{\alpha 3}^* + \bar{\sigma}_{33}^* \delta \bar{\epsilon}_{33}^* \rangle - \hat{t}_3^* \delta \bar{u}_3^* \right] d\Omega = 0 \quad (13)$$

또한, 식 (13)과 같은 지배 방정식에 근거하여 아래와 같은 평형 방정식을 도출할 수 있게 된다.

$$\begin{aligned} \delta \bar{u}_{\alpha}^{(o)*} : \bar{N}_{\alpha \beta, \beta}^* &= 0, \\ \delta \bar{u}_{\alpha}^{(1)*} : \bar{M}_{\alpha \beta, \beta}^* - \hat{Q}_{\alpha}^{(0)*} &= 0, \\ \delta \bar{u}_3^{(o)*} : \hat{Q}_{\alpha, \alpha}^{(0)*} + \hat{t}_3^* &= 0, \\ \delta \bar{u}_3^{(1)*} : \hat{Q}_{\alpha, \alpha}^{(1)*} + \frac{h}{2} \hat{t}_3^* - \bar{N}_{33}^* &= 0, \\ \delta \bar{u}_3^{(2)*} : \hat{Q}_{\alpha, \alpha}^{(2)*} + \frac{h^2}{4} \hat{t}_3^* - 2\bar{M}_{33}^* &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 결과력들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} [\bar{N}_{\alpha \beta}^*, \bar{N}_{33}^*] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\sigma}_{\alpha \beta}^*, \bar{\sigma}_{33}^*] dx_3, \\ [\bar{M}_{\alpha \beta}^*, \bar{M}_{33}^*] &= \int_{-h/2}^{h/2} x_3 [\bar{\sigma}_{\alpha \beta}^*, \bar{\sigma}_{33}^*] dx_3, \\ [\hat{Q}_{\alpha}^{(0)*}, \hat{Q}_{\alpha}^{(1)*}, \hat{Q}_{\alpha}^{(2)*}] &= \int_{-h/2}^{h/2} [\hat{\sigma}_{\alpha 3}^*, x_3 \hat{\sigma}_{\alpha 3}^*, x_3^2 \hat{\sigma}_{\alpha 3}^*] dx_3 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (14)는 변위장 성분들을 통해 정의된 평형 방정식이며, 따라서 전단력의 크기가 무시할 수 있을 정도로 작아지는 세장비가 큰 적층 구조물의 경우 FSDT-TN과 같은 해를 갖는다.

또한, 평형 방정식을 통해 계산된 결과를 바탕으로 횡방향 응력장에 근거한 후처리 과정을 수행함으로써 보다 정확한 변위 및 응력 분포 결과 도출이 가능해지며, 최소 자승 오차법에 의한 평균 변위 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{+h/2} \min_{u_{\alpha}^*} (\hat{u}_{\alpha}^* - \bar{u}_{\alpha}^*)^2 dx_3 &= 0 \\ \Rightarrow \hat{u}_{\alpha}^{(o)*} &= \left[ \begin{aligned} &\bar{u}_{\alpha}^{(o)*} + \frac{h^2}{24} \bar{u}_{3, \alpha}^{(1)*} \\ &-\frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha \beta}^{(0)*} \rangle \bar{u}_{\beta}^{(3)*} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha \beta}^{(1)*} \rangle \bar{u}_{3, \beta}^{(2)*} \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

정의된 평균 변위 관계식을 바탕으로 횡방향 응력

장으로 고려된 효율적 고차이론의 변위장은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\hat{u}_\alpha^* = \begin{bmatrix} \bar{u}_\alpha^{(o)*} + \frac{h^2}{24} \bar{u}_{3,\alpha}^{(1)*} - \sum_{k=0}^2 \frac{1}{(k+1)} \bar{u}_{3,\alpha}^{(k)*} x_3^{(k+1)} \\ + \left[ \Phi_{\alpha\beta}^{(a)*} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(a)*} \rangle \right] \hat{u}_\beta^{(3)*} \\ + \left[ \Phi_{\alpha\beta}^{(b)*} - \frac{1}{h} \langle \Phi_{\alpha\beta}^{(b)*} \rangle \right] \bar{u}_{3,\beta}^{(2)*} - c_\alpha^* \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{u}_3^* = \bar{u}_3^{(o)*} + \bar{u}_3^{(1)*} x_3 + \bar{u}_3^{(2)*} x_3^2$$

여기서  $c_\alpha^*$ 는 횡방향 응력장과 변위장 사이의 면내 결과력이 같다는 가정을 통해 정의되는 면내 보정함수이며,  $\hat{u}_\beta^{(3)*}$ 는 식 (11)에 의해 변위장의 변수로 표현할 수 있기 때문에 수학적으로 타당한 후처리 과정을 수행할 수 있게 된다.

상기 과정을 통해 라플라스 영역에서 도출된 변위 및 응력 분포 결과들은 아래와 같이 주어지는 수치적인 라플라스 역변환 과정을 적용함으로써 최종적으로 시간 흐름에 따른 점탄성 변위 및 응력 분포 결과들을 정의할 수 있다<sup>[8]</sup>.

$$f(t) = \frac{e^{at}}{t} \left\{ \frac{1}{2} F(a) + \text{Re} \sum_{k=1}^m F \left( a + j \frac{k\pi}{t} \right) (-1)^k \right\} \quad (18)$$

여기서  $F(s)$ ,  $f(t)$ 는 각각 라플라스 및 시간 영역에서의 함수를 나타낸다. 또한,  $a$  및  $m$ 은 수치적 라플라스 역변환 과정의 정확도 향상을 위해 최적화되어야 하는 값들이며, 이전 논문의 연구 결과를 바탕으로 본 논문에서는  $a=4.5$ ,  $m=100$ 의 값을 적용하였다<sup>[8]</sup>.

### 3. 수치 예제

#### 3.1 수치 예제 모델

개선된 해석 모델의 효율성 및 정확도를 검증하기 위해서 2차원 직교 적층 복합재료 구조물에 대한 열-기계-점탄성 거동 해석을 수행하였다. 수치 예제 모델로서 실제 산업 현장에서 적용되고 있는 GY70/339 복합재료를 고려하였으며, 각 층별 물성치(ply material properties)는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} E_L / E_T &= 47.73, & G_{LT} / E_T &= 0.68, \\ G_{TT} / E_T &= 0.34, & \nu_{LT} = \nu_{TT} &= 0.31 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $(\mathbb{L})_L, (\mathbb{L})_T$ 는 각각 강화섬유 방향 및 강화섬유와 수직한 방향에 대한 물성을 나타낸다. 또한, 시간에 대한 점탄성 물성은 아래와 같이 Prony series fitting 물성을 적용하였다.

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl}^e \left[ \sum_{p=0}^m b_{ijkl}^p \cdot e^{-\frac{t}{a_{ijkl}^p}} \right] \quad (20)$$

여기서  $C_{ijkl}^e$ 은 탄성 영역에서의 물성치를 나타낸다. 또한,  $b_{ijkl}^p, a_{ijkl}^p$ 는 각각 점탄성 계수 및 특성 시간 상수를 나타내며, 해당 값들은 실험적 데이터를 바탕으로 도출된다<sup>[8]</sup>. 또한, 기계 및 열 하중을 다음과 같이 고려하였다.

$$\begin{aligned} \hat{t}_3(x_i) &= (P) \sin\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2} y\right), \\ \Delta T(x_i) &= (T_0 + x_3 T_1) \sin\left(\frac{\pi}{L_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L_2} y\right) \end{aligned} \quad (21)$$

또한, 계산된 변위 및 응력 분포 결과에 대해서 무차원화를 수행하여, 3차원 탄성해<sup>[2]</sup> 등과 비교/분석을 수행하였다.

#### 3.2 기계 하중에 따른 점탄성 거동

Fig. 2는 기계 하중( $P \neq 0, T_0 = T_1 = 0$ )을 받고 있는 대칭 직교([0/90/0]) 적층 구조물에 대한 점탄성 크립

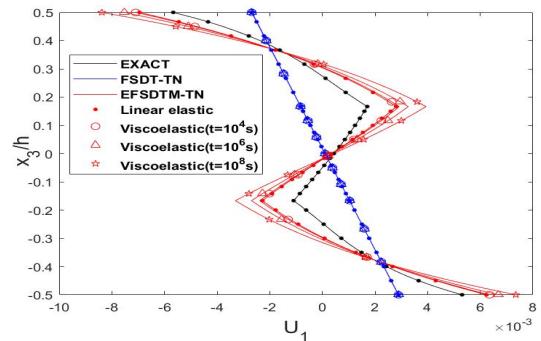


Fig. 2 [0/90/0]: Time-dependent in-plane isplacements for the creep process

변위 분포 결과를 나타낸다. 계산된 결과는 길이 대 두께비가 4( $L_1/h=L_2/h=4$ )인 경우로써, 비교적 두꺼운 적층 구조물을 가정하였다. Fig. 2를 통해 EFSDTM-TN는 FSDT-TN와 비교하여 동일한 계산 과정을 수행하지만, 변형 에너지 개선 및 변위 복원 과정에 근거하여 적층 구조물의 zigzag 변위 분포를 명확하게 표현하며, 동시에 시간 흐름에 따른 점탄성 creep 거동 양상을 효과적으로 예측할 수 있다는 사실을 확인하였다.

### 3.3 열 하중에 따른 점탄성 거동

기계적 거동과는 달리 복합재료 적층 구조물의 열적 거동을 정확하게 예측하기 위해서는 횡방향 수직 변형의 효과를 반드시 고려해야 하며, 본 논문에서는 이러한 횡방향 수직 변형을 효과적으로 고려하기 위해 포물선 형태의 횡방향 변위장을 가정하였다<sup>7)</sup>.

열적 거동의 경우 또한 비교적 두꺼운 적층 구조물( $L_1/h=L_2/h=5$ )에 대한 해석을 수행하였으며, Fig. 3은 균일 분포 열하중( $T_0 \neq 0, P=T_1=0$ )을 받고 있는 비대칭 직교([90/0/90/0]) 적층 구조물에 대한 점탄성 크립 면내 응력 분포 결과를 나타낸다. EFSDTM-TN의 경우 FSDT-TN 결과와 비교하여 층간 경계 지점에서 불연속하게 변화하는 면내 응력 분포를 정확하게 예측할 수 있음을 확인할 수 있으며, 라플라스 변환 기법을 도입함으로써 점탄성 creep 거동

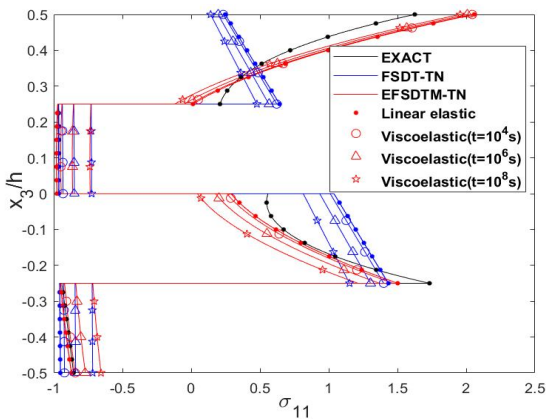


Fig. 3 [90/0/90/0]: Time-dependent in-plane stresses for the creep process

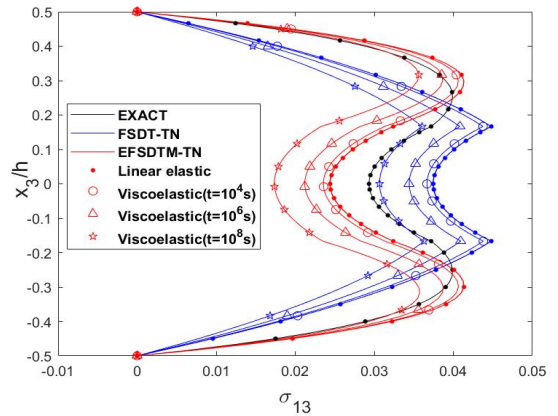


Fig. 4 [0/90/0]: Time-dependent transverse shear stresses for the stress relaxation process

에서 시간에 따른 국부적 면내 응력 분포 변화를 효과적으로 표현한다는 사실을 확인하였다.

Fig. 4는 선형 분포 열하중( $T_1 \neq 0, P=T_0=0$ )을 받고 있는 대칭 직교([0/90/0]) 적층 구조물의 점탄성 응력 이완 과정에 따른 횡방향 전단 응력 분포를 나타낸다. Fig. 4를 통해 EFSDTM-TN는 FSDT-TN와 비교하여 복합재료 적층 설계 과정에서 중요한 요인 중 하나인 횡방향 응력 분포를 보다 정확하게 예측한다는 사실을 확인하였다. 또한, 라플라스 변환 기법 도입을 통해 시간의 흐름에 따라 결과력이 감소하는 점탄성 응력 이완 과정을 효과적으로 고려할 수 있다는 사실을 확인하였다.

상기 수치 예제 결과에 대한 비교/분석을 통해 제안된 해석 모델(EFSDTM-TN)은 간단한 계산 과정만으로 복합재료 적층 구조물의 열-기계-점탄성 거동을 효과적으로 예측할 수 있다는 사실을 확인하였다.

## 4. 결론

본 논문에서는 혼합 변분 이론 및 라플라스 변환 기법을 도입하여 복합재료 적층 구조물의 열-기계-점탄성 거동을 보다 효과적으로 예측할 수 있는 개선된 해석 모델(EFSDTM-TN)을 제안하였다. 제안된 해석 모델에서는 횡방향 응력장과 변위장을 독립적으로 가정되, 독립적인 두 이론 사이의 수학적 관계식을 정의함으로써 구조물 거동 예측 과정에서 정확

도 및 효율성을 동시에 향상시키고자 하였다. 나아가, 시간 적분이 요구되는 점탄성 복합재료 거동 예측 과정에서 라플라스 변환 기법을 도입함으로써 보다 간단한 계산 과정만을 수행하고자 하였으며, 포물성 형태의 횡방향 변위장을 가정함으로써 복합재료 적층 구조물의 열적 거동을 정확하게 예측하고자 하였다.

수치 예제 비교/분석을 통해 본 연구에서 제안한 EFSDTM-TN은 FSDT-TN과 동일한 계산 과정만을 요구하는 반면 복합재료 구조물의 열-기계-점탄성 거동 해석 과정에서 FSDT-TN와 비교하여 정확한 결과를 도출한다는 사실을 확인하였다.

## 후 기

“이 성과는 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2019R1F1A1064059)”

## REFERENCES

1. Reissner, E., “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. 69-77, 1945.
2. Pagano, N. J., “Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending,” *Journal Composite Materials*, Vol. 3, pp. 398-411, 1969.
3. Cho, M., and Parmerter, R. R., “An efficient higher order plate theory for laminated composites,” *Composite Structures*, Vol. 20, pp. 113-123, 1992.
4. Kim, J. K., Choi, S. H., Kim, Y. K., Kim, H. G. and Kwac, L. G., "Finite Element Method Based Structural Analysis of Z-Spring with CF&GF Hybrid Prepreg Lamination Patterns," *Journal of the Korean Society of Manufacturing Process Engineers*, Vol. 20, No. 3, pp. 60-67, 2021.
5. Kim, J. S., and Cho, M., “Enhanced first-order theory based on mixed formulation and transverse normal effect,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 1256-1276, 2007.
6. Oh, J., and Cho, M., “Higher-order zig-zag theory for smart composite shells under mechanical-thermo-electric loading,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 100-127, 2007.
7. Han, J. W., Kim, J. S., and Cho, M., “Efficient Thermal Stress Analysis of Laminated Composite Plates using Enhanced First-order Shear Deformation Theory,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, No. 6, pp. 505-512, 2012.
8. Han, J. W., Kim, J. S., and Cho, M., “Improved Finite Element Viscoelastic Analysis of Laminated Structures via the Enhanced First-Order Shear Deformation Theory,” *Composite Structures*, Vol. 180, pp. 360-377, 2017.
9. Kapuria, S., and Achary, G. G. S., “An efficient higher order zigzag theory for laminated plates subjected to thermal loading,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4661-4684, 2004.