한국학교수학회논문집 제 25 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 25, Number 4, 375-396, December 2022
http://doi.org/10.30807/ksms.2022.25.4.004

우리나라와 일본 수학 교과서의 순환소수 내용 비교

김부미[1]

본 연구에서는 2015 수학과 교육과정의 내용을 재구조화하여 새로운 교육과정을 다룰 때 학습량 적정화와 관련한 아이디어를 제공하기 위해 우리나라와 일본의 교육과정에서 차이가 있게 다루는 순환소수를 교육과정의 연계성 관점에서 살펴보고자 한다. 교육과정의 연계성은 수학 내적 연결성의 계통성과 공유성을 의미하며, 이를 바탕으로 우리나라 2015 개정 교육과정과 일본의 2017 개정 교육과정의 순환소수를 도입 시기, 내용, 다루는 방법 등을 비교하고, 두 나라의 중·고등학교 수학 교과서에서 이를 구체적으로 어떻게 다루는지 비교하였다. 연구결과, 우리나라는 무리수 개념 도입 전인 중학교 2학년에서 순환소수를 정의하고 순환소수와 유리수의 관계를 순환소수의 분수 표현으로 다루고 있었다. 반면 일본은 중학교 3학년에서 무리수를 학습한 후 순환소수의 용어를 간단히 다루고 고등학교 <수학I>에서 순환소수 개념을 다루고 <수학Ⅲ> 교과목에서 극한 개념을 배울 때 유리수와 순환소수의 관계를 다루고 있었다. 이를 바탕으로 향후 교육과정 개정에서 학습량 적정화 등을 고려할 때 순환소수를 어떻게 다룰지 등에 대한 시사점을 제안하였다.

주요용어 : 순환소수, 수학과 교육과정, 일본 2017 개정 수학과 교육과정, 일본 수학 교과서

Ⅰ. 서론

최근 일본, 중국, 영국, 프랑스, 핀란드, 미국, 호주 등 세계 여러 나라는 급변하는 미래 사회에 필요한 수학 역량을 중심으로 수학과 교육과정을 개정하고 있다. 우리나라 역시 디지털 전환, 기후 환경 변화 및 학령인구 감소 등 미래 사회에 학생들이 적극적으로 대응할 수 있는 기초 소양과 역량을 함양하도록 2022 개정 교육과정 총론을 확정하고 각론 교육과정을 개발 중이다(교육부, 2021). 특히, 교육부(2021)가 2022 개정 교육과정 총론을 발표하면서 한 학기 17주 기준 수업 시수를 ‘16주(수업)+1주(학교 자율 운영)’로 변경하는 수업량 유연화 정책을 추진하고 있다. 이는 학교에서 교과 수업시간을 탄력적으로 운영할 수 있도록 총론에서 학교 자율 시간 확보의 근거를 제시한 것으로 볼 수 있다. 따라서 중학교 수학 이수 기준은 374단위로 2015 개정 수학과 교육과정 대비 변화가 없지만, 이번 수학과 교육과정을 개발할 때는 16주를 기본으로 하는 학습량 적정화가 기대되고 있다. 특히 이번 개정은 ‘국민과 함께하는 교육과정’이라는 비전 아래 총론과 각론 개발에 대국민 설문조사, 시도별 전문직, 핵심교원뿐만 아니라 현장 교사 네트워크 등을 대상으로 수차례 교육과정에 대한 구체적 조사를 통해 현장의 의견 수렴을 추진하였다. 이 과정에서 2022 개정 중학교 수학과 교육과정을 운영할 때 수업량 유연화를 고려하여 2015 수학과 교육과정 대비 학습량 경감에 대한 학교 현장의 요구가 있다.

---
* MSC2010분류 : 97C70, 97U20
1) 원광대학교 교수 (bmkim@wku.ac.kr)

우리나라 2015 개정 중학교 수학과 교육과정과 해외 교육과정, 국제 학업성취도평가인 PISA, TIMSS 등을 비교한 연구를 살펴보면, 우리나라의 중학교 수와 연산 영역에서 다루는 내용 요소 중 순환소수 개념을 다루는 것에서 차이가 나타났다(김부미 등, 2019; 김선희 등, 2020). 먼저, 순환소수와 관련해 우리나라는 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 도입하기 위해 중학교 2학년에서 순환소수의 뜻과 유리수와 순환소수의 관계를 다룬다. 그러나 PISA에서는 순환소수 개념을 다루지 않으며, TIMSS 2019에서도 순환소수를 다루지 않고 제곱근을 다룬다(김선희 등, 2020). 미국의 교과서 역시 순환소수는 다루지 않고, 제곱근 개념을 다룰 때 계산기를 사용하여 무리수의 근삿값을 직접 계산해 볼 때 순환소수를 다루는 정도가 일부 있다(박윤희, 박달원, 정인철, 2004). 미국, 영국, 일본, 호주, 핀란드 등의 국가들은 우리나라와 달리 중학교급에서는 순환소수의 개념을 소수 표현의 일종으로 매우 간단히 다루거나, 중학교에서는 다루지 않고 고등학교에서 극한 개념을 다룰 때 순환소수와 유리수의 관계를 다룬다(DfE, 2016; 김부미 등, 2019; 조상식 등. 2020). 교육과정은 해당 학교급에서 다뤄야 할 내용의 범위와 교수학습 방법을 안내하는 역할을 한다는 점에서, 해외 여러 국가에서 순환소수를 고등학교와 연계하여 다루는 것을 눈여겨볼 필요가 있다. 순환소수는 두 학교급에서 학생들의 이해 수준을 고려하여 모두 다루거나, 상위 학교급에서 그 개념을 심화시켜 다룰 필요가 있음을 의미한다.

특히, 일본은 법적 고시 형태로 교육과정이 존재하고 PISA와 TIMSS의 최상위국이면서 학제와 교육환경, 최신 교육과정의 개정 배경, 다루는 학습 내용이 우리나라와 매우 유사하다. 그러나 일본은 2008년 수학과 교육과정을 개정한 이후 최근 개정한 2017 수학과 교육과정까지 통계 영역의 개선을 개정의 중점 사항으로 추진하면서 수업시수 등을 고려하여 수와 식 영역에서 순환소수를 우리나라와 다르게 다루고 있다. 구체적으로 중학교 3학년에서 유리수와 무리수를 다루지만, '순환소수' 용어와 기호는 중·고등학교 수학과 교육과정 문서에서 언급되지 않는다(문부과학성, 2008; 문부과학성, 2017a; 문부과학성, 2017c). 고등학교 수학과 교육과정 해설서(문부과학성, 2017d)에서만 등비급수를 다룰 때 유리수와 순환소수의 관계를 <수학Ⅲ> 교과목에서 다루도록 안내하면서 순환소수를 언급하고 있다. 의도된 교육과정은 일반적으로 대강화한 문서로 존재한다는 점을 고려할 때, 실제로 일본이 순환소수를 언제 도입하고 고등학교 교육과정에서 실수, 등비급수와 같은 관련 개념을 다룰 때 어떻게 순환소수를 그 내용과 연결하여 다루는지를 알기 위해서는 실행된 교육과정의 근거가 될 수 있는 중·고등학교 수학 교과서를 살펴볼 필요가 있다.

새로운 국가 교육과정 개발과정에서는 교육목표와 다양한 사회적 요구에 맞춰 기존의 교육과정의 내용 요소를 재검토하는 것은 필수적인 일이다. 이번 2022 개정 교육과정을 준비하면서 우리나라는 대국민 설문조사를 통해 상자그림, 증명 등의 새로운 내용 요소의 추가 등(이경화 등, 2020; 임해미, 김부미, 2022)이 논의되고 있다. 특히, 새로운 학습 요소의 도입과 함께 16주 수업이라는 수업량 유연화 정책이 추진되어 수학교사모임연합은 학습량 경감을 강하게 요구하고 있다(최수일, 2022). 이러한 시기에 일본이 2008 개정 교육과정에서 정해진 수업시수를 고려하면서도 중학교 1학년에서 대푯값을, 중학교 3학년에서 표본조사를 다루기 위해 수 개념을 중학교와 고등학교에서 연계하여 다루면서 순환소수 내용을 강조하지 않았던 점을 구체적으로 살펴보는 것도 의미가 있다. 즉, 순환소수를 교육과정의 연계성 관점에서 학교급별로 동일 내용이라도 교수·학습 방법에 어떻게 다루어야 할지를 우리나라와 일본의 교과서의 내용을 중심으로 좀 더 구체적으로 비교하고 학습량 적정화와 관련한 하나의 대안으로 순환소수를 다루는 방법을 벤치마킹할 필요가 있다. 또한 학생들이 순환소수를 어떤 일정한 길이를 나타내는 수로 생각하기 어려워하는 완결성 인식의 문제, $\frac{1}{3}=0.333\cdots$와 같이 순환소수로 표현되는 분수의 소수화를 측정의 관점에서 파악할 때의 어려움, 유리수와 순환소수의 관계 이해의 어려움에 관한 여러 선행연구(우정호, 2000; 변희현, 2005; 김부윤, 정영우, 2008; 신보미, 2008; 이선비,

2013; 강정기, 2016; Zazkis & Sirotic, 2010)를 고려하여 중학교 수학과 교육과정 개정할 때 순환소수를 어떻게 다룰지 검토하는 것도 필요하다.

본 연구에서는 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 학습 내용 중·고등학교 교육과정과 연계되어 다룰 수 있는 개념인 순환소수를 우리나라와 일본의 수학 교과서에서 어떻게 다루고 있는지를 살펴보고, 이를 바탕으로 향후 수학과 교육과정 개정 시 학습량 적정화와 관련하여 중학교 수준에서 순환소수를 어떻게 다룰지에 대한 시사점을 제안하고자 한다. 이때, 2017년 3월에 개정한 수학과 교육과정을 고시하고 검정 교과서 제도를 거쳐 2020년에 출판한 최신의 일본 수학 교과서에서 다루는 순환소수 내용을 살펴보고자 한다. 특히, 교육과정 연계성 관점에서 학습량 적정화를 고려해 중학교 수학과 교육과정과 교과서에서 순환소수를 다루는 대안은 향후 우리나라 수학과 교육과정 개정 때마다 논의될 학습량 적정화에 대한 아이디어에 일조할 수 있을 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 순환소수

현행 2015 수학과 교육과정에서 수의 학습 순서는 집합적 확장 방식에 따라 자연수, 정수, 유리수, 실수의 순으로 다루며, 순환소수는 무리수 도입을 위해 다룬다. Klein(1924)에 의하면 무리수에 대한 기본 아이디어는 실제 나눗셈을 통해 분수를 소수로 나타내는 과정에서 순환소수를 인식함으로써 비순환소수의 존재를 고려하게 되면서 생겨났다(우정호, 변희현, 2005, p. 289에서 재인용). 특히, 신보미(2008)는 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입하기 위해 유리수를 순환소수와 동치 개념으로 다루는 것이 필연적인 접근 방식은 아니며, 유리수를 정수, 유한소수, 순환소수로 해석한 다음 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 다루는 방식이 있음을 확인하였다. 이영란과 이경화(2006)는 풍부한 맥락에서 유리수에 대한 반성적 사고를 자극하여 무리수의 존재성과 무리수 학습의 필요성을 인식하여 통약불가능성이라는 무리수의 본질을 획득하게 하는 것이 중요하다고 보고 있다.

수의 확장 과정에 대한 수학사를 살펴보면, Cauchy 등은 수 $\sqrt{2}$ 는 유리수열 1, 1.4, 1.41, 1.414, ⋯의 극한을 갖는다는 것을 존재성에 대한 증명 없이 즉, 암암리에 수렴하는 모든 수열은 극한을 갖는다고 가정하고 주장하였다. 19세기 후반에 들어서야 어떤 실수로의 극한을 사용하지 않고 Cantor와 Dedekind가 유리수로부터 만들어낸 수가 직선의 연속성과 동일한 성질을 가질 수 있음을 증명하였다. 이러한 Cantor의 코시수열 접근법, Dedekind cut 방법은 직선 자체로부터 수를 구성해내는 모습을 보이지는 않는다. 이러한 수학사의 사건들과 달리, '직선은 빠짐없이 점으로 채워져 있다.'라는 직관을 활용하면서 무한소수 표현을 통해 직선의 각 점에 대응하는 수를 구성하는 방식을 다룬 연구가 있다. 이지현(2014, 2015)은 Li의 제안(2011)을 바탕으로 무한소수를 통한 실수 도입방식을 제안하였다. 무한소수를 통한 실수 도입방식은 직선 위의 임의의 점에 대응하는 십진무한소수 표현을 측정맥락에서 일련의 폐개구간을 이용하여 만들고 그러한 십진무한소수의 집합이 완비순서체를 형성함을 증명하는 방식이다(박선용, 2016). 또한 박선용(2016)은 이지현과 Li의 제안에서 직선의 각 점에 대응하는 무한소수 표현을 만드는 과정에서 '순환논리'에 빠질 위험을 보완하기 위해 기하학적 축소구간정리를 사용하여 무한소수를 수열로 정의하는 방식을 통해, 즉 실수의 구성 과정 동안 '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않는 조치가 필요함을 제시하였다.

우리나라 수학과 교육과정에서 모든 유한소수와 순환소수는 유리수임을 중학교 2학년에서 다룬다. 그런 다음, 무한소수는 무한급수의 개념에 따라 그 의미가 분명해질 수 있음에도 불구하고, 중학교에

서는 무한소수 정의를 다룬 후 극한의 개념을 사용하지 않고 주어진 무한소수로부터 그것이 의미하는 유리수를 계산하는 과정을 다룬다. 이는 실수가 이미 존재함을 암묵적으로 가정하고 실수 중에서 유리수가 아닌 수로서 무리수를 정의한 것이다. 한편 중학교 2학년에서 유리수와 순환소수를 구분하여 정의하는 데에는 두 가지 문제점이 있다(이준열 등, 2019). 유한소수를 순환소수로 나타내는 방법은 크게 두 가지가 있는데, 유한소수를 일정 지점 이후 0이 순환하는 소수로 보는 방식과 급수를 이용한 표현, 예를 들어 1을 $0.\dot{9}$, 즉 급수 $\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots$과 같다고 보는 표현 방식이다(이강섭, 엄규연, 2007; 신보미, 2008). 급수를 이용한 표현 방식은 수직선 위에 어떤 점을 소수로 표현할 때 사용하는 방식은 아니다. 예를 들어 수 1에 해당하는 점은 수직선 위에 유일하며 보통 그 점을 수로 표현할 때는 1로 표현된다. 따라서 급수를 이용한 방식은 학생들에게 일반적인 수 표현 방법과 다르다는 점에서 어색하고, 유한소수를 일정 지점 이후 0이 순환하는 소수로 보는 방식은 초등학교에서 배우던 방식과 쉽게 연결되지 않는다는 점에서 어색하다(이강섭, 엄규연, 2007; 신보미, 2008; 이준열 등, 2019).

강정기(2016), 김홍기(2004), 오국환, 방정숙, 권오남(2017), 구나영, 송은영, 최은정, 이경화(2020), Zazkis & Sirotic(2010), Moreira & David(2008) 등의 선행연구에서는 무리수의 소수 표현을 이용한 도입의 문제점을 지적하면서 교육과정에서 순환소수를 다루는 방안을 제안한다. 구체적으로, 무리수를 소수 표현을 이용하여 '순환하지 않는 무한소수'로 도입하는 방식은 무리수가 기준 단위에 대한 비로 나타낼 수 없는 수라는 개념과 쉽게 연결되지는 않는다. 따라서 무리수를 소수 표현이 아니라 유리수가 아닌 수(비분수)로 도입하고 유리수 지도의 연속성 상에서 무리수를 지도할 것을 주장하면서 순환소수는 극한 개념 등과 연계해서 다루거나 기존과 다르게 다루는 후속 연구가 필요함을 제안한다. 이러한 주장은 무리수는 유리수와는 달리 일상생활과의 연관성이 거의 없고 양적으로나 직관적으로 시각화되지 않아 학생들이 이해에 어려움이 크기 때문이다(박윤희, 박달원, 정인철, 2004; Sirotic & Zazkis, 2007; 강정기, 2016; 오국환, 방정숙, 권오남, 2017). 이러한 어려움을 해소하기 위해 우리나라는 2015 개정 중학교 수학과 교육과정에서 피타고라스의 정리를 2학년으로 이동하면서 무리수 개념 도입에서 통약불가능성을 내재하고 있는 기하적 표현을 강조하고 있지만, 이러한 내용은 교과서에서 도입 활동 등으로 다룰 뿐 교과서에서 제시하는 무리수의 정의는 순환하지 않는 무한소수이다(구나영, 송은영, 최은정, 이경화, 2020).

우리나라의 제1차와 제2차 교육과정에서 무리수는 유리수 개념을 소수 표현과 연결하지 않은 상태에서 비분수로 정의하였고 무한소수(순환소수)는 고등학교 <수학I>에서 다루었다. 그러나 제3차 수학과 교육과정부터 2015 개정 수학과 교육과정까지 중학교 2학년에서 무한소수를 배우면서 순환소수를 도입하고 이를 통해 유리수와 소수 표현의 관계를 학습한 후 중학교 3학년에서 '순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수'로 무리수를 도입한다. 즉, 무리수는 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수로 유리수가 아닌 수, 즉 분자와 (0이 아닌) 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수라고 정의한다. 이는 실수를 유리수와 무리수의 합집합으로 정의하는 것에 바탕을 둔 것이다.

우리나라에서는 3차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지 무리수 개념 도입을 위해 중학교 2학년에서 순환소수와 유리수의 관계를 다루지만, 순환소수 관련 '교수·학습상의 유의점'을 통해 그 내용을 다루는 범위와 교수·학습 방법은 제한하고 있다. 유리수와 순환소수의 관계에 대한 교수·학습 방법의 유의점을 살펴보면, 제7차 교육과정과 07 개정 교육과정에서 '유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 강조하지 아니한다.'로 제시하였다. 그러나 2009 개정 수학과 교육과정부터 '유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.'로 명시하였다. 이는 고등학교에서 다루는 극한 개념을 바탕으로 이해하는 것을 학생들이 어려워하는 것을 반영한 것이다. 또한 순환소수의 유리수 표현과 연결과 관련해서

도 7차 교육과정과 07 개정 교육과정에서 ‘순환소수를 분수로 고칠 때 공식화하는 것을 강조하지 않는다.’, 2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정에서는 ‘순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 다룬다.’라고 명시하고 있다. 이는 순환소수를 분수로 고치는 과정을 기계적으로 처리하는 것을 강조하지 않고 학생들의 이해할 수 있는 수준으로 다룰 것을 강조한 것이다. 그러나 이러한 교수·학습상의 유의점은 순환소수의 도입 목적과 서로 충돌될 수 있다. 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 정의하면서 무리수를 유리수가 아닌 수로 이해한다는 것은 유리수를 유한소수와 순환소수로 구분하는 것이 아니라 유리수와 순환소수의 수학적인 관계인 ‘모든 유리수를 순환소수로 나타낼 수 있다.’라는 것을 이해할 수 있어야 하기 때문이다(이강섭, 엄규연, 2007).

2. 우리나라와 일본의 교육과정의 순환소수

앞서 살펴본 우리나라의 2015 개정 수학과 교육과정의 순환소수 내용과 일본의 2017 수학과 교육과정에서 다루는 순환소수 내용을 도입 시기, 다루는 학습 내용, 교수·학습 방법, 교육과정 내의 연계성을 중심으로 비교하고자 한다(<표 1> 참조). 양국의 교육과정 문서체계가 다르지만, 우리나라 교육과정 문서의 내용 체계와 성취기준에 해당하는 일본 교육과정 문서체계는 ‘학년별 내용’으로 볼 수 있다(김부미 등, 2019). 일본 교육과정 문서의 ‘학년별 내용’은 학년별로 수와 식, 도형, 함수, 데이터의 활용이라는 4개 영역으로 나누어 제시되고, 각 내용 영역은 1) 지식과 기능, 2) 사고력·판단력·표현력에 관한 내용으로 구분하여 학습 내용과 방법을 개괄적으로 제시한다. 그리고 학년별 내용의 마지막에 [용어·기호]를 제시한다. 또한 일본은 우리나라와 달리 성취기준을 제시하지 않고 ‘학년별 내용’에서 학습 내용과 방법을 대강화하여 제시하기 때문에 교육과정 해설서를 발간함으로써 교육과정에서 다루는 구체적인 내용과 교수·학습 방법 등을 안내하고 있다. <표 Ⅱ-1>에서 우리나라의 성취기준은 일본의 학년별 내용의 지식과 기능을 중심으로 비교하고, 교수·학습 방법은 우리나라 교육과정 문서의 ‘교수학습 방법 및 유의 사항’, ‘평가 방법 및 유의 사항’과 일본의 ‘사고력·판단력·표현력에 관한 내용’, 교육과정 해설서에 적시된 교수·학습 방법을 중심으로 비교하였다. 또한 교수·학습 방법에서 두 나라의 <학습 요소>와 [용어·기호]도 비교하였다.

<표 Ⅱ-1>순환소수에 대한 우리나라와 일본의 교육과정의 내용 비교

영역	구분	우리나라	일본
순환소수	도입시기	중학교 2학년	중학교 3학년
	내용	• 성취기준으로 명시함. [9수01-06] 순환소수의 뜻을 알고, 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.	• 교육과정 문서에서 순환소수에 대한 직접적 언급은 없음. • 1학년에서 학습한 정수와 음수의 필요성과 의미를 바탕으로 수의 범위를 무리수까지 확장함(문부과학성, 2017b).
	교수·학습 방법	• 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다. • 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 다룬다. • <학습 요소>로 유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환마디, 순환소수 표현(예. $7.\dot{2}1\dot{5}$)을 다룬다.	• 교육과정 문서에서 유리수와 순환소수의 관계에 대한 교수·학습 방법이나 용어·기호를 제시하지 않음. • [용어, 기호] 근호, 유리수, 무리수, $\sqrt{\ }$

	이전/이후 교육과정과 연계성	• 고등학교 <미적분>의 '[12미적01-05] 등비급수의 뜻과 그 합을 구할 수 있다.', '[12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.' 에서 다룰 수 있으나, 교육과정 문서에서 순환소수에 대한 직접적인 언급은 없음.	• 고등학교 <수학Ⅰ> 교육과정 문서(문부과학성, 2017c)의 (1) 수와 식 영역의 '지식 및 기능' 으로 '(가) 수를 실수까지 확장하는 뜻 이해하고, 간단한 무리수의 사칙 계산하는 것이다'를 제시하고, 그에 대한 해설서(문부과학성, 2017d)에서 '무리수가 분수로 나타내지 않는 것이나, 분수가 유한소수와 순환소수로 나타내는 구조에 대해서도 이해할 수 있도록 한다.'라고 제시함. • 고등학교 <수학Ⅲ>의 (1) 극한 영역의 '지식 및 기능'으로 '(나) 무한급수의 수렴, 발산에 대해서 이해하고, 무한등비급수 등 간단한 무한급수의 합을 구할 것'으로 제시하고, 해설서(문부과학성, 2017d)에서 '순환소수를 분수로 나타내는 것을 다루고 이를 등비급수의 수렴의 관점에서 고찰하게 한다. 또, $0.999\cdots=1$ 등의 등식에 대해서 극한의 관점에서 고찰하게 한다.'를 제시함.

두 나라의 교육과정 문서를 살펴본 결과, 우리나라와 일본은 공통으로 중학교 수학에서는 수의 범위를 정수와 유리수, 나아가 무리수까지 확장하여 다루고 있다. 그러나 우리나라와 일본은 순환소수를 다루는 도입 시기와 다루는 학년이 달랐다. 우리나라는 중학교 2학년에서 순환소수의 뜻과 순환소수의 분수 표현 등의 유리수와 순환소수의 관계를 집중적으로 다룬다. 왜냐하면 우리나라는 무리수의 도입이 무한소수를 소재로 하므로 유리수와 순환소수의 관계 규명이 중요하기 때문이다(이강섭, 엄규연, 2007). 그러나 일본은 중학교 3학년에서 무리수를 유리수가 아닌 수(비분수)로 도입하면서 유리수와 순환소수의 관계를 다루지 않는다.

일본은 중학교에서 수의 범위를 자연수, 소수, 유리수, 무리수까지 확장한다. 교육과정 해설서(문부과학성, 2017b)를 통해 초·중학교 교육과정 간의 원활한 연결을 위해 중학교 1학년에서 정수, 양수, 음수의 개념과 사칙계산을 학습하고, 중학교 2학년에서는 수와 식 영역에서 수와 연산 내용을 직접적으로 다루지 않지만, 자연수, 소수, 분수 개념을 문자와 식이나 함수, 도형, 데이터 활용 영역을 다루면서 암묵적으로 사용하도록 한다. 그런 다음, 중학교 3학년에서 유리수와 무리수 용어를 함께 다룬다(문부과학성, 2017a). 또한, 우리나라가 중학교 3학년에서 수의 범위를 실수까지 명확한 용어 정의와 함께 확장하면서 근호를 포함한 식의 사칙계산을 하게 하는 것과 달리, 일본은 고등학교 1학년 <수학Ⅰ>에서 수의 범위를 실수까지 확장하고 실수의 사칙연산의 성질을 이해하고 이를 바탕으로 사칙계산을 하는 것을 다룬다. 그런 다음, 고등학교 <수학Ⅲ> 교과에서 극한 개념을 다루면서 유리수와 순환소수의 관계를 다루도록 하고 있다(문부과학성, 2017d). 특히, 우리나라 교육과정의 <학습 요소>에서 제시하는 용어와 기호의 수에 비해 일본 교육과정 문서에서 제시하는 [용어·기호]의 수가 상당히 적음을 고려하더라도, 일본의 중, 고등학교 수학과 교육과정 문서에서는 순환소수를 다루지 않고 있다(문부과학성, 2017a; 문부과학성, 2017c). 하지만 일본의 중·고등학교 교육과정에서 다루는 수의 확장과 수체계에 관한 내용을 볼 때, 일본은 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 재정의하면서 순환소수의 소수 표현을 다루는 것은 고등학교 수학과 교육과정에서 다룰 것으로 예상할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 교과서 내용 비교

1) 교육과정의 연계성 관점

교육과정에서 연계성은 수학적 연결성을 의미하는 것으로 수학 교과 내 연결, 수학과 타 교과와의 연결, 수학과 실생활의 연결로 분류될 수 있으며, 수학 교과 내 개념 또는 다른 지식 유형 간의 연결을 수학 내적 연결성, 후자의 두 가지를 수학 외적 연결성이라 본다(장혜원, 2016; 김남희, 2016). 또한 Blum, Galbraith, Henn & Niss(2007) 역시 수학 이외의 맥락에서 수학을 인식하고 적용하는 것과 수학적 아이디어들 사이의 연결성을 구분하였다. 수학 이외의 맥락에서 수학을 인식하고 적용하는 것은 수학과 다른 학문 분야와의 연결성이나 수학과 실세계와의 연결성으로 수학 외적 연결성이라고 할 수 있다. 반면에 수학적 아이디어들 사이의 연결성을 수학 내적 연결성이다. 이러한 의미에서 김남희(2016)는 2015 개정 수학과 교육과정에서 중학교 수학의 '교수·학습 방법 및 유의 사항'으로 언급한 내용을 종합해 볼 때 우리나라 중학교 수학과 교육과정에서는 내적 연결성보다는 수학 외적 연결성에 더 큰 강조점을 두며, 수학 내적 연결성은 고등학교 수학에서 주로 언급하는 것으로 보았다.

한편, Barmby, Harries, Hinggins & Suggate(2009)는 학습자의 수학적 이해의 깊이는 서로 다른 수학적 아이디어들 사이에 만들어진 연결성을 통해 알 수 있으므로 새로운 개념을 도입하기 전에 그 개념과 관련되는 선수개념을 조사하는 것과 같은 개념의 연결성을 파악하는 것이 중요하다고 보았다. 양성현과 이환철(2012)은 수학 내적 연결성의 형식적 측면에서 특정 학교급에 한정하지 않고 두 개의 단원에서 계획된 교수가 교육되고, 이때 중복되는 개념과 아이디어들이 조직 요소로 등장하는 데 이를 공유성으로 정의하였다.

특히, 개념의 내적 연결성 관점에서 수체계의 확장은 기존의 수 집합에 새로운 수를 첨가하여 수 집합을 확장해 나간다는 계통성을 지닌다. 계통성은 어떤 내용을 기반으로 그 내용을 수학적으로 확장하거나 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써 새로운 내용을 일관성 있게 전개해 나가는 것을 의미한다. 도종훈(2016)에 의하면, 중학교 수와 연산 영역에서 소인수분해와 그 활용, 정수와 유리수, 유리수의 소수 표현, 무리수와 실수 및 그 연산이 내적 연결성을 보이는 부분이다. 이때, 소인수분해는 초등학교에서 학습하는 자연수와 그 성질 관련 내용의 연장선에서 다루어지고 이후 다항식의 인수분해 내용과 연결된다고 보았다. 또한 중학교에서 무리수 $\sqrt{2}$를 이차방정식 $x^2=2$의 해로 도입하거나 고등학교에서 복소수를 이차방정식의 해와 연계하여 도입하는 부분이 다항식의 인수분해와 직결된다고 보았다(도종훈, 2016). 이에, 본 연구에서 교육과정의 연계성 관점은 중학교 교과서의 내용과 고등학교 수학 교과서의 내용을 내적 연결성의 관점 중 계통성과 공유성을 중심으로 살펴보는 것을 의미한다.

2) 교과서 내용 비교 방법

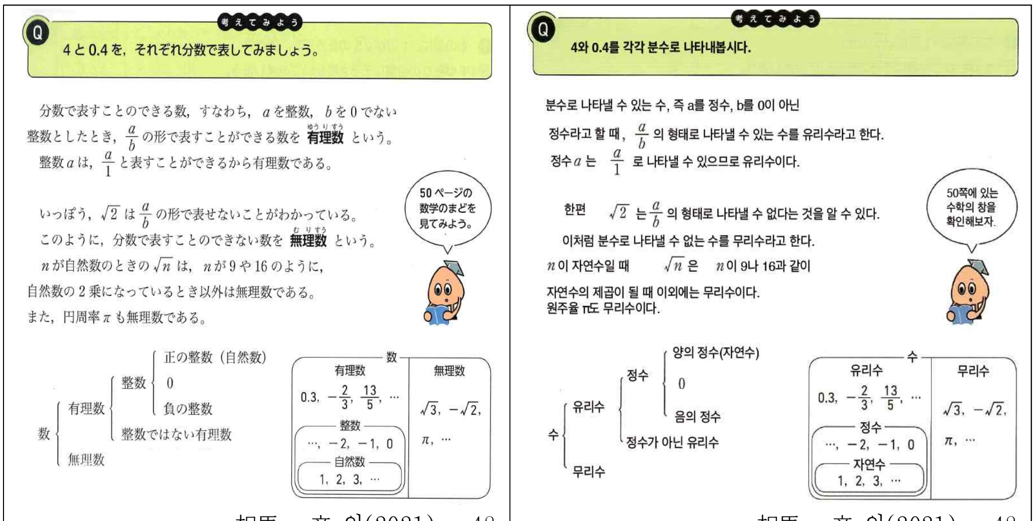
순환소수는 우리나라와 일본의 교육과정에서 도입 시기와 각 학교급에 따라 다루는 내용의 수준과 범위가 달랐다. 우리나라와 일본 모두 순환소수의 소수 표현, 유리수와 순환소수의 관계를 내용 요소로 다루나, 다루는 시기가 각각 중학교 2학년, 고등학교 1학년과 고등학교 3학년으로 차이가 나타났다. 이에, 본 연구에서는 교육과정의 연계성 관점에서 두 나라의 중학교와 고등학교에서 다루는 순환소수 관련 내용 중 차이가 나타난 '소수로 표현한 수체계와 순환소수', '무리수 개념 도입과 관련된 순환소

수 내용’, ‘순환소수의 용어 정의’를 중심으로 두 국가의 수학 교과서를 비교하고자 한다(<표 Ⅲ-1> 참조). 이때, 교육과정의 연계성은 내적 연결성의 계통성과 공유성을 중심으로 중학교와 고등학교에서 순환소수와 관련 내용 요소의 도입 시기, 그 내용 요소를 반복해서 다루는 시기, 각 시기에서 순환소수와 관련 내용의 전개 방식과 교수·학습 방법, 순환소수 용어의 정의와 기호 표현을 분석함으로써 학생의 이해 수준을 교과서에서 어떻게 반영하고 있는지를 살펴보는 것을 의미한다.

<표Ⅲ-1> 순환소수에 대한 우리나라와 일본 교과서의 비교 내용

구분	교육과정의 연계성 관점에서 순환소수 비교 내용
1	무리수 개념 도입과 순환소수의 내용 전개 비교
2	순환소수의 용어와 기호 표현에 대한 비교
3	소수 표현에 의한 수체계 분류에서 나타난 순환소수의 도입 방법 비교
4	유리수(분수)의 소수 표현 방식과 관련한 순환소수 내용 비교

더불어, 2022 개정 중학교 수학 교육과정부터 한 학기 17주 기준 수업 시수를 ‘16주(수업)+1주(학교 자율 운영)’라는 수업량 유연화 정책을 도입하므로, 두 나라의 교과서의 순환소수 내용 비교 결과를 바탕으로 학습량 적정화 관점에서 우리나라 중학교 수학에서 순환소수를 다루기 위한 대안을 제안하고자 한다. 일본 교과서는 일본어 번역 전문가에 의뢰해 번역하고 한국어와 일본어에 능통한 수학교육전문가의 검토를 받아 수정하였다. 그런 다음, 일본 교과서에 한국어 번역본을 일대일로 덧대어 붙이는 패치 방식(patchwork)으로 PDF로 만들어 우리나라의 교과서와 해당 내용을 비교하였다([그림 Ⅲ-1] 참조).



相馬 一彦 외(2021), p.48　　相馬 一彦 외(2021), p.48

[그림 Ⅲ-1] 일본의 교과서 원본과 패치 번역본

2. 비교 대상

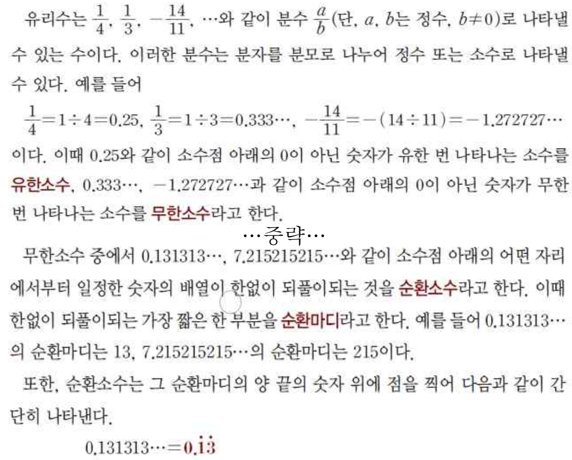
우리나라와 일본의 교육과정을 바탕으로 학교수학에서 실제로 다루는 순환소수의 내용과 교수·학습

방법을 살펴보기 위해 두 국가의 교과서를 분석 대상으로 삼았다. 우리나라는 현재 2015 개정 수학과 교육과정을 반영한 검인정 중학교 수학 교과서는 10종이 출판되고 있다. 일본은 2017 개정 수학과 교육과정을 반영한 중학교 수학 교과서를 검정 심의를 거쳐 2021년에 6종의 교과서가 출판되었다. 우리나라 수학 교과서는 그 내용이나 전개가 매우 유사하여 10종의 교과서를 분석하였으나 교과서 사례는 가장 일반적인 교과서 부분을 발췌하여 제시하고자 한다. 일본의 중학교 교과서는 총 6종 교과서의 내용도 유사하였으나 일본 내 판매량이 많은 2종인 藤井 齊亮 외(2021)의「新しい數學」, 相馬 一彦 등(2021)의 「數學の世界」교과서를 비교 대상으로 하였다. 일본의 2017 개정 교육과정에 따른 고등학교 <수학I> 교과서는 검정 심의를 거쳐 총 3종이 출판되었다. 이 중 온라인 구매가 가능한 2종, 東京書籍株式會社에서 출판한 相野義明 외(2021)의 <新しい數學I>, 數研出版株式會社에서 출판한 <數學I> 교과서를 분석대상으로 하였다.

Ⅳ. 우리나라와 일본 교과서의 내용 비교

1. 우리나라와 일본 교과서의 순환소수

우리나라와 일본은 중학교 3학년에 제곱근을 다루고 무리수를 지도하도록 최신 교육과정 문서에 제시하고 이 과정에서 순환소수를 다루고 있다. 하지만 순환소수를 다루는 내용의 수준과 범위 등에서 차이가 있어 두 국가의 교과서를 <표 Ⅲ-1>을 적용하여 순환소수를 어떻게 다루는지를 살펴본다. 먼저, 우리나라 교과서에서는 정수와 유리수 개념을 중학교 1학년에서 다룬 다음, 중학교 2학년 교과서에서는 유리수를 소수로 나타내는 것을 배울 때 유한소수, 무한소수, 순환소수의 용어를 학습한다([그림 Ⅳ-1]의 ① 참조). 그리고 정수가 아닌 유리수를 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 있고, 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수라는 것을 설명한다([그림 Ⅳ-1]의 ②참조).


유리수는 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{14}{11}$, …와 같이 분수 $\frac{a}{b}$(단, a, b는 정수, $b\neq0$)로 나타낼 수 있는 수이다. 이러한 분수는 분자를 분모로 나누어 정수 또는 소수로 나타낼 수 있다. 예를 들어

$\frac{1}{4}=1\div4=0.25$, $\frac{1}{3}=1\div3=0.333\cdots$, $-\frac{14}{11}=-(14\div11)=-1.272727\cdots$

이다. 이때 0.25와 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 유한 번 나타나는 소수를 **유한소수**, 0.333…, −1.272727…과 같이 소수점 아래의 0이 아닌 숫자가 무한 번 나타나는 소수를 **무한소수**라고 한다.

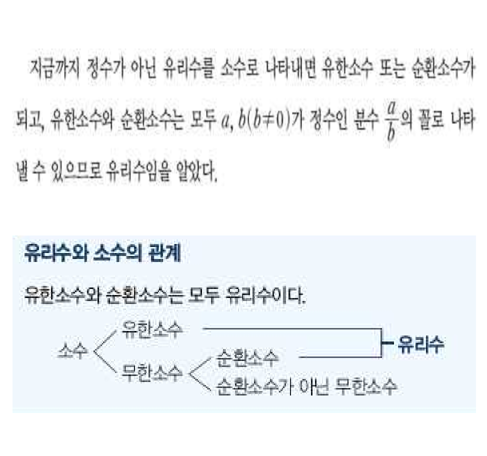
…중략…

무한소수 중에서 0.131313…, 7.215215215…와 같이 소수점 아래의 어떤 자리에서부터 일정한 숫자의 배열이 한없이 되풀이되는 것을 **순환소수**라고 한다. 이때 한없이 되풀이되는 가장 짧은 한 부분을 **순환마디**라고 한다. 예를 들어 0.131313…의 순환마디는 13, 7.215215215…의 순환마디는 215이다.

또한, 순환소수는 그 순환마디의 양 끝의 숫자 위에 점을 찍어 다음과 같이 간단히 나타낸다.

$0.131313\cdots=0.\dot{1}\dot{3}$

① 순환소수 정의(류희찬 등, 2021, pp. 12-13)


지금까지 정수가 아닌 유리수를 소수로 나타내면 유한소수 또는 순환소수가 되고, 유한소수와 순환소수는 모두 a, $b(b\neq0)$가 정수인 분수 $\frac{a}{b}$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수임을 알았다.

유리수와 소수의 관계

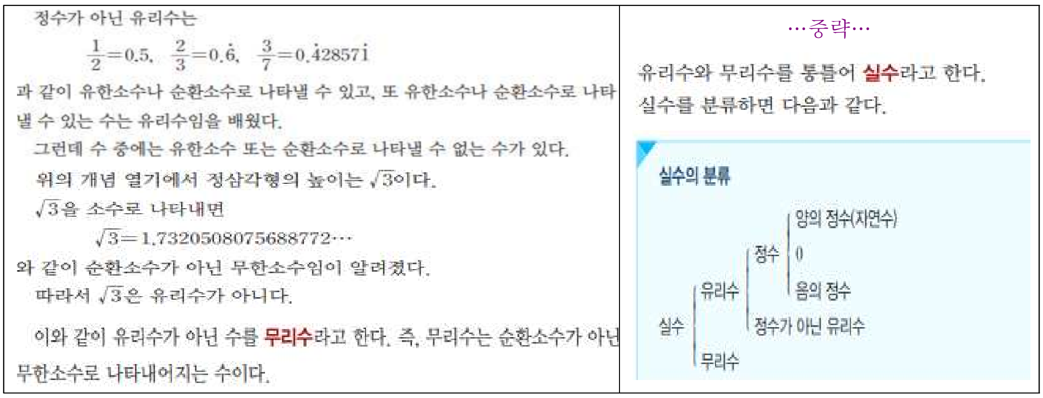
유한소수와 순환소수는 모두 유리수이다.

② 유리수와 소수의 관계(김원경 등, 2021, p.19)

[그림 Ⅳ-1] 우리나라 중2 교과서의 순환소수와 유리수의 관계

그런 다음, 중학교 3학년 수학 교과서에서 [그림 Ⅳ-2]와 같이 무리수를 순환하지 않는 무한소수로

정의하고 실수의 분류 체계를 학습한다. 중학교 3학년에서 무리수, 즉 유리수가 아닌 수의 존재성은 중학교 2학년에서 학습한 순환소수로 나타낼 수 없는 무한소수가 존재함을 보임으로써 말할 수 있다. 그러나 무리수 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 은 순환하지 않는 무한소수를 나눗셈이라는 산술적 조작으로 보이기는 쉽지 않다. 중학교 교과서에서는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이와 같은 기하학적 의미와 연결한 측정수로 도입한 후 제곱근의 대소 관계를 이용해 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 직관적으로 설명한 후 무리수를 정의한다([그림 Ⅳ-2] 참조).


정수가 아닌 유리수는

$\frac{1}{2}=0.5,\quad \frac{2}{3}=0.\dot{6},\quad \frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$

과 같이 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있고, 또 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있는 수는 유리수임을 배웠다.

그런데 수 중에는 유한소수 또는 순환소수로 나타낼 수 없는 수가 있다.

위의 개념 열기에서 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$이다.

$\sqrt{3}$을 소수로 나타내면

$\sqrt{3}=1.7320508075688772\cdots$

와 같이 순환소수가 아닌 무한소수임이 알려졌다.

따라서 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

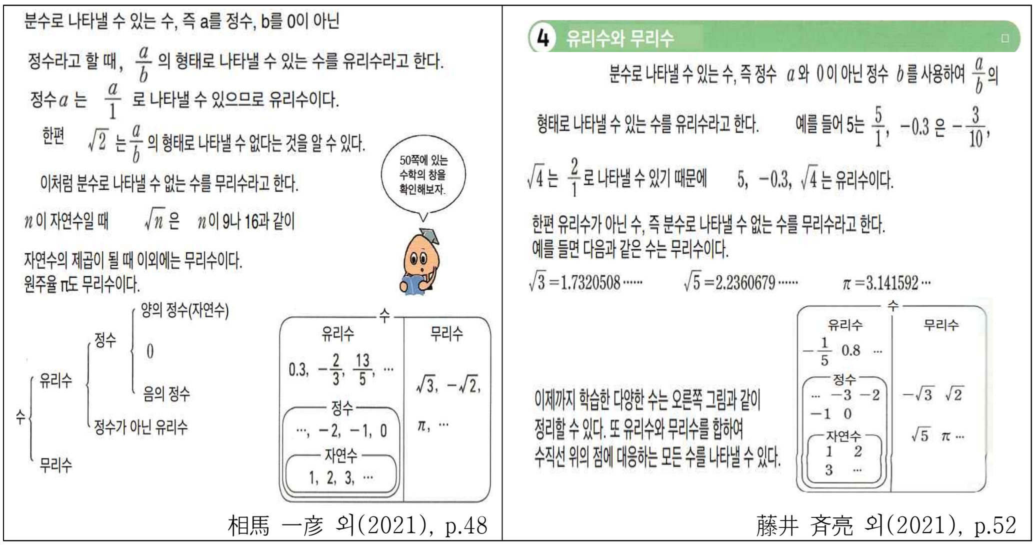
이와 같이 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다. 즉, 무리수는 순환소수가 아닌 무한소수로 나타내어지는 수이다.

…중략…

유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 한다.
실수를 분류하면 다음과 같다.

[그림 Ⅳ-2] 우리나라 중3 교과서의 무리수와 실수(김원경 등, 2021, pp. 17-18)

일본은 중학교 3학년에서 제곱근을 학습한 후 유리수를 분수로 나타낼 수 있는 수로 정의하고 곧바로 분수로 나타낼 수 없는 수를 무리수로 정의한다. 이때, 무리수가 양의 제곱근의 소수 표현으로 직관적으로 보일 수 있음을 기술하는 수준의 교과서가 일부 있다([그림 Ⅳ-3] 참조).


분수로 나타낼 수 있는 수, 즉 a를 정수, b를 0이 아닌 정수라고 할 때, $\frac{a}{b}$ 의 형태로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다.

정수 a 는 $\frac{a}{1}$ 로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

한편 $\sqrt{2}$ 는 $\frac{a}{b}$ 의 형태로 나타낼 수 없다는 것을 알 수 있다.

이처럼 분수로 나타낼 수 없는 수를 무리수라고 한다.

n 이 자연수일 때 $\sqrt{n}$ 은 n 이 9나 16과 같이 자연수의 제곱이 될 때 이외에는 무리수이다.
원주율 π도 무리수이다.

相馬 一彦 외(2021), p.48

4 유리수와 무리수

분수로 나타낼 수 있는 수, 즉 정수 a 와 0이 아닌 정수 b 를 사용하여 $\frac{a}{b}$ 의 형태로 나타낼 수 있는 수를 유리수라고 한다. 예를 들어 5는 $\frac{5}{1}$, -0.3 은 $-\frac{3}{10}$, $\sqrt{4}$ 는 $\frac{2}{1}$ 로 나타낼 수 있기 때문에 5, -0.3, $\sqrt{4}$ 는 유리수이다.

한편 유리수가 아닌 수, 즉 분수로 나타낼 수 없는 수를 무리수라고 한다.
예를 들면 다음과 같은 수는 무리수이다.

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots\cdots$ $\quad\sqrt{5}=2.2360679\cdots\cdots$ $\quad\pi=3.141592\cdots$

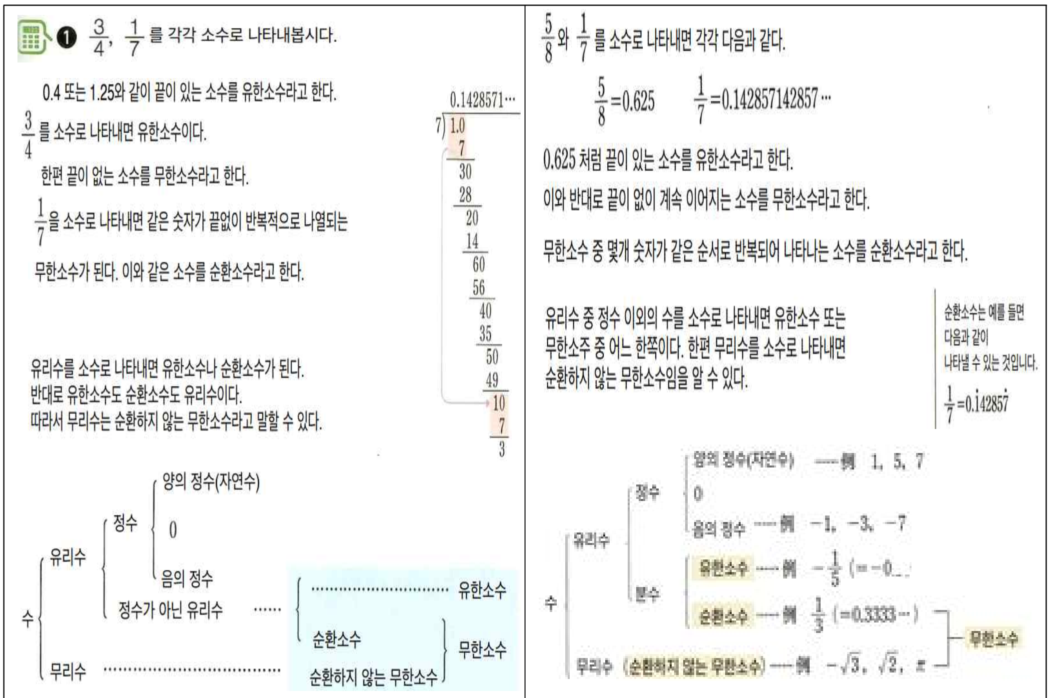
이제까지 학습한 다양한 수는 오른쪽 그림과 같이 정리할 수 있다. 또 유리수와 무리수를 합하여 수직선 위의 점에 대응하는 모든 수를 나타낼 수 있다.

藤井 斉亮 외(2021), p.52

[그림 Ⅳ-3] 일본 중학교 3학년 수학 교과서의 무리수와 실수

일본에서 순환소수는 중학교 3학년에서 무리수를 유리수가 아닌 수로 정의한 후에 유한소수, 무한소수, 순환소수의 정의만을 소개하는 정도로 간단하게 다룬 후 고등학교에서 순환소수를 한 번 더 다루고 있다([그림 Ⅳ-4], [그림 Ⅳ-5] 참조). 이때 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 표현될 수 있음을 분자를 분모로 나누는 사례를 통해 언급하거나 집합 개념을 바탕으로 한 수의 분류를 통해 직관적으로 알 수 있는 정도로만 다룬다([그림 Ⅳ-4] 참조). 이러한 방식은 우리나라가 소수 체계를 활용한 유리수, 무리수, 실수 체계를 다루고 있는 것과 대조된다.

일본 교과서는 교육과정에 기술한 대로 중학교에서 음수, 무리수를 도입하여 수의 범위를 무리수까지 확장하지만, 이 과정에서 집합 개념을 활용하여 수 개념을 이해하게 할 때 무한소수, 순환소수 등의 교육과정의 용어와 기호로 제시하지 않은 표현을 사용한다. 이때 용어는 순환마디 등의 기호 표현을 강조하지 않고 정의만 제시하는 수준으로 다룬다. 우리나라가 교과서 검인정 제도를 통해 <학습요소>로 제시된 용어와 기호만을 교과서에서 사용하도록 하는 것과 달리, 교과서 검정제도를 시행하는 일본은 해당 학년의 교육과정에서 제시하지 않은 용어와 기호를 다루고 있다. 즉, 일본은 용어와 기호는 최소한으로 교육과정에 제시하고 학생의 개념 이해를 돕기 위해 적절한 수준에서는 교육과정에서 제시하지 않은 용어와 기호를 다루도록 허용하고 있음을 의미한다.



相馬 一彦 외(2021), p.49　　藤井 斉亮 외(2021), p.53

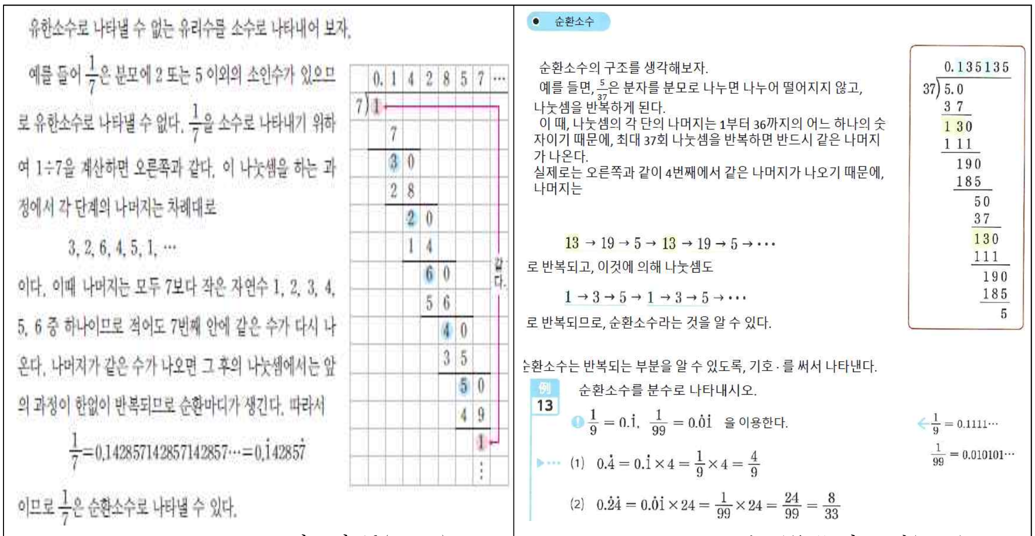
[그림 Ⅳ-4] 일본 중학교 교과서의 순환소수와 무리수

일본의 무리수 개념 도입은 이전에 학습한 유리수 개념과 나눗셈이라는 산술적 경험과 연계하여 직관적으로 지도할 수 있으므로 초등학교에서 학습한 내용과의 연속성 상에서 지도할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 무리수는 유리수와는 달리 일상생활과의 연관성이 거의 없고 양적으로나 직관적으로 시각화되지 않아 학생들이 이해에 어려움이 있을 수 있다. 또한 일부 교과서에서는 순환소수의 기호 표

현을 순환마디 등의 설명이 없이 제시하고 있다. 즉, 무리수를 소수로 표현한 예를 통해 순환하지 않는 무한소수가 무리수임을 선언하는 수준에서만 다루므로, 학생들이 수를 소수 표현으로 나타난 분류 체계에서 수 개념을 확인하는 문제를 암기로 해결할 수 있게 하여 도구적 이해의 수준을 강조할 수 있는 어려움이 있을 수 있다.

한편 우리나라 교과서에서는 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$와 같은 분수의 소수화와 관련하여 순환소수를 $x=0.222222\cdots$와 같이 표현하고 $10x-x=2.222\cdots-0.222\cdots=2$와 같은 계산을 통해 순환소수가 유리수임을 이해하도록 하고 있다. 이러한 대수적 절차와 $x=0.222222\cdots$라는 표현 자체가 이미 실무한의 존재를 인정하는 것으로 볼 수 있다. 하지만 $0.\dot{2}=\frac{2}{9}$와 같이 계산할 수 있는 중학생도 $0.\dot{9}$를 분수로 표현하도록 할 때, $0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$과 같이 계산하면서도 $0.\dot{9}=1$이 된다는 사실을 놀라워한다(이정아, 유재근, 박문환, 2009). 왜냐하면 학생들은 $0.\dot{9}$는 1에 가까워지지만 1보다 작은 수라고 생각하기 때문이다. 이러한 사실에 대해 신보미(2008)는 실제 나눗셈과 같은 대수적 조작으로 경험할 수 있는 소수 표현의 경우는 학생들이 그것을 실무한으로 받아들이기 쉽지만 그렇지 않을 때는 실무한으로 받아들이기 어렵다고 보았다.

일본은 수의 범위를 실수로 확장하면서 실수 체계를 다루면서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 재정의하고 순환소수의 뜻을 다룬다(문부과학성, 2017d). 구체적으로, 相野義明 외 13명(2021)의 <新しい數學I> 교과서에서 순환소수의 뜻에서 다루는 내용을 살펴볼 때, 용어 정의와 기호 표현으로 우리나라 교과서에서 다루는 내용과 동일하나, 순환소수의 분수 표현은 순환마디의 개수를 공식화하여 다루는 정도만을 소개하고 있었다([그림 Ⅳ-5] 참조). 그러나 순환소수의 분수 표현을 우리나라와 같이 제시하고 순환소수 개념을 나눗셈이라는 산술적 조작을 통해 도입한 후 순환소수의 분수 표현을 다루는 고등학교 교과서 <수학Ⅰ>도 있다([그림 Ⅳ-7] 참조). 그런 다음 무리수 용어를 순환하지 않는 무한소수로 재정의하고 실수 체계를 다루고 있었다.



박교식 등(2021a), p.15 相野義明 외 13명(2021), p.57

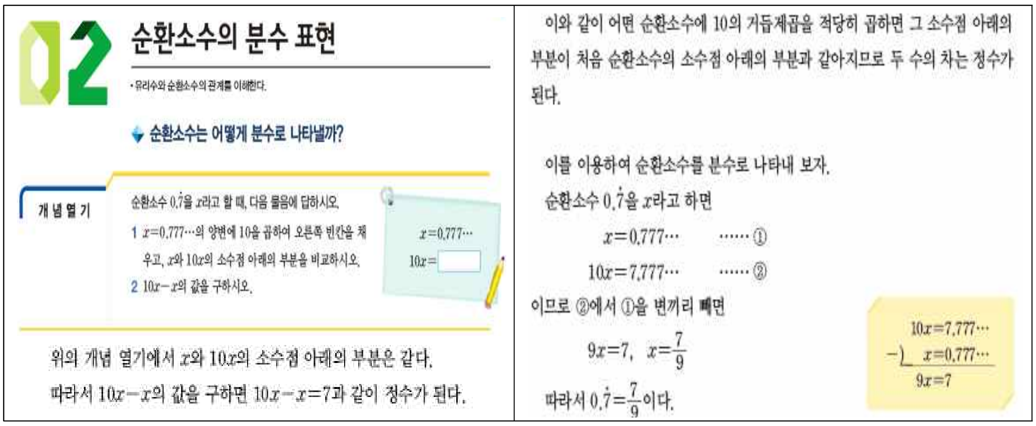
[그림 Ⅳ-5] 우리나라 중2와 일본 고1 수학 교과서의 순환소수의 뜻

우리나라 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 2학년 수학 교과서에서는 유리수를 유한소수와 순환소수[2)]로 생각할 수 있음을 보이기 위해 <표 Ⅳ-1>과 같이 3개의 명제를 차례로 정당화해야 한다(김남희 등, 2021). 이러한 교수학적 변환에서 다루는 유리수와 순환소수의 관계는 세 번째 명제로서, 소수점 아래에서 무한히 반복되는 부분이 서로 일치하도록 주어진 무한소수에 일정한 10의 거듭제곱을 곱하여 만든 두 수의 차를 이용하여 그 결과를 분수로 나타내는 알고리즘을 통해 다루고 있다.

<표 Ⅳ-1> 중학교에서 유리수와 순환소수의 관계를 다루기 위한 명제(김남희 등, 2021, p.38)

정당화 순서	유리수를 유한소수와 순환소수로 다루기 위해 정당화해야 하는 명제
1	유리수를 소수로 나타내면 유한소수 또는 무한소수의 형태이다.
2	유한소수로 나타내 수 없는 유리수는 항상 순환소수인 무한소수로 나타낼 수 있다.
3	역으로, 유한소수 또는 순환소수는 항상 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수가 된다.

학생들은 <표 Ⅳ-1>의 3가지 명제 중 첫 번째 명제인 유한소수나 무한소수로 표현되는 유리수가 존재한다는 것은 나눗셈을 통해 자연스럽게 받아들일 수 있다. 그런 다음 학생들은 두 번째 명제인 유한소수로 나타낼 수 없는 무한소수가 순환소수가 될 수밖에 없음을 [그림 Ⅳ-5]와 같이 구체적인 사례를 들어 설명하는 교과서를 통해 이해한다. 실제로, 우리나라 중학교 2학년 수학 교과서에서는 이러한 두 개의 명제에서 다루는 '모든 유리수가 유한소수나 순환소수로 나타낼 수 있다.'라는 내용을 '순환소수의 뜻을 안다.'는 성취기준의 내용으로 보고 1개의 소절로 구성하여 다룬다. 중학생들이 세 번째 명제가 성립함을 이해할 수 있도록 순환소수의 분수 표현은 새로운 소절로 구성하여 주어진 순환소수를 [그림 Ⅳ-6]과 같이 직관적인 방법을 이용하여 설명하고 있다.


02 순환소수의 분수 표현

• 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.

순환소수는 어떻게 분수로 나타낼까?

개념 열기

순환소수 $0.\dot{7}$을 x라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1 $x=0.777\cdots$의 양변에 10을 곱하여 오른쪽 빈칸을 채우고, x와 $10x$의 소수점 아래의 부분을 비교하시오.

2 $10x-x$의 값을 구하시오.

$x=0.777\cdots$

$10x=$

위의 개념 열기에서 x와 $10x$의 소수점 아래의 부분은 같다.

따라서 $10x-x$의 값을 구하면 $10x-x=7$과 같이 정수가 된다.

이와 같이 어떤 순환소수에 10의 거듭제곱을 적당히 곱하면 그 소수점 아래의 부분이 처음 순환소수의 소수점 아래의 부분과 같아지므로 두 수의 차는 정수가 된다.

이를 이용하여 순환소수를 분수로 나타내 보자.

순환소수 $0.\dot{7}$을 x라고 하면

$x=0.777\cdots$ ……①

$10x=7.777\cdots$ ……②

이므로 ②에서 ①을 변끼리 빼면

$9x=7,\ x=\frac{7}{9}$

따라서 $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$이다.

$10x=7.777\cdots$

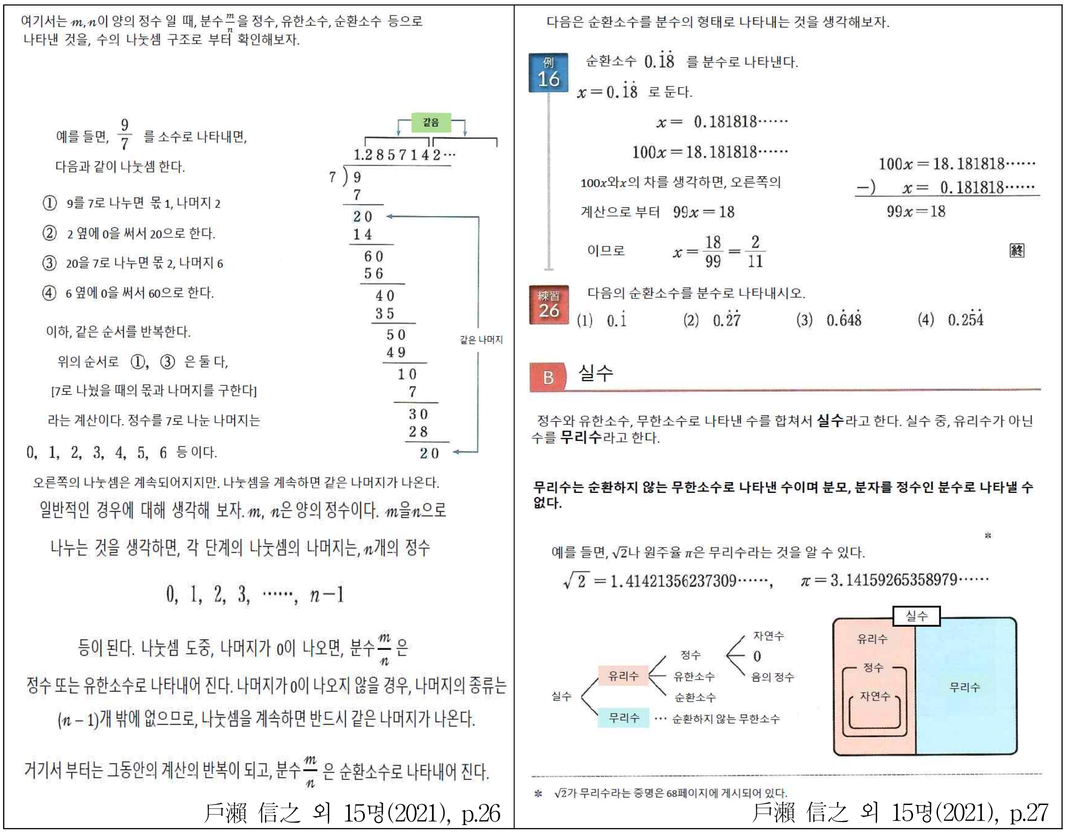
$-)\ \ x=0.777\cdots$

$9x=7$

[그림 Ⅳ-6] 우리나라 중학교 2학년 교과서의 순환소수의 분수 표현(김원경 등, 2021, p.17)

이와 같은 중학교 교과서에서 다루는 순환소수의 분수 표현은 유리수와 순환소수의 관계를 알고리즘을 통해 다루는 방식이다. 조한혁과 최영기(1999)는 이러한 알고리즘적 접근이 중학생들에게 순환하는 무한소수를 유리수로 나타낼 수 있다는 확신을 주지 못한다고 지적한 바 있다. 중학생들은 기계적인 절차에 따라 주어진 무한소수를 분수로 나타내는 것과 이 값이 유리수라는 확신하는 것을 서로 별개라고 인식하는 것이다.

2) 유한소수도 순환소수로 표현할 수 있어 모든 유리수는 순환소수로 나타낼 수 있지만, 2015 중학교 수학과 교육과정에서는 유리수와 순환소수를 배타적으로 구분하여 다루고 있음.



여기서는 m, n이 양의 정수 일 때, 분수 $\frac{m}{n}$을 정수, 유한소수, 순환소수 등으로 나타낸 것을, 수의 나눗셈 구조로 부터 확인해보자.

예를 들면, $\frac{9}{7}$ 를 소수로 나타내면, 다음과 같이 나눗셈 한다.

① 9를 7로 나누면 몫 1, 나머지 2

② 2 옆에 0을 써서 20으로 한다.

③ 20을 7로 나누면 몫 2, 나머지 6

④ 6 옆에 0을 써서 60으로 한다.

이하, 같은 순서를 반복한다.

위의 순서로 ①, ③ 은 둘 다, [7로 나눴을 때의 몫과 나머지를 구한다] 라는 계산이다. 정수를 7로 나눈 나머지는

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 등 이다.

오른쪽의 나눗셈은 계속되어지지만. 나눗셈을 계속하면 같은 나머지가 나온다.

일반적인 경우에 대해 생각해 보자. m, n은 양의 정수이다. m을 n으로 나누는 것을 생각하면, 각 단계의 나눗셈의 나머지는, n개의 정수

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$$

등이 된다. 나눗셈 도중, 나머지가 0이 나오면, 분수 $\frac{m}{n}$ 은 정수 또는 유한소수로 나타내어 진다. 나머지가 0이 나오지 않을 경우, 나머지의 종류는 $(n-1)$개 밖에 없으므로, 나눗셈을 계속하면 반드시 같은 나머지가 나온다.

거기서 부터는 그동안의 계산의 반복이 되고, 분수 $\frac{m}{n}$ 은 순환소수로 나타내어 진다.

戸瀬 信之 외 15명(2021), p.26

다음은 순환소수를 분수의 형태로 나타내는 것을 생각해보자.

例 16 순환소수 $0.\dot{1}\dot{8}$ 를 분수로 나타낸다.

$x=0.\dot{1}\dot{8}$ 로 둔다.

$$x=0.181818\cdots\cdots$$

$$100x=18.181818\cdots\cdots$$

$100x$와 x의 차를 생각하면, 오른쪽의 계산으로 부터 $99x=18$

$$\begin{array}{rl} 100x= & 18.181818\cdots\cdots \\ -)\quad x= & 0.181818\cdots\cdots \\ \hline 99x= & 18 \end{array}$$

이므로 $x=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$ 終

練習 26 다음의 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{1}$ (2) $0.\dot{2}\dot{7}$ (3) $0.\dot{6}4\dot{8}$ (4) $0.2\dot{5}\dot{4}$

B 실수

정수와 유한소수, 무한소수로 나타낸 수를 합쳐서 **실수**라고 한다. 실수 중, 유리수가 아닌 수를 **무리수**라고 한다.

무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낸 수이며 분모, 분자를 정수인 분수로 나타낼 수 없다.

예를 들면, $\sqrt{2}$나 원주율 π은 무리수라는 것을 알 수 있다.*

$\sqrt{2}=1.41421356237309\cdots\cdots$, $\pi=3.14159265358979\cdots\cdots$

* $\sqrt{2}$가 무리수라는 증명은 68페이지에 게시되어 있다.

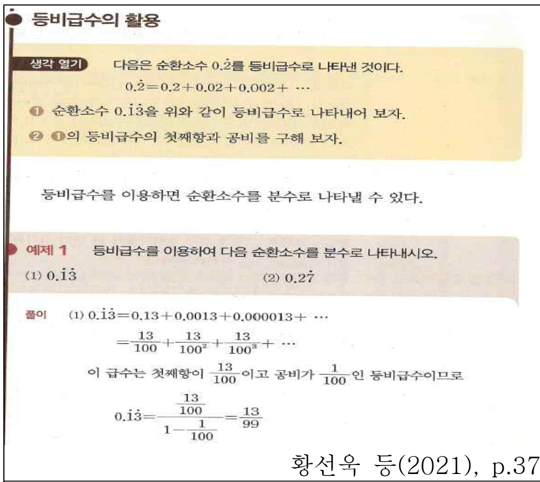
戸瀬 信之 외 15명(2021), p.27

[그림 Ⅳ-7] 일본 고1 교과서의 순환소수의 뜻과 분수 표현

일본은 고등학교에서 순환소수를 반복해서 다룰 때의 내용 전개의 순서는 相野 義明 외 13명(2021)의 <新しい數學I> 교과서와 같이 무리수를 먼저 정의하고 실수 체계를 다룬 후 순환소수의 분수 표현을 다루기도 하고, 戸瀬 信之 외 15명(2021)의 <數學I> 교과서와 같이 유한소수, 무한소수, 순환소수의 용어 정의, 순환소수의 분수 표현, 무리수의 용어 정의와 실수 체계의 순으로 구성하고 있다. 일본의 경우, 순환소수와 수체계 관련 내용의 전개 순서에서 약간의 차이가 발생한 것은 이미 중학교에서 학습한 무리수까지의 수체계를 반복 학습하면서 새로운 내용을 추가하는 나선형 교육과정에 따르기 때문이다. 또한, 교과서 검정제도에 따름에도 불구하고 순환소수를 교육과정에서 정하지 않고 있어 중학교 3학년과 고등학교 1학년 수학 교과서에서 교과서 개발자에 따라 내용의 수준과 범위에서 차이가 나타나고 있다. 이와 같은 일본 교육과정과 교과서의 구성은 우리나라 교육과정에서 내용 중복을 최소한으로 하고 학습 요소로서 배워야 할 용어와 기호를 엄밀하게 규정하는 것과 다른 점이다. 우리나라는 교과서 검인정 제도를 통해 교육과정 위배를 엄격하게 제한하고 교과서의 분량을 제한하고 있어 다양한 교과서 개발을 추구하는 것과 달리 10종의 수학 교과서 내용은 대동소이하다. 따라서 차기 교육과정 개정에서는 일본 수학과 교육과정과 같이 용어와 기호를 최소화하여 제시하는 방안도 고려해 볼 필요가 있다.

우리나라에서 다루는 중학교 2학년에서 다루는 유리수와 순환소수의 관계는 고등학교 <수학Ⅲ>에서 등비급수를 다루면서 순환소수를 분수로 나타내고 실무한의 관점에서 극한 개념을 활용해 $0.\dot{9}=1$과 같은 다루도록 [그림 Ⅳ-8]과 같이 제시하고 있다(문부과학성, 2017d). 이때, 일본은 수체계 내용을

다시 한 번 언급한다. 그러나 우리나라 고등학교 <미적분> 교과서에서도 중학교에서 학습한 순환소수를 등비급수 활용 단원의 <생각 열기>와 같은 도입 부분이나 본문에서 등비급수 합에 대한 문제를 다룬 이후 의사소통 역량 함양을 위한 <생각과 표현> 등에서 다루고 있지만, 수체계와 관련하여 다루고 있는 교과서는 없었다.


등비급수의 활용

생각 열기 다음은 순환소수 $0.\dot{2}$를 등비급수로 나타낸 것이다.

$0.\dot{2}=0.2+0.02+0.002+\cdots$

① 순환소수 $0.\dot{1}\dot{3}$을 위와 같이 등비급수로 나타내어 보자.

② ①의 등비급수의 첫째항과 공비를 구해 보자.

등비급수를 이용하면 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

예제 1 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{1}\dot{3}$ (2) $0.2\dot{7}$

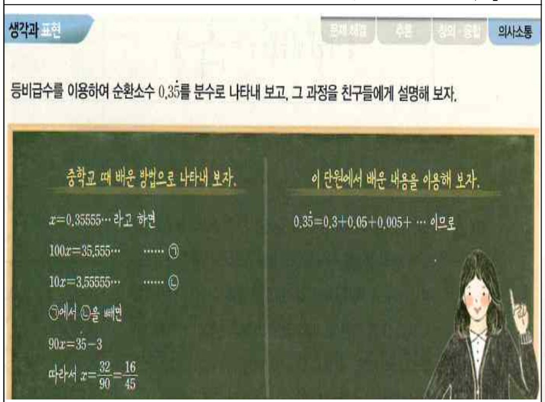
풀이 (1) $0.\dot{1}\dot{3}=0.13+0.0013+0.000013+\cdots$

$=\frac{13}{100}+\frac{13}{100^2}+\frac{13}{100^3}+\cdots$

이 급수는 첫째항이 $\frac{13}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수이므로

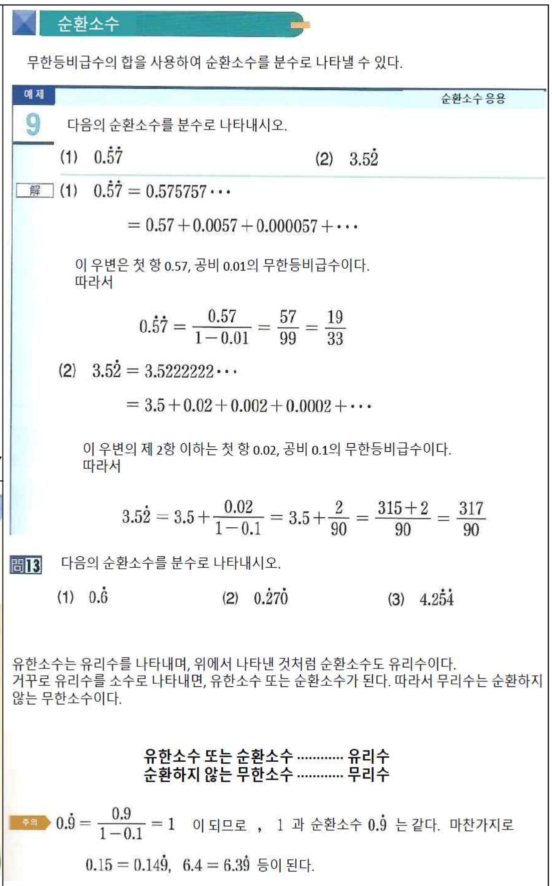
$0.\dot{1}\dot{3}=\dfrac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}$

황선욱 등(2021), p.37


생각과 표현 문제 해결 추론 창의·융합 의사소통

등비급수를 이용하여 순환소수 $0.3\dot{5}$를 분수로 나타내 보고, 그 과정을 친구들에게 설명해 보자.

박교식 등(2021b), p.38


순환소수

무한등비급수의 합을 사용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

예제 9 순환소수 응용

다음의 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{5}\dot{7}$ (2) $3.5\dot{2}$

解 (1) $0.\dot{5}\dot{7}=0.575757\cdots$

$=0.57+0.0057+0.000057+\cdots$

이 우변은 첫 항 0.57, 공비 0.01의 무한등비급수이다.
따라서

$0.\dot{5}\dot{7}=\frac{0.57}{1-0.01}=\frac{57}{99}=\frac{19}{33}$

(2) $3.5\dot{2}=3.5222222\cdots$

$=3.5+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

이 우변의 제 2항 이하는 첫 항 0.02, 공비 0.1의 무한등비급수이다.
따라서

$3.5\dot{2}=3.5+\frac{0.02}{1-0.1}=3.5+\frac{2}{90}=\frac{315+2}{90}=\frac{317}{90}$

問13 다음의 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{6}$ (2) $0.\dot{2}7\dot{0}$ (3) $4.2\dot{5}\dot{4}$

유한소수는 유리수를 나타내며, 위에서 나타낸 것처럼 순환소수도 유리수이다.
거꾸로 유리수를 소수로 나타내면, 유한소수 또는 순환소수가 된다. 따라서 무리수는 순환하지 않는 무한소수이다.

유한소수 또는 순환소수 .... 유리수
순환하지 않는 무한소수 .... 무리수

주의 $0.\dot{9}=\frac{0.9}{1-0.1}=1$ 이 되므로 , 1 과 순환소수 $0.\dot{9}$ 는 같다. 마찬가지로 $0.15=0.14\dot{9}$, $6.4=6.3\dot{9}$ 등이 된다.

俣野 博 외 26명(2021), p.105

[그림 Ⅳ-8] 우리나라와 일본 <수학Ⅲ>의 유리수와 순환소수의 관계

정리하면, 일본에서 다루는 유리수와 순환소수의 관계는 우리나라에서 다루고 있는 순환소수의 뜻, 유리수와 순환소수의 관계에 관한 핵심 내용은 모두 다루지만, 우리나라 중학교 2학년에서 순환소수를 분수로 고치는 과정을 다루지 않거나 간단히 다룬다. 이는 학생들이 어려워하는 순환소수의 분수 표현을 학생들의 실무한에 대한 인식론 수준에서 차이가 있음을 바탕으로 고등학교 1학년에서 간단히 다룸으로써 등비급수의 합과 관련하여 연계하여 다루는 시기와 간격을 줄여 학생들의 인지적 부담을 조금이라도 낮추려는 시도로 해석할 수 있다. 물론, 우리나라도 유리수와 순환소수의 관계에 대한 교수·학습 방법의 유의점을 통해 학생의 인지적 부담을 줄이기 위한 노력을 하고 있다. 그러나 우리나라의 교육과정과 교과서는 실무한의 인식론적 차이보다는 여전히 무리수의 존재성에 대한 이해를 위해 유리수와 순환소수의 관계에 대한 이해를 큰 줄기로 구성하고 있다.

일본이 순환소수의 분수 표현을 고등학교에서 다룰 수 있는 것은 소수 표현을 이용해 무리수 개념을 도입하지 않는 것과 관련이 있다. 중학교 3학년에서 제곱근을 사용하여 방정식의 해의 개념으로 무리수를 도입하고, 수체계에서 정의되는 유리수가 아닌 수로서의 무리수를 직관적으로 학습한다. 그런 다음 고등학교 1학년에서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 재정의하고 실수 체계를 다루면서 순환소수의 분수 표현을 다룬다. 이는 나선형 교육과정의 형식으로 관련 내용을 전개한 것으로 해석할 수 있다. 이러한 방식은 제곱근을 활용한 무리수의 도입과 소수 표현을 활용한 무리수의 도입을 중·고등학교에서 점진적으로 다룬 것이다. 이러한 방식은 무리수를 분수로 나타낼 수 없는 수, 근호를 사용해 나타내는 문자와 같은 수, 도형의 길이와 넓이에서 측정된 값, 순환하지 않는 무한소수, 수직선 위의 한 점으로 나타낼 수 있는 수라는 다양한 표기 관점에 학생들이 노출되는 시간을 충분히 제공할 수 있다. 이를 통해 강정기(2016)의 표기 관점의 무리수 개념에 대한 인식론적 장애를 근본적으로 막을 수는 없지만, 학교 현장에서 좀 더 체계적으로 학생들의 어려움을 다룰 수 있는 시간은 확보할 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 우리나라와 일본의 최신 교육과정을 중심으로 순환소수 내용을 살펴보고 이를 반영한 양국의 교과서를 비교하였다. 비교 결과, 우리나라는 중학교 2학년에서 순환소수의 뜻을 알고 유리수와 순환소수의 관계를 이해하도록 한 후 중학교 3학년에서 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 정의한다. 그러나 일본은 중학교 1학년에서 정수, 양수, 음수의 개념과 사칙계산을 학습한 후 중학교 2학년에서 수와 연산을 지도하지 않고, 중학교 3학년에서 집합 개념을 바탕으로 유리수를 분수로 나타낼 수 있는 수로, 무리수는 분수로 나타낼 수 없는 수로 유리수와 무리수를 동시에 다룬다. 그러나 무리수는 유리수가 아닌 수로 정의하므로, 순환소수는 용어 정의만 소개하고, 소수로 표현한 수의 분류를 도입한다. 또한 우리나라가 실수까지 중학교 3학년에서 다루면서 유리수와 순환소수의 관계를 중학교 2학년에서 집중적으로 다루는 것과 달리, 일본은 수의 확장 범위를 중학교에서는 자연수, 분수, 정수, 유리수, 무리수로 초등학교와의 연결선 상에서 다루고 우리나라 중학교 2학년에서 다루는 순환소수의 뜻을 고등학교 1학년 <수학Ⅰ>에서 실수를 다루면서 함께 다룬다. 유리수와 순환소수의 관계는 고등학교 3학년 <수학Ⅲ>에서 극한 개념을 바탕으로 한 등비급수에서 다룬다. 따라서 일본은 중학교 수준에서는 순환소수를 무리수를 정의한 다음, 유한소수, 무한소수와 함께 학생들이 직관적으로 이해할 수 있는 수준에서 용어 소개의 정도로 다룬다. 그런 다음, 순환소수는 상위 학교급과 연계하여 그 학년에서 다루는 실수, 등비급수와 같은 핵심 개념과 연계하여 다루고 있다.

순환소수에 대한 우리나라와 일본의 교육과정과 교과서의 내용을 비교한 결과를 바탕으로 2022 개정 교육과정을 앞두고 교육과정에서 다루어야 할 순환소수 내용의 수준과 범위, 교수·학습 방법 등에 관한 시사점을 제안하고자 한다.

첫째, 교육과정에서 순환소수를 다루는 내용의 수준과 범위를 고등학교 수학과 교육과정과 연계하여 다루는 방안을 모색할 필요가 있다. 2022 수학과 교육과정이나 이후 교육과정에서 새로운 내용의 추가 등 내용의 재구조화를 통한 학습량 적정화 방안 연구는 필수적인 일이다. 특히, 2022 개정 중학교 수학과 교육과정의 기본 이수 단위는 374단위로 변화가 없으나 교육부(2021)의 수업량 유연화 정책과 관련하여 “2022 교육과정 수학 수업시간 줄고 내용 늘어...선행 심화 우려”(연합뉴스, 2022.05.09.; 매일경제, 2022.05.09.) 보도 등을 통해 알 수 있듯이, 수학 교과의 학습량 적정화에 대한 논란이 지속되고 있다. 또한 2022년 8월 30일 국민 참여 소통 채널에 공개된 2022 개정 수학과 교육과정의 시안을 살펴볼 때, 중학교에서 소인수분해를 이용한 최대공약수와 최소공배수의 내용을 간소화하면서 대

푯값을 중3에서 중1로 이동하고 중3에서 상자그림, 이차함수의 최대·최소가 새롭게 다루고 있다. 2022 개정 교육과정이 12월에 고시되어 현장에 적용되더라도 16주 수업 운영에 방점을 둔다면 중학교 수학의 경우 수업시수 대비 학습 내용이 늘었다는 논란은 지속될 것으로 보인다. 박경미 등(2015)은 성취기준 [9수01-06] 순환소수의 뜻을 알고 유리수와 순환소수의 관계를 이해하는 데 걸리는 예상 수업시수는 7차시, [9수01-08] 무리수의 개념을 이해하는 데에는 2차시, [9수 01-09] 실수의 대소 관계를 이해하는 데에는 5차시가 소요될 것으로 예상 시수를 설정하고 있다. 2022 개정 교육과정에서 순환소수와 관련된 내용은 큰 변화가 없으므로, 16주 수업이라는 수업량 유연화 정책 시행을 위해 교수·학습 방법에서 공학적 도구를 활용하여 학습 내용을 적정화할 수 있다고 하더라도 예상 시수에서 큰 변화는 없을 것이다. 따라서 향후 수학과 교육과정을 개정할 때 우리나라도 일본과 같이 '순환소수와 유리수의 관계'는 고등학교에서 극한 개념을 중심으로 중학교와 연계하여 다룸으로써, 7차시라는 중학교 수학과 수업 시수를 감소하여 학습량을 적정화하는 방안을 모색할 필요가 있다. 예를 들어, 중학교 2학년에서 유한소수, 무한소수, 순환소수의 개념을 유리수 개념과 연결하여 다루면서 <표 Ⅳ-1>의 두 번째 명제까지 다루고 피타고라스 정리를 중학교 2학년에서 다룬 다음, 중학교 3학년에서 방정식의 해의 존재 범위와 제곱근을 통해 무리수를 도입하는 방안을 고려할 필요가 있다. 특히, 구나영 등(2020)에 의하면, 2015 개정 교육과정에서 피타고라스 정리가 중학교 2학년으로 이동됨에 따라 중학교 3학년 수학 교과서에서 제곱근이나 무리수를 도입할 때 피타고라스 정리를 활용하는 기하 표현을 주로 사용하고 있다. 즉, 피타고라스 정리의 이동으로 인한 변화는 제곱근에 대응되는 수직선 위의 점을 작도하는 활동을 통해 모든 소수 표현에 대해서 대응되는 실수가 있음을 직관적으로 이해하게 하는 것을 좀 더 자연스럽게 도입한 것이다. 따라서 중학교 2학년에서 순환소수의 개념을 유리수 개념과 연결하여 다루고, 강정기(2016), 김흥기(2004), 오국환, 방정숙, 권오남(2017), Zazkis & Sirotic(2010), Moreira & David(2008)의 주장과 같이. 중학교 3학년에서 무리수를 소수 표현이 아니라 유리수가 아닌 수(비분수)로 도입하고 무리수를 유리수 지도의 연속성 상에서 지도하는 대안을 고려할 필요가 있다. 이 경우, 중학교에서는 배타적으로 수를 분류하는 방식을 사용하여 $1 = 0.\dot{9}$, $0.5 = 0.4\dot{9}$와 같이 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는 방식은 유지할 수 있다. 또한 소수 표현을 이용하여 중학교에서 무리수를 도입하는 현재의 방식이 여전히 무리수가 기준 단위에 대한 비로 나타낼 수 없는 수라는 근본적인 개념과 쉽게 연결되지 않는다는 문제점을 고려할 때, 수학적 엄밀성이 아니라 학생의 이해수준을 고려하는 본 연구의 대안은 검토할 가치가 있다. 특히, 2022 개정 중학교 수학과 교육과정 개발과정에서는 피타고라스 정리를 2학년에서 다루는 것과 관련하여 '제곱근'과 관련한 내용을 2학년으로 함께 내리자는 의견과 '제곱근'이 3학년에서 다루어지기 때문에 피타고라스 정리를 3학년으로 복원하자는 의견이 팽팽하게 대립했던 점(이경화 등, 2020)을 고려할 때, 본 연구의 내적 연계성을 살리면서도 학습량 적정화를 할 수 있는 대안을 보다 꼼꼼하게 살펴볼 필요가 있다.

둘째, 이러한 중학교에서 순환소수를 다루는 방안을 바탕으로 중학교 2학년에서 수업 시수를 7차시 정도 확보하여 학습량 적정화와 관련한 새로운 교육과정 내용의 조직화 방안을 연구할 필요가 있다. 예를 들어, 자유학기제도 운영으로 수학 수업 시수가 줄면서 주어진 학습 내용을 충분히 가르치기 어렵다고 느끼는 중학교 1학년의 학습 내용 중 일부 내용을 중학교 2학년으로 이동하는 방안 또는 2022 개정 교육과정의 중학교 3학년에서 다루는 상자그림 등과 같은 새로운 학습 내용 등을 중학교 2학년에서 다루는 방안, 순환소수의 정의와 표현은 중학교 2학년에서 다루되 유리수와 순환소수의 관계는 고등학교 2학년으로 이동하는 방안 등 다양한 조직화 방안을 고려할 수 있을 것이다. 만약 유리수와 순환소수의 관계를 고등학교 과정으로 이동한다면 고등학교 수업 시수를 조정할 필요가 있을 뿐만 아니라, 중학교 2학년에서 새롭게 다루어지게 될 순환소수 내용의 범위와 연결된 수체계에 관한 지도의 효율성 등을 고려해야 할 것이다. 특히, 실무한에 대한 중학생과 고등학생의 인식 수준의 차이가 존재한다는 점에서, 극한 개념을 모르는 중학생들을 대상으로 여러 차시에 걸쳐 유리수와 순환소수의 관

계를 다루는 것에 비해 고등학교에서 등비급수를 다루어 좀 더 적은 시수에서 다루는 방안을 검토할 필요가 있다. 이는 중학교에서 간략하게 학습한 순환소수 개념을 한 번 더 심화하여 다루는 것이므로 내용의 연결성을 강화할 수 있는 대안이 될 수 있을 것이다. 이처럼 교육과정에서 순환소수를 어떻게 다룰지 그 학습 내용을 결정할 때, 중학교에서 다루는 여러 내용 영역 간 칸막이를 없애고 전체 내용 조직과 관련하여 그 다루는 내용의 시기와 수준을 살펴볼 필요가 있다.

다만, 본 연구에서는 선행연구에서 다루어졌던 순환소수를 소수 표현을 이용한 무리수 도입 방안과 유리수 지도의 연속성 상에서 유리수가 아닌 수(비분수)로 도입하는 방안 중 어느 하나를 택하는 것을 제안하는 것이 아니다. 소수 표현을 이용한 무리수 도입 방안은 비분수로 도입하는 방안보다 무리수 개념을 명확하게 도입하고, 집합 개념이 없이 수의 범위를 실수로 확장할 수 있다. 반면 무리수를 비분수로 도입하는 방안은 초등학교서 학습한 분수를 바탕으로 ±부호를 붙인 수인 양수와 음수의 사칙계산을 학습한 후 유리수 지도의 연장선상에서 무리수를 다룰 수 있다. 즉, 두 개의 기하적인 양이 있을 때, 그 두 양을 재는 공통의 측도를 가지지 못한다는 의미의 ‘통약불가능성’은 분자와 분모가 정수인 분수로 나타낼 수 없는 수라는 무리수의 원래 의미와 잘 연결된다. 이와 같은 두 가지 도입 방안의 장단점을 논하기보다는 학교 현장에서 줄어드는 수업시수와 관련하여 내적 연결성이 있는 순환소수의 내용을 교육과정에서 중학교와 고등학교에서 어떤 수준으로 다룰지에 관한 연구가 필요함을 제안한 것이다. 예를 들어, 해외 교육과정과 교과서의 순환소수와 관련한 내용에 대한 비교, 무리수 도입방식을 고려하면서도 순환소수와 유리수의 관계를 학생의 인지 수준에서 분석하는 연구와 같은 다양한 연구를 수행하고, 그 연구 결과를 바탕으로 수학 교사, 학생, 학부모, 수학교육전문가 등 관련자들의 합의에 따라 최선의 교육적 결정을 내려야 할 것이다.

셋째, 해외 교육과정과 같이 순환소수를 성취기준이 아니라 용어 정도로만 간단히 다루는 방안을 연구할 필요가 있다. 예를 들어, 순환소수를 용어와 기호로만 중학교 교육과정에서 다루되, 그 내용의 범위와 수준을 교수・학습 방법의 유의점을 통해 제시하여, 순환소수 내용을 교과서 개발자들이 적절하게 다루게 할 수 있다. 중학교에서 용어로만 제시한 순환소수 관련 내용은 교과서 개발자에 따라 일본과 같이 다양하게 다뤄질 수 있다. 용어로만 제시하는 학습 요소는 국가수준 학업성취도 평가 등에서 최소한의 수준으로 다루게 되므로 학생들의 학습 부담을 줄여주는 효과도 낼 수 있다. 특히, 중학교 수학의 ‘수와 연산’ 영역에서 유리수와 순환소수를 다룰 때 $0.3333\cdots=\frac{1}{3}$임을 보이는 문제는 [그림 Ⅳ-8]과 같이 고등학교에서 동일 문제로 나타나지만, ‘수열과 급수’에서 등비급수에 의한 증명으로 다룬다. 따라서 중학교에서 학습한 순환소수, 실수 개념을 바탕으로 <표 Ⅳ-1>의 세 번째 명제를 고등학교에서 극한 개념과 함께 다룬다면 중학교와 고등학교의 내적 연결성을 강조할 수 있을 것이다.

마지막으로 유리수와 순환소수의 관계와 같이 여러 학교급에서 다룰 수 있는 개념은 교육과정 문서의 ‘교수·학습 방법의 유의점’이나 교과서 개발지침을 통해 각 학교급에서 다루는 내용의 수준이나 범위, 교수·학습 방법 등을 안내할 필요가 있다. 우리나라는 수학과 교육과정을 개정할 때마다 학습량 경감 정책을 추진해오면서 학년 간 중복 내용을 최소화하는 방식으로 학습 내용의 선정이 이루어져 왔다. 따라서 교육과정 문서에 제시되는 내용체계표와는 성격이 다른 위와 같은 안내를 통해 학생들의 수학 개념에 대한 이해를 점진적으로 심화, 발달시키는 데 나타날 수 있는 어려움을 감소시키려는 노력이 필요하다. 예를 들어 고등학교 <미적분>에서 등비급수의 뜻과 그 합을 구하는 성취기준을 다룰 때 유리수와 순환소수의 관계를 함께 다루면서 ‘수와 연산’ 영역과 ‘해석’ 영역을 연결하여 다룰 수 있다는 안내를 제공할 수 있다. 이를 통해 학생들의 수학의 구조에 대한 안목을 넓히는 데 도움을 제공할 수 있다. 또한 해당 수업을 진행하는 중·고등학교 수학 교사, 교과서 개발자 등이 자신의 수업에서 내적 연계성을 고려한 자료 개발과 교수·학습 방법을 구안하는 데 도움을 줄 수 있다.

참고 문헌

강정기(2016). 표기 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움과 대안. **한국학교수학회논문집, 19**(1), 63-82.

교육부(2021). **2022 개정 교육과정 총론 주요사항(시안)**. 교육부 보도자료(2021. 11. 24).

구나영, 송은영, 최은정, 이경화(2020). 피타고라스 정리의 이동으로 인한 제곱근과 실수 단원의 변화에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 23**(3), 277-297.

김남희(2016). 중학교 수학에서의 수학적 연결성. 장혜원 외 26명 공저, **학교수학과 수학적 연결성**(pp.209-222). 경문사.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥(2021). **예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구(제3판)**. 경문사.

김부미, 김윤민(2019). 한국과 일본의 수학과 교육과정의 비교: 통계 영역을 중심으로. **학습자중심교과교육연구, 19**(3), 495-523.

김부미, 강현영, 김선희, 남진영, 박미미, 서동엽, 이동환, 이환철, 조진우(2019). **세계의 수학교육 둘러보기**. 경문사

김부윤, 정영우(2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. **한국수학사학회지, 21**(1), 139-156.

김선희, 이은정, 김수민, 안세인(2020). **국제 공인 수준 교육과정과 우리나라 수학과 교육과정과 비교 분석 연구**. 한국과학창의재단. 한국과학창의재단 연구보고서(C1015119-01-01).

김원경, 조민식, 방금성, 배수경, 지은정, 임석훈, 김동화, 강순자, 김윤희(2021). **중학교 수학2**, 비상교육.

김흥기(2004). 중학교에서 순환소수 취급과 무리수 도입에 관한 고찰. **수학교육학연구, 14**(1), 1-17.

도종훈(2016). 중학교 수학 학습 내용의 연결성. 장혜원 외 26명 공저, **학교수학과 수학적 연결성**(pp.289-310). 경문사.

류희찬, 선우하식, 신보미, 정동승, 장영훈, 설정수, 박슬히(2021). **중학교수학2**, 천재교육.

매일경제(2022.05.09.). **"2022 교육과정 수학 수업시간 줄고 내용 늘어...선행 심화 우려"**. https://www.mk.co.kr/news/society/view/2022/05/407343/

박경미 외 41명(2015). **2015 수학과 교육과정 시안 개발 연구Ⅱ**. 한국과학창의재단 BD-1511-0002.

박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈, 유연주, 권석일, 김선희, 김재원, 박소현, 양수영, 이은영, 정미라, 정미선, 정주연, 주 미, 최수연, 황지연 (2021a). **중학교 수학2**, 동아출판.

박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈, 유연주, 권석일, 김선희, 김재원, 박소현, 양수영, 이은영, 정미라, 정미선, 정주연, 주 미, 최수연, 황지연 (2021b). **미적분**, 동아출판.

박선용(2016). '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않고 무한소수를 정의하기, **수학교육학연구, 26**(2), 159-172.

박윤희, 박달원, 정인철(2004). 중학교 수학에서 무리수 개념에 관한 학습자의 이해 연구. **한국학교수학회논문집, 7**(2), 99-116.

변희현(2005). 소수에 의한 실수 정의의 의미. **한국수학사학회지, 18**(3), 55-66.

신보미(2008). 실수로의 수 체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 285-298.

양성현, 이환철(2012). 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면 연구. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 395-410.

연합뉴스(2022.05.09.). **“2022 교육과정 수학 수업시간 줄고 내용 늘어...선행 심화 우려”**. https://www.yna.co.kr/view/AKR20220509057800530.

오국환, 방정숙, 권오남(2017). 무리수 단원에 대한 교과서 분석 연구: 과정과 대상의 관점으로. **수학교육, 56**(2), 131-145.

우정호(2000). **학교수학의 교육적 기초**. 서울:서울대학교 출판부.

우정호, 변희현 (2005). 소수 개념의 교수학적 분석. **수학교육학연구, 15**(3), 287-313.

이강섭, 엄규연(2007). 순환소수 지도에서의 문제점과 해결방안. **학교수학, 9**(1), 1-12.

이경화, 김동원, 김선희, 김혜미, 김화경, 박진형, 이호, 이화영, 임해미, 장정욱, 정종식, 조성민, 최인용 (2020). **포스트코로나 대비 미래지향적 수학과 교육과정 구성 방안 연구 최종보고서**. 세종: 교육부.

이선비(2013). 예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해. **한국학교수학회논문집, 16**(3), 499-518.

이영란, 이경화(2006). Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. **수학교육학연구, 16**(4), 297-312.

임해미, 김부미(2022). 우리나라, 일본, IB 중학교 수학 교육과정과 교과서의 증명 내용 분석. **교육과정평가연구, 25**(2), 89-117.

이준열, 최부림, 김동재, 김상미, 원유미, 강해기, 김성철, 강순구(2019). **중학교 3학년 수학 지도서**. 천재교육.

이지현(2014). 무한소수 기호 : 불투명성과 투명성. **수학교육학연구, 24**(4), 587-597.

이지현(2015). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서:실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가? **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

장혜원(2016). 수학교육과 수학적 연결성. 장혜원 외 26명 공저, **학교수학과 수학적 연결성**(pp3-12). 경문사.

조상식 외(2020). **총론 주요 사항 및 교과 교육과정 현황 국제 비교 연구**. 교육부, (연구보고 11-1342000-000615-01).

조한혁, 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수. **학교수학, 1**(2), 605-615.

최수일(2022). 앞으로 잃어버릴 7년:수학 교육과정과 수학교육의 정상화. **2022 개정 수학과 교육과정 시안 검토 공청회 자료집**, 91-103.

황선욱, 강범개, 윤갑진, 이광연, 김수영, 이문호, 김원일, 박문환, 박상의(2021). **고등학교 미적분**. 주) 미래엔.

Barmby, P., Harries, T., Hinggins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplcation. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1.

Blum, W., Galbraith, P. I., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modeling and applications in mathematics education*. New York: Spriger. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1.

Department for Education(2016). *Further mathematics AS and A level content in England*. Department for Education:England.

Li, L.(2011). *A new approach to the real numbers*. Retrieved from http://arxiv.org/abs/1101.1800.

Moreira, P. C. & David, M. M.(2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(1), 23-40.

Sirotic, N. & Zazkis, R.(2007). Irrational numbers on the number line - where are they?.

International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology 38*(4), 477-488.
Zazkis, R. & Sirotic, N.(2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16,* 1-27.
文部科學省(2008). **中學校學習指導要領 (平成20 年告示)-數學編**. 文部科學省.
文部科學省(2017a). **中學校學習指導要領 (平成29 年告示)-數學編**. 文部科學省.
文部科學省(2017b). **中學校學習指導要領 (平成29 年告示) 解說-數學編**. 文部科學省.
文部科學省(2017c). **高等學校學習指導要-數學編**. 文部科學省.
文部科學省(2017d). **高等學校學習指導要領解說-數學編**. 文部科學省.
藤井 齊亮 외 84명(2021). **新しい數學3**. 東京書籍.
相馬 一彦 외 25명(2021). **數學の世界3**. 大日本図書.
相野義明 외 13명(2021). **新しい數學Ⅰ**. 東京書籍株式會社.
戶瀨 信之 외 15명(2021). **數學**. 數硏出版株式會社
俣野 博 외 26명(2021) **新數學Ⅲ**. 東京書籍株式會社

Comparison of Recurring Decimal Contents in Korean and Japanese Mathematics Textbooks

Kim, Bumi[1)]

Abstract

In this paper, to provide an idea for the 2022 revised mathematics curriculum by restructuring the content of the 2015 mathematics curriculum, the content elements of recurring decimals of textbooks, which showed differences in the curriculum of Korea and Japan, were analyzed. As a result of this study, in Korea, before the introduction of the concept of irrational numbers, repeating decimals were defined in the second year of middle school, and the relationship between repeating decimals and rational numbers was dealt with. In Japan, after studying irrational numbers in the third year of middle school, the terminology of repeating decimals is briefly dealt with. Then, when learning the concept of limit in the high school <Mathematics Ⅲ> subject, the relationship between rational numbers and repeating decimals is dealt with. Based on the results of the study, in relation to the optimization of the amount of learning in the 2022 curriculum revision, implications for the introduction period of the circular decimal number, alternatives to the level of its content, and the teaching and learning methods were proposed.

Key Words : Recurring decimal, Mathematics Curriculum, 2017 Revised Mathematics Curriculum of Japan, Japanese math textbooks.

Received November 6, 2022
Revised December 19, 2022
Accepted December 20, 2022

---

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97U20
1) Wonkwang University (bmkim@wku.ac.kr)