韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.1.39
제 36집 제 1호, 2022. 3. 39-57

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 1, Mar. 2022. 39-57

AiC 관점에 따른 부정적분과 정적분 관계 학습사례 연구

박 민 규 (서울대학교 대학원, 학생)
이 경 화 (서울대학교, 교수)†

본 연구는 맥락에서 출발하여 추상화로 나아가는 방식으로 수학 학습을 설명하는 AiC(Abstraction in Context) 이론에 따른 수업이 부정적분과 정적분의 관계에 대한 이해를 촉진하는 지를 파악하는 데 목표를 둔다. 이를 위해 과학고등학교 2학년 학생 8명을 대상으로 설계한 적분 지도 방안에 따라 수업을 실시했으며, 전 수업 과정을 녹화, 녹음한 자료와 활동지 등의 자료를 수집하고 분석하였다. 분석 결과, 연구에 참여한 학생들은 누적 개념이 내재된 맥락에서 출발하여 동료 학생들과 상호 소통하면서 부정적분과 정적분의 관계에 연결되는 세 가지 지식 요소인 '누적함수의 순간 변화율', '부정적분을 이용한 정적분의 계산', '누적함수를 이용한 부정적분의 결정'을 구성하였다. 연구결과를 바탕으로, AiC 관점은 부정적분과 정적분 관계의 학습을 지원하는 잠재력을 가지고 있으며, 이를 다른 학습영역으로 확장하여 고등학교 수학수업을 개선하는 데에도 활용할 수 있음을 논의하였다.

Ⅰ. 서론

적분은 학교 수학에서 정점이라고 할 만큼 학습 요소로서의 추상성과 형식성, 유용성 면에서 매우 높은 수준에 있다. 적분 지도의 문제는 적분을 개념적인 의미 대신 계산절차에 초점을 두어 다루는 것이다(정연준, 이경화, 2009a; 정연준, 이경화, 2009b). 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습부담 경감을 위하여 급수를 삭제함에 따라, 급수의 합에 의한 정적분 정의를 도입할 수 없게 되었다. 결국 미적분의 기본정리를 정의의 형태로 진술하는 방식으로 정적분을 도입하였다(교육부, 2015). 이와 같은 변화가 적분의 개념적인 이해, 특히, 부정적분과 정적분의 관계를 이해하는 것에 어떤 영향을 주는가에 대한 논의가 지속적으로 이루어지고 있다(신수진, 조완영, 2018; 이기돈, 2019).

구분구적법을 바탕으로 리만합의 극한에 의하여 정적분을 도입할 때도, 그 의미를 충실히 다루지 않고 계산연습만 강조하는 문제가 지적된 바 있다(정연준, 이경화, 2009b). 주로 이해 없는 계산 연습은 적분의 의미는 물론이고 부정적분과 정적분의 관계를 파악하는 데에도 어려움을 야기한다는 지적이었다(Ferrini & Graham, 1994, Zandieh, 1998, 박재범, 2003). 이로부터 대안적인 지도 방법에 대한 연구(신보미, 2008; Thompson & Silverman, 2008; 정연준, 이경화, 2009a;. Sealey, 2014; Kouropatov, 2016)가 일부 이루어졌으나 우리나라 학생들을 대상으로 한 현장 기반의 적분 지도 연구는 매우 부족한 상태이다.

대안적인 적분 지도 방법의 공통점은 정적분이 평면도형의 넓이와 운동의 이동 거리 등 맥락 속에서 출발하였다는 점에 주목한다는 것이다. 또한, 변화율에서 변화량을 계산하는 방법으로 나아가는 과정을 중시한다는 점도 공통적이다(정연준, 이경화, 2009b). Hershkowitz, Schwarz, & Deryfus(2001)가 제안한 AiC(Abstraction in Context) 이론은 구체적인 맥락에서부터 출발하여 추상화가 이루어지는 원리를 제시하고 있으므로, 앞서 제시한

* 접수일(2022년 2월 23일), 심사(수정)일(2022년 3월 22일), 게재확정일(2022년 3월 28일)
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : AiC, 부정적분, 정적분, 누적함수, 맥락
† 교신저자 : khmath@snu.ac.kr

대안적인 적분 지도 관점의 이론적 배경으로 활용할 수 있다. AiC 이론에서는 적분 개념화와 같은 추상화 과정을 초기 발생 맥락과 밀접하게 관련지어 해석하며, 추상화 과정의 인지적 변화를 구체적으로 조명하기 때문이다. 이에 본 연구는 AiC 이론에 따른 적분 지도 방안을 설계하고, 지도 결과 학생의 이해가 어떻게 나타나는지 파악하는 데 목표를 둔다. 특히, 선행연구들에서 지적한 부정적분과 정적분의 관계에 대한 이해가 나타나는지 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. AiC 이론과 적분 지도에의 적용

AiC 이론은 전통적인 인지발달 연구자인 Piaget의 반영적 추상화 이론이 추상화 과정을 탈맥락적인 과정으로 보았다는 비판에서 출발한다(Hershkowitz et al., 2001). 이로부터 추상화된 원리의 형성이나 획득이 특수한 환경에서 일어나는 것이라는 Lave와 Wenger(1991)의 입장을 수용한다(Dreyfus, & Tasmir, 2004). 또한, 대상과의 관계 속에서 수행된 행동들이 연쇄적으로 이루어진 것으로 활동을 규명한 Leont'ev(1978)의 관점도 수용한다(Hershkowitz, Hadas, Deryfus, & Schwarzl., 2007).

AiC 이론에서는 추상화의 출발점으로서의 맥락에 교사나 또래와의 상호작용과 같은 사회적 맥락, 선행 경험과 같은 역사적 맥락, 교육과정 맥락, 공학적 도구와 교구 등과 같은 환경적 맥락 등이 포함되는 것으로 본다(Dreyfus, & Kidron, 2014). 또한, 다양한 맥락 속에서 하는 핵심적인 인식론적 행동으로 '인식하기(Recognizing)', '생성하기(Building-with)', '구성하기(Construction)'를 제시한다(Hershkowitz et al., 2001, pp. 209-214). 인식하기는 이전에 구성된 지식 구조 중 현재의 문제와 관련된 것을 떠올리는 것을 뜻한다. 생성하기는 부분적 목표를 달성하기 위해 인식된 구조를 결합하는 것을 가리킨다. 구성하기는 결합한 지식구조를 최종 목표에 부합되도록 새로운 지식구조로 만드는 것을 의미한다(Dreyfus & Kindron, 2014). Hershkowitz et al., (2001)는 이러한 세 가지 인식론적 행동에 따른 추상화를 RBC 모델로 명명하였다.

AiC 이론에서 제안하는 교수학적 모델은 '필요(need)', '출현(emergence)', '통합(consolidation)'의 3단계로 이루어진다(Dreyfus et al., 2015, pp. 193-197). 먼저 필요 단계에서는 적절한 맥락을 제공하여 학습자가 새로운 구조에 대한 필요를 인식하도록 한다. 출현 단계에서는 앞서 언급한 세 가지 인식론적 행동, 곧, 인식하기, 생성하기, 구성하기를 통해 새로운 구조를 생성하도록 한다. 마지막으로 통합 단계에서는 자신이 생성한 새로운 구조를 탐구하면서 자신의 인지 구조와 통합하도록 한다.

AiC 이론을 적분 지도에 적용하면 다음과 같은 교수·학습 방안을 도출할 수 있다. 첫째, 적분 개념이 내재된 적절한 맥락을 활용한 탐구과제를 설계한다. 둘째, 탐구과제를 해결하면서 적분의 구조에 대한 필요를 자극한다. 셋째, 인식하기, 생성하기, 구성하기 활동이 이루어지도록 학습 경로를 제시한다. 넷째, 학생들이 자신의 인지 구조에 적분 개념을 통합하도록 성찰 기회를 제공한다.

속도 그래프 아래의 넓이와 이동 거리 사이의 관계에 대한 탐구는 적분 개념이 내재된 역사적이고 운동학적인 맥락이다. 이 맥락에서 넓이 함수의 순간 변화율에 주목하도록 함으로써 적분에 대한 개념적 이해의 기회를 제공할 수 있다(정연준, 2010, p. 113). 넓이 함수의 순간 변화율은 누적(Accumulation) 개념, 다시 말해, 누적으로서의 평면도형의 넓이 개념을 이해하는 것과 관련된다(Thompson & Silverman, 2008, p. 53). Δx 를 상수, x 를 변수로 하는 리만 누적함수 $F_{\Delta x,a}(x)$ 와 누적함수 $F_a(x)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다(Thompson & Silverman, 2008, p. 49).

$$F_{\Delta x,a}(x)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{x-a}{\Delta x}\right]} f(i\Delta x+a)\Delta x,$$
$$F_a(x)=\lim_{\Delta x\to 0} F_{\Delta x,a}(x)$$

위에서 $F_a(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 누적함수이며 $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 로 나타낼 수 있다.

누적함수를 탐구하면서 변화율의 의미를 누적과 관련지어 이해할 수 있다. 어떤 변화가 일어날 때 어떤 것이 누적되고, 어떤 것이 누적될 때 어떤 비율로 누적되기 때문에, 누적과 변화율 개념은 동전의 양면과 같다(Carlson, 2003, p. 166). 이와 같이 누적, 누적 함수, 그리고 변화율로 이어지는 맥락 기반의 탐구를 토대로 적분 개념을 구성하고 자신의 인지 구조에 통합할 수 있게 된다(Kouropatov & Dreyfus, 2014, p. 535).

나. 부정적분과 정적분의 관계

부정적분과 정적분의 관계는 수학의 역사에서와 마찬가지로 적분 학습에서도 상당히 중요하다. 그러나 정적분을 미적분의 기본정리에 의하여 정의하는 2015 개정 수학과 교육과정의 관점에서는 부정적분과 정적분의 관계에 대한 학습 기회를 전적으로 교사의 몫으로 남겨두었다.

정연준(2010, pp. 73-75)은 미적분학 제 1 기본정리 및 제 2 기본정리에 대한 지식 요소를 넓이 함수의 순간변화율, 부정적분을 이용한 정적분 계산, 정적분과 부정적분의 관계의 세 가지로 제시하였다. 넓이 함수의 순간변화율은 미적분학 제 1 기본정리에 대한 다양한 형태의 이해를 포괄하는 것으로 직관적 이해, 함수적 이해, 형식적 이해로 나눌 수 있다. 직관적 이해는 미분법과 다르게 접선의 기울기가 아니라 높이가 미분계수의 기하적 표현이라는 것을 이해하는 것이고, 함수적 이해는 $F'(x)=f(x)$ 의 관계가 서로 다른 기하적 대상으로 표현하는 것을 이해하는 것이며, 형식적 이해는 미적분학 제 1 기본정리의 증명과정과 결과에 대한 이해를 나타낸다. 부정적분을 이용한 정적분의 계산은 미적분의 제 2 기본정리에 따라 부정적분을 이용하여 정적분 값을 구하는 것이다. 부정적분과 정적분의 관계는 두 가지 수준으로 구분되는데 낮은 수준은 부정적분과 정적분을 정의에 따라 구분하는 단계이고 높은 수준은 넓이 함수가 주어질 때 부정적분을 결정할 수 있다는 점을 이해하는 것이다.

부정적분과 정적분의 관계는 다양한 이해 요소를 포함하는 복합적인 관계이지만 적분 교육에서는 이러한 관계가 반영되고 있지 않다. 학교수학에서 부정적분을 통해 미적분이 '적분'이라는 말과 즉각적으로 관련을 맺게 되지만, 새롭게 정의되는 정적분에서의 '적분'은 앞의 '적분'과는 전혀 다른 의미를 가진다는 것이 강조되지 않은 채로 정적분이 도입된다(Courant, 1960, p. 438). 또한 넓이 계산과 거리 계산의 구조를 다루기보다는 정적분 계산 절차의 정당화를 위한 수단으로 부정적분과 정적분 사이의 관계를 다루고 있다(정연준, 이경화, 2009b, p. 312).

부정적분을 단지 정적분 계산법의 도입을 위한 형식적인 도구가 아니라, 역사적 발달 과정에서 그러했듯이, 넓이 계산과 거리 계산에서 변화량과 변화율 사이의 관계에서 부정적분과 정적분의 관계를 파악하도록 해야 한다(정연준, 이경화, 2009b; 김성옥, 정수영, & 권오남, 2010; 김부미, 박지현, 2011; 강정기, 2019). AiC 관점에 따른 적분 개념 지도는 넓이 함수와 변화율의 관계를 초점에 둔다는 점에서 이와 같은 선행연구의 제안을 고려한 것이라 할 수 있다.

2. 연구 방법

가. 연구 참여자

본 연구의 목적은 AiC 관점에 따른 적분 지도 방법을 구체화하여 실행한 후, 그 결과를 분석하여 학습관점으로서의 잠재력을 확인하는 것이다. 이를 위하여 가설적 전제를 가지고 일정한 사례에 관한 검증을 함으로써 한정된 가설의 성립을 확인하는, 이론 확인 사례 연구(Yin, 1994)를 수행한다. 한정된 사례이지만 상세하고 심층적인 자료 수집을 통해(Creswell, 1998) 연구하고자 현상에서 요소들 사이의 상호작용을 밝히고 그 양상을 파악하는 것에 중점을 둔다(우정호 et al., 2006). AiC 관점에 따른 적분 지도는 2015 개정 수학과 교육과정에서의 정적분 정의를 따르는 대신, 맥락 기반의 누적, 누적함수, 그리고 변화율에 대한 이해를 통하여 부정적분과 정적분의 관계를 파악하는 것으로 이루어진다. 이러한 적분 지도는 입시 준비에 대한 부담이 상대적으로 적고 유연한 교육과정 운영이 가능하며, 계산만이 아니라 수학적인 원리와 구조로서 적분을 심층 학습하는 것이 필요한 과학고등학교 학생들에게 적합한 면이 있음을 고려하여 과학고등학교 학생들 중 자발적으로 참여를 희망하는 학생들을 대상으로 하였다.

연구 참여자는 서울시 소재 과학고등학교 2학년 학생 8명(S1부터 S8)이다. 8명의 학생을 2개의 조(1조:S1-S4, 2조:S5-S8)로 편성하였으며, 각 조에는 내신 등급이 1-2등급인 상위권 학생(S3, S7, S8)과 3-6등급인 중위권(S1, S2, S4, S5, S6) 학생들이 고르게 분포되도록 배치하였다. 학생들 모두 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 부정적분과 정적분의 정의를 알고 있으며, 다양한 적분 계산도 할 수 있다. 그러나 부정적분과 정적분의 관계에 대해서는 특별히 생각해본 적이 없었다. 누적, 누적함수, 그리고 변화율의 탐구를 통한 적분 학습도 경험한 적이 없었다. 토론에 의한 수학 학습에 참여하기는 했지만, 새로운 개념을 구성하기보다는 고난도 문제의 해결 또는 증명 방법 모색을 위한 것이었다. 연구에 참여한 학생들 중 S3과 S7은 평소 수업에서 활발하게 의사소통하는 모습을 보였기에 각각 1조와 2조에 배치하였다.

나. 과제와 수업 설계

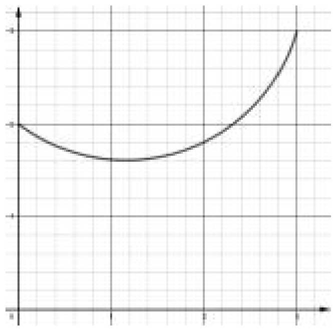
본 연구에서는 Kouropatov & Deryfus(2013)가 제안한 누적 개념 기반의 적분 학습 활동을 위한 과제와 2차시의 수업을 설계하여 실행하였다. 1차시에는 Kouropatov & Dreyfus(2014)에서 활용한 과제를 각색하여 누적과 누적함수, 변화율에 대해 탐구하는 과제(과제 1, 과제 2, 과제 3, [그림 Ⅱ-1])를 다루었다. 2차시에는 Kouropatov(2016)에서 활용한 과제를 각색하여 누적함수에 의한 부정적분 존재성을 탐구하는 과제(과제 4, [그림 Ⅱ-1])를 해결하도록 하였다.[1)]

과제 1은 그림으로 제시된 곡선의 길이를 구하는 것으로 위해 근사를 통해 보다 정확한 길이를 찾는 과정을 학습할 수 있도록 설계하였다. 학생들은 곡선을 분할한 짧은 선분의 길이를 합하면 곡선의 길이가 될 수 있음을 극한 개념을 이용하여 인식할 수 있다. 과제 2는 변화율 그래프를 통해 누적 값을 구하는 것으로, 학생들은 근사 개념을 바탕으로 변화율을 이용하여 변화량을 찾는 과정을 이해할 수 있다. 과제 3은 주어진 함수의 그래프를 이용하여 누적함수를 구하는 것으로 누적 값을 구하는 상황에서 적분 구간의 위 끝을 변화시켜 함수로 나타냄으로써 누적되는 함수를 찾을 수 있도록 설계하였다. 학생들은 공변량 개념을 알 수 있고, 변화율과 변화량의 상호 관계 및 누적 개념을 바탕으로 한 부정적분과 정적분의 관계를 이해할 수 있다. 과제 4는 주어진 함수의 부

1) Kouropatov(2014)는 과제 1, 과제 2, 과제 3을 활용하여 적분에 대한 개념적 이해를 촉진하고자 하였으며, 연구결과 참여 학생 전원(8명)이 적분에 대한 과정적 측면과 개념적 측면을 유연하게 파악하여 과정개념(proceptual)을 구성하였다고 분석하였다. 과제 4는 대안적인 방식에 따른 적분학습 이전에 부정적분과 정적분의 관계에 대한 이해 수준을 평가하기 위한 것으로 Kouropatov(2016)가 사용한 이해도 조사 문항 중 하나이다. 연구결과, 4%(269명 중 12명)만 과제 4를 정확히 해결할 정도로 부정적분과 정적분의 관계에 대한 이해는 매우 낮은 수준에 머물러 있음을 확인하였다.

과제 1. 근사(Approximation)

다음 곡선에 대하여 다음 물음에 답하시오.



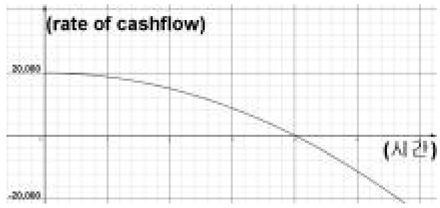
(1) 곡선의 길이는 얼마인가?

(2) (1)에서 구한 근사치를 더 향상시킬 수 있는가?

(3) 정확한 길이를 찾을 수 있는가?

과제 2. 누적 값(Accumulation value)

시간에 따른 rate of cash flow 그래프가 다음과 같다.

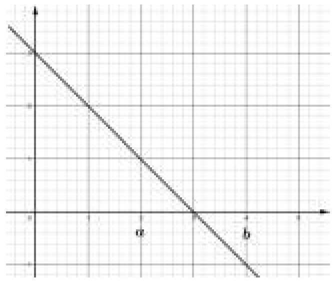


(1) 위의 그래프를 이용하여 $t=0$ 부터 $t=6$ 까지 돈의 흐름을 구하시오.

(2) 위의 그래프가 나타내는 함수를 $f(x)$ 라 하자. $t=0$ 부터 $t=6$ 까지의 돈의 흐름을, 함수 $f(x)$ 의 $t=0$ 부터 $t=6$ 까지의 누적 값이라 할 때, 누적 값과 정적분 사이의 관계에 대해 설명하시오.

과제 3. 누적함수(Accumulation function)

$[a,b]$ 에 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.



(1) 구간 $[a,x]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 누적을 나타내는 함수를 $A_f(x)$ 라 할 때, '상수', '양수', '음수', '증가', '감소'와 같은 단어를 사용하여, 함수 $A_f(x)$ 의 특징을 설명하시오.

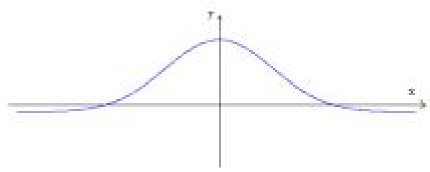
(2) 함수 $A_f(x)$ 에서 x 가 변화할 때, 따라서 변하는 것들은 무엇인지 모두 제시하고 어떻게 변하는지 설명하시오.

(3) 함수 $A_f(x)$ 를 $f(x)$ 를 이용하여 표현하고, 두 함수의 관계에 대해 설명하시오.

(4) 누적함수 $A_f(x)$ 와 부정적분의 관계에 대해 설명하시오.

과제 4. 부정적분의 존재성(Existence of indefinite integral)

다음 그래프는 함수 $f(x)=e^{-x^2}-0.1$ 을 나타낸 것이다.



부정적분 $\int f(x)\,dx$ 가 존재하는가? 그 이유에 대해 설명하시오.

[그림 II-1] 과제

정적분의 존재성을 찾는 것으로 원시함수 식을 직접 찾는 것이 아니라 누적함수가 존재하는 것을 이용하여 해결할 수 있다. 학생들은 학교 수학에서 다루지 않는 부정적분과 정적분의 관계의 측면을 이해할 수 있다.[2] 각 과제는 부정적분과 정적분의 관계에 대한 지식 요소를 구성하기 위해 설계된 것으로 과제와 지식 요소의 관계는 다음 장에서 다루었다.

각 차시 수업은 50분 동안 진행하였다. 교사는 과제 해결 전략을 전달하기보다는 소집단 토론을 활성화하여 학생들이 누적, 누적함수, 변화율을 파악하면서 필요에 따라 해법과 개념을 구성하도록 이끌었다. 특히, 학생들이 우수함에도 불구하고 맥락에서 출발하는 적분 학습에 적응하기 어려워하거나 생성하기 또는 구성하기 활동에 소극적으로 참여할 경우, 다른 학생의 생각을 듣고 비평하거나 보완하도록 하여 협력적인 과제해결이 이루어지도록 하였다.[3]

<표 II-1> 수업 설계

차시	시간	과제	수업 주제
1	50분	과제1, 과제2, 과제3	누적, 누적값, 누적함수를 기반으로 한 적분 개념 학습
2	50분	과제4	부정적분의 존재성 탐구를 통해 부정적분과 정적분 관계 학습

다. 자료수집과 자료분석

본 연구를 위하여 개별 학습지와 조별 학습지를 수집하였고, 수업 전 과정 및 소집단 토론을 녹화 및 녹음하여 전사하였다. 개별 학습지와 조별 학습지는 동일한 과제로 구성하였다. 개별 학습지는 토론 전에 각자 과제를 이해하고 해결 단서를 생각해보는 기회를 제공하기 위한 것이었다. 조별 학습지는 토론 과정에서 이루어진 협력적인 추상화의 결과를 요약하도록 함으로써 학습에 대한 공동의 성찰 기회를 제공하기 위한 것이었다.

자료분석은 학생들 사이의 토론에 의한 협력적인 추상화 과정에서 부정적분과 정적분의 관계에 대한 지식 요소를 구성하는지 여부, 해당 지식 요소가 RBC 모델에서의 인지행동과 어떻게 관련되는지에 초점을 두고 이루어진다. 부정적분과 정적분의 관계는 미적분학 제 1 기본 정리와 제 2 기본 정리를 포괄하고 있으므로 미적분학 기본정리의 지식요소(정연준, 2010)를 일부 변형하여 부정적분과 정적분의 관계에 대한 지식 요소를 누적함수의 순간 변화율, 부정적분을 이용한 정적분 계산, 누적함수를 이용한 부정적분 결정으로 구성하였다. 이러한 지식 요소를 포함한 부정적분과 정적분의 관계를 구성하는 근거를 학생들의 과제 해결 내용이나 토론에서 찾아 학습을 평가한다(<표 Ⅱ-2>). 누적함수의 순간 변화율은 직관적 이해, 함수적 이해, 형식적 이해 세 가지 이해 수준으로 나눌 수 있는데, 부정적분과 정적분의 관계는 미적분학 제 1 기본정리가 핵심이고 이는 서로 다른 기하적 대상들 사이의 변화량과 변화율 관계를 이용하는 것을 강조하고 있으므로 본 연구에서는 이와 관련된 함수적

---

2) 과제 4에서 가우시안 함수를 다루는데 대상 학생들이 도전적인 과제에 흥미를 느끼는 과학고등학교 학생이므로 난도를 높이기 위해 이 함수를 사용하였다. 일반학생을 대상으로 하는 수업에서는, 정연준(2010)의 연구에서 제안한 바와 같이 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 의 누적함수 $A_f(x)=\ln x$ 의 식을 제시한 후 부정적분을 구하는 문제로 수정해서 제시할 수 있다.

3) 일반학생을 대상으로 하는 수업에서도 이질집단을 구성하여 조별 토론이 원활하게 이루어지도록 하되, 과제 하나를 1차시 수업으로 설계하여 탐구의 폭과 깊이를 추구하면서 수업을 진행할 것을 제안한다. 또한, 분할한 짧은 선분의 길이를 합하여 곡선의 길이의 근삿값을 구하거나 변화율을 이용하여 변화량을 찾는 과정에서는 일상 언어와 직관적인 표현을 허용하고, 변화율과 변화량의 상호 관계 및 누적 개념을 바탕으로 부정적분과 정적분의 관계를 이해하는 과정에서는 다양한 수준과 표현의 설명을 공유하도록 하여 수학 성취도가 낮은 학생도 학습에 참여하도록 하는 등 교사의 중재 활동을 유연하게 재구성할 필요가 있다.

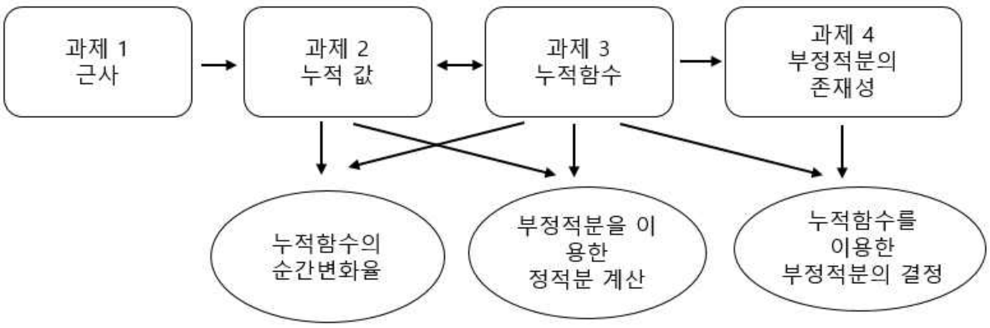
이해 측면을 다루었다.

<표 II-2> 분석틀

지식 요소	의미	예시
누적함수의 순간 변화율	함수 $f(x)$의 누적함수 $F(x)$에 대해 $F'(x)=f(x)$의 관계를 서로 다른 기하적 대상으로 표현한다.	함수 $f(x)$의 그래프에서 높이가 누적함수 $F(x)$의 접선의 기울기인 것을 알고 이를 이용하여 누적함수 $F(x)$의 그래프를 구한다.
부정적분을 이용한 정적분의 계산	부정적분 값의 차로 정적분의 값을 계산한다.	곡선과 x축 사이의 넓이를 구하기 위해 부정적분 값의 차를 이용하여 정적분의 값을 구한다.
누적함수를 이용한 부정적분의 결정	누적함수가 주어질 때 부정적분을 결정한다.	함수 $f(x)$가 주어졌을 때, 누적함수 $F(x)$를 이용하여 $f(x)$의 부정적분의 존재성을 파악한다.

과제와 지식 요소의 관계는 [그림 II-2]와 같다. 과제 2와 과제 3을 통해 누적함수와 누적 값의 상호 관계를 이해하고 이 관계를 바탕으로 $F'(x)=f(x)$을 알아내는 과정에서 누적함수의 순간 변화율의 이해가 나타날 수 있다. 과제 2와 과제 3에서 누적함수에 특정 값을 대입하여 누적 값을 구할 수 있음을 알게 되고 이 과정에서 부정적분을 이용한 정적분 계산의 이해가 나타날 수 있다. 과제 3에서 학습한 누적함수를 바탕으로 과제 4의 해결 과정에서 주어진 함수의 누적함수를 찾는 과정에서 누적함수를 이용한 부정적분의 결정의 이해가 나타날 수 있다.

부정적분과 정적분의 관계에 대한 지식 요소가 나타났는지는 Hershkowitz et al., (2001)의 RBC 모델을 이용하여 분석하였다. 전사 자료에서 각 지식 요소에 따라 인식하기(R), 생성하기(B), 구성하기(C)가 나타난 부분을 표기하고 구성하기까지 나타난 경우 이 지식 요소를 학습한 것으로 보았다.



[그림 II-2] 과제에서 발현된 부정적분과 정적분의 관계에 대한 지식 요소

III. 연구 결과 및 논의

이하에서는 AiC 이론에 따른 적분 학습을 위한 과제를 해결하는 과정에서 세 가지 지식 요소인 누적함수의 순간 변화율, 부정적분을 이용한 정적분의 계산, 누적함수를 이용한 부정적분의 결정이 각각 어떻게 나타났는지

그 과정을 구분하여 제시하였다. 각 지식요소가 나타난 것을 Hershkowitz et al., (2001)의 RBC 모델에 따라 인식하기(R), 생성하기(B), 구성하기(C)로 나누어 분석하였다.

가. 누적함수의 순간 변화율의 이해

8명의 학생 중 6명의 학생 S3, S4, S5, S6, S7, S8에서 누적함수의 순간 변화율에 대한 이해가 나타났다. 다섯 학생 모두 조별 학습지 중 누적함수를 그리기 위한 토론 과정에서 이 지식 요소에 대한 이해가 드러났다. 나머지 두 학생 S1, S2는 개별 학습지에 누적함수를 그리지 않았고, 토론 과정에서도 곡선과 x축이 둘러싸인 부분의 넓이와 누적함수의 변화율을 언급하지 않았다. 다른 학생들의 관련 언급에 대한 이해를 드러내는 동의 또는 반박 행동도 하지 않았다. 이에 이들 두 명은 누적함수의 순간 변화율 지식 요소를 구성한 것으로 확정할 수 없었다.

S5와 S7은 다음과 같이 과제 3을 함께 해결하면서 누적함수의 순간 변화율에 대한 이해를 발전시켰다.

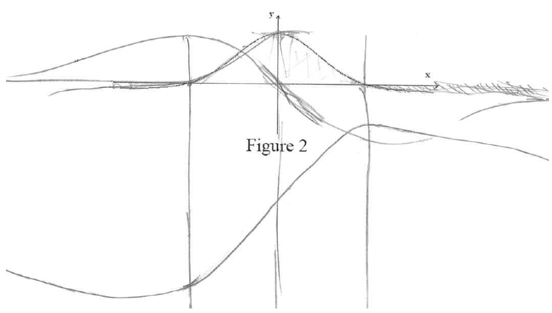
[2-21]	S5:	($f(x)$의 누적함수 $A_f(x)$가) 증가하다가 감소하다가... 일단 양수. 그리고 x가 변할 때, 따라 변하는 것은... x가 변하면 함숫값이 변하는 것인가?	인식하기(R)
[2-29]	S7:	x가 2와 3에서는 ($f(x)$가) 양이고 ($A_f(x)$가) 증가이고, 3과 4에서는 ($A_f(x)$가) 감소이고, 4와 ∞일 때는 ($f(x)$가) 음수이고...	인식하기(R)
[2-36]	S5:	함숫값이 변하고.	
[2-37]	S7:	함숫값? 접선의 기울기. 접선의 기울기.	
[2-40]	S5:	이게 접선의 기울기 아냐?	
[2-41]	S7:	증가했다가 감소. 어... 그러니까 함숫값은 증가했다 감소.	

두 학생은 함수 $f(x)$의 그래프의 함숫값을 이용하여 누적함수 $A_f(x)$의 개형을 설명하고 있다. [2-21]에서 학생 S5는 x에 따른 누적함수 $A_f(x)$의 개형이 증가하다가 감소하는 것을 설명하고, [2-29]에서 학생 S7은 함수 $f(x)$의 함숫값이 양수일 때 누적함수 $A_f(x)$는 증가하고, $f(x)$의 함숫값이 음수일 때 누적함수 $A_f(x)$는 감소하는 것을 설명하고 있다. 이 과정에서 학생 S5와 S7은 이전에 구성된 지식인 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$의 관계를 누적함수 $A_f(x)$에 적용하여 누적함수의 도함수가 $f(x)$라는 관계, 즉 $A_f{}'(x)=f(x)$를 떠올렸고 $f(x)$에 따라 $A_f(x)$의 변화를 판단하고 있으므로 누적함수의 순간 변화율의 이해에 대한 인식하기(R)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 한편 이 과제에서 x가 변할 때 동시에 변하는 공변량에 대해 조사하였는데 $f(x)$의 함숫값, 누적함수의 접선의 기울기, 누적함수의 함숫값이 동시에 변하는 것을 설명하고 있다. Thompson(2008)은 학생들이 누적함수의 순간 변화율과 관련된 누적 개념을 이해하기 위해서는 공변량의 이해가 중요하다고 하였다. 이 과제에서 학생들은 x의 값이 변함에 따라 $f(x)$가 변하고 누적함수의 변화율, 즉 미분계수가 변하는 것을 확인하며 공변량 개념에 대한 논의를 하고 있으므로 이후 누적함수의 순간 변화율에 대한 이해의 바탕이 된 것으로 보인다.

한편, 다른 조에 속한 학생 S3과 S4도 과제 3의 해결 과정에서 학생 S5, S7의 논의와 같이 누적함수 $A_f(x)$의 도함수가 $f(x)$임을 떠올리고 이를 이용하여 $A_f(x)$의 변화를 설명했으므로 인식하기(R)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 다음은 이후 과제 4의 해결 과정에서 나타난 학생 S3, S4와 교사의 대화이다.

[1-177]	S3:	(누적함수의 그래프를) 약간 그려볼까? 잠깐만 (함수 $f(x)$ 의) 기울기가 음이잖아. 아니지. 아니지. 여기가 극값이니까 기울기가 양이니까 양이고, 음수고 이런 식으로 갈 것 같은데... 그래프를 그리면 이런 식으로 나오는데...	생성하기(B)
[1-183]	교사:	이 그래프는 뭘 나타낸 것이야?	
[1-184]	S3:	그냥 제가 그려본 이것의 (함수 $f(x)$ 의) 적분이요.	
[1-188]	S3:	여기 (함수 $f(x)$ 의) 기울기가 0이니까 이렇게 해봤는데 (그려봤는데) 이렇게 하는 것 아닌가?	
[1-196]	S4:	그런데 적분하면 (누적함수가) 계속 아래로 내려갈 것 같아. 왜냐하면 얘가 (함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분 중 함숫값이 음수인 부분을 가리키며) 계속 생기니까	구성하기(C)
[1-197]	S3:	그렇지 계속 아래로 내려가지	구성하기(C)

[1-177]에서 학생 S3은 부정적분의 존재성을 확인하기 위해 주어진 함수 $f(x)$ 의 함숫값을 접선의 기울기로 하는 누적함수의 그래프를 그리고 있다([그림 Ⅲ-1]의 아래쪽 그래프). 이 과정에서 함수 $f(x)$ 를 이용하여 누적함수의 그래프를 그리는 부분적 목표를 달성하기 위해 $F'(x)=f(x)$ 인 관계를 이용하여 누적함수의 그래프를 그렸으므로 생성하기(B)가 나타난 것으로 볼 수 있다.



[그림 III-1] 학생 S3의 개별 학습지

이후 논의가 다른 방향으로 흘러가자 학생들이 함수의 그래프에 집중하게 하려고 [1-183]과 같이 교사가 개입하여 누적함수의 그래프에 대해 논의하도록 질문한다. 그 결과 [1-184], [1-188]과 같이 학생들이 다시 누적함수의 그래프에 대해 논의한다. [1-196]에서 학생 S4는 x 의 값이 커질 때 누적함수의 그래프가 감소할 것 같다고 말하며 그 근거로 함수 $f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 클 때 함숫값이 음수인 부분을 가리키며 이 부분이 계속 생기기 때문이라고 말한다. 함수 $f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 커짐에 따라 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이에 둘러싸인 영역의 넓이가 누적되어 누적함수가 만들어진다는 것을 이용하였다. 이는 넓이가 증가하는 속도가 누적함수의 순간 변화율이라는 것을 이용한 것으로 $f(x)$ 의 그래프에서 넓이와 누적함수의 함숫값을 연결하고 있다. x 의 값이 커짐에 따라 $f(x)$ 의 그래프의 넓이가 누적되어 누적함수의 함숫값이 커진다는 것은 현행 교육과정에 따른 부정적분과 정적분의 학습에서는 다루지 않는 부분으로 앞서 학습한 과제 2와 과제 3의 해결 과정에서 학생들이 처음으로 이해한 부분이다. 이러한 관계에 대한 이해와 더불어 앞서 [1-177]에서 $f(x)$ 의 함숫값

과 누적함수의 접선의 기울기를 연결시키는 것이 나타났으므로 학생 S3는 $F'(x)=f(x)$의 서로 다른 표현 방식에 대응하는 기하적 대상을 파악한 것이라 할 수 있다. 따라서 누적함수의 순간 변화율의 함수적 이해에 대한 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 한편 학생 S4는 생성하기(B)가 명확하게 나타나지 않았는데, [1-177]에서 학생 S3이 자신이 그린 누적함수의 그래프를 설명하는 과정에서 생성하기(B)에 해당하는 부분이 간접적으로 이해되었고 이를 바탕으로 [1-196]에서 구성하기(C)가 나타난 것으로 보인다. 학생 S1은 두 학생 S3, S4의 관련 언급에 대해 동의하며 본인의 논리로 재설명하는 것으로 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 한편, 다른 조에서도 과제 4의 해결 과정에서 학생 S5, S6, S7, S8이 부정적분의 존재성의 확인하기 위해 누적함수를 그리는 과정에서 생성하기(B)와 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

나. 부정적분을 이용한 정적분 계산의 이해

참여 학생 8명 모두 과제 2를 해결하면서 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 때 부정적분을 이용한 정적분 계산에 대한 이해를 보여주었다. 예를 들어, S1, S3, S4는 다음과 같은 논쟁 없는 대화를 통하여 부정적분을 이용한 정적분 계산의 의미와 필요성을 공유하고, 적절한 절차를 수행하여 과제를 해결하였다.

[1-44]	S3:	그냥 인테그랄 0부터 6까지 $f(x)\,dx$ 말하는 거 아니야?	인식하기(R)
[1-45]	S4:	그러니까 이걸 정적분한 값 아니야? 식을?	
[1-46]	S3:	그런데 이 식이 $f(x)$라고 주어졌잖아. 그래서 인테그랄 0부터 6까지 $f(x)\,dx$ 아냐?	
[1-47]	S1:	맞아. 맞아.	
[1-48]	S4:	이차함수 같지 않아? $f(x)$가 이차함수라면... $-1250x^2+20000$.	
[1-50]	S3:	적분하면 $-\dfrac{1250}{3}x^3+20000x$. 0부터 6까지.	구성하기(C)

[1-44]~[1-47]에서 학생 S3과 S4는 과제 2의 돈의 흐름을 구하기 위해 정적분을 이용하려고 한다. 돈의 흐름이 곡선과 x축 사이의 영역의 넓이와 관련이 있고 넓이를 구하기 위해서는 정적분을 사용해야 하는 것을 떠올렸다. 이 과정에서 이전에 구성되었던 넓이와 정적분의 관계를 바탕으로 정적분 계산을 시도하려고 하므로 인식하기(R)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

[1-48]에서 학생 S4는 주어진 함수가 이차함수라고 하고 함수식을 제시한다. [1-50]에서 학생 S3은 이 함수의 부정적분을 구한 뒤 이를 이용하여 정적분을 계산한다. 이 과정에서 정적분과 넓이의 관계와 부정적분을 이용한 정적분 계산을 연결시켰으므로 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 이때 생성하기(B)가 분명하게 나타나지 않았는데 학생들이 이차함수의 부정적분을 구하는 것과 부정적분을 이용하여 정적분 값을 구하는 것에 익숙하기 때문에 부분적 목표를 달성하는 생성하기(B) 단계를 생략하고 구성하기(C)가 나타난 것으로 보인다.

다. 누적함수를 이용한 부정적분 결정의 이해

8명의 학생 중 5명의 학생 S1, S3, S5, S7, S8은 과제 4의 해결 과정에서 누적함수를 이용한 부정적분의 결정에 대한 이해를 보여주었다. 나머지 학생들은 주어진 누적함수에 대한 개념적인 고려를 바탕으로 부정적분의 존재성을 판단하는 것이 아니라 절차적인 고려, 즉 원시함수 식이 존재하는지 여부로 부정적분의 존재성을 판단하려고 시도했다. 다른 학생들의 지식 요소에 대한 언급에 동의하는 행동을 보여주지 않았으므로 누적함수를 이용한 부정적분 결정의 이해 지식 요소를 구성한 것으로 확정할 수 없었다.

학생 S3, S4는 다음과 같이 과제 4를 함께 해결하면서 누적함수를 이용한 부정적분의 결정에 대한 이해를 발

전시켰다.

[1-151]	S4:	그게 아니라 (넓이가) 음에 발산하는 것 아니야?	
[1-157]	S3:	음으로 발산할 것 아냐. 근데 이건 부정적분이지. 정적분이 아니지. 이게 정적분이 아니잖아. 부정적분이잖아.	
[1-177]	S3:	(누적함수의 그래프를) 약간 그려볼까. 잠깐만. 기울기가 음이잖아. 아니지. 아니지. 여기가 극값이니까 기울기가 양이니까 양이고 음수고 이런 식으로 갈 것 같은데... 그래프를 그리면 이런 식으로 나오는데.	인식하기(R)
[1-179]	S4:	(부정적분이) 존재한다는 게 뭐야? (넓이가) 수렴한다는 거야?	
[1-199]	S3:	내게 헷갈리는 게 이게 부정적분이잖아. 정적분은 우리가 정해진 구간 내에서 구하기 때문에 넓이라고 말할 수 있는데 부정적분은 넓이라 말할 수 있나? 부정적분은 정해지지 않는데.	인식하기(R)
[1-200]	S4:	일리 있다.	
[1-202]	S3:	(곡선과 x축 사이의 영역을 가리키며) 여기 이것을 부정적분이 이것을 다 더한 것이라고 할 수 있나? 부정적분이 넓이라 할 수 있나?	인식하기(R)

두 학생 S3, S4는 부정적분의 존재성을 확인하기 위해 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 수렴, 발산에 대해 논의하고 있다. x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 -0.1에 수렴하므로 [1-151]에서 학생 S4는 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 발산한다고 말한다([그림 Ⅲ-1]의 빗금 친 부분). 부정적분을 구간이 정해지지 않은 정적분이라고 생각하는 오개념의 영향으로 부정적분을 실수 전체의 집합에서 함수의 그래프와 x축 사이에 둘러싸인 부분의 넓이로 생각하였다. [1-157]에서 학생 S3은 구하는 것이 정적분이 아니라 부정적분이라고 말한다. 학교 수학에서 부정적분은 미분의 역연산으로 도입한 뒤 주로 정적분을 계산하기 위한 도구로 사용되기 때문에 부정적분의 존재성을 찾는 문제에서 영역의 넓이를 이용하는 것에 대해 의문을 품는다. [1-177]에서 학생 S3은 누적함수의 그래프를 그리기 시작한다. [1-179]에서 학생 S4는 곡선과 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 극한값이 존재하면 수렴하는 것인지에 대해 질문한다. [1-199], [1-202]에서 학생 S3은 부정적분의 존재성을 확인하기 위해 부정적분과 넓이, 즉 부정적분과 누적함수의 연결을 시도하고 있다. 이 과정에서 이전에 학생이 알고 있던 지식인 정적분과 넓이의 관계를 바탕으로 누적함수의 그래프를 그리고 이를 부정적분과 연결시키는 시도를 했으므로 인식하기(R)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

[1-221]	S3:	내가 (함수 $f(x)$를) 적분한 것 그려봤는데 이것이거든? 이것 맞아. 근데 이게 이것의(함수 $f(x)$의) 부정적분은 예를 들어서 x축이 여기에 있어도 넓이는... 아니지. x축이 여기에 있으면... 이게 부정적분은... 맞아. 할 수 있어.	인식하기(R)
[1-224]	S1:	(S3이 그린 그래프를 가리키며) 이게 더 아래로 가고 이게 더 위로 가야지	
[1-228]	S1:	이거(누적함수) 미분해봐. 마이너스 값 나오잖아. 이건 플러스 값 나오고. 그럼 당연히 이게 더 위로 흘러가야 하잖아.	생성하기(B)
[1-229]	S3:	(누적함수를 가리키며) 아니 그게 아니라 이게 원시함수잖아.	생성하기(B)

[1-250]	S3:	존재하긴 하겠지. 근데 그래프가 있다는 건 존재한다고 말할 수 있지 않을까?	구성하기(C)

[1-221], [1-224]에서 학생 S1과 S3은 부정적분의 존재성을 찾기 위해 누적함수의 그래프와 부정적분을 연결하려고 시도한다([그림 Ⅲ-1]의 아래쪽 그래프). [1-228]에서 학생 S1은 누적함수의 도함수와 함수 $f(x)$ 를 비교한다. [1-229]에서 학생 S3이 누적함수가 원시함수라는 표현을 사용한다. 이 과정과 [그림 Ⅲ-1]의 아래쪽 그래프에서 학생 S3은 누적함수의 도함수가 $f(x)$ 이므로 누적함수가 $f(x)$ 의 원시함수인 것을 이해하였다. 이를 통해 학생 S3은 누적함수를 부정적분과 연결시켜 누적함수가 부정적분 중 하나인 것을 이해했기 때문에 생성하기(B)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

[1-250]에서 학생 S3은 누적함수의 그래프를 그릴 수 있으므로 부정적분이 존재한다고 말한다. 이 학생은 $f(x)$ 의 누적함수가 부정적분 중 하나라는 사실을 바탕으로 누적함수의 존재성을 이용하여 부정적분의 존재성을 설명하고 있다. 이 과정에서 기존에 알고 있던 정적분과 넓이와의 관계에서 부정적분과 누적함수 및 넓이의 관계로 확장되었으므로 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 학생 S1은 이후의 논의 과정에서 S3의 언급에 동의하며 누적함수의 존재성으로 부정적분이 존재하는 것을 설명하므로 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 이때 학생들은 과제 3에서 누적함수와 부정적분의 관계를 이해하였고([1-123]-[1-136]), 이를 바탕으로 과제 4에서 주어진 함수의 부정적분을 찾기 위해 누적함수의 그래프를 그린 후 부정적분의 존재성을 확인할 수 있었다.

한편, 다른 조에 속한 학생 S5, S7, S8도 과제 4의 해결 과정에서 누적함수를 이용한 부정적분의 결정에 대한 이해가 나타났다. 다음은 학생 S5, S7, S8의 대화이다.

[2-116]	S5:	그런데 이거 (함수 $f(x)$ 에) -0.1 있어서 생각해보니까 얘는 그거 뭐지? 정적분하니까 안되네. 마이너스 무한대. 마이너스 무한이 아니라 발산이구나 그냥.	
[2-117]	S7:	모든 실수에서 x 가 커지면 커질수록 그냥 -0.1 로 수렴하는 것 아냐?	
[2-120]	S5:	정적분한 것이 발산한다고.	
[2-121]	S7:	마이너스 무한대.	
[2-130]	S5:	일단 마이너스 무한대에서는 (함수 $f(x)$ 의 부정적분이) $-0.1x$ 일 거고, 그러다가 점점 기울기가 조금씩 커지다가	인식하기(R)
[2-132]	S8:	처음에 빵이 아니지	
[2-137]	S7:	어라? 그럼 얘는 어떻게 그리지?	
[2-140]	S8:	처음 구간을 잡으면 0 으로 잡으면 이후는 0 에서 k 라고 하면 k 가 가는데...	인식하기(R)
[2-147]	S5:	이거? 나 그냥 미분해서 얘랑 똑같이 나오려면 어떻게 해야 할까? 뭐... 그렇게 했는데 난	인식하기(R)

[2-116]에서 학생 S5는 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 이용하여 부정적분의 존재성을 설명하고 있다. x 값이 커질 때 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역이 x 축 아래에서 계속 나타나므로 이 영역의 넓이가 마이너스 무한대로 발산한다고 말한다. 이때 영역의 넓이가 아니라 정적분이라는 표현을 사용했으며 [2-120]에서도 마찬가지 정적분한 값이 발산한다고 말한다. 학교 수학에서 정적분과 넓이의 관계를 학습했고 이를 이용한 문제를 많이 다루었기 때문에 넓이라는 표현 대신 정적분이라고 표현한 것으로 보인다. [2-116]~[2-121]까지 학생 S5와 S7은 부정적분을 실수 전체의 집합에서 함수의 그래프와 x축 사이에 둘러싸인

부분의 넓이로 생각했으며 이는 학생S3, S4의 대화에서 나타났던 반응([1-151], [1-157])과 일치한다. [2-130]에서 학생 S5는 함수 $f(x)$ 의 누적함수의 그래프를 고려한다. $f(x)$ 의 함숫값을 접선의 기울기로 하는 함수의 그래프를 생각하며 기울기가 조금씩 커진다고 말한다. [2-132], [2-137], [2-140]에서 학생 S7과 S8은 누적함수가 $\int_a^x f(t)\,dt$ 임을 알고 이 함수의 그래프를 고려할 때 적분 구간을 어디서부터 시작할지를 논의한다. 이때 학생들은 과제 3의 누적함수와 함수 $f(x)$ 와 관계를 탐구했던 경험([2-67]~[2-72])을 바탕으로 누적함수가 $\int_a^x f(t)\,dt$ 인 것을 알 수 있었다. [2-147]에서 학생 S5는 누적함수를 미분했을 때 함수 $f(x)$ 가 나오는 것을 설명한다. 이 과정에서 학생 S5와 S8은 부정적분의 존재성을 확인하기 위해 함수 $f(x)$ 의 그래프를 이용하여 누적함수의 그래프를 그리려고 시도하고 있다. 이때 기존에 알고 있던 지식인 정적분과 넓이의 관계를 바탕으로 누적함수의 그래프를 그리고 이를 부정적분과 연결하는 시도를 했으므로 인식하기(R)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

[2-191]	S7:	그런데 이게 (부정적분이) 존재하지 않는 것일 수 있어. 정적분만 존재하고 부정적분이 존재하지 않는 것일 수 있어.	
[2-192]	S8:	정적분이 존재하면 부정적분이 존재하지 않냐?	
[2-194]	S6:	그건 아닐 수 있어.	
[2-195]	S7:	나도 정적분이 존재하는데 부정적분이 존재하지 않는 건 모든 실수에서 연속이 아니라서 그런 것으로 생각했거든. 근데 모든 실수에서 연속인데도 그럴 수 있어?	
[2-196]	S8:	존재하지 않냐?	
[2-202]	S8:	구간을 a 에서 x 로 잡으면 된다니깐. 존재할 수밖에 없을걸.	구성하기(C)
[2-205]	S7:	부정적분 정의 자체가 이거... 미분해서 이게 나오는 값인데, 미분해서 이게 나오는 값이 없으면 걔는 그럼 얘는 존재하지 않는 것이지... 부정적분의 정의에 따르면	
[2-211]	S5:	a 부터 x 까지 하면... 이게 부정적분의 한 종류 아냐?	구성하기(C)

[2-191]에서 학생 S7은 부정적분은 존재하지 않지만 정적분은 존재한다는 오개념을 보인다. 앞서 학생들은 $y=e^{-x^2}$ 의 부정적분이 초등함수 형태로 나타낼 수 없는 것을 학습하였기 때문에 부정적분은 존재하지 않는다고 생각하였다. [2-192]에서 학생 S8은 정적분의 존재성과 부정적분의 존재성이 같다고 말하고, [2-194]에서 학생 S6은 그렇지 않다고 반박하지만 그 이유를 설명하지는 않는다. 이 과정에서 학생들은 부정적분과 넓이, 즉 부정적분과 누적함수의 관계를 이해하지 못한 것으로 보인다. 이는 학교 수학에서 학습한 부정적분과 정적분의 정의에 따라 부정적분은 미분의 역, 정적분은 넓이로만 생각하여 부정적분과 정적분의 관계를 의미 있게 연결하지 못하는 것으로 보인다. [2-195]에서 학생 S7은 연속함수이면 정적분과 부정적분이 모두 존재한다고 하였다. 미적분의 제 1 기본정리에 의해 연속함수이면 부정적분이 존재하는 것은 학교 수학에서 다루는 내용이므로 이를 바탕으로 논의를 한 것으로 보인다. 하지만 이후 학생 S7은 [2-205]에서 부정적분을 미분의 역으로만 생각하고 부정적분의 존재에 대해 확신을 하지 못하는 모습을 보이므로 미적분학 제 1 기본정리를 의미 있게 활용하지 못하는 것으로 볼 수 있다.

한편 학생 S8은 [2-192], [2-196]에서 정적분과 부정적분이 모두 존재한다고 말하였고, 그 근거로 [2-202]에서 누적함수 $\int_a^x f(t)\,dt$ 가 부정적분 중 하나이므로 부정적분이 존재할 것이라고 말한다. 현행 학교 수학에서 부정

적분은 $\int f(t)dt$로 표기하고 미분의 역으로 정의되지만 학생 S8은 누적함수 $\int_a^x f(t)\,dt$를 부정적분 중 하나로 간주하고 영역의 넓이와 연결시켜 부정적분의 존재성을 설명하고 있다. 과제 3의 해결 과정에서 누적함수 $\int_a^x f(t)\,dt$와 부정적분의 관계를 파악하였고([2-84]-[2-97]), 이를 이용하여 부정적분의 존재성을 설명한 것이라 볼 수 있다. 이 과정에서 학생 S8은 미분의 역으로 학습한 부정적분을 정적분과 넓이의 관계에서 확장하여 부정적분과 누적함수의 관계를 파악하고 이를 이용하여 부정적분의 존재성을 설명했기 때문에 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 이때 학생 S8은 S3처럼 함수 $f(x)$의 그래프를 이용하여 누적함수의 그래프를 직접 그린 후 부정적분의 존재성을 설명하는 것이 아니라, 부정적분을 $\int_a^x f(t)\,dt$로 간주하면 부정적분이 존재할 것이라고 설명하였으므로 생성하기(B)가 나타난 것으로 보이지 않는다. [2-211]에서 학생 S5도 학생 S8과 마찬가지로 누적함수 $\int_a^x f(t)\,dt$가 부정적분 중 하나인 것을 이용하여 부정적분의 존재성을 설명했기 때문에 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다. 학생 S7는 이후의 논의 과정에서 S3의 언급에 동의하며 누적함수의 존재성으로 부정적분이 존재하는 것을 설명했으므로 구성하기(C)가 나타난 것으로 볼 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구에서는 AiC 이론에 따른 적분 지도 방안에 대해 설계하고, 이를 활용하여 지도한 뒤 학생들의 부정적분과 정적분의 관계에 대한 이해가 어떻게 나타나는지 확인하였다. AiC 관점에 따르면 학생들이 수학 개념을 추상화하기 위해서는 지식의 수직적 재구성이 가능한 맥락을 제공해야 하므로 본 연구에서는 이 관점에 따른 적분 지도 방법으로 누적 개념을 이용한 적분 학습을 제시하였다. 현행 학교 수학에서는 부정적분을 미분의 역으로 학습한 뒤 주로 정적분 값을 구하기 위한 계산에 활용되며 이러한 학습만으로는 부정적분과 정적분의 관계에 대한 깊은 이해가 어렵다. AiC 관점에 따른 적분 지도 방법인 누적 개념을 통한 학습은 부정적분과 정적분의 관계에 대한 보다 깊은 이해를 가져올 수 있다.

연구 결과, 이와 같은 방법으로 학습한 학생들이 부정적분과 정적분의 관계에 대한 세 가지 지식 요소를 이해한 것으로 볼 수 있었고, 부정적분과 정적분의 관계를 탐구하는 과제를 수행하는 동안 누적 개념이 맥락으로 작용한 것을 확인할 수 있었다. 세 가지 지식 요소 중 누적함수의 순간 변화율은 학생들이 과제 2와 과제 3을 해결하는 과정에서 학습한 누적 값에서 위 끝을 변수로 두면 누적함수가 된다는 사실([2-21]~[2-41])을 바탕으로 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역이 누적되어 누적함수가 되며, 누적함수의 순간 변화율이 $f(x)$의 함숫값임을 이해할 수 있었다. 누적함수를 이용하여 부정적분의 존재성을 논의하는 과정에서 $F'(x)=f(x)$의 관계가 서로 다른 기하적 대상인 함수 $f(x)$의 그래프에서 누적된 넓이의 변화량과 누적함수의 관계 및 $f(x)$의 함숫값과 누적함수의 기울기의 관계로 표현되었으므로 누적함수의 순간 변화율의 지식 요소가 나타났다.

부정적분을 이용한 정적분 계산은 학생들이 과제 2를 해결하는 과정에서 주어진 곡선을 이차함수로 나타낸 뒤([1-48]), 부정적분 값의 차이를 이용하여 정적분 값을 계산하였다([1-50]). 이 과정에서 부정적분을 이용한 정적분의 계산에 대한 이해가 나타난 것으로 볼 수 있었다. 이는 2015 개정 수학과 교육과정에서 정적분의 정의가 부정적분 값의 차로 다루고 있으며, 적분 단원의 교과서에서 부정적분을 이용한 정적분 계산을 많이 다루고 있어 학생들에게 익숙하기 때문이라고 할 수 있다(신보미, 2009; 정연준, 2010).

누적함수를 이용한 부정적분의 결정은 학생들이 주어진 함수의 그래프를 이용하여 누적함수의 그래프를 그린

뒤, 부정적분의 존재성에 대해 이해하고 있는 것을 볼 수 있었다. 이 과제는 학교 수학에서는 부정적분을 미분의 역으로 정의하고, 주로 정적분 계산을 위한 도구로 다루고 있으므로 낯선 과제이다. 학생들은 누적함수를 부정적분 중 하나로 간주하고, 변화율에서 변화량인 누적 값을 구하는 기하적 맥락과 누적 값과 누적함수의 기하적 맥락을 결합하여 부정적분과 누적함수의 관계를 확인하였고([1-221]~[1-250], [2-140], [2-147]), 이 과정에서 누적함수를 이용한 부정적분의 결정의 지식 요소가 나타난 것으로 볼 수 있었다. 이때 부정적분의 정의에 따라 미분의 역으로만 생각한 것이 아니라 과제 3의 해결 과정에서 학습한 누적함수를 바탕으로 누적함수 $\int_a^x f(t)\,dt$가 부정적분 중 하나 임을 이용하여 누적함수의 존재성으로 부정적분의 존재성을 설명하였다.

학교 수학에서 적분 학습은 부정적분과 정적분에서 '적분'은 다른 의미를 가진다는 것을 강조하지 않은 채 다루어지고 있고, 정적분과 넓이의 관계가 변화율과 변화량의 관계로부터 출발하여 의미 있게 다루어지지 않는다. 이런 학습 경험으로 인해 학생들이 부정적분과 정적분의 개념의 차이를 혼란스러워하는 것과 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 부정적분과 누적함수의 관계를 연결시키는 데 어려움을 겪는 것이 확인하였다([1-199], [2-205]). 또한 일부 학생은 선행 연구(Ferrini-Mundy & Graham, 1994)에서 나타난 부정적분을 구간이 정해지지 않은 정적분으로 간주하는 오개념을 보였고, 이 오개념으로 인해 실수 전체의 집합에서 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 수렴성을 판단하려고 시도하였다([1-179], [2-120]). 부정적분 기호 $\int f(x)dx$와 정적분 기호 $\int_a^b f(t)$의 유사성으로 인해 오개념이 나타낸 것으로 어떤 학생은 누적함수 $\int_a^x f(t)dt$가 부정적분 중 하나임을 인식함으로써 기호의 유사성으로 인한 혼동에서 벗어날 수 있었다. 또한 $F'(x)=f(x)$의 관계가 단순히 미분의 역이 아니라 변화율과 변화량의 관계에서 나타난 것을 인식하게 되었고 이를 통해 부정적분의 존재성을 확인하였다. 이러한 학습은 부정적분과 정적분의 관계에 함축되어 있는 평면도형의 넓이와 변화율과 변화량의 관계를 드러내야 한다는 Courant(1970)의 입장을 반영한 것이라 할 수 있다. 한편 연속함수의 부정적분의 존재성은 미적분학 제 1기본정리에 의해 보장된다. 일부 학생들은 연속함수이면 부정적분이 존재할 것이다라고 주장했지만([2-195]), 곧 부정적분의 정의에 따라 원시함수를 초등함수 형태로 나타낼 수 없으면 존재하지 않을 것이라고 의견을 바꾼다(([2-205]). 이는 학교 수학에서 미적분학 1 기본정리가 의미 있게 학습되지 않는 것을 보여주며, 선행연구(정연준, 이경화, 2009a)에서 미적분학 기본정리가 변화율의 의미를 통해서 개념적, 관계적으로 학습하는 데 미흡하다는 주장과 일치한다.

본 연구 결과를 바탕으로 다음과 같은 시사점을 도출하였다. 첫째, AiC 관점에 따른 적분 지도는 현행 교육과정에서 제시하는 학습 내용만으로는 도달하기 어려운 부정적분과 정적분의 관계에 대한 통찰의 기회를 제공한다. 적분을 단지 계산법으로서가 아니라 의미 있는 수학적 개념과 원리, 구조의 핵심적인 예로서 지도하는 것을 추구하는 교사에게 AiC 관점에 따른 적분 수업은 적분 개념 지도의 한 가지 대안이 될 수 있다. 둘째, AiC 관점에 따른 적분 지도는 맥락에 기초한 토론을 활성화하여 다양한 수학적 아이디어를 공유하고 발전시키는 학습 기회를 제공한다. 계산체계로서의 구조가 완성되기까지 적분이 겪었던 개념적 혼란이나 정교화의 과정을 학습자의 수준이나 언어에 따라 거치도록 함으로써, 학습자들이 서로 협력하여 수학을 학습하는 기회를 제공한다. 셋째, AiC 관점에 따른 적분 지도에서 교사의 역할은 수학적 아이디어의 공유와 협력적인 정교화를 촉진하는 것이므로, 다인수 학급에 적용함에 있어서는 주의가 필요하다. 토론에서 배제되는 학생들을 위한 개별 피드백을 사전에 준비하여 적절히 제공할 필요가 있다.

AiC 관점에 따른 적분 지도가 보다 효과적으로 이루어지려면 개별 교사의 수업 설계 방안으로서만이 아니라 교육과정과 교과서의 한 입장으로 구현하는 방안이 마련될 필요가 있다. 특히, 맥락에서 출발하여 거듭되는 추상화를 강조하는 AiC 관점은 삶과 연계된 교육이나 학습자 주도성, 협력적인 학습을 강조하는 2022 개정 교육과정

의 기본 입장(교육부, 2021)과도 밀접하게 연계되는 면이 있으므로, 관련 후속 연구가 이루어질 필요가 있다. 이에 후속 연구에서는 교사의 중재 및 학생들의 다양한 생각과 표현의 공유를 강화하는 수업을 설계하여, 일반고등학교 학생들을 대상으로 한 AiC 관점에 따른 적분 지도의 효과를 분석할 것을 제안한다. 이 때 과제에 포함된 내용 요소가 현행 교육과정을 넘어서지 않도록 해야 하며, 고등학교의 현실적인 여건을 고려하여 수학 동아리 또는 방과 후 수업을 활용할 것을 제안한다. 나아가 고등학교 수학의 다른 내용 요소를 지도할 때 AiC 관점을 도입하는 방안에 대한 후속 연구도 이루어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8]. 서울: 교육부.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Notification of the Ministry of Education No. 2015-74. [Vol. 8]. Seoul: Author.

교육부 (2021). 2022 개정 교육과정 총론 주요사항(시안). 교육부 교육과정 정책과 보도자료.

Ministry of Education (2021). *The main points for the 2022 revision national guidelines for the curriculum (Proposal).* Retrieved from February 7, 2022.

강정기 (2019). 미적분학 기본정리에 대한 Newton과 Leibniz의 직관 및 발견적 교수법 탐색. 수학교육학연구, 29(4), 525-549.

Kang, J. (2019). Exploring Newton and Leibniz's intuition and heuristic pedagogy on the fundamental theorem of calculus. *Journal of Educaitonal Research in Mathematics,* 29(4), 525-549.

김부미 · 박지현 (2011). 미적분학의 기본정리에 대한 교사의 Folding Back 사고 모형 제안. 학교수학, 13(1), 65-88.

Kim, B., & Park, J. (2011). Design of teacher's Folding Back Model for fundamental theorem of calculus. *School mathematics,* 13(1), 65-88.

김성옥 · 정수영 · 권오남 (2010). 미적분학의 기본정리의 교수학적 분석에 기반을 둔 지도방안의 탐색. 수학교육논문집, 24(4), 891-907.

Kim, S., Chung, S., & Kwon, O. (2010). An exploration of alternative way of teaching the Fundamental Theorem of Calculus through a didactical analysis. *Communications of Mathematical Education,* 24(4), 891-907.

박문환 · 민세영 (2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도. 학교수학, 4(1), 49-62.

Park, M., & Min, S. (2002). On the teaching of calculus according to the historico-genetic principle. *School mathematics,* 4(1), 49-62.

박재범 (2003). 고등학교 미적분 지도방법에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

Park, J. (2003). *A Study on methods of differential and integral calculus instruction in high school* (Masters dissertation). Korea National University of Education, Chungbuk.

신보미 (2008). 구분구적법과 정적분의 개념 분석. 한국학교수학회논문집, 11(3), 421-438.

Shin, B. (2008). An analysis of the concept on mensuration by parts and definite integral. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 11(3), 421-438.

신보미 (2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. 학교수학, 11(1), 93-110.

Shin, B. (2009). High school students' understanding of definite Integral. *School mathematics,* 11(1), 93-110.

신수진 · 조완영 (2018). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서의 정적분 정의에 대한 대안. 학교수학, 20(4), 723-741.

Shin, S., & Cho, W. (2018). An alternatives of the definition of definite integral in <MathematicsⅡ> textbook under 2015-revised curriculum. *School mathematics,* 20(4), 723-741.

우정호・정영옥・박경미・이경화・김남희・나귀수・임재훈 (2006). 수학교육학 연구방법론. 서울:경문사.

Woo, J., Jung, Y., Park, K., Lee, K., Kim, N., Na, K., & Yim, J. (2006). *Research methodology in mathematics education.* Seoul: KyungMoonSa.

이기돈 (2019). 2015 개정 <미적분> 교과서의 '정적분과 급수의 합 사이의 관계' 서술 내용 분석 및 제언 -<수학Ⅱ>와의 연계성 관점에서-. 수학교육학연구, 29(1). 93-112.

Lee, G. (2019). An analysis and a suggestion about narrative of 'the relation between definite Integral and sum of series' in 2015-revised <Calculus> - from the perspective of connecting with <MathematicsⅡ> -. *Journal of Educaitonal Research in Mathematics,* 29(1), 93-112.

정연준・이경화 (2009a). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 - 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로. 수학교육학연구, 19(1). 123-142.

Joung, Y., & Lee, K. (2009a). A study on the fundamental theorem of calculus : focused on the relation between the area under time-velocity graph and distance. *Journal of Educaitonal Research in Mathematics,* 19(1), 123-142.

정연준・이경화 (2009b). 부정적분과 정적분의 관계에 관한 고찰. 학교수학, 11(2). 301-316.

Joung, Y., & Lee, K. (2009b) A study on the relationship between indefinite integral and definite integral. *School mathematics,* 11(2), 301-316.

정연준 (2010). 미적분의 기본정리에 대한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Joung, Y. (2010). *A didactical analysis on the fundamental theorem of calculus*(Doctors dissertation). Seoul National University, Seoul.

한대희 (1999). 미적분학 기본정리에 대한 역사-발생적 고찰. 수학교육학연구, 9(1), 217-228.

Han, D. (1999). A study on a genetic history of the fundamental theorem of calculus. *Journal of Educaitonal Research in Mathematics,* 9(1), 217-228.

Carlson, M. P., Persson, J., & Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. *In Proceedings of the 27th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol 2, pp. 165-172). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Courant, R., Robbins, H.(1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford University Press.

Creswell, J. W.(1998). *Qualitative inquiry and research design-choosing among five traditions.* Thousand Oaks, Calif.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context. Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Doing (qualitative) research: Methodology and methods in mathematics education.* Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education Series.

Dreyfus, T., & Kidrun, I. (2014). Introduction to abstraction in context. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger. (Eds.), *Networking theories group, networking of theories as a research practice in mathematics education. Advanced in mathematics education series* (pp. 85-95). New York: Springer.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior,* 23. 271-300.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery.* New Jersey: Princeton University Press.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.). *Research issues in undergraduate mathematics learning: Primary analyses and results*(MMA Note Vol. 33). American Mathematical Society. 31-45.

Ferzola, A. P.(1986). *Evolution of the Mathematical Concept of a Differential and an Outline of How a Modern Definition of this Concept Can Be Used in the Formulation of Elementary Calculus Course*. Unpublished doctoral dissertation, New York University.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Deryfus, T., & Schwarz, B. (2007). Abstractiong process from individuals' constructing of knowledge to a group's "Shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 41-68.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 195-222.

Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. *ZDM*, 49, 25-36.

Kouropatov, A, (2016). *The integral concept in high school: Constructing knowledge about accumulation*. Unpublished doctoral dissertation, Tel Aviv University.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation : suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 641-651.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, 46, 533-548.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. (Eds.). Cambridge University Press.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Medvedev, F. A. (1991). *Scenes from the History of Real Functions*. Basel: Birkhäuser Verlag.

Oberg, T. (2000). *An investigation of undergraduate calculus students' conceptual understanding of the definite integral*. Unpublished Doctoral Dissertation. Montana University.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 230-245.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus (Eds.), Making the connection: *Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Yin, R. K. (1994). *Case study research*. Thousand Oaks, CA.

Zandieh, M. J. (1998). *The evolution of students understanding of the concept of derivative*. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University.

A Case Study on the Relationship between Indefinite Integral and Definite Integral according to the AiC Perspective

Park, Minkyu
Seoul National University Graduate School,
1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826
E-mail : alsrb84@snu.ac.kr

Lee, Kyeong-Hwa†
Seoul National University,
1 Gwanak-ro, Gwanak-gu, Seoul 08826
E-mail : khmath@snu.ac.kr

This study aims to design an integral instruction method that follows the Abstraction in Context (AiC) framework proposed by Hershkowitz, Schwarz, and Dreyfus to help students in acquiring in-depth understanding of the relationship between indefinite integrals and definite integrals and to analyze how the students' understanding improved as a result. To this end, we implemented lessons according to the integral instruction method designed for eight 11th grade students in a science high school. We recorded and analyzed data from graded student worksheets and transcripts of classroom recordings. Results show that students comprehend three knowledge elements regarding relationship between indefinite integral and definite integral: the instantaneous rate of change of accumulation function, the calculation of a definite integral through an indefinite integral, and The determination of indefinite integral by the accumulation function. The findings suggest that the AiC framework is useful for designing didactical activities for conceptual learning, and the accumulation function can serve as a basis for teaching the three knowledge elements regarding relationship between indefinite integral and definite integral.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : AiC, indefinite integral, definite integral, accumulation function, context
† corresponding author