韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.1.23
제 36집 제 1호, 2022. 3. 23-38

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 1, Mar. 2022. 23-38

Newton의 Principia에서 역제곱 법칙 증명에 대한 발견적 관점에서의 이해

강 정 기 (진영중학교, 교사)

본 연구는 Newton의 Principia의 핵심인 역제곱 법칙의 증명에서 'QT^2/QR가 통경으로 수렴'하는 것을 보여주는 증명의 난해함을 극복하기 위하여, Newton 증명을 발견적으로 볼 수 있는 하나의 관점을 제시하였다. 그것은 QR/QT^2의 분모와 분자를 공액지름 쌍과 관련한 선분으로 나타내면 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 이들 사이의 관계($PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$)에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값을 얻을 수 있을 것이라는 믿음이 증명의 출발점이라는 관점이다. 본 연구에서 제안한 발견적 관점은 식 QT^2/QR 변형의 방향을 제시함으로써, 독자들이 Newton 증명을 보다 쉽게 이해할 수 있게 돕는다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있다.

Ⅰ. 서론

Newton이 라틴어로 집필한 Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica(자연 철학의 수학적 원리)는 간단히 Principia라고 부르는데, 과학 역사상 가장 위대한 지적 성취 중의 하나로 간주된다.

Newton은 Galileo의 추종자답게 Principia에서 수학을 강조하였다. 자신이 만든 저서의 제목을 지으면서 Descarte의 저서 Philosophiae Principia의 제목을 참고하였는데, Descartes가 시도한 것보다 훨씬 더 수학을 강조하여 저술한 책임을 드러내기 위하여 제목을 Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica(자연 철학의 수학적 원리)라고 하였다(Pask, 2019).

Principia는 수학 중에서도 고전적 방법으로 일컬어지는 기하학적 방법에 기반한다. Principia에는 점과 선으로 이름 붙여진 많은 그림과 그 그림과 관련된 산문 형태로 제시된 논의들이 있다(Fleuriot, & Paulson, 1998). Newton은 역학의 범주에 있던 힘, 시간, 관성 궤도의 이탈 정도 등을 기하 선분으로 표현함으로써 천체의 운동을 Euclid 기하의 범주에서 다룰 수 있게 하였다.

Newton은 Principia에서 기하학적 방법으로 당시의 화두가 되었던 역제곱 법칙을 유도하였다. Tycho Brahe의 방대한 관측 자료를 바탕으로 한 Johannes Kepler의 계산은 행성이 원운동을 할 것이라는 기존의 통념을 과감하게 깨버리고 원추곡선의 궤도로 운행된다는 것을 파악하게 하였다. Newton은 행성의 타원궤도를 가정하고, 이로부터 태양과 행성 간의 거리의 제곱에 반비례한다는 역제곱 법칙을 유도하였다. Principia 제 1권의 법칙 5부터 법칙 11까지는 중심으로부터의 거리의 역제곱으로 변하는 구심력과 원추곡선 궤도 사이의 관계를 다루는데, 이 부분이야말로 Newton 이론의 심장에 해당한다[1)](Brackenridge, 1995; Gandt, 1995).

* 접수일(2022년 1월 7일), 심사(수정)일(2022년 3월 2일), 게재확정일(2022년 3월 12일)
* MSC2000분류 : 97B60
* 주제어 : Principia, 역제곱 법칙, 발견적 관점

1) Brackenridge(1995)에 따르면 Newton이 Halley에게 보낸 '궤도에서의 물체의 운동에 관하여(On the motion of bodies in orbit)'는 Newton 역학과 타원 궤도의 문제에 대한 응용의 기본 핵심(basic core)을 깨끗하고 정돈된 방식으로 제시하고 있다. 이 소책자가 근간이 되어 Newton의 Principia가 완성되는데, Principia에는 타원뿐만 아니라 원, 포물선, 쌍곡선 등의 궤도 운동에 작용하는 힘까지 포괄하고 있다. Principia 제1권 법칙 5부터 법칙 11가지의 내용은 타원궤도와 힘의 관계에 대한 Halley의 질문에 대한 Newton의 답변과 관련된 부분이므로 본 연구에서는 이를 Newton 이론의 심장이라고 보았다.

증명 과정에서 QT^2/QR가 통경으로 수렴하는 것을 보여주는 Newton의 기하학적 증명은 난해하기로 유명하다[2](Whiteside, 1967). 이 증명을 보면 자연스럽게 다음의 의문을 가질 수 있다. Newton은 어떻게 이런 생각을 할 수 있었을까? Newton의 증명은 해놓은 것을 보고도 이해하기가 쉽지 않은데 도대체 Newton은 어떻게 이런 생각을 할 수 있었는가를 생각하면 경외감마저 든다. 본 연구는 난해하기로 유명한 역제곱 법칙에 대한 Newton의 증명을 보다 잘 이해할 수 없을까하는 의문에서 시작되었다.

주어진 증명을 보다 잘 이해하기 위해서는 읽고 해독하는 차원을 넘어 주어진 증명을 실행할 수 있는 힘을 갖추어야 한다. 따라서 본 연구에서는 Newton의 증명에 대해 발견의 관점에서 접근할 수 없는지를 숙고해 보고자 한다.

Newton이 Principia 집필 당시 어떤 생각을 했는지 파악하기란 쉽지 않다. Newton과 관련한 다양한 문헌 조사가 필요하며, 특히 정리 발견과 관련한 Newton의 노트 필기를 조사할 필요가 있다. 불행하게도 Newton은 정리의 발견과 관련한 단서를 많이 남겨 놓지 않았던 것으로 생각된다. Guicciardini(1999)에 따르면, Newton은 Principia의 몇몇 정리는 대수적으로 발견했음에도 불구하고, 기하학의 방법으로 증명을 서술함으로써 발견에 이른 자신의 방법을 가렸다.[3] 이는 Euclid의 전통을 고수한 Newton의 집필 방식이 자신의 발견과는 무관한 서술로 이어졌음을 보여준다.

Newton의 생각을 파악하기는 쉽지 않지만, Newton이 어떻게 이 증명을 고안했는지에 대한 독자 나름의 추론은 가능하다. 본 연구는 이러한 점에 착안하여 Newton의 증명을 발견적으로 접근할 수 있는 하나의 관점을 제안하고자 한다. 다시 말해, 본 연구는 Newton의 역제곱 법칙에 대한 증명을 발상의 차원에서 바라보고 이해해 보고자 한다. 궁극적으로 Newton의 역제곱 법칙 증명에 대한 이해 고양을 목적으로 한다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 역제곱 법칙 증명

역제곱 법칙 증명은 크게 두 단계 '$F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \to P)$의 유도'와 '$QR/QT^2 \to 1/L$의 유도'로 구분할 수 있다[4].

가. $F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \to P)$의 유도

Prentis, Fulton, Hesse, & Mazzino(2007)의 방법을 요약하면 $F \propto QR/(SP \times QT)^2$ $(Q \to P)$은 다음 4가지 기본 원리에서 유도된다.

(1) 포물선 근사: F는 아주 짧은 시간 t와 d에 대하여 상수

(2) Galileo의 운동 관계 $d = \frac{1}{2}at^2$

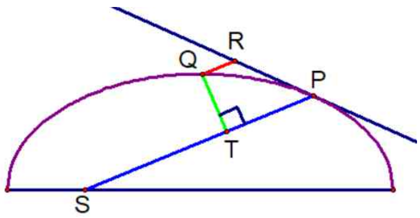
---

2) Whiteside(1967)는 Principia 이해의 어려움과 관련하여 다음과 같이 말하였다: 나는 이 과학 역사의 거룩한 저작이 읽기 쉽지 않다는 것을 부인하지 않는다. .....(중략).... 우리는 <Principia>의 복잡한 수학 내용을 숙달하려고 할 때, Newton이 우리에게 양도했듯 저작의 난해함을 경험해야 한다.

3) Newton이 비록 몇몇 정리를 대수적으로 발견한 이후 다시 기하학적 방법으로 증명을 서술하였다할지라도, 기하학적 방법 역시 정리를 증명하는 하나의 방법을 발견한 것으로 볼 수 있다. 본 연구에서는 Newton이 재발견한 기하학적 방법에 초점을 두고 연구를 진행하고자 한다.

4) 본 연구에서 자주 사용하는 기호 $A \propto B$는 A는 B에 비례한다는 의미이다. 즉, $A = kB$(단, k는 비례상수)의 의미이다.

(3) Newton의 운동 법칙 $\mathrm{F}=ma$
(4) Kepler의 면적속도 일정의 법칙 $t\propto A$ (여기서 A는 면적)



[그림 II-1] $\mathrm{F}\propto \mathrm{QR}/(\mathrm{SP}\times\mathrm{QT})^2$ $(\mathrm{Q}\rightarrow\mathrm{P})$의 유도 그림

Newton에게 있어서 Galileo의 운동 관계 적용은 대단히 중요한 의미를 지니게 된다. 왜냐하면 힘이 곧 운동량의 변화(속도의 변화)의 요인임을 파악한 Newton에게 있어 가속도와 관련한 식은 역제곱 법칙 증명의 출발점이 될 수 있기 때문이다. Galileo의 운동 관계는 낙하거리와 가속도와의 관계가 드러나 있으므로 힘과 관련한 법칙을 유도하기 위한 출발점으로 적당한 것이었다.[5)]

하지만 Galileo의 운동 관계는 포물선 궤도에서 적용되는 운동이기에 타원 궤도를 가정한 행성에 적용 가능한 법칙이 아니었다. Newton은 이 문제를 아주 짧은 시간을 가정함으로써 타원 궤도를 포물선 궤도화하여 $d=\frac{1}{2}at^2$을 증명의 출발점으로 삼을 수 있는 기반을 마련할 수 있었다.[6)]

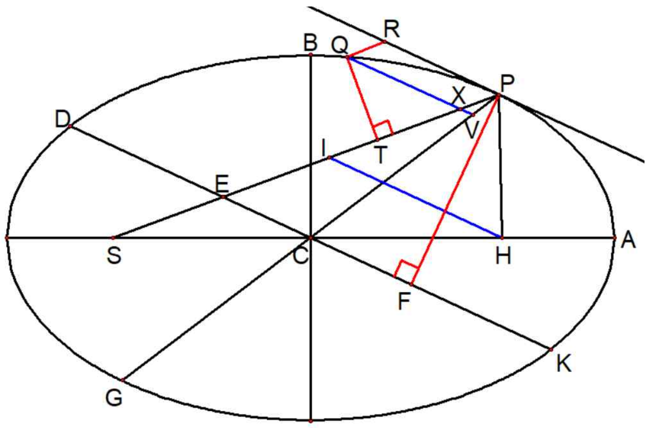
이제 $d=\frac{1}{2}at^2$과 $\mathrm{F}=ma$을 결합하면 $\mathrm{F}=2md/t^2$이므로 $\mathrm{F}\propto d/t^2$이다. 이 공식을 고전적 방법인 순수한 기하학적 관계로 변형하기 위해서는 시간 t를 선분으로 바꾸어야 한다. 이 문제를 해결하기 위해 Newton은 Kepler의 면적속도 일정의 법칙을 이용하였다. Kepler의 면적속도 일정의 법칙에 의해 $t\propto A$이므로 $\mathrm{F}\propto d/t^2$은 $\mathrm{F}\propto d/A^2$로 고칠 수 있었다. 그런데 $d=\mathrm{QR}$이고, $\mathrm{Q}\rightarrow\mathrm{P}$이면 $A=\frac{1}{2}(\mathrm{SP}\times\mathrm{QT})$이므로 '$\mathrm{F}\propto\mathrm{QR}/(\mathrm{SP}\times\mathrm{QT})^2$ $(\mathrm{Q}\rightarrow\mathrm{P})$'이 된다.

이처럼 Newton이 $\mathrm{F}\propto\mathrm{QR}/(\mathrm{SP}\times\mathrm{QT})^2$ $(\mathrm{Q}\rightarrow\mathrm{P})$라는 결론에 도달한 논법은 힘과 비례한 가속도가 포함된 Galileo의 운동 관계 $d=\frac{1}{2}at^2$에서 출발하여, Kepler의 면적속도 일정의 법칙을 이용하여 시간을 선분화하는 전략을 취하였다. Newton 자신의 말대로 Newton은 Galileo와 Kepler라는 두 거인의 어깨 위에서 증명을 시도하였음을 알 수 있다.

나. $\mathrm{QR}/\mathrm{QT}^2\rightarrow 1/\mathrm{L}$의 유도

Brackenridge(1995)는 3단계로 증명의 골자를 제시하였지만, 본 연구에서는 편의상 '점 Q가 점 P에 가까이 가는 미시적 상황에서의 선분의 변형'을 두드러지게 할 목적으로 4번째 단계로 세분화하여 제시하였다.

5) 힘은 가속도와 정비례하므로 가속도를 곧 힘이라고 간주하여도 무방하다.
6) Prentis, Fulton, Hesse, & Mazzino(2007)에 따르면 Newton의 결정적인 통찰은 아주 짧은 시간 구간에 대해 힘은 크기나 방향 모두에서 상수의 힘으로 간주될 수 있다는 것을 깨달은 것이다. 상수의 힘이 가정될 경우 포물선 궤도가 나타나므로 아주 짧은 시간 구간에 대해 타원 궤도를 포물선 궤도로 간주할 수 있게 된다.



[그림 II-2] Principia 법칙 11 문제6의 그림

1단계 QR 찾기

$\triangle PXV$와 $\triangle PEC$가 닮음이므로 $PE/PC = PX/PV = QR/PV$이다.

즉, $QR = PV(PE/PC)$이다.

$PE = AC$이므로 $QR = PV(AC/PC)$이다.

Apollonius의 원추곡선(conics)의 제 1권의 명제 15[7]로부터 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/DC^2$이다. 즉, $PV = (QV^2/GV)(PC^2/DC^2)$이다.

따라서 $QR = (QV^2/GV)(PC^2/DC^2)(AC/PC)$이다.

2단계 QT^2 찾기

$\triangle EPF$와 $\triangle XQT$가 닮음이므로 $QT/QX = PF/PE$이다.

즉, $QT^2 = QX^2(PF^2/AC^2)$이다.

주어진 타원에 외접하는 평행사변형의 넓이는 일정하므로

$PF/AC = BC/DC$이다.

따라서 $QT^2 = QX^2(BC^2/DC^2)$이다.

3단계 QR/QT^2 찾기

$QR = (QV^2/GV)(PC^2/DC^2)(AC/PC)$이고 $QT^2 = QX^2(BC^2/DC^2)$이므로

$QR/QT^2 = (QV^2/QX^2)(PC/GV)(AC/BC^2)$이다.

통경의 정의에 따라 $L = 2BC^2/AC$이므로

$QR/QT^2 = (QV^2/QX^2)(PC/GV)(2/L)$이다.

---

7) [그림 II-3]에서 PG, DK가 공액지름(conjugate diameters) 쌍이라고 하자. 현 QQ′이 DK와 평행하면 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$이다. (Apollonius의 Conic sections 제 1권의 명제 15).

4단계 미시적 범위에서 선분 변형하기
점Q가 점 P에 가까이 다가감에 따라
QV는 QX로 가까이 다가가고 GV는 2PC로 가까이 다가간다.
따라서 QR/QT^2는 $1/L$로 가까이 다가간다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 Newton의 역제곱 법칙에 대한 증명을 발상의 차원에서 바라보고 이해하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 서보억(2021)의 연구 방법을 참고하여 다음과 같음 방법과 절차로 연구를 진행하였다.

먼저, 역제곱 법칙 유도를 위한 사전 지식을 규정한다. Newton의 Principia가 현대의 독자들에게 난해한 이유는 여러 가지가 있지만, 그 중 Apollonius의 Conic sections에 대한 지식 결핍을 들 수 있다. Newton이 생존하던 당시에는 원추곡선과 관련한 지식들이 학계에서 보편적이었지만, 오늘날 학자들을 포함한 현대 독자들은 이에 대한 지식이 부족한 편이다. 이에 본 연구에서는 먼저 역제곱 법칙 유도를 위해 필요한 지식을 파악하고, 이를 발견적 관점에서 역제곱 법칙 증명을 바라보기 위한 사전지식으로 규정하고자 한다.

다음, Newton의 증명에 대한 발견적 접근이 가능한 하나의 관점을 제안한다. 본 연구에서는 Newton이 그렇게 생각했다는 정황이 없더라도 'Newton이 그렇게 했을지도 모른다는 가정'을 할 것이다. Newton의 역제곱 법칙에 대한 증명을 발상의 차원에서 이해하는 것이 주 목적이지, Newton이 생각한 바를 찾는 것이 주 목적이 아니기 때문에 본 연구에서는 이러한 가정을 할 것이다.

이후, 이러한 가정을 바탕으로 Newton의 역제곱 법칙의 증명을 바라볼 것이며, 그 이점에 대해 논의하고자 한다. 아울러 이 관점을 원 운동에 적용하여 어떤 결과를 유도함으로써, 본 연구에서 제안한 관점의 적용 가능성에 대해 논의하고자 한다. 이는 본 연구에서 제안한 발견적 관점이 갖는 유용성을 두드러지게 하고자 하는 의도를 지닌다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. 역제곱 법칙 유도를 위한 사전지식

역제곱 법칙의 증명을 보면 사전지식은 크게 4가지로 볼 수 있다. 이들은 모두 타원과 관련된 성질이며, 그 중 3가지는 고대의 지식인들이 발견한 것이며 1가지는 Newton이 역제곱 법칙을 증명하는 과정에서 발견한 것이다.

본 절에서는 각각의 사전지식에 대한 증명을 제시하였는데, Sugimoto(2009)의 논문에 나오는 Matsumoto가 제시한 보다 간편한 증명을 참고하였다. Sugimoto(2009)는 초보자들도 Newton의 기하학적 증명을 이해할 수 있도록 Affine 변환을 사용하지 않고 행렬은 원을 타원으로 사상하고, 행렬식은 넓이의 변환을 측정한다는 선형대수의 기본 상식에 기반하여 논지를 전개하였다. 하지만 본 연구에서는 Affine 변환[8]을 통해 Sugimoto(2009)의

---

8) 일차변환에 평행이동을 합성하여 $T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$로 정의할 때의 변환 T를 Affine 변환이라고 한다. Affine 변환은 다음의 성질이 성립한다.
1. Affine 변환은 직선을 직선으로 사상한다.
2. Affine 변환은 평행한 두 직선을 평행한 두 직선으로 사상한다. 따라서 Affine 변환은 평행사변형은 평행사변형으로 사상한다.
3. Affine 변환은 한 점에서 교차하는 n개의 직선을 한 점에서 교차하는 n개의 직선으로 사상한다.

논법을 보완하여 논지를 전개하고자 한다.

사전지식 1

PG, DK가 공액지름(conjugate diameters) 쌍이라고 하자. 현 QQ'이 DK와 평행하면 $PV\times VG/QV^2=PC^2/CD^2$이다. (Apollonius의 Conic sections 제 1권의 명제 15).

(증명)

원 C에서 $\triangle GQV$와 $\triangle Q'PV$가 닮음이므로

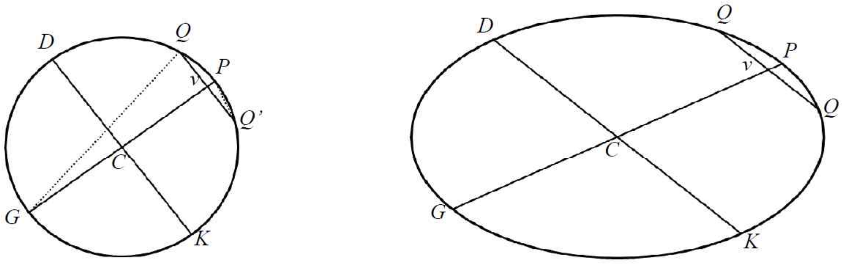
$VG : QV = Q'V : PV$ 이다. 즉, $PV\times VG = QV^2$이다.

만약 QQ'가 DK와 일치하면, $PC^2=CD^2$이다.

따라서 원 C에서 $PV\times VG/QV^2=PC^2/CD^2$이다. ------ (1)

이제 가로를 비율 a만큼, 세로를 비율 b만큼 확대하자.

공액지름 PG, DK는 재조정되는데, 이를 각각 원래 길이의 α배, β배 확대되었다고 가정하자. 그러면 Affine 변환으로 사상된 2개의 평행한 선분의 길이비는 보존된다는 성질에 의해 (1)식의 양변은 $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$배가 되므로 타원에서도 관계 (1)은 성립한다.



[그림 III-1] 사전지식 1의 증명

사전지식 2

주어진 타원에 외접하는 평행사변형의 넓이는 일정하다. (Apollonius의 Conic sections 제 7권의 명제 136).

(증명)

주어진 타원에 대하여 단위원으로 사상되는 Affine 변환이 항상 존재하는데, 이 변환을 A라고 하자.

4. Affine 변환은 임의의 평행한 두 선분을 같은 배율로 확대(축소)시키며, 그 배율은 오직 선분의 방향에 따라 결정된다. 따라서 Affine 변환으로 사상된 2개의 평행한 선분의 길이비는 보존된다.

5. Affine 변환 $T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$은 주어진 영역의 넓이를 $|ad-bc|$배로 만든다. 따라서 Affine 변환으로 사상된 영역의 넓이비는 보존된다.

6. $ad-bc\neq 0$인 경우 Affine 변환의 역변환이 존재하며, 역변환 역시 Affine 변환이다.

7. 주어진 타원에 대하여 단위원으로 사상하는 Affine 변환이 항상 존재한다.

8. Affine 변환은 타원은 타원(원 포함)으로 사상한다.

그러면 A의 역변환 A^{-1}가 존재하며, 이 변환 역시 Affine 변환이다.
이때 타원은 타원으로 사상되고, 평행사변형은 평행사변형으로 사상된다는 Affine 변환의 성질에 따라 단위원과 단위원에 외접하는 평행사변형은 A^{-1}에 의해 각각 타원과 타원에 외접[9]하는 평행사변형으로 사상된다. 이때 단위원에 외접하는 평행사변형은 정사각형이고, 이 정사각형의 한 변의 길이는 2이므로 주어진 원에 외접하는 평행사변형의 넓이는 4로 일정하다. 따라서 Affine 변환으로 사상된 영역의 넓이비가 보존된다는 성질에 의해 주어진 타원에 외접하는 평행사변형의 넓이도 일정해야 한다.

사전지식 3

타원방정식을 $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1\,(a>b)$라고 할 때, 타원의 통경은 $\mathrm{L}=\frac{2b^2}{a}$이다.

(증명)

통경 L은 타원의 초점을 지나면서 단축과 평행한 현이다.

따라서 $x^2=a^2-b^2$, $y=\mathrm{L}/2$을 대입하면 $\mathrm{L}=\frac{2b^2}{a}$을 얻을 수 있다.

사전지식 4[10]

[그림 Ⅱ-2]에서 $\mathrm{PE}=\mathrm{AC}$이다.

(증명) $\mathrm{IH}//\mathrm{RZ}$이므로 반사의 법칙(Apollonius의 Conic sections 제 3권 명제 48)에 의해 $\angle\mathrm{ZPH}=\angle\mathrm{RPS}$이므로 $\triangle\mathrm{PIH}$는 $\angle\mathrm{PIH}=\angle\mathrm{PHI}$인 삼각형이다. 따라서 $\mathrm{PI}=\mathrm{PH}$이다. 또 $\mathrm{IH}//\mathrm{EC}$이므로 중점연결정리에 의하여 $\mathrm{SE}=\mathrm{EI}$이다. 따라서 $\mathrm{PE}=\mathrm{EI}+\mathrm{PI}=\mathrm{SE}+\mathrm{PH}=\frac{1}{2}(2\mathrm{AC})=\mathrm{AC}$이다.

본 연구에서는 이 4가지를 역제곱 법칙을 발견의 관점에서 바라보기 위한 사전지식으로 규정하고, 이 지식을 이미 잘 알고 있다는 가정 하에 역제곱 법칙의 증명을 발견의 관점에서 접근해 보고자 한다.

2. 역제곱 법칙의 증명에 대한 발견적 관점

이번 절에서는 Newton의 증명에 대한 발견적 접근이 가능한 하나의 관점을 제안하고자 한다. 본 연구에서 제안한 관점은 Newton의 관점과는 거리가 멀 수 있다. 그러나 매끄러운 논의를 위해 본 연구에서는 실제 Newton이 그렇게 생각했다는 정황이 없더라도 'Newton이 그렇게 했을지도 모른다는 가정'을 할 것이다. 왜냐하면 발견적 관점은 결국 Newton의 생각을 추측해보는 것이기 때문이다.

Newton은 아마도 $\mathrm{QR}/\mathrm{QT}^2$이 상수의 값으로 수렴한다는 확신으로 먼저 증명에 임했을 것으로 생각된다. 왜냐하면 역제곱 법칙의 증명은 결론을 어느 정도 예측하고 시작한 일이기 때문이다. Edmund Halley, Christopher

9) 주어진 타원을 단위원으로 사상하는 Affine 변환 A는 일대일대응이므로 역변환 A^{-1}은 원의 접선을 타원의 접선으로 사상하게 된다.

10) 이 성질은 원추곡선(Conics)에 대한 Newton 이전의 문헌에서 발견되지 않은 타원의 성질로, Newton이 직접 발견한 성질이다(Brackenridge, 1995).

Wren, Robert Hooke가 역제곱 법칙으로부터 Kepler의 법칙을 유도하는 것에 대해 논의를 할 만큼(Henderson, 2005), 역제곱 법칙은 당시 지식인들이 짐작하고 있던 바였다[11]. 다시 말해, 역제곱 법칙은 Newton의 우연한 발견이 아니었던 것이다. 따라서 Newton은 역제곱 법칙을 확신하고 그 확신에 기반해서 QR/QT^2값이 상수로 수렴한다는 믿음을 갖고 증명에 임했으리라 생각된다.

본 연구는 사전지식1로 전제한 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$을 이미 잘 알고 있다는 입장에서 출발한다. 이 식의 중요한 특징 중 한 가지는 모든 선분이 타원의 중심 C를 지나는 선분 PCG, DCK와 관련이 있다는 점이다. 여기서 DCK는 지름 PCG의 끝점인 P에서의 타원의 접선과 평행하면서 중심 C를 지나는 선분으로 공액지름이다. 또 점 V는 PCG 위의 점이며, QV는 DCK와 평행한 선분이다. 이처럼 사전지식1로 전제한 정리는 타원의 중심 C를 지나는 공액지름 쌍과 관련되어 있다는 특징이 있다.

Newton은 QR/QT^2의 분자와 분모를 공액지름 쌍과 관련한 선분에 관한 식으로 변형하면 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 모종의 관계 때문에 QR/QT^2은 상수의 값이 나올 것이라고 예측하고 증명을 시도한 것이 아닌가 생각된다. 실제로 Apollonius의 Conic sections에 나오는 상당수의 정리는 타원의 공액지름 쌍을 중심으로 기술되어 있음을 알 수 있다. Apollonius의 Conic sections 제 1권의 명제 15, 명제 21, 명제 30, 명제 38, 명제 41 등은 공액지름 쌍을 중심으로 만들어진 정리이다. 이런 점에 비추어 보면 Newton이 [그림 Ⅱ-2]에서 보조선 PG, CD, QXV를 그은 것은 당연한 처사라 볼 수 있을 것이다. 이들은 모두 타원의 중심 C를 지나는 공액지름 쌍을 중심으로 변형하기 위한 보조선이며, 이는 철저하게 Apollonius의 Conic sections의 정리를 이용하겠다는 의도로 풀이된다. 특히 보조선 QXV는 QR을 PV로 변형하여 기존에 알려진 공식을 이용하겠다는 의도로 그어진 것으로 볼 수 있다[12].

이제 보다 자세히 식을 어떻게 의도하는 대로 변형하고, 그 과정에서 나머지 보조선들이 어떻게 그어졌는지 3 단계로 구분하여 살펴보도록 하자.

1단계. QR 변형하기

$QR = PX$은 공액지름 쌍 위의 선분이 아니다. 이것을 지름 위의 선분 PV로 변형하기 위해서는 닮음 도형을 만들 필요가 있다. 마침 $\triangle PXV$와 $\triangle PEC$가 닮음이므로

$$QR = PX = \frac{PV \times PE}{PC}$$

여기서 $PE = AC$ (사전지식 4)이므로 식을 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$QR = \frac{PV \times PE}{PC} = \frac{PV \times AC}{PC}$$

이것은 목표하는 변형에 해당한다. 왜냐하면 PV, PC는 지름 위의 선분이며, AC는 점 P의 위치에 관계없이 상수이기 때문이다.

11) 실제로 Hooke은 자신이 역제곱 법칙을 발견하였으므로 발견에 대한 명예가 자신에게 주어져야 한다고 주장하였는데, Newton은 이에 대해 '누군가는 추측할 수 있고, 모호한 직관을 가질 수 있다. 그러나 명예는 실제로 역제곱 법칙으로 행성이 타원궤도를 돈다는 것을 증명한 사람에게 주어져야 한다'고 말하였다(Densmore, 2003).

12) 보다 정확하게는 $QR = PX$인데, 점 Q가 점 P에 가까이 갈 때 $PX = PV$라고 볼 수는 없다. 아무리 점 Q가 점 P에 가까이 가더라도 $\frac{PX}{PV}$가 1로 수렴하지는 않으므로 QR을 PV로 변형할 수는 없다. 다만 아래의 1단계 'QR 변형하기'를 보면 $\triangle PXV$와 $\triangle PEC$가 닮음이라는 관계를 이용하여 QR을 PV가 포함된 식으로 변형할 수 있을 뿐이다.

2단계. QT^2 변형하기

QT를 공액지름 쌍과 관련한 선분에 관한 식으로 변형하기 위해서는 닮음 도형을 만들 필요가 있다. 직각삼각형 QTX와 닮음인 삼각형을 만들기 위해 수선인 PF를 긋자. 보조선 PF로 인해 닮음인 두 직각삼각형 $\triangle QTX$와 $\triangle PFE$이 등장하게 되므로 QT의 다음과 같은 변형이 가능하게 된다.

$$QT^2 = \frac{QX^2 \times PF^2}{PE^2}$$

여기서 $PE = AC$ (상수)이므로 이제 변형해야 할 것은 QX, PF이다.

그런데 QX의 경우 점 Q가 점 P로 가까이 다가가는 미시적 범위에서 $QX = QV$[13]이므로 공액지름 쌍과 관련한 원하는 선분(PV, VG, QV, PC, CD)이 된다. 따라서 변형해야 할 것은 PF뿐이다. 공교롭게도 PF는 공액지름에 대한 수선이므로 공액지름의 반인 DC로 변형 가능하다. 즉, $PF/AC = BC/DC$ (사전지식 2)이므로 $PF = \frac{AC \times BC}{CD}$이다. 여기서 AC, BC는 상수이고, CD는 공액지름의 절반이므로 원하는 방향으로의 변형이 이루어졌음을 알 수 있다. 따라서

$$QT^2 = \frac{QX^2 \times PF^2}{PE^2} = \frac{QV^2 \times PF^2}{AC^2} = \frac{QV^2 \times \frac{AC^2 \times BC^2}{CD^2}}{AC^2} = \frac{QV^2 \times BC^2}{CD^2}$$ 이다.

이것은 목표하는 변형에 해당한다. QV, CD는 공액지름 쌍과 관련된 원하는 선분이며, BC는 점 P나 점 Q의 위치에 관계없이 상수이기 때문이다.

이처럼 QT는 QX, PF로 변형하고, 다음 QX는 QV로 PF는 CD로 변형하는 두 단계를 거침으로써 공액지름 쌍과 관련한 선분으로 변형할 수 있었다.

3단계 QR/QT^2 구하기

1단계와 2단계에서 변형한 식을 QR/QT^2에 대입하여 간단하게 하면 다음과 같다.

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PV \times AC}{PC} \Big/ \frac{QV^2 \times BC^2}{CD^2} = \frac{PV \times AC \times CD^2}{PC \times QV^2 \times BC^2}$$

이제 분모와 분자가 모두 공액지름 쌍과 관련된 원하는 선분(PV, VG, QV, PC, CD) 혹은 상수인 선분으로 변형되었기 때문에 최초에 이용하고자 하는 식을 Apollonius의 conic sections에서 찾아야 할 차례가 되었다. 마침 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$라는 정리가 있으므로 이 식을 이용하였을 때, QR/QT^2가 정말 상수가 되는지 확인해 보자.

$PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$이므로 즉, $\frac{PV \times CD^2}{PC \times QV^2} = \frac{PC}{VG}$이다.

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PV \times AC \times CD^2}{PC \times QV^2 \times BC^2} = \frac{PV \times CD^2}{PC \times QV^2} \times \frac{AC}{BC^2} = \frac{PC}{VG} \times \frac{AC}{BC^2}$$

이제 점 Q가 점 P로 가까이 다가가는 미시적 범위에서의 선분의 변형 가능성이 확대되는 이점을 이용해 식을 보다 간단히 해보자.

미시적 범위에서 $VG = 2PC$이므로 $PC/VG = 1/2$가 된다.

---

13) Newton의 위대함은 미시적 범위에서의 선분의 변형 가능성이 확대됨을 이용하여 식을 원하는 방향으로 보다 자유롭고 간단하게 변형했다는 점이다. 이는 곧 사라지는 양의 비의 극한으로 일컬어지는 기하학적 극한을 의미한다.

따라서 $\frac{QR}{QT^2}=\frac{PC}{VG}\times\frac{AC}{BC^2}=\frac{AC}{2BC^2}=\frac{1}{L}$이 된다.

3. 발견적 관점의 이점

발견적 관점의 이점은 다음과 같다.

첫째, QR/QT^2의 변형의 방향성을 얻을 수 있다[14]. 어느 방향으로 변형을 시도해야 하는지 모를 때 식의 변형이 막연한 것이다. 본 연구에서는 Newton의 Principia에서 난해하기로 유명한 'QR/QT^2이 $1/L$로 수렴'한다는 증명에 대한 하나의 방향을 제시하였다. 그 방향은 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 관계를 이용할 수 있도록 QR/QT^2의 분자와 분모를 타원의 공액지름 쌍과 관련된 선분 PV, VG, QV, PC, CD에 관한 식으로 변형하는 것이다. 물론 이 변형은 QR/QT^2의 분자와 분모를 PV, VG, QV, PC, CD에 관한 식으로 변형하여 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 관계를 이용하면 QR/QT^2이 결국 상수로 변형될 것이라는 직관적 믿음에 기초한 것이다.

둘째, 식의 변형을 마무리하는 시점과 변형을 지속해야 하는 시점을 정확하게 구분할 수 있게 한다. QR/QT^2의 분모 분자를 변형할 때, PV, VG, QV, PC, CD 혹은 AC, BC와 같은 상수의 값으로 나타나면 변형이 완료되는 것이다. 만약 그 외의 변수가 새롭게 등장하면 지속적으로 식의 변형을 시도해야 한다. 이처럼 완료 시점을 알려줄 수 있기 때문에 식의 변형의 목적지가 분명해진다.

셋째, Newton이 증명에서 사용한 보조선이 어떤 이유로 그어졌는지를 이해할 수 있게 한다. 앞에서 언급한 바와 같이 보조선 PCG(지름, diameter), DCK(공액지름, conjugate diameter), QXV(공액지름과 평행한 선분의 절반)은 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 관계 $PV\times VG/QV^2=PC^2/CD^2$을 이용하기 위한 의도로 그어진 것이다.[15] 보조선 IH는 PE가 AC와 길이가 같음을 보임으로써 상수의 값을 갖는다는 것을 보이는 의도로 그어진 것이다. 보조선 PF는 닮음인 두 삼각형 $\triangle QTX$와 $\triangle PFE$를 생성하여 QT를 원하는 선분에 관한 식으로 변형하기 위한 의도로 그어진 것이다. 이처럼 본 연구에서 제시한 관점으로 인해 하나의 방향이 주어지기 때문에 그 방향으로의 변형을 위한 보조선의 도입 맥락이 자연스럽게 드러나게 된다.

넷째, Newton의 증명을 독자 스스로 재현할 힘을 갖게 할 수 있다. 증명의 방향이 주어지기 때문에 본 연구에서 제안한 4가지 사전지식이라는 도구가 있을 때, 의도한 방향대로 증명을 진행하면 'QR/QT^2이 $1/L$로 수렴'이라는 결과를 얻는 것이 가능하다. 물론 이 과정에서 어떤 도구를 가져와야 하는지에 대한 숙고가 필요하지만, 몇 차례의 시행착오를 거듭하다보면 독자 스스로 Newton의 증명을 재현하는 것이 가능하다.

4. 원 운동에서 발견적 관점의 적용

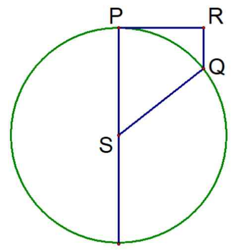
이번 절에서는 본 연구에서 제시한 발견적 관점을 속력이 일정한 원 운동의 구심력을 구하는 문제에 적용해 보고자 한다. 행성 P가 원의 중심에 위치한 별 S의 구심력을 받고 있고, 일정한 속력 v로 원운동을 하고 있다고 가정하자. 만약 구심력이 없다면 관성의 법칙에 의해 행성 P는 주어진 시간 동안 점 R로 이동했을 것이다.

---

14) 본 연구에서 제시하는 발견적 관점은 비단 타원에 국한된 것이 아니다. 포물선 및 쌍곡선에서도 이러한 관점을 적용하면 역제곱 법칙 증명에서 식의 변형 방향성을 얻을 수 있다.

15) 물론 Newton이 이 관계식을 처음부터 이용하려고 한 것은 아닐 것이다. 다만 [그림 Ⅱ-2]에서 QR/QT^2의 분모 분자를 공액지름 쌍과 관련한 선분으로 변형하면 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 정리를 이용할 수 있을 것이라는 직관에 기초한 변형 과정 속에서 $PV\times VG/QV^2=PC^2/CD^2$을 이용해야겠다는 발견에 도달했을 것이다.

그러나 별 S의 구심력을 받고 있으므로 행성 P는 주어진 시간 동안 점 Q로 이동했다. 즉, 구심력으로 주어진 시간 동안 RQ만큼 낙하가 이루어졌다.



[그림 III-2] 속력이 일정한 원 운동

힘은 곧 가속도로 보아도 무방하므로, Newton처럼 가속도와 관련된 식인 Galileo의 운동 관계 $\mathrm{QR}=\frac{1}{2}at^2$에서 출발하자. 그러면 $a\propto\frac{\mathrm{QR}}{t^2}$이 된다. 이제 역학을 Euclid 기하의 범주로 가져오기 위하여 Newton처럼 시간 t를 선분화하도록 하자. 타원 운동에서 Newton은 면적속도가 일정함을 이용하여 시간을 선분화하였다. 여기서는 속력이 일정하므로 이를 이용하여 시간을 선분화하도록 하자.16) $t=\frac{\widehat{\mathrm{PQ}}}{v}$이므로 $a\propto\frac{\mathrm{QR}\cdot \mathrm{v}^2}{\widehat{\mathrm{PQ}}^2}$이 된다.17) 아주 작은 시간을 가정하면 $\widehat{\mathrm{PQ}}=\mathrm{PQ}$이므로 $a\propto\frac{\mathrm{QR}\cdot v^2}{\mathrm{PQ}^2}$가 된다.

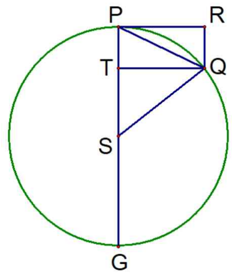
이제 $\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}^2}$의 극한값을 구하기 위하여 본 연구에서 제시한 발견적 관점을 적용해 보도록 하자. 타원 운동에서 $\mathrm{QR}/\mathrm{QT}^2$의 분모와 분자를 타원의 공액지름 쌍과 관련한 선분으로 나타내면 결국 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 이들의 관계에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값을 얻을 수 있을 것이라는 믿음이 증명의 출발점이었다. 마찬가지로 원 운동에서 $\mathrm{QR}/\mathrm{PQ}^2$의 분모와 분자를 원의 지름과 관련한 선분으로 나타내면 결국 Euclid 기하에 등장하는 이들의 관계에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값을 얻을 수 있을 것이라는 믿음이 증명의 출발점이 될 것이다.

이러한 믿음 하에 $\mathrm{QR}/\mathrm{PQ}^2$의 분모와 분자를 원의 지름과 관련한 선분으로 나타내도록 하자. 이를 위해 점 Q에서 반지름 PS위에 수선을 내리고, 그 수선의 발을 T라고 하자. 그러면 $\mathrm{QR}=\mathrm{PT}$이므로 $\mathrm{QR}/\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PT}/\mathrm{PQ}^2$이 된다. PT, PQ는 모두 원의 지름과 관련한 선분이므로 변형이 종결된다.

---

16) Newton이 타원 운동에서 속력을 이용하지 않은 것은 속력이 일정하지 않기 때문이다. 대신 그는 일정한 면적속력을 이용하여 시간을 선분화함으로써 면적속력을 상수 취급할 수 있었고, 선분의 변형에만 집중할 수 있었던 것이다.

17) 물론 타원에서와 마찬가지로 면적속도 역시 일정하기 때문에 시간 t=(부채꼴 SPQ 면적)/$\dot{A}$ (여기서 $\dot{A}$은 면적속도)라 두고 풀어도 된다. 아주 작은 시간을 가정하면 (부채꼴 SPQ 면적)=(삼각형 SPQ 면적)=$(1/2)\cdot\mathrm{PS}\cdot\mathrm{QT}$가 되므로 시간의 선분화가 가능하다.



[그림 Ⅲ-3] $\mathrm{QR}/\mathrm{PQ}^2$의 분모와 분자를 원의 지름과 관련한 선분으로 변형하기 위해 그은 보조선 QT

이제 $\mathrm{PT}/\mathrm{PQ}^2$과 관련한 Euclid 기하의 법칙을 살펴보도록 하자. $\triangle \mathrm{PQT}$와 $\triangle \mathrm{PGQ}$가 닮음이므로 $\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PT} \cdot \mathrm{PG}$이다. 따라서 $\mathrm{PT}/\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{PT}/(\mathrm{PT} \cdot \mathrm{PG}) = 1/\mathrm{PG}$이다. 여기서 PG는 지름인 상수이므로 원하는 결과임을 알 수 있다. 앞에서 $a \propto \frac{\mathrm{QR} \cdot v^2}{\mathrm{PQ}^2} = \frac{\mathrm{PT} \cdot v^2}{\mathrm{PQ}^2}$라고 했으므로 $a \propto \frac{v^2}{\mathrm{PG}}$이고, 결국 구심력 $\propto \frac{v^2}{\mathrm{PG}}$이 된다.[18)]

이처럼 원 운동에서도 Newton의 방법으로 구심력을 구하는 것이 가능하다. 힘이라고 보아도 무방한 가속도가 포함된 식인 Galileo의 운동 관계에서 출발하여, 역학을 Euclid 기하의 범주로 가져오기 위하여 시간을 선분화한다. 이후 선분의 비의 극한을 구하기 위하여 낙하거리 QR, 시간을 선분화하는 과정에서 얻은 선분 PQ를 원의 지름과 관련한 선분으로 변형한다. 이는 원의 지름과 관련한 선분으로 변형하면 결국 Euclid 기하에 등장하는 이들 사이의 관계에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값으로 변형 가능하다는 믿음에 기초한다.

---

18) 원운동에서도 면적속도는 일정하므로 시간을 면적속도를 이용하여 선분화하여 구심력을 구하는 것 역시 가능하다. 이 경우 $a \propto \frac{\mathrm{QR}}{t^2} = \frac{\mathrm{QR}}{\left(\frac{\frac{1}{2}\mathrm{PS} \cdot \mathrm{QT}}{\dot{A}}\right)^2} \propto \frac{\mathrm{QR} \cdot \dot{A}^2}{\mathrm{PS}^2 \cdot \mathrm{QT}^2}$이다. 여기서 분모와 분자를 원의 지름과 관련한 선분으로 나타내면 결국 Euclid 기하에 등장하는 이들의 관계에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값을 얻을 수 있을 것이라는 믿음에 기초하면 $\mathrm{QR} = \mathrm{PT}$, $\mathrm{QT}^2 = \mathrm{PT} \cdot \mathrm{TG}$으로 변형을 생각할 수 있다. 따라서 $a \propto \frac{\mathrm{PT} \cdot \dot{A}^2}{\mathrm{PS}^2 \cdot \mathrm{PT} \cdot \mathrm{TG}} = \frac{\dot{A}^2}{\mathrm{PS}^2 \cdot \mathrm{TG}}$인데, 아주 작은 시간을 가정하면 $\mathrm{TG} = \mathrm{PG}$이므로 $a \propto \frac{\dot{A}^2}{\mathrm{PS}^3}$이 된다. 따라서 구심력 $\propto \frac{\dot{A}^2}{\mathrm{PS}^3}$이 된다. 이와 같이 결론지어도 되지만, 면적 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$(r은 반지름, θ는 부채꼴의 중심각)이므로 $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2 w$($w$는 각속도)이므로 구심력 $\propto \frac{\dot{A}^2}{\mathrm{PS}^3} \propto \frac{r^4 w^2}{r^3} = rw^2$으로 결론내릴 수 있다.

즉, 원운동에서 구심력 $\propto \frac{v^2}{\mathrm{PG}} \propto \frac{v^2}{r}$, 구심력 $\propto \frac{\dot{A}^2}{\mathrm{PS}^3} \propto \frac{\dot{A}^2}{r^3}$, 구심력 $\propto rw^2$이다.

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구는 Principia의 역제곱 법칙의 증명 중 난해하기로 유명한 'QT^2/QR가 통경으로 수렴'하는 것을 보여주는 Newton의 기하학적 증명을 발견적 관점에서 바라보고 접근할 수는 없는가하는 의문에서 시작되었다.

역제곱 법칙의 핵심 중 하나인 이 증명에 대하여 발견적으로 바라보는 관점을 고안하기 위해, 역제곱 법칙 증명을 조망하고 역제곱 법칙 증명에 필요한 사전지식 4가지를 추출하였다.

4가지 사전지식을 이미 잘 아는 것으로 전제한 상태에서 본 연구는 하나의 발견적 관점을 제안하였다. 그것은 QR/QT^2의 분모와 분자를 타원의 공액지름 쌍과 관련한 선분으로 나타내면 결국 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 이들 사이의 관계에 의해 모종의 원하는 값인 어떤 상수의 값을 얻을 수 있을 것이라는 믿음이 증명의 출발점이라는 관점이다. 이 믿음에 기초하여 QR, QT^2을 각각 PV, VG, QV, PC, CD에 관한 식으로 변형하였으며, 변형 후에는 Apollonius의 Conic sections에 등장하는 관계 $PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$을 이용하여 식을 간단히 함으로써 원하는 결과를 얻을 수 있음을 보여주었다.

본 연구에서 제안한 발견적 관점은 QR/QT^2의 변형의 방향성을 제시하고, 식의 변형을 마무리하는 시점과 변형을 지속해야 하는 시점을 정확하게 구분할 수 있게 해준다. 뿐만 아니라 Newton이 증명에서 사용한 보조선이 어떤 의도로 그어졌는지를 이해할 수 있게 하고, Newton의 증명을 독자 스스로 재현할 힘을 갖게 하도록 도울 수 있다.

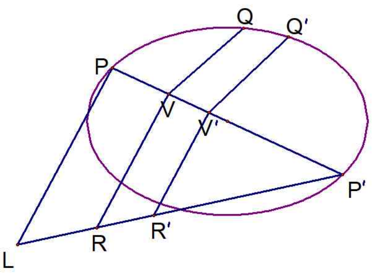
본 연구의 문제점 중 하나는 출발점으로 간주되는 직관적 믿음이 어떻게 생겼는가에 대하여 설명하지 못하고 이를 단순히 직관으로 보는 제한점이 있다는 것이다. 직관적 믿음을 가정하였을 때 Newton의 증명을 발견적으로 접근하는 것이 가능해지지만, 그것을 단순히 직관으로 치부할 뿐 그 이상의 근원적인 방법을 제안하지는 못하였다. 더군다나 본 연구에서 가정하는 직관적 믿음이 Newton의 진정한 직관과 거리가 멀 수도 있다.

그럼에도 불구하고 Apollonius의 Conic sections을 보면 이러한 직관이 전혀 근거 없는 것으로 여겨지지는 않는다. 일단 역제곱 법칙을 증명하기 위해서는 [그림 Ⅱ-1]과 같이 타원을 그려야 하며 타원 궤도 위에 행성으로 간주할 수 있는 점 P를 잡아야 한다. 또한 기하학적 극한을 사용하기 위하여 점 P가 이동한 점 Q를 잡을 필요가 있다. 그러니까 [그림 Ⅱ-1]에서 타원, 점 P, 점 Q는 역제곱 법칙을 기하학적으로 증명하기 위한 기본 요소라 볼 수 있다. 이 상황에서 [그림 Ⅱ-2]와 같이 타원의 지름 PG와 '공액지름 DK와 평행하고 지름에 의해 반으로 쪼개지는 현의 반 QV'를 긋는 것도 자연스러워 보인다. 왜냐하면 Apollonius의 Conic sections의 명제들은 지름과 '공액지름과 평행하면서 지름에 의해 반으로 쪼개지는 현의 반'을 기반으로 한 정리가 적지 않기 때문이다. 예컨대, Apollonius의 Conic sections의 제 1권 명제 5, 명제 8, 명제 14, 명제 15는 지름과 '공액지름과 평행하면서 지름에 의해 반으로 쪼개지는 현의 반'을 기반으로 한 정리들이다. 특히 Apollonius의 Conic sections의 제 1권 명제 8은 이들 사이의 관계를 다룬 것으로 본 연구에서 제안한 직관이 전혀 근거 없는 것은 아니라는 생각을 갖게 한다. 명제 8은 '$\dfrac{PV \cdot P'V}{QV^2}$의 값이 상수'라는 것이므로 상수임을 입증해야 하는 QR/QT^2의 값과 '상수라는 결론적 유사성'을 갖기 때문이다. 따라서 'QR/QT^2의 분자와 분모를 Apollonius의 Conic sections의 제 1권 명제 8 혹은 명제 15에 제시된 변수의 식으로 변형하면 명제 8 혹은 명제 15를 이용할 수 있게 되고, 결국 QR/QT^2이 상수가 됨을 증명할 수도 있겠다'는 생각이 직관적으로 가능할 수 있을 것이다.

Apollonius의 Conic sections의 제 1권 명제 8(Heath, 1986)

쌍곡선, 타원 또는 원에서 QV가 지름 PP'에 대한 임의의 '지름에 의해 반으로 쪼개지는 현의 반'이라면 다음의 관계가 성립한다.

$$QV^2 \propto PV \cdot P'V$$



[그림 Ⅳ-1] Apollonius의 Conic sections의 제 1권 명제 8의 그림(Heath, 1986)

본 연구에서 제안한 직관이 결국에는 Newton의 증명을 발견적으로 바라보는 안목을 제공하는데 도움이 될 수 있다는 점에서 본 연구의 의의를 찾을 수 있다. 아무리 많은 지식을 갖추어도 직관을 갖지 못하면 증명을 시도하지 못하듯, 직관이 갖추어진 상태에서 주어진 증명을 바라보아야 증명에 대한 독자 나름대로의 스키마를 형성할 수 있을 것이다. 이처럼 본 연구는 이렇게 하면 문제가 해결될지도 모른다는 직관적 믿음이 문제 해결자가 갖춘 지식보다 더 중요한 문제 해결의 요인임과 동시에 문제의 해법을 바라보는 안목을 높여주는 요인임을 암암리에 드러내고 있다.

또 기하 교육과 물리 교육의 통합적 접근이라는 측면에서 본 연구의 교육적 의의를 찾을 수 있다. 현재 행성 운동에 대한 물리 교과의 내용 전개는 Newton의 기하학적 접근보다는 미적분에 기초한 해석적 접근 방식을 택하고 있다. 이는 Newton 사후 18세기에 Euler, Lagrange, Laplace 등의 학자들에 의해 진행된 역학의 해석화로 인한 영향으로 볼 수 있다(오가미 마사시, 와다 스미오, 2003). 마찬가지로 현재 기하 교육의 콘텐츠는 행성 운동처럼 실제적인 문제 상황과 연결되어 있지 못하다. 본 연구에서 다룬 Newton의 증명은 기하학적 방법으로 물리 교과의 실제적인 문제 상황 맥락을 해결한다는 측면에서 기하 교육과 물리 교육의 통합이라는 교육적 의의를 지니며, 본 연구에서는 이를 발견적 측면에서 바라보는 안목을 제공하므로 기하 교육과 물리 교육 간의 더욱 강한 연결 고리를 형성하는데 기여할 수 있을 것이다.

주어진 증명을 보다 잘 이해하기 위해서는 읽고 해독하는 차원을 넘어 주어진 증명을 실행할 수 있는 힘을 갖추어야 한다는 점에서 본 연구에서 제안한 발견적 관점이 난해하기로 유명한 Newton의 증명을 실행의 차원에서 이해할 수 있는 나름의 단초가 될 수 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

서보억 (2021). 구체적 수학탐구활동 사례를 통한 학교현장 수학 탐구방법 탐색. 수학교육논문집, 35(2), 193-212.

Suh, Boeuk (2021). A study on mathematical investigation activity through using one mathematical fact. *Communications of Mathematical Education, 35*(2), 193-212.

오가미 마사시, 와다 스미오 (2003). 수학으로 풀어보는 물리의 법칙. 임정 역(2005). 서울: 이지북.

Ogami Masasi, & Wada Smio (2003). *Laws of physics solved with mathematics*. translated by Lim Jeong (2005). Seoul: Easybook.

Brackenridge, J. B. (1995) *The key to Newton's dynamics*. Berkeley: University of Califonia.

Densmore, D. (2003). *Newton's Principia: The central argument, translation, notes and expanded proofs* (translation and diagrams by Donahue, W. H.). Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press.

Fleuriot, J. D., & Paulson, L. (1998). A combination of nonstandard analysis and geometry theorem proving, with application to Newton's principia. *Proceedings of the 15th International Conference on the Automated Deduction, LNAI 1421*, 3-16. Springer.

Heath, T. L. (1986). Apollonius of perga: Treatise on conic sections. Cambridge: Cambridge University Press.

Henderson, H. (2005). Of orbits, conics, and grammar. *The Physics Teacher, 43*(2), 84-87.

Gandt, F. De (1995). *Force and geometry in Newton's principia*. New Jersey: Princeton University Press.

Guicciardini, Niccolò (1999). *Reading the principia*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pask, C. (2019). *Magnificent principia: exploring Isaac Newton's masterpiece*. New York: Prometheus Books.

Prentis, J., Fulton, B., Hesse, C., & Mazzino, L. (2007). Elliptical orbit ⇒ $1/r^2$ force. *The physics teacher, 45*(1), 20-25.

Sugimoto, T. (2009). How to present the heart of Newton's Principia to the layperson: a primer on the conic sections without apollonius of perga. *Symmetry: Culture and Science, 20*(1-4), 113-144.

Understanding the Proof of Inverse Square Law of Newton's Principia from a Heuristic Point of View

Kang, Jeong Gi
Jinyeong Middle School, Gimhae 50862, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

The study provided a perspective on which readers can see Newton's proof heuristically in order to overcome the difficulty of proof showing 'QT^2/QR converges to the latus rectum of ellipse' in the proof of the inverse square law of Newton's Principia. The heuristic perspective is as follows: The starting point of the proof is the belief that if we transform the denominators and numerators of QT^2/QR into expression with respect to segments related to diameter and conjugate diameter, we may obtain some constant, the desired value, by their relationship $PV \times VG/QV^2 = PC^2/CD^2$ in Apollonius' Conic sections. The heuristic perspective proposed in this study is meaningful because it can help readers understand Newton's proof more easily by presenting the direction of transformation of QT^2/QR.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B60
* Key Words : principia, inverse square law, heuristic perspective