韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.1.139
제 36집 제 1호, 2022. 3. 139-170

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 1, Mar. 2022. 139-170

러시아의 수학교과서에 제시된 수준별 교수내용의 분석

한 인 기 (경상대학교, 교수)

수준별 수학교육과 관련하여 러시아는 우리나라보다 오랜 연구와 실천의 경험을 가지고 있다. 현재 러시아에서 사용중인 10-11학년 수학과 교육과정은 수준별 교육과정으로 기본수준과 심화수준으로 구성되어 있으며, 기본수준과 심화수준은 다루는 최소필수내용, 학생들에게 요구되는 수준 등에서 차이를 보인다. 그리고 10-11학년의 수학교과서도 수준별 교과서이다. 본 연구에서는 러시아의 10학년 '대수와 해석의 기초'의 교과서들 중에서 같은 저자 그룹에 의해 집필된 기본수준 교과서, 심화수준 교과서를 분석 대상으로 삼았다. 심화수준 교과서에만 있는 '실수', '복소수' 단원의 내용을 조사하여 심화의 성격으로 추가된 주요 학습 내용과 교과서 기술의 특징을 분석하였다. 그리고 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에 모두 포함된 단원인 '함수', '삼각함수', '삼각방정식', '삼각함수 식들의 변환', '도함수'에 대해서는 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용을 비교, 분석하였고, 두 수준의 교과서에 제시된 정의와 정리의 서술상 특징도 비교, 분석하였다.

Ⅰ. 서론

처음으로 우리나라의 교육과정의 편성·운영지침에 수준별 교육과정을 편성, 운영한다고 규정한 것이 제7차 교육과정이다. 교육부(1998, p.12)는 국민 공통 기본 교육과정에서 '수학 교과는 1학년부터 10학년까지 10단계, 영어 교과는 7학년부터 10학년까지 4단계를 두고, 각 단계별로 학기를 단위로 하는 2개의 하위 단계를 설정하여 단계형 수준별 교육과정을 운영한다'고 하였고, 11-12학년에서는 선택 중심 교육과정을 통해 수준별 교육과정을 편성·운영한다는 교육과정 기본지침을 고시하였다.

그 이후로 2007개정 교육과정, 2009개정 교육과정을 거쳐 지금의 2015개정 교육과정에 이르게 되었다. 2015개정 수학과 교육과정에서도 수준별 교육은 지속적으로 강조되고 있다. 특히, 2015개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)의 교수·학습 방법에는 개인차를 고려한 수준별 수업의 운영을 위한 유의사항을 구체적으로 명시하여, 수학 교실에서 수준별 수업이 효율적으로 구현될 수 있는 방안을 제시하였다. 수준별 수학교육이 학생들의 개인차를 고려하여 모든 학생들이 교육과정에서 의도하는 최소필수수준에 도달할 수 있는 교수·학습의 기회를 제공하며, 학생들의 흥미, 능력, 진로 등을 고려한 수학교육에 관련된다는 것을 감안하면, 수학과 교육과정에서 수준별 교육의 강조와 그 실현을 위한 노력은 의미있다고 할 수 있다.

한편, 수준별 수학교육에 대한 국내의 수학교육학 연구도 다양하게 진행되어 왔다. 최승현, 이대현(2005)은 수학교과의 단계형, 수준별 교육과정의 운영 과정에서 발생하는 문제점을 분석하여 개선 방안을 제안하였고, 황혜정(2006)은 수준별 수업을 위해 개발된 수학 교과의 교수·학습 자료를 소개하고 그 활용 방안을 제안하였다. 그리고 교육인적자원부(2007)는 수학과 수준별 학습에 사용될 수 있는 구체적인 보조 자료들의 개발, 활용 방법을 구체적으로 제시하였다.

---

* 접수일(2022년 1월 17일), 심사(수정)일(2022년 2월 24일), 게재확정일(2022년 2월 25일)
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 수준별 교육과정, 수준별 교육, 수학교과서, 기본수준, 심화수준
* 이 연구는 2021년도 경상국립대학교 연구년제연구교수 연구지원비에 의하여 수행되었음.

한인기(2008)는 수준별 수학교육에 대한 러시아의 이론적인, 실제적인 연구들을 소개하면서 관련 개념들을 체계적으로 정리하였다. 그리고 도종훈, 고정화(2008)는 학생들의 수준 진단을 위한 수학 교과의 대표문항에 관련된 교육적 논의를 제시하였고, 한인기, 강나경(2014)은 수학 문제해결 과정에서 나타나는 특징을 중심으로 학생들의 문제해결을 6수준으로 나누어, 각 수준별로 전형적인 징표들을 제시하였다. 특히 김선희(2015)는 20여년에 걸쳐 수행된 수준별 교육에 관련된 다양한 수학교육학 연구들의 메타분석을 통해 수준별 수업이 학생들의 인지적 영역과 정의적 영역에서 효과가 있음을 확인하였다.

이러한 연구들을 통해 수학 교과의 수준별 교육과정 운영의 개선 방향을 모색할 수 있었으며, 수준별 교육의 체계적 구현을 위한 이론적인, 실제적인 기초가 만들어졌다. 그리고 이를 바탕으로 수학 수준별 교육에 관련된 개념들의 정교화 및 체계화, 수학 수준별 교육과정의 개선, 수학 수준별 교수·학습 자료의 개발, 학생들의 수학적 활동 수준 등의 문제들이 폭넓게 연구되고 있다.

그러나 우리나라에서는 수학 교과의 다양한 형태의 수준별 교육과정 모형이나 수준별 수학교과서에 대한 논의나 개발은 아직은 미흡한 실정이다. 그 결과, 수학 교사들은 수준별 교육을 위해 수학교과서와 함께 별도로 보급된 수준별 교육을 위한 보조 자료들을 수정・보완하여 사용하거나 개별적으로 개발하여 사용하는 경우가 많다. 이러한 경우에는 수학교실에서 일정한 높은 수준의 수준별 교육의 실현을 보장하기 어려울 수 있으며, 수학교실에서 사용되는 자료들이나 관련된 경험들이 체계적으로 정리되고 축적되기가 어려울 수 있다.

본 연구에서는 수준별 수학교과서에 관련된 다양한 기초 자료들을 축적하기 위해, 러시아의 중등학교에서 사용 중인 수준별 수학교과서(기본수준 수학교과서, 심화수준 수학교과서)를 분석할 것이다. 이를 위해 러시아의 10-11학년 수준별 교육과정을 조사하고, 수준별 교과서의 주요 학습 내용을 분석하고, 기본수준 수학교과서와 심화수준 수학교과서를 비교하여 각 수준별 교과서에 기술된 수준별 교수 내용의 특징을 분석할 것이다. 이를 통해, 수학 교과의 수준별 교과서의 주요 학습 내용, 각 수준별 교과서의 차이점, 수준별 교과서의 구성을 위한 구체적인 전략 등에 대한 다양한 정보를 축적할 수 있을 것으로 기대된다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 러시아의 수학과 교육과정에서 기본수준과 심화수준

현재 러시아의 학교에서 배우는 수학교육의 내용은 2004년에 러시아 연방 교육부(Ministerstvo Prosvesheniya Rossiiskoi Federatsii, MPRF)에서 고시한 교육과정에 의한 것이다. 우리나라가 주기적으로 교육과정을 개정하지만, 러시아는 오랫동안 교육과정을 개정하지 않았다고 할 수 있을 것이다.

MPRF의 교육과정은 크게 세 단계로 구성되는데, 보통교육의 첫 단계인 초보보통교육은 1학년에서 4학년까지를 말하며, 두 번째 단계는 기본보통교육으로 5학년에서 9학년까지를, 세 번째 단계는 중등보통교육으로 10-11학년을 말한다. 초보보통교육과 기본보통교육에서는 한 가지 수준의 수학과 교육과정이 제시되며, 중등보통교육은 기본수준과 심화수준의 두 가지 수준의 수학과 교과과정이 제시된다. 이때, 교육과정에 제시된 내용은 학년별로 나열되는 것이 아니라, 우리나라의 학년군제와 비슷하게 각 단계(초보보통교육, 기본보통교육, 중등보통교육)별로 학습내용이 통합적으로 나열된다.

MPRF의 수학과 교육과정은 수학과의 목표, 최소필수내용, 해당 단계를 마치는 학생들에게 요구되는 준비 수준으로 구성된다. 우리나라처럼 구체적인 성취기준이나 교수-학습이나 평가상의 유의점 등은 기술되지 않으며, 교육과정의 분량도 우리나라에 비해 적다(예를 들어, 기본보통교육 단계의 수학과 교육과정 전체 내용이 14쪽

분량임). 이때, 최소필수내용은 우리나라 수학과 교육과정의 학습요소와 유사한 형태로 기술되지만, 우리나라의 학습요소는 교점, 교선, 접선 등과 같이 개념만 기술되지만, MPRF의 최소필수내용에는 방정식의 풀이, 속도 구하기 등과 같은 학생들의 행동목표에 관련된 내용도 포함된다.

이제, 중등보통교육 단계의 수학과 최소필수내용에 대해서 자세히 살펴보자. 중등보통교육 단계에서 수학교과는 기본수준과 심화수준으로 나뉘어져 있으며, 기본수준은 '대수', '함수', '수학적 해석의 기초', '방정식과 부등식', '조합·통계·확률이론의 기초', '기하'의 6개 영역으로 구성되며, 심화수준은 '수식과 문자식', '삼각함수', '함수', '수학적 해석의 기초', '방정식과 부등식', '조합·통계·확률이론의 기초', '기하'의 7개 영역으로 구성되어 있다. 교육과정의 영역 구성에서 기본수준과 심화수준의 차이는 기본수준의 '대수' 영역이 심화수준에서는 '수식과 문자식', '삼각함수' 영역으로 세분화 되었고, 나머지 영역의 명칭은 모두 같다.

여기서는 '대수', '수식과 문자식', '삼각함수', '함수', '수학적 해석의 기초', '방정식과 부등식', '확률·통계·조합' 영역의 최소필수내용을 중심으로 기본수준과 심화수준을 비교하자.

MPRF(2004)에 제시된 기본수준의 '대수' 영역 최소필수내용을 정리하면 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1> '대수' 영역 기본수준의 최소필수내용

수준 / 영역	기본수준의 최소필수내용
대수	제곱근과 거듭제곱. $n>1$인 n제곱근과 그 성질. 지수가 유리수인 거듭제곱과 그 성질. *지수가 실수인 거듭제곱 개념*[1]. 지수가 실수인 거듭제곱의 성질. 로그. 수의 로그. *기본적인 로그 항등식*. 곱, 몫, 거듭제곱의 로그. *밑의 변환*. 상용로그와 자연로그. 수 e. 산술연산, 거듭제곱, 로그 연산을 포함하는 평이한 식의 변환. 삼각함수의 기초. 임의의 각에 대한 사인, 코사인, 탄젠트, 코탄젠트. 각의 라디안 척도. 수의 사인, 코사인, 탄젠트, 코탄젠트. 기본적인 삼각함수 항등식. 곱의 공식. 두 각의 합과 차의 사인, 코사인, 탄젠트. 2배각의 사인과 코사인. *반각 공식. 삼각함수의 합을 곱으로, 곱을 합으로 변환. 삼각함수를 반각의 탄젠트로 표현*. 평이한 삼각함수 식의 변환. 평이한 삼각방정식. 삼각방정식의 풀이. *평이한 삼각부등식.* *수의 아크사인, 아크코사인, 아크탄젠트.*

기본수준의 '대수' 영역의 내용 중에서 제곱근과 거듭제곱, 로그, 식의 변환에 관련된 최소필수내용은 심화수준에서 '수식과 문자식' 영역에 모두 포함된다. <표 II-1>에서 이탤릭체로 기술된 내용들은 심화수준에서는 모두 졸업요구수준에 포함된다.

MPRF의 수학과 교육과정에서는 이탤릭체로 최소필수내용의 일부를 표시하여 최소필수내용에 대해서도 차등적 접근의 가능성을 제공하고 있다는 것이다. 졸업요구수준은 각 단계(초보보통교육, 기본보통교육, 중등보통교육)별 졸업생들이 갖추어야 하는 성취수준으로, 예를 들어 10-11학년의 중등보통교육 단계의 졸업시험에서 필수 성취수준이 된다는 것을 의미한다.

기본수준에서 삼각함수의 기초에 관련된 내용은 심화수준의 '삼각함수' 영역에 모두 포함된다. 기본수준에서 이탤릭체로 기술된 '삼각함수의 합을 곱으로, 곱을 합으로 변환', '수의 아크사인, 아크코사인, 아크탄젠트'는 심화수준에서는 졸업요구수준에 포함되었으며, 심화수준에 '수의 아크코탄젠트'가 졸업요구수준으로 추가되었다. 그리고 '반각 공식', '삼각함수를 반각의 탄젠트로 표현', '평이한 삼각부등식'은 심화수준에서도 이탤릭체로 기술되어 졸업요구수준의 내용에 포함되지 않았다.

---

1) MPRF의 수학과 교육과정에서 이탤릭체로 기술한 내용은 학습에는 포함되지만 중등보통교육 단계를 마치는 학생들에게 요구되는 준비수준(이것을 '졸업요구수준'으로 부르기로 하자)에는 포함되지 않는 내용에 해당한다. 기본수준에서 이탤릭체로 기술된 내용 중에는 심화수준에서는 졸업요구수준에 포함되는 내용도 있고, 그렇지 않은 내용도 있다.

한편, <표 II-1>의 기본수준의 '대수' 영역에는 없지만, 심화수준의 '수식과 문자식' 영역에는 포함되는 최소필수내용이 있는데, 정수의 나누어떨어짐, 복소수, 다항식에 관련된 내용이다. 이들을 나열하면 다음과 같다(MPRF, 2004, pp.81-82).

> 정수의 나누어떨어짐. 나머지를 가지는 나눔. *합동*. 미지수가 정수인 문제의 해결.
> 복소수. 복소수의 기하학적 해석. 실수부와 허수부, 복소수의 절댓값과 편각. 복소수 표기의 대수적 그리고 삼각함수적 형식. 다양한 표기 형식에서 복소수의 산술 연산. 켤레복소수. *지수가 자연수인 거듭제곱(무아브르 공식). 대수학의 기본 정리.*
> 변수가 하나인 다항식. 다항식들의 나누어떨어짐. 나머지를 가지는 다항식의 나눔. 정수 계수인 다항식의 유리근. 조립제법. 베주의 정리. 다항식의 근의 개수. 변수가 2개인 다항식. 고차식에 대한 곱셈공식. 뉴턴의 이항식. *몇 개의 변수를 가지는 다항식, 대칭다항식.*

이 최소필수내용들은 Mordkovich & Semenov(2007, 2009)의 심화수준 교과서의 10학년 '실수', '복소수' 단원, 11학년 '다항식'에 기술되었으며, 기본수준 교과서에는 해당 내용이 없다.

MPRF는 수학과 교육과정의 심화수준에 기본수준에는 포함되지 않는 내용들을 제시하여 학습 내용의 차별화를 통한 수준별 교육을 가능하도록 수학과 교육과정을 구성하였다. 이와 같이 교육과정을 차별화하여 수준별 교육에 접근하는 방법을 한인기(2008)는 계열별 차등화라고 소개하였다.[2] 결국, MPRF의 10-11학년 수학과 교육과정이 기본수준 교육과정과 심화수준 교육과정으로 나눈 것은 계열별 차등화를 통한 수준별 교육의 시도라고 할 수 있다.

이제, 기본수준의 '함수' 영역에 제시된 최소필수내용을 정리하면 <표 II-2>와 같다.

<표 II-2> '함수' 영역 기본수준의 최소필수내용

수준 / 영역	기본수준의 최소필수내용
함수	함수. 정의구역과 치역. 함수의 그래프. 다양한 방법으로 주어진 함수의 그래프 작도. 함수의 성질: 단조성, 기함수와 우함수 성질, 주기성, 유계. 증가와 감소 구간, 최대값과 최솟값, 극점(극댓점과 극솟점). 그래프적인 해석. 실세계의 과정과 현상에서 함수적인 관계의 예들. 역함수. *역함수의 정의구역과 치역.* 역함수의 그래프. 지수가 자연수인 멱함수[3], 이 함수의 성질과 그래프. *그래프의 수직점근선과 수평점근선. 유리함수의 그래프.* 삼각함수, 이들의 성질과 그래프; 주기성, 기본주기. 지수함수, 이들의 성질과 그래프. 로그함수, 이들의 성질과 그래프. 그래프의 변환: 평행이동, 좌표축에 대한 대칭과 *원점에 대한 대칭, 직선 $y=x$에 대한 대칭, 좌표축을 따라 압축과 팽창.*

기본수준의 '함수' 영역은 함수, 역함수, 지수함수, 유리함수, 삼각함수, 로그함수, 함수 그래프의 변환에 대한 내용으로 구성되며, 이 내용들은 모두 심화수준에 포함된다. 함수와 관련하여서 심화수준에 '함수의 볼록성'이 이탤릭체로 추가되었고, '합성함수(함수의 합성)'이 졸업요구수준으로 추가되었다. 역함수와 관련하여서는 심화수준에 '역함수를 가지는 함수', '주어진 함수의 역함수 찾기'가 졸업요구수준으로 추가되었고, 기본수준에서는 이탤릭

---

2) 계열별 차등화의 개념화는 Dorofeev, Kuznetsova, Suvorova & Firsov(1990)의 연구에 의해 체계화되었다. 계열별 차등화에 대응되는 개념으로 수준별 차등화가 있다. 수준별 차등화는 같은 교육과정, 교과서를 사용하는 수학교실에서 학생들의 다양한 차이를 고려하는 교수-학습 체계에서 구현되는 수준별 교육의 접근 방법이다(한인기, 2008).

3) 멱함수는 우리나라의 중등학교 수학과 교육과정에서는 다루지 않는데 $y=x^r$과 같은 형태의 함수이다.

체로 기술된 ‘역함수의 정의구역과 치역’이 심화수준에서는 졸업요구수준으로 기술되어 있다.

기본수준에서 이탤릭체로 기술된 그래프의 ‘수직점근선과 수평점근선’, ‘유리함수의 그래프’는 심화수준에서도 이탤릭체로 기술되어 졸업요구수준에는 포함되지 않았다.

한편, 삼각함수와 관련하여 심화수준에는 ‘역삼각함수’, ‘역삼각함수의 성질과 그래프’가 이탤릭체로 추가되었다. 결국, <표 II-1>에서 기본수준에 수의 아크사인, 아크코사인, 아크탄젠트가 포함되었는데, 기본수준의 ‘함수’ 영역에는 역삼각함수가 포함되지 않는다는 것을 알 수 있다. 이것은 기본수준에서는 아크사인, 아크코사인, 아크탄젠트의 값을 다루지만, 함수로서 역삼각함수를 다루지는 않는다는 것(역삼각함수의 정의구역, 치역, 주기성 등)을 의미한다.

그래프의 변환에서는 ‘원점에 대한 대칭, 직선 $y=x$에 대한 대칭’은 심화수준에서는 졸업요구수준에 포함되었고, ‘좌표축을 따라 압축과 팽창’은 기본수준에서와 같이 이탤릭체로 기술되었다.

기본수준의 ‘수학적 해석의 기초’ 영역에 제시된 최소필수내용을 정리하면 <표 II-3>과 같다.

<표 II-3> ‘수학적 해석의 기초’ 영역 기본수준의 최소필수내용

수준 / 영역	기본수준의 최소필수내용
수학적 해석의 기초	*수열의 극한에 대한 개념. 단조유계인 수열의 극한의 존재.* 수열의 극한으로서의 원주의 길이와 원의 넓이. 무한히 감소하는 등비급수와 합. *함수의 연속성에 대한 개념.* 도함수의 개념, 도함수의 물리적인 그리고 기하학적인 의미. 함수의 그래프에 대한 접선의 방정식. 합, 차, 곱, 몫의 도함수. 기본적인 초등함수들의 도함수. 함수의 탐구와 그래프 작도에 도함수의 활용. *역함수의 도함수와 주어진 함수와 선형함수의 합성의 도함수.* *곡선사다리꼴의 넓이로서의 정적분의 개념.* 원시함수. 뉴턴-라이프니츠의 공식. 응용문제(사회-경제적인 문제 상황도 포함하여)에서 최적의 해를 구하기 위해 도함수를 이용하는 예들. 공식이나 그래프로 주어진 경우에 속도를 구하기. 물리와 기하학에 적분을 사용하는 예들. 2계도함수와 이것의 물리적 의미.

기본수준의 ‘수학적 해석의 기초’ 영역은 수열의 극한, 함수의 연속성, 도함수, 정적분, 도함수의 활용에 대한 내용으로 구성되며, 이 내용들은 모두 심화수준에 포함된다. 수열의 극한에 관련하여, 심화수준에 ‘수열의 극한에 대한 정리들’, ‘부등식에서 극한’이 이탤릭체로 추가 되었고, 기본수준에 이탤릭체로 제시된 ‘수열의 극한에 대한 개념’, ‘단조유계인 수열의 극한의 존재’는 심화수준에서는 졸업요구수준에 포함되었다. 그리고 기본수준에 이탤릭체로 제시된 ‘함수의 연속성에 대한 개념’은 심화수준에서는 졸업요구수준에 포함되었고, ‘연속함수에 대한 기본 정리들’이 이탤릭체로 추가되었고, ‘점에서 함수의 극한에 대한 개념’, ‘무한에서 함수의 조사’, ‘점근선’이 이탤릭체로 심화수준에 추가되었다.

도함수에서는 기본수준에서 이탤릭체로 기술된 ‘역함수의 도함수와 주어진 함수와 선형함수의 합성의 도함수’를 심화수준에서는 이를 일반화하여 이탤릭체로 ‘합성함수와 역함수의 도함수’로 제시되었으며, ‘2계도함수’. ‘방정식과 부등식, 문장제, 물리와 기하학 문제의 해결에 도함수를 이용하기’, ‘최댓값과 최솟값을 구하기 위해 도함수를 이용하기’가 졸업요구수준으로 추가되었다.

정적분과 관련하여서는 기본수준에서 이탤릭체로 제시되었던 ‘곡선사다리꼴의 넓이로서의 정적분의 개념’이 심화수준에서는 ‘곡선사각형의 넓이’, ‘정적분에 대한 개념’으로 나뉘어져 졸업요구수준으로 기술되었고, ‘기본적인 함수들의 원시함수’, ‘원시함수들의 계산 규칙들’이 추가되었다.

기본수준의 ‘방정식과 부등식’ 영역에 제시된 최소필수내용을 정리하면 <표 II-4>와 같다.

<표 II-4> '방정식과 부등식' 영역 기본수준의 최소필수내용

수준 영역	기본수준의 최소필수내용
방정식과 부등식	유리방정식과 부등식, 지수방정식과 부등식, 로그방정식과 부등식 풀기. 무리방정식 풀기. 연립방정식의 기본적인 해법들: 대입, 대수적인 합, 새로운 변수를 도입하기. 방정식, 부등식, 연립의 상등. 두 개의 미지수를 가지는 간단한 연립방정식의 풀이. 하나의 변수를 가지는 연립부등식의 풀이. 방정식과 부등식의 풀이에 함수의 그래프와 성질을 이용하기. 구간방법. 좌표평면에 두 개의 변수를 가지는 방정식이나 이들의 연립의 해집합을 표현하기. 과학과 실제의 다양한 분야의 문제를 해결하기 위해 수학적 방법을 사용하기. 결과를 해석하고 실제적인 한계를 고려하기.

기본수준의 '방정식과 부등식' 영역은 방정식과 부등식의 풀이, 연립방정식의 해법, 방정식과 부등식 풀이에서 함수의 그래프 이용, 실세계 문제해결에서 수학의 응용에 대한 내용으로 구성되며, 이 내용들은 모두 심화수준에 포함된다. 방정식과 부등식의 풀이와 관련하여 심화수준에서 '무리부등식 풀기'가 이탤릭체로 추가되었다. 그리고 심화수준에 부등식의 증명에 대한 내용이 추가되었는데, '부등식의 증명', '두 수의 산술평균과 기하평균에 대한 부등식'이 졸업요구수준으로 추가되었다.

기본수준의 '조합·통계·확률이론의 기초' 영역에 제시된 최소필수내용을 정리하면 <표 II-5>와 같다.

<표 II-5> '조합·통계·확률이론의 기초' 영역 기본수준의 최소필수내용

수준 영역	기본수준의 최소필수내용
조합·통계·확률이론의 기초	자료를 표로 그리고 그래프로 나타내기. *자료들의 열들의 수적인 특징들.* 유한집합으로부터 몇 개의 원소들을 순서대로 그리고 동시에 택하기. 순열, 조합, 배열의 경우의 수의 공식. 조합문제의 해결. 뉴턴의 이항공식. 이항계수의 성질. 파스칼의 삼각형. 기본적인 그리고 복잡한 사건들. 일치하지 않는 사건들의 합의 확률, 여사건의 확률. *사건의 독립성에 대한 개념. 사건 발생의 확률과 통계적 빈도.* 확률적 방법을 사용하여 실제적인 문제를 풀기.

기본수준의 '조합·통계·확률이론의 기초' 영역은 자료의 정리, 순열과 조합, 확률에 대한 내용으로 구성되며, 이 내용들은 심화수준에 포함되는데, 심화수준에 '확률적 방법을 사용하여 실제적인 문제를 풀기'는 포함되지 않았다.

한편, 기본수준에 이탤릭체로 표시된 내용들은 모두 심화수준에서도 이탤릭체로 기술되었으며, '조합·통계·확률이론의 기초' 영역의 내용들은 기본수준과 심화수준에서 거의 동일하게 제시되었다고 할 수 있다.

살펴본 바와 같이, 심화수준의 교육과정은 기본수준에 비해 더 많은 수학적 개념과 방법들이 포함된 내용으로 구성되었다는 것을 알 수 있다. 우리나라에서는 동일한 교과목에 대해 기본수준과 심화수준으로 나누어 차등화된 교육과정을 구성하려는 시도가 많지 않았기 때문에, 우리나라의 사례에 비추어 심화수준의 교육과정에 어떤 수학적 개념들, 방법들이 추가될 수 있는지에 대한 연구가 더 필요할 것이다.

교육과정이 기본수준과 심화수준으로 나눠는 것과 관련하여 덧붙일 것은 러시아에서는 대학입학시험(우리나라의 대학수학능력시험과 유사한 성격임)의 수학이 기본수준과 심화수준으로 나뉜다는 것이다. 수학과 관련된 분야의 학과로 진학하는 학생들에게는 수학 심화수준의 시험이 요구되며, 이 시험은 심화수준의 교육과정에 근거한다. 결국, 심화수준의 수학 교육과정, 심화수준의 수학교과서로 배우는 것은 간단히 생각하면 예전에 우리나라의 자연계열(이과)에 해당하는 것으로 생각할 수 있을 것이다.

나. 러시아의 기본수준 교과서와 심화수준 교과서

러시아의 학교에서 1-6학년은 '수학'이라는 명칭의 교과서를 사용하며, 7-9학년은 '대수', '기하'의 두 종류 교과서가 사용되며, 10-11학년은 '대수와 해석의 기초', '기하' 교과서가 사용된다. 이때, 7-9학년의 기하는 평면기하학이고, 10-11학년의 기하는 공간기하학이다.

MPRF의 10-11학년 수학과 교육과정의 기본수준과 심화수준에 제시된 '대수', '수식과 문자식', '함수', '수학적 해석의 기초', '방정식과 부등식', '조합·통계·확률이론의 기초' 영역은 '대수와 해석의 기초' 교과서에서 다루며, '기하' 영역은 '기하' 교과서에 포함된다. 즉, 앞에서 살펴본 MPRF의 10-11학년 교육과정의 내용을 바탕으로 '대수와 해석의 기초' 교과서가 집필되는 것이다.

한편, 러시아의 학교에서 사용되는 교과서는 MPRF가 승인하는 교과서 목록(권고 교과서 목록이라 부르자)에 포함된 것이어야 하며, MPRF에서는 매년 행정명령으로 권고 교과서 목록을 제시한다. 2020년 5월에 발표된 MPRF(2020)의 권고 교과서 목록에는 10-11학년 '대수와 해석의 기초' 교과서는 10종류가 포함되었고(심화학습을 위한 교과서 7종 포함), '기하' 교과서는 14종류(심화학습을 위한교과서 9종 포함)가 포함되었다.

한 가지 흥미로운 점은 우리나라에서는 교육과정을 5-10년 간격으로 개정하고 있으며 개정된 교육과정에 맞추어 새로운 수학교과서가 만들어지지만, 러시아는 그렇지 않다는 것이다. 즉 오래전의 교과서가 지금도 사용되는 경우가 있다. 예를 들어, 유명한 수학자인 Kolmogorov(1903-1987)가 쓴 '대수와 해석의 기초' 교과서가 2011/12학년도의 MPRF 권고 교과서 목록에 포함되었고(MPRF, 2010), Pogorelov(1919-2002)의 '기하' 교과서가 2021/22학년도 MPRF 권고 교과서 목록에 포함되었다(MPRF, 2020).

이제, 러시아의 10-11학년 수학교과서의 출판 형태에 대해 자세히 살펴보자. 일부 교과서는 10학년, 11학년 교과서를 개별적으로 별권의 책으로 출판하기도 하고, 일부 교과서는 10학년과 11학년을 한 권으로 묶어 출판하기도 한다. 그리고 10-11학년의 수학 교과서들을 기본수준과 심화수준을 중심으로 살펴보면, 기본수준 교과서, 기본수준·심화수준 교과서(즉, 기본수준과 심화수준이 한 권의 교과서에 있는), 심화수준 교과서로 나눌 수 있다. 이들 중에서 기본수준·심화수준 교과서가 가장 많이 출판되는데, 예를 들어 Alimov et al.(2016)의 '대수와 해석의 기초' 교과서는 기본수준·심화수준 교과서이며, Gusev & Rubin(2016)의 '기하' 교과서도 기본수준·심화수준 교과서이다. 기본수준·심화수준 교과서에는 교과서에 심화수준의 내용은 별도의 표시를 하여 학생들이 기본수준의 내용과 구분할 수 있도록 하였다.

같은 교과서 저자 그룹이 기본수준 교과서, 심화수준의 교과서를 별도로 저술하는 경우가 있다. 이러한 경우의 예로는, Mordkovich & Semenov(2009)의 '대수와 해석의 기초'의 심화수준 10학년 교과서, Mordkovich & Semenov(2007)의 심화수준 11학년 교과서, Mordkovich(2009)의 기본수준 10-11학년 교과서를 들 수 있다. 이 교과서들은 기본수준·심화수준 교과서처럼 기본수준 교과서, 심화수준 교과서의 내용 기술이 긴밀하게 연결되며 유사성을 가지지만, 기본수준과 심화수준의 수준 구별에 따른 교과 내용 기술의 미세한 차이가 기본수준·심화수준 교과서보다는 더 두드러지게 나타난다.

한편, Pratusevich, Stolbov & Golovin(2009)의 '대수와 해석의 기초'의 교과서는 기본수준 교과서는 없고 심화수준의 교과서만 출판되었고, Kalinin & Tereshin(2011)의 '기하' 교과서도 기본수준 교과서 없이 심화수준의 교과서만 출판되었다. 그리고 Kolyagin et al.(2011)의 '대수와 해석의 기초'는 기본수준·심화수준 교과서인데, Kolyagin et al.(2009)는 '대수와 해석의 기초'는 심화수준 교과서도 출판하였다.

이제, 10-11학년의 기본수준 교과서, 심화수준 교과서에서 권고하는 수업 시간수에 대해 살펴보자. Saakyan & Butuzov(2017)는 기본수준 '기하'를 10학년에서 54시간(여기에 복습 5시간이 포함됨), 11학년에서 54시간(여기에 복습 8시간이 포함됨)을 권고하였고, 심화수준 '기하'를 10학년에서는 68시간(주당 2시간에 해당하며, 여기에 복습 8시간이 포함됨), 11학년에서 68시간(여기에 복습 12시간이 포함됨)을 권고하였다.

Mordkovich & Semenov(2010a)는 기본수준 '대수와 해석의 기초' 10-11학년 교과서를 지도하기 위해 10학년

의 1학기에는 주당 3시간, 2학기에는 주당 2시간을 권고하고 있으며, Mordkovich & Semenov(2010b)는 심화수준 ‘대수와 해석의 기초’ 10학년 교과서를 지도하기 위해 10학년에서 주당 4시간, 5시간, 6시간의 세 가지 모형을 권고하고 있다. Mordkovich & Semenov(2010a)와 Mordkovich & Semenov(2010b)에 제시된 ‘대수와 해석의 기초’ 교과서의 10학년에 권고되는 단원별 시간 수를 정리하면 <표 II-6>과 같다.

<표 II-6> ‘대수와 해석의 기초’ 교과서 10학년의 권고 시간수

단원명 \ 수준	기본수준	심화수준		
		주당 4시간	주당 5시간	주당 6시간
실수	×	12	16	20
함수	5	10	12	16
삼각함수	23	24	30	33
삼각방정식	9	10	12	14
삼각함수 식들의 변환	11	21	26	30
복소수	×	9	12	15
도함수	28	29	35	42
조합과 확률	×	7	10	18
복습	6	11	14	17

<표 II-6>에서 기본수준 교과서에는 ‘실수’, ‘복소수’, ‘조합과 확률’ 단원이 없고, 심화수준 교과서에만 포함되어 있다. ‘실수’, ‘복소수’ 단원의 내용은 MPRF의 수학과 교육과정에서 기본수준에는 포함되지 않고 심화수준에만 포함되는 것이며, 기본수준 교과서에 ‘조합과 확률’이 없는 것은 이 내용을 11학년 기본수준 교과서에서 다루기 때문이다.

2. 연구의 대상 및 방법

본 연구는 문헌분석연구로, 러시아의 수학교과서를 분석하여 수학교과서에 나타난 수준별 교육에 관련된 다양한 접근 방법과 구체적인 내용을 분석하였다. 특히 MPRF이 수학과 교육과정에는 10-11학년이 수준별 교육과정(기본수준과 심화수준으로 구성된)이기 때문에, 본 연구에서는 10-11학년에 해당하는 수학교과서를 중심으로 수준별 수학교육의 내용을 분석하였다. 그런데, 10학년과 11학년 모두를 연구 대상으로 삼으면 수학 교과 내용의 양이 너무 많아져 그 기술에 어려움이 발생하게 된다. 그래서, 본 연구에서는 러시아의 10학년 수학교과서를 연구 대상으로 삼았다.

러시아에서 10-11학년의 ‘기하’는 공간기하학이다. 러시아의 10-11학년 ‘기하’ 교과의 내용은 우리나라의 고등학교 진로선택 과목인 ‘기하’에서 ‘평면벡터’, ‘공간도형과 공간좌표’의 내용과 관련된다. 그러나, 우리나라에서 지도되는 ‘평면벡터’, ‘공간도형과 공간좌표’ 내용은 러시아의 10-11학년 ‘기하’ 교과에서 다루는 내용에 비해 주제의 양이 적고 내용의 폭도 협소하다. 그래서, 러시아의 10-11학년 ‘기하’ 교과의 내용 중에는 우리나라 교사들이나 연구자들에게 친숙하지 않을 수 있는 내용들이 있다(예를 들어, 정육면체, 평행육면체, 각기둥, 각뿔에서 대칭, 다면체의 절단, 절단면 작도 등). 결국, 본 연구에서는 우리나라의 고등학교 공통과목인 ‘수학’, 일반선택 과목인 ‘수학I’, ‘수학II’, ‘미적분’, ‘확률과 통계’의 내용과 폭넓게 관련되며 익숙한 주제들로 구성된 러시아의 10-11학년 ‘대수와 해석의 기초’ 교과서의 내용을 분석하였다.

본 연구에서는 러시아의 '대수와 해석의 기초' 교과서에 제시된 기본수준과 심화수준의 다양한 수준별 교수내용 분석을 할 것이기 때문에, 한 권으로 된 기본수준·심화수준 교과서보다는 같은 저자 그룹에 의해 기초수준 교과서, 심화수준 교과서가 별 권의 책으로 출판된 '대수와 해석의 기초' 교과서를 분석 대상으로 선정하였다. 이러한 성격을 가진 '대수와 해석의 기초' 교과서 중에서 MPRF의 권고 교과서 목록에 지속적이고 안정적으로 포함된 것이 Mordkovich & Semenov(2009)의 10학년 '대수와 해석의 기초' 심화수준 교과서와 Mordkovich(2009)의 기본수준 '대수와 해석의 기초' 10-11학년 교과서 중 10학년 내용이다.

본 연구에서는 MPRF의 수학과 교육과정이 수준별 교과서에 어떻게 구현되었는지를 조사하고, 수준별 교육의 관점에서 심화수준 교과서 '실수', '복소수' 단원의 주요 학습 내용과 그 기술의 특징을 분석하고, 10학년 기본수준과 심화수준 교과서에 제시된 주요 학습 내용, 그 기술 방법을 비교하였다.

이를 위해, 첫째 MPRF의 기본수준 교육과정과 심화수준 교육과정의 최소필수내용을 Mordkovich & Semenov(2009)의 10학년 심화수준 교과서와 Mordkovich(2009)의 기본수준 10학년의 주요 학습 내용과 비교하고, 교육과정의 최소필수내용이 수학교과서에 어떻게 기술되었는지를 조사하며, 둘째 10학년 Mordkovich & Semenov(2009)의 심화수준 교과서와 Mordkovich의 기본수준 교과서의 주요 학습 내용을 비교하고, 이들 교과서에 제시된 주요 학습 내용의 기술 방법을 비교하였다. 특히, 우리나라의 수학과 교육과정이나 수학교과서와도 비교하여, 우리나라 수학교과서와 러시아 수학교과서의 차이점도 조사하였다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. '대수와 해석의 기초' 교과서에서 MPRF 수학과 교육과정의 수준별 기술

MPRF의 10-11학년 수학과 교육과정은 기본수준, 심화수준의 두 수준으로 구성되며, 다시 기본수준과 심화수준의 최소필수내용은 각각 졸업요구수준과 졸업요구수준에 포함되지 않는 학습 내용(이탤릭체로 표시된)으로 구분된다. 여기서는 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에서 졸업요구수준과 이탤릭체로 표시된 최소필수내용이 어떻게 기술되었는지를 중심으로 살펴보자.

한편, Mordkovich & Semenov(2009)의 10학년 '대수와 해석의 기초' 심화수준 교과서와 Mordkovich(2009)의 기본수준 '대수와 해석의 기초' 10-11학년 교과서의 내용 기술은 두 가지 크기의 활자로 구분된다: 보통 크기의 활자로 기술된 내용과 작은 크기의 활자로 기술된 내용. 이때, 작은 크기의 활자로 기술된 내용은 교사의 판단에 의해 수업 시간에 지도할 수도 있고 그렇지 않을 수 있으며(이를 선택내용이라 부르자), 보통 크기의 활자로 기술된 내용은 수업 시간에 통상적으로 다루는 내용에 해당된다(이를 일반내용이라 부르자). 즉, Mordkovich의 기본수준의 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준의 교과서에는 일반내용과 선택내용으로 기술되어 있으며, 이를 통해 교사는 수학교실에서 학생들이 개인차를 고려한 수준별 차등화의 관점에서 수준별 교육을 구현할 수 있는 가능성을 가지게 된다.

다른 교과서의 저자들은 다른 방법으로 교과서에 학습 내용의 수준을 표시한다. 예를 들어, Kolyagin et al.(2011)의 기본수준·심화수준 교과서에서는 기본수준의 내용, 심화수준의 내용, 수학에 흥미가 있는 학생들을 위한 내용, 기본수준 연습문제, 심화수준 연습문제, 수학에 흥미가 있는 학생들을 위한 연습문제 등을 별도로 구분하여 제시하였고, Nikolskii et al.(2009)의 기본수준·심화수준 교과서에서도 기본수준의 내용내용, 심화수준의 내용, 기본수준 연습문제, 심화수준 연습문제, 복습을 위한 문제를 별도로 표시하여 구분하였다.

이제, Mordkovich & Semenov의 10학년 '대수와 해석의 기초' 심화수준 교과서와 Mordkovich의 기본수준 '대수와 해석의 기초' 10-11학년 교과서에 제시된 졸업요구수준에 포함되는 최소필수내용의 기술을 살펴보자.

Mordkovich의 기본수준의 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준의 교과서에서 졸업요구수준에 포함되는 내용은 대부분 일반내용으로 기술하여 설명하고 있다. 그러나 교과서 일부 내용, 즉 부연 설명, 증명, 예제 등의 일부는 학습 내용의 난이도, 문제의 특징, 학생들의 개인차를 고려하여 수준별 차등화를 통한 수준별 교육이 가능하도록 선택내용으로 기술되어 있는 경우가 있다.

예를 들어, MPRF의 교육과정의 '대수' 영역에 졸업요구수준에 포함되는 내용인 '삼각방정식의 풀이'와 관련하여 기본수준 교과서에서 방정식 $\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{2}{5}\right)=0$을 푸는 문제는 일반내용으로 기술되어 있지만, 그 후에 오는 다음과 같은 부연 설명은 선택내용으로 제시되어 있다(Mordkovich, 2009, p.107).

방정식 $f_1(x)\cdot f_2(x)=0$에서 방정식 $f_1(x)=0,\ f_2(x)=0$으로 전환하는 것이 항상 안전한 것은 아님을 생각해야 한다. 예를 들어, 방정식 $\tan x\,(\sin x-1)=0$을 살펴보자. 방정식 $\tan x=0$으로부터 $x=\pi n$이, 방정식 $\sin x=1$로부터 $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$이 얻어진다. 그러나, 이들을 모두 근으로 하면 안된다. 왜냐하면, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$일 때에 $\tan x$는 의미가 없기 때문이다. 즉 값 $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$는 방정식의 정의역에 포함되지 않는다.

결국, 졸업요구수준에 포함되는 최소필수내용인 '삼각방정식의 풀이'에 관련된 일부 설명과 몇몇 문제의 해결은 일반내용으로 기술되었지만, 살펴본 것과 같은 부연 설명은 선택내용으로 제시되었다. 즉 졸업요구수준에 포함되는 최소필수내용인 '삼각방정식의 풀이'에 관련된 기술이라고 하여 모두 일반내용이 되는 것은 아니며, 교과서 저자가 '삼각방정식의 풀이'에 대해 기술하면서 일반내용으로 할 것인지, 선택내용으로 할 것인지를 결정하게 되는 것이다. 이와 같은 교과서 저자의 결정을 통해 수학교실에서 교사는 수준별 교육의 가능성을 가지게 될 것이다.

심화수준 교과서의 수열 개념과 관련해서도 유사한 상황을 볼 수 있다(MPRF의 심화수준 교육과정에 '수열'의 개념이 명시되지 않았지만, '수열의 극한에 대한 개념'이 졸업요구수준으로 기술되었기 때문에 수열의 개념은 졸업요구수준으로 간주됨). 심화수준 교과서에서 수열과 수열의 제시 방법, 몇몇 문제들이 일반내용으로 기술되었고, 그 후에 오는 다음 문제는 선택내용으로 제시되어 있다(Mordkovich & Semenov, 2009, pp.297-298).

예제. 피보나치 수열 $y_1=1,\ y_2=1,\ y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$(이때 $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$)이 주어졌다. 수학적 귀납법을 이용하여 다음을 증명하여라.

(a) $y_{2n+2}=y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{2n+1}$ (b) $y_{n+1}^2-y_n y_{n+2}=(-1)^n$

살펴본 것과 같이, MPRF의 수학과 교육과정에서 최소필수내용이 졸업요구수준으로 기술되었다고 하여, 심화수준 교과서에서도 관련 학습내용이 모두 일반내용으로 기술되는 것은 아니라는 것을 확인할 수 있다.

이제, MPRF의 수학과 교육과정에 졸업요구수준으로 포함되지 않는, 즉 이탤릭체로 기술된 학습 내용들을 Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서는 어떻게 다루는지 살펴보자.

<표 II-1>에서 '평이한 삼각부등식'은 기본수준에서 이탤릭체로 표시되었다. 이와 관련된 내용으로 Mordkovich(2009, p.92)의 기본수준 교과서에서는 특별한 내용 설명 없이 다음 문제가 선택내용으로 기술되어 있다.

문제. 부등식 $\cos t>0.3$을 풀어라.

이와 유사한 예로, 교육과정에 이탤릭체로 기술된 '삼각함수를 반각의 탄젠트로 표현'을 볼 수 있다. (Mordkovich, 2009, p.127)의 기본수준 교과서에 특별한 설명 없이 다음의 '삼각함수를 반각의 탄젠트로 표현'에 대한 다음 예제가 선택내용으로 제시되어 있다.

예제. 만약 $x \neq \pi + 2\pi n$이면, 다음 등식을 증명하여라.

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \ \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

결국, Mordkovich는 MPRF 수학과 교육과정에 이탤릭체로 표시된 '평이한 삼각부등식', '삼각함수를 반각의 탄젠트로 표현'을 교과서에서 자세한 설명 없이 문제나 예제의 형태로 제시하였으며, 이 문제나 예제는 수업 시간에 교사가 지도 여부를 결정할 수 있는 선택내용으로 기술하였다.

MPRF 수학과 교육과정에 이탤릭체로 기술된 내용이 기본수준 교과서에 선택내용으로만 기술된 것은 아니다. 교육과정에서 '반각 공식'은 이탤릭체로 기술되었지만, Mordkovich의 기본수준 교과서에서는 이것을 일반내용으로 기술하고 있다. 이것은 교과서 저자의 교수학적 판단에 의한 것으로 생각할 수 있을 것이다. 반면에 Kolyagin et al.(2011)의 기본수준·심화수준 교과서에서는 '반각 공식'을 기본수준에서는 다루지 않고 심화수준에서 다루는 내용으로 표시하고 있다.

다른 예로 기본수준 교육과정의 '대수' 영역에서 '수의 아크사인, 아크코사인, 아크탄젠트'는 이탤릭체로 되어 있다. Mordkovich의 기본수준 교과서에서 수 a에 대한 아크사인($\arcsin a$), 아크코사인($\arccos a$), 아크탄젠트($\arctan a$)가 일반내용으로 다루어졌으며, 기본수준 교육과정에서는 빠진 아크코탄젠트($\mathrm{arccot}\, a$)도 일반내용으로 기술되어 있다.

이처럼 교과서의 집필에 유연성을 가지는 것은 우리나라와는 다른 상황이라 할 수 있을 것이다. 우리나라에서는 교육과정에 영역별 성취수준과 함께 교수·학습 방법 및 유의사항을 명시하여 교과서 집필이나 교수·학습의 범위를 비교적 엄격하게 규정하며, 교과서 심의과정에서 교과서가 교육과정의 범위에서 집필되었는지를 평가한다. 그러나 러시아의 교육과정에서 최소필수내용만 규정하기 때문에, 교과서에 기술된 용어, 학습 내용의 범위, 수준 등의 많은 부분을 교과서 저자들의 교수학적 판단이나 그동안의 관례에 맡기는 것으로 보인다.

한편, 심화수준 교과서에서도 심화수준 교육과정에 이탤릭체로 기술된 것들이 선택내용으로 기술되기도 하고 일반내용으로 기술되기도 한다. 예를 들어, 심화수준 교육과정 '함수'에 '역삼각함수', '역삼각함수의 성질과 그래프'가 이탤릭체로 표시되어 있는데, Mordkovich & Semenov(2009)에는 역삼각함수 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \mathrm{arccot}\, x$의 정의, 성질들, 그래프가 모두 일반내용으로 기술되었다. 그러나 역삼각함수를 활용한 문제의 해결에서는 문제의 특성에 따라 다양한 접근을 하고 있다. Mordkovich & Semenov(2009, pp.167-168)에 제시된 다음 문제를 살펴보자.

예제 11. 임의의 $x \in [-1, 1]$에 대해 등식 $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$를 증명하여라.

예제 12. 다음 방정식을 풀어라.

(a) $\arcsin(2x^2 - 1) = \arcsin(5x - 3)$

(b) $\arccos 2x = \arcsin(2x - 1)$

Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 예제 11은 일반내용으로, 예제 12는 선택내용으로 제시하고

있다. 이때 Mordkovich & Semenov는 일반내용, 선택내용을 결정할 때에 문제의 난이도나 복잡성을 고려한 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 접근은 기본수준 교과서에서도 쉽게 찾아볼 수 있다.

Mordkovich(2009, pp.134-135)에는 사인과 코사인의 곱을 합으로 변환시키는 공식을 다루면서, 다음 예제를 제시하고 있다.

예제 1. 다음의 곱을 합으로 변환시켜라.
(a) $\cos 5x \cos 3x$ (b) $\sin 3x \cos 5x$ (c) $\cos(3x+y)\cos(x-3y)$ (d) $\sin 27° \sin 57°$
예제 2. 만약 $\cos x = \dfrac{2}{3}$ 라면, 식 $\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ 의 값을 구하여라.

이때, 예제 1은 일반내용으로 제시되어 있으며, 예제 2는 선택내용으로 제시되어 있다. 결국, 같은 최소필수내용에 관련된 기술을 하면서 Mordkovich는 예제의 해결 과정에 포함된 복잡성이나 난이도 등을 고려하여 수준별 교수·학습의 가능성을 교과서에 제공한 것이 된다.

살펴본 것과 같이, MPRF의 기본수준 교육과정과 심화수준 교육과정에서 졸업요구수준의 최소필수내용은 기본수준과 심화수준 교과서의 구성에서 주로 일반내용으로 기술되지만, 교과서 저자의 교수학적 선택에 의해 부연 설명, 증명, 예제 등의 일부는 선택내용으로 기술되었다. 이러한 접근을 통해 수학교실에서 수준별 차등화를 통한 수준별 수업을 위한 가능성을 가질 수 있을 것으로 기대된다. 한편, 졸업요구수준에 포함되지 않은 요소들은 기본수준과 심화수준 교과서의 구성에서 일부는 일반내용으로 일부는 선택내용으로 기술되었고, 이에 관련된 부연 설명, 증명, 예제 등도 일부는 선택내용으로 기술되었다.

2. 심화수준 교과서의 ‘실수’, ‘복소수’ 단원의 주요 학습 내용

MPRF의 10-11학년 수학과 교육과정에서 기본수준 교육과정과 심화수준 교육과정을 보면, 심화수준의 교육과정에만 포함된 최소필수내용들이 있다. 그리고 Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서를 비교해 보면, 심화수준 교과서에는 10학년에서 ‘실수’, ‘복소수’, ‘조합과 확률’의 단원이 추가로 제시되어 있다는 것을 알 수 있다. 이 단원들 중에서 ‘조합과 확률’은 Mordkovich의 기본수준 교과서는 11학년에서 배우도록 제시되어 있다.

여기서는 ‘실수’, ‘복소수’ 단원을 중심으로 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 다루는 주요 학습 내용과 교과서 내용의 특징을 살펴볼 것이다. 이 두 단원은 계열별 차등화를 통해 수준별 교육에 접근하고 있다는 점에서 의미를 부여할 수 있다.

우리나라에서도 제7차 수학과 교육과정의 국민 공통 기본 교육과정에서 심화과정을 기본내용과 함께 제시했었다. 이때는 1학년(단계)에서 10학년(단계)까지 모든 학년에 걸쳐 심화과정이 제시되었고, 그 내용도 새로운 개념이나 주제를 추가하는 것이 아니라 ‘..실생활의 문제를 해결할 수 있다’, ‘...문제를 만들어 해결할 수 있다’, ‘실생활에서 ...’ 등과 같이 기본과정에서 배운 내용을 바탕으로 문제를 만들거나 실생활 관련 문제를 해결하는 등의 내용이 중심을 이루었다. 그 결과, 1학년부터 10학년까지 모두 심화과정이 제시되는 것이 타당한지, 심화과정을 새로운 개념이나 주제들을 추가하여 구성할 수는 없는지 등에 대한 의문점이 있었던 것도 사실이다.

Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 제시된 ‘실수’, ‘복소수’ 단원은 기본수준 교과서에는 없는 추가된 단원이기 때문에, 새로운 주제를 추가해 심화수준을 구성하는 방법을 통해 수준별 교육을 구현하는데 있어 시사점을 줄 수 있을 것이다. 이제, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서의 ‘실수’, ‘복소수’ 단원은 어떤 주요 학습 내용으로 구성되어 있는지, 교과서 기술의 특징은 어떠한지를 중심으로 살펴보자.

가. '실수' 단원

이 단원은 MPRF의 심화수준 교육과정의 '수식과 문자식' 영역에 포함된 최소필수내용인 '정수의 나누어떨어짐', '나머지를 가지는 나눔', '합동', '미지수가 정수인 문제의 해결'에 해당하는 내용을 포함한다. 이 '실수' 단원은 10학년 심화수준 교과서의 1단원으로 제시되어 있다.

Mordkovich & Semenov(2009, p.5)는 단원의 성격을 '이 단원의 내용은 상당부분 7-9학년 대수에 관련된다. 이 단원의 목적은 실수에 대한 학생들의 표상을 반복, 심화, 확장하는 것'으로 규정하였다. Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 '실수' 단원은 자연수와 정수, 유리수, 무리수, 실수의 집합, 실수의 절댓값, 수학적 귀납법의 소단원으로 구성되었으며, 그 주요 내용을 <표 Ⅲ-1>과 같이 정리할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 심화수준 교과서 '실수' 단원의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	심화수준 교과서의 주요 학습 내용
자연수와 정수	자연수의 나누어떨어짐, 나누어떨어짐의 조건, 소수와 합성수, 나머지를 가지는 나눗셈, 몇몇 자연수의 최대공약수와 최소공배수, 자연수의 산술의 기본정리
유리수	유리수 집합, 무한순환소수
무리수	무리수의 증명, 무한비순환소수
실수의 집합	실수와 수직선, 실수 집합, 일대일대응, 수의 부등식, 산술평균, 기하평균, 수의 구간, {실수의 공리계}[4]
실수의 절댓값	절댓값의 성질
수학적 귀납법	수학적 귀납법의 원리

MPRF의 심화수준 교육과정의 최소필수내용 '정수의 나누어떨어짐', '나머지를 가지는 나눔', '합동', '미지수가 정수인 문제의 해결'과 <표 Ⅲ-1>의 주요 학습 내용을 비교하면, '합동', '미지수가 정수인 문제의 해결'에 대한 학습 내용이 없다는 것을 알 수 있다. Mordkovich & Semenov(2007)의 11학년의 심화수준 교과서에도 이 내용은 기술되지 않았다. 하지만, Kolyagin et al.(2011)의 기본수준·심화수준 교과서에서는 '합동', 즉 $a \equiv b \pmod{m}$과 같은 합동식을 다루어 문제를 해결하는 소단원, 방정식 $ax+by=c$의 정수해를 구하는 소단원을 심화수준으로 다루고 있다.

이제, 심화수준 교과서에 제시된 특징적인 내용을 살펴보자. 우선, 자연수의 나누어떨어짐과 관련하여서는 수 2, 5, 10, 4, 25, 8, 125, 3, 9, 11, 7, 13의 나누어떨어짐의 조건을 다루고 있다. 우리나라의 수학교과서에서는 중학교에서 2, 3, 4, 5, 9, 10에 대한 나누어떨어짐을 다루지만, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서는 이를 확장하여 다양한 수들에 대해 나누어떨어짐의 성질과 그 증명을 다루고 있다.

예를 들어, Mordkovich & Semenov(2009)에서는 5자리 수 $\overline{abcde}$[5]에 대한 3으로 나누어떨어짐의 조건을 유도하기 위해 $\overline{abcde}$을 십진법 전개식으로 나타냈다. $\overline{abcde}=10000a+1000b+100c+10d+e$에서 $10000a=9999a+a$, $1000b=999b+b$, $100c=99c+c$, $10d=9d+d$이므로, $10000a$를 3으로 나눈 나머지는 a를 3으로 나눈 나머지와 같고, $1000b$, $100c$, $10d$를 각각 3으로 나눈 나머지는 각각 b, c, d를 3으로 나눈 나머지와 같게 된다. 결국 $\overline{abcde}$를 3으로 나눈 나머지는 $a+b+c+d+e$를 3으로 나눈 나머지와 같게 된다.

이러한 방법을 확장하여 Mordkovich & Semenov(2009, p.12)는 8자리 수 $\overline{abcdefkm}$의 11로 나누어떨어짐의 조건을 다음과 같이 유도했다.

---

4) { }안에 있는 내용은 교과서에 작은 활자로 기술된 선택내용에 해당한다.

5) 러시아 수학교과서에서 $\overline{abcdefkm}$은 10^7자리에 숫자 a, 10^6자리에 b, 10^5자리에 c, 10^4자리에 d, 10^3자리에 e, 10^2자리에 f, 10의 자리에 k, 1의 자리에 m이 있는 8자리 수를 나타내는 표기로 사용됨.

$$\begin{aligned}\overline{abcdefkm} &= a\cdot 10^7+b\cdot 10^6+c\cdot 10^5+d\cdot 10^4+e\cdot 10^3+f\cdot 10^2+k\cdot 10+m\\ &=(a\cdot(10^7+1)-a)+(b\cdot(10^6+1)-b)+(c\cdot(10^5+1)-c)+(d\cdot(10^4+1)-d)\\ &\quad +(e\cdot(10^3+1)-e)+(f\cdot(10^2+1)-f)+(k\cdot(10^1+1)-k)+m\\ &=a\cdot(10^7+1)+b\cdot(10^6-1)+c\cdot(10^5+1)+d\cdot(10^4-1)+e\cdot(10^3+1)\\ &\quad +f\cdot(10^2-1)+k\cdot(10^1+1)+(m-k+f-e+d-c+b-a)\end{aligned}$$

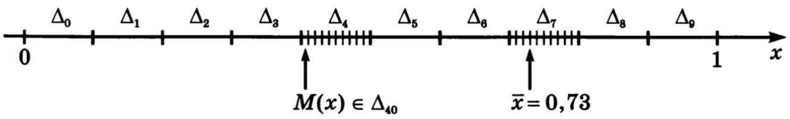
이때, 수 10^7+1, 10^6-1, 10^5+1, 10^4-1, 10^3+1, 10^2-1, 10^1+1은 11로 나누어떨어지므로, 수 $\overline{abcdefkm}$의 11로의 나누어떨어짐은 $(m-k+f-e+d-c+b-a)$의 11로의 나누어떨어짐과 일치하게 된다.

Mordkovich & Semenov는 유사한 방법으로 7, 13의 나누어떨어짐의 조건을 유도하는 과정을 제시하였다. 이로부터 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서 기술의 한 특징으로 수학적 규칙성의 증명과 탐구 방법의 확장을 들 수 있다. 잘 알려진 2, 3, 4, 5, 9, 10 등의 나누어떨어짐의 성질 유도 방법을 확장하여 7, 11, 13 등과 같은 수들의 나누어떨어짐의 조건을 증명하는 방법으로 수학교과서를 기술하였다.

한편, 소수와 합성수와 관련하여서는 '임의의 자연수는 적어도 하나의 소인수를 가진다', '소수의 집합은 무한하다', '임의의 자연수 a가 주어지면, 두 소수사이의 거리가 a보다 큰 이웃한 두 소수를 찾을 수 있다'는 정리와 그 증명을 제시하고 있다.

자연수의 산술의 기본정리는 이를 두 개의 작은 명제로 나누어 제시하였다. 하나는 '임의의 자연수는 소수이거나, 이 자연수를 소수들로 인수분해 할 수 있다'는 것은 증명과 함께, 다른 하나는 '만약 자연수를 소인수분해하면, 그러한 분해는 유일하다, 즉 수에 대한 임의의 두 소인수분해는 인수들의 순서에서만 차이가 난다'는 것을 증명 없이 제시하였다. 우리나라에서는 이러한 내용과 그 증명을 대학교 수준(고등수학)의 정수론에서 다룬다. Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서는 높은 수준의 수학 내용도 다루고 있음을 알 수 있다. 물론, 우리나라의 중등학교의 심화학습에서 이러한 내용을 다루는 것이 타당한지에 대해서는 다양한 논의가 필요할 것이다. 이를 위해, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 어떠한 교수학적 변환을 통해 고등수학의 내용을 중등학교에서 다루며, 중등학교 수학의 내용과 고등수학의 내용을 연결시키려 어떤 시도했는지를 질적인 측면에서 후속 연구로 연구, 분석하는 것도 의미 있을 것이다.

실수와 수직선에서는 실수의 집합과 좌표직선(coordinate line)의 점들의 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다는 것을 <그림 III-1>과 같은 좌표직선의 분할을 통해 설명하였다(Mordkovich & Semenov, 2009, p.31). 이와 같이 구간 $[0,1]$을 분할하여 $(0,1)$의 점들의 집합과 실수 R의 집합 사이에 일대일대응이 존재함을 보이는 것은 우리나라에서는 대학교 수준에서 다루는 고등수학의 내용이다. 그리고 좌표직선이 실수 집합의 기하학적 모델이며, 이 좌표직선을 수직선으로 정의하였다.



[그림 III-1] 구간 $[0,1]$의 분할

한편, 실수와 관련하여 기술된 내용으로 주목할 것이 실수의 공리계를 선택내용으로 제시하고 있다는 것이다. 여기에는 덧셈의 공리(4개), 곱셈의 공리(5개), 순서공리(6개), 실수 집합의 연속성 공리 등이 제시되어 있으며, 이로부터 얻어지는 실수의 몇몇 성질들이 유도되어 있다. 예를 들어, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$를 공리

들을 이용하여 그 타당성을 다음과 같이 증명하였다(Mordkovich & Semenov, 2009, p.42).

$(a+b)(c+d)$에서 $c+d$를 m으로 나타내면, $(a+b)(c+d)=(a+b)m$이 된다. 공리 Ⅸ[6]에 의해, $(a+b)m=am+bm$이 된다. 그리고 공리 Ⅴ[7]에 의해, $am=ma$, $bm=mb$로 쓸 수 있으며, $am+bm=ma+mb=(c+d)a+(c+d)b$가 얻어진다. 수 $(c+d)a$, $(c+d)b$에 공리 Ⅸ를 사용하면 $(c+d)a+(c+d)b=ca+da+cb+db$가 되며, 이것은 공리 Ⅴ에 의해 $ac+ad+bc+bd$가 된다.

심화수준 교과서에서는 이것 외에도 자연수에 대한 다양한 성질들을 공리를 이용하여 엄밀하게 증명하고 있다. 예를 들어, 만약, $a>b$이면, 양수 c에 대해 $ac>bc$가 성립한다는 것도 공리를 이용하여 증명하였다.

실수의 공리계를 이용해 실수의 성질을 다루는 것은 심화수준에서 수학적 엄밀성의 강조와 관련하여 생각할 수 있을 것이다. 중등학교 수학의 엄밀성 수준에 대해서는 다양한 관점이 존재할 수 있다. 그러나 우리나라의 수학교육에서는 아직 이에 대한 활발한 논의는 미흡한 수준이다. 최근에는 중등학교 수학교육에서 직관적 접근이 강조되지만, 직관적 접근의 반대편에 있는 수학적 엄밀성에 대한 다양한 논의가 미흡하다면 수학적 직관성에 대한 학술적인 발전은 기대하기 어려울 수도 있을 것이다. 이러한 측면에서 심화수준에서 수학적 엄밀성의 다양한 수준과 이에 관련된 교수학적 변환을 분석하는 것은 수학교육의 발전에서 의미가 있을 것이다.

한편, 실수의 절댓값에서는 절댓값의 일부 성질이 증명되어 있으며, 임의의 실수 a에 대해 구간 $(a-\delta;\ a+\delta)$를 수 a의 근방, δ를 근방의 반지름으로 정의하였고, 이것을 부등식 $|x-a|<\delta$, $a-\delta<x<a+\delta$과 관련하여 설명하였다. 근방과 근방의 반지름은 기본수준에서는 ‘도함수’ 단원의 ‘수열의 극한’ 소단원에서 다루어지며, 이를 이용하여 수열의 극한을 정의하였다.

살펴본 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서 ‘실수’ 단원의 내용을 통해, 심화수준 교과서의 성격으로 수학적 개념 및 방법의 확장, 고등수학과의 연결성 시도, 수학적 엄밀성의 강조를 말할 수 있을 것이다. 특히 중등학교에 고등수학의 내용을 들여오거나 접목시키려는 시도에 대해서는 다양한 찬반 논의가 있을 수 있다. 이때 초등수학(중등학교 수학)을 중심으로 고등수학과 연결시킬 수도 있고, 고등수학을 중심으로 초등수학과 연결시킬 수도 있을 것이다. Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서는 초등수학을 확장하여 고등수학과의 연결을 시도하는 방향을 볼 수 있었으며, 이것은 수준별 교육에서 심화수준의 수학에 대해 논의하는 좋은 자료가 될 수 있을 것이다.

나. ‘복소수’ 단원

MORF의 심화수준 교육과정에서 복소수에 관련된 최소필수내용은 ‘복소수, 복소수의 기하학적 해석, 실수부, 허수부, 복소수의 절댓값과 편각, 복소수의 표기의 대수적 그리고 삼각함수적 형식, 복소수의 산술 연산, 켤레복소수, 지수가 자연수인 거듭제곱(무아브르 공식), 대수학의 기본 정리’이다. 이때, 복소수의 표기의 대수적 형식은 복소수 z를 $a+bi$과 같이 표기하는 것을 뜻하며, 삼각함수적 형식은 복소수 z를 $\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$와 같이 나타내는 것을 의미한다.

Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 제시된 복소수에 관련된 주요 학습 내용들을 정리하면 <표 Ⅲ-2>와 같다. MPRF의 심화수준 교육과정의 최소필수내용 ‘대수학의 기본 정리’에 대한 내용은 Mordkovich & Semenov(2007)의 11학년 심화수준 교과서에서 제시되어 있다.

---

[6] 교과서에 있는 공리 번호이며, 이것은 곱셈의 공리 중의 하나로 $(x+y)z=xy+xz$이다.

[7] 이것은 곱셈의 공리들 중 하나인 $xy=yx$이다.

<표 III-2> 심화수준 교과서 '복소수' 단원의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	심화수준 교과서의 주요 학습 내용
복소수, 복소수에서의 산술 연산들	허수단위 i, 복소수 $z=a+bi$, 복소수의 상등, 복소수들의 산술 연산(합, 차, 곱, 몫), 켤레복소수, 켤레복소수의 성질
복소수와 좌표평면	복소수 집합의 기하학적 모델, 좌표평면, 복소수를 좌표평면에 나타내기, 복소수 표현의 벡터적 접근, 복소평면
복소수의 삼각함수 표현 형식	복소수의 절댓값, 복소수 절댓값의 성질, 복소수 z의 삼각함수 표현 형식 $z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, 편각 $\arg z$, 영이 아닌 복소수 z를 $z=\lvert z\rvert(\cos\alpha+i\sin\alpha)$로 나타내기, 두 복소수 z_1, z_2의 곱 $z_1\cdot z_2$, 몫 $\frac{z_1}{z_2}$의 절댓값과 편각
복소수와 이차방정식	복소수 z의 제곱근 $\sqrt{z}$, 복소수 z의 제곱근 열기, $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\cdot\frac{b}{\lvert b\rvert}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$, $\sqrt{\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\pm\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, 계수가 복소수인 이차방정식 $az^2+bz+c=0$의 근은 $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, 계수가 복소수인 이차방정식 $az^2+bz+c=0$의 근과 계수의 관계(비에트의 정리), 비에트의 정리의 역
복소수의 거듭제곱, 복소수의 세제곱근 열기	무아브르의 정리($n\in N$에 대해 $(\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha))^n=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$), 무아브르의 정리를 $n\in Z$에 대해 확장, 복소수 z의 세제곱근 $\sqrt[3]{z}$, 복소수 z의 세제곱근 열기, $\sqrt[3]{z}=\left\{\sqrt[3]{\lvert z\rvert}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{3}\right)\middle\vert\, k=0,1,2\right\}$ $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

복소수와 관련하여 우리나라의 2015개정 수학과 교육과정에서는 복소수의 의미, 복소수의 사칙연산, 켤레복소수의 내용을 고등학교 '수학' 교과에서 다루는 것이 전부이다. 복소수의 삼각함수 표현 형식을 우리나라에서는 복소수의 극형식이라 하여 제6차 수학과 교육과정까지는 다루었으며, 무아브르 정리도 제6차 교육과정까지 고등학교 '수학II'에서 다루었지만, 그 이후에는 고등학교 교육과정에서 사라졌다.

제6차 수학과 교육과정에서는 고등학교 '공통수학'에서 복소수, 켤레복소수, 복소수의 사칙연산과 그 성질을 다루었고, '수학II'에서 복소평면, 극형식, 복소수의 절댓값, 편각, 드 무아브르의 정리(러시아 교과서에서는 무아브르 정리라 부름) 등을 다루었다. 이 내용을 MORF의 심화수준 교육과정에서 복소수에 관련된 최소필수내용과 비교하면 큰 차이가 없다. 그러나 <표 III-2>에 제시된 심화수준 교과서의 주요 학습 내용과 제6차 수학과 교육과정에 따른 수학교과서를 비교하면, 큰 차이를 보인다. 이러한 차이는 교육과정의 목표, 교과서 저자들의 교과서 집필 의도, 사회에서 통상적으로 용인되는 교과 내용의 범위 등에 의한 것으로 생각된다.

Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 '복소수' 단원의 특징으로 교과 내용의 확장(일반화), 고등수학과의 연결성, 엄밀성, 수학의 역사적 발생 과정의 기술, 수학의 다른 영역과의 연결 등을 들 수 있다. Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 이러한 특징들을 살펴보자.

우선, 켤레복소수에 관련된 기술을 살펴보자. Mordkovich & Semenov(2009, pp.247-248)에서는 복소수 z에 대한 켤레복소수 $\overline{z}$를 다루면서, 다음과 같은 켤레복소수의 성질을 제시하였다.

성질 1. 만약 $z=x+yi$이면, $\overline{z}\cdot z=x^2+y^2$

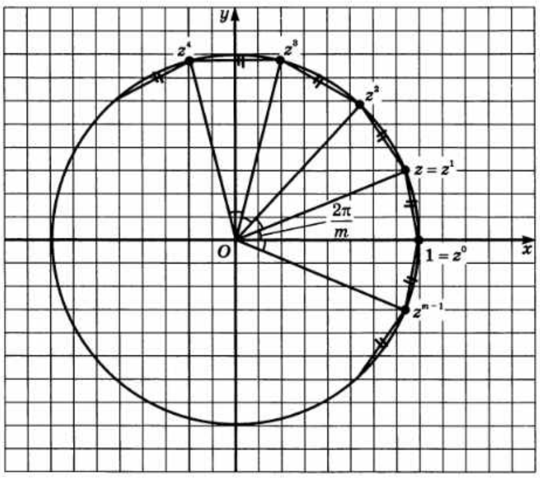
성질 2. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

성질 3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
성질 4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
성질 5. $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$
성질 6. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, $n \in N$

우리나라 수학교과서도 켤레복소수를 다루지만, 복소수 $a+bi$의 켤레복소수가 $a-bi$라는 것을 아는 정도로만 제시하고 있다. 살펴본 켤레복소수의 성질들은 대학교 수준의 수학교육에서 다루게 된다. 그러나 러시아의 심화수준 교과서에서는 이를 다루고 있다. 한 가지 흥미로운 것은 우리나라의 교육과정과 러시아의 교육과정에서 켤레복소수에 대해 모두 '켤레복소수' 정도로만 기술되어 있는데, 실제로 두 나라의 교과서에 기술된 내용은 큰 차이를 보이고 있다는 점이다. 한편 성질 5는 성질 4를 일반화하여 얻어지는 사실로, 여기서도 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서의 한 특징인 일반화를 볼 수 있다.

다른 예로, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 무아브르 정리의 기술을 살펴보자. Mordkovich & Semenov(2009, pp.280-282)에 다음의 무아브르 정리와 따름정리가 기술되어 있다.

정리 1(무아브르 공식). $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in N$
따름정리 1. $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in Z$
따름정리 2. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, $n \in Z$
따름정리 3. 만약 복소수 z의 절댓값이 1이고 편각이 $\dfrac{2\pi}{m}$(이때 $m = 3, 4, 5$)이면, 거듭제곱 z^0, z^1, z^2, $\cdots$, z^{m-1}은 복소평면에서 단위원에 내접한 정m각형의 꼭짓점 집합을 만든다([그림 III-2]).



[그림 III-2] 정m각형과 복소수

Mordkovich & Semenov(2009)에는 정리 1, 따름정리 1, 따름정리 2의 증명이 기술되어 있어, 엄밀한 논증을 기반으로 교과서 기술되었다는 것을 알 수 있다. 그리고 정리 1에서는 자연수인 n에 대해 등식

$(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$이 성립한다는 것을 보였는데, 따름정리 1에서는 n을 확장하여 정수인 n에 대해 등식이 성립함을 증명하였다. 따름정리 2는 따름정리 1에서 $\rho = 1$인 경우에 해당하는데, 따름정리 2와 관련하여 Mordkovich & Semenov(2009, p.282)는 '무아브르는 1707년에 이 등식을 증명했고, 우리가 위에서 사용한 무아브르의 이름이 붙은 공식은 1748년에 오일러가 제시한 것'이라고 기술하면서, 정리 1에 제시된 무아브르 공식의 역사적 형성 과정을 소개하였다. 한편, 따름정리 3을 통해, Mordkovich & Semenov는 무아브르 정리가 복소수의 거듭제곱에 사용될 뿐만 아니라 기하학의 중요한 연구주제였던 정m각형의 작도와도 관련된다는 것을 기술하여, '대수'와 '기하학'의 내적 연결성에 대해서도 다루었다.

Mordkovich & Semenov(2009)의 심화수준 교과서의 이러한 특징은 우리나라의 제6차 수학 교육과정에 따른 수학교과서와 비교하면 잘 알 수 있다. 살펴본 Mordkovich & Semenov(2009)의 심화수준 교과서 내용과 관련하여, 우리나라의 수학II 교과서(우정호, 1997, pp.176-177)에서는 n이 자연수인 경우와 정수인 경우에 대해 $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$을 제시하고 증명하였다. 즉, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 일반화된 형태인 정리 1을 다루었고, 무아브르 정리와 수학의 다른 분야의 연결성을 추가적으로 다루고 있다는 것을 알 수 있다.

3. 10학년 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에 제시된 주요 학습 내용의 비교

앞에서 심화수준 교과서에 제시된 심화된 주요 학습 내용과 내용 기술의 특징을 통해 수준별 교수 내용에 대해 분석했다면, 여기서는 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에 제시된 주요 학습 내용을 비교하면서 그 차이점에 초점을 맞추어 수준별 교수 내용에 대해 논의할 것이다.

10학년의 Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 제시된 동일한 단원명이 '함수', '삼각함수', '삼각방정식', '삼각함수 식들의 변환', '도함수'이다. 이 단원들을 자세히 살펴보자.

가. '함수' 단원

기본수준과 심화수준의 교과서 '함수' 단원에 제시된 주요 학습 내용을 <표 III-3>으로 정리할 수 있다. 이때, <표 III-3>에 기술된 소단원명은 심화수준 교과서에 제시된 소단원을 중심으로 기술하였다.

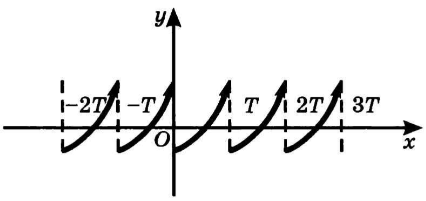
<표 III-3> '함수' 단원의 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용
함수의 정의와 제시 방법	함수, 정의역, 독립변수, 종속변수, 함숫값, 함수의 그래프
함수의 성질	증가함수, 감소함수, 단조함수, 아래로 유계, 위로 유계, 유계, 극댓점, 극솟점, 극점, 최솟값, 최댓값, 위로 볼록, 아래로 볼록, 우함수, 기함수
주기함수	주기, 주기함수, 기본주기
역함수	일대일함수, 역함수

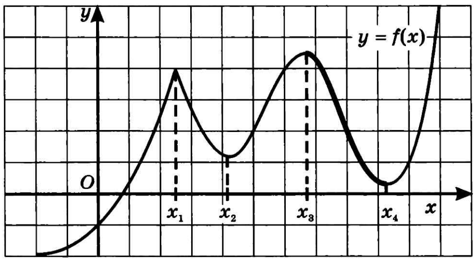
<표 III-3>에서 살펴본 것과 같이, 기본수준과 심화수준 교과서에 제시된 주요 학습 내용이 비슷하다는 것을 알 수 있다. 이때 주의할 것은 심화수준의 '함수의 성질' 소단원에 제시된 내용 중에서 극댓점, 극솟점, 극점을 기본수준에서는 '도함수' 단원의 '함수의 탐구를 위한 도함수 활용' 소단원에서 다루며, 심화수준의 '주기함수' 소단원의 내용을 기본수준에서는 '삼각함수' 단원의 '함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$의 주기성' 소단원에서 다루고 있다는 것이다. 이와 같이, 극댓점, 극솟점, 극점, 주기, 주기함수, 기본주기를 기본수준과 심화수준의 교과서에서 다

른 소단원에 제시한 것은 이 개념들에 관련된 수학적 대상들을 축소시켜 기본수준 교과서를 배우는 학생들의 학습 부담을 줄여주기 위한 것으로 생각할 수 있다.

심화수준 교과서에서는 함수 자체의 성질로서 일반화된 맥락에서 극값이나 주기성을 다루는 반면, 기본수준에서는 도함수의 활용이나 $y=\sin x$, $y=\cos x$과 같은 특정한 구체적인 맥락에서 극값이나 주기성을 다루었다. 실제로, 심화수준에서는 주기, 기본주기를 설명하면서 <그림 III-3>과 같은 주기함수를 이용하였지만 (Mordkovich & Semenov, 2009, p.81), 기본수준에서는 $y=\sin x$의 성질과 그래프, $y=\cos x$의 성질과 그래프를 모두 배운 후에, $y=\sin x$, $y=\cos x$에 관련하여 주기, 주기함수, 기본주기에 대해 다루었다. 극값에 관련하여서도 심화수준에서는 <그림 III-4>를 이용하여 도함수와 관련짓지 않고 일반적인 경우의 함수 $y=f(x)$에서 극댓점, 극솟점, 극점의 개념을 설명하였다(Mordkovich & Semenov, 2009, p.72).



[그림 III-3] 주기함수의 그래프



[그림 III-4] 함수 $y=f(x)$의 극값

나. '삼각함수' 단원

기본수준과 심화수준의 교과서 '삼각함수' 단원에 제시된 주요 내용을 <표 III-4>로 나타낼 수 있다. 기본수준과 심화수준 교과서에서 소단원 '사인과 코사인, 탄젠트와 코탄젠트'에서 삼각함수들 사이의 관계로는 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, $\sin(-t)=-\sin t$, $\cos(-t)=-\cos t$, $\tan(-t)=-\tan t$, $\cot(-t)=-\cot t$, $\sin(t+2\pi k)=\sin t$, $\cos(t+2\pi k)=\cos t$, $\sin(t+\pi)=-\sin t$, $\cos(t+\pi)=-\cos t$, $\tan(t+\pi k)=\tan t$, $\cot(t+\pi k)=\cot t$, $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t$, $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin t$를 다루고 있으며, 소단원 '변수가 수인 삼각함수'에서는 삼각함수들 사이의 관계로 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$에 대해 $\tan t=\frac{\sin t}{\cos t}$, $t\neq\pi k$에 대해 $\cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$, $t\neq\frac{\pi k}{2}$에 대해 $\tan t\cdot\cot t=1$, $t\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$에 대해 $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$, $t\neq\pi k$에 대해 $1+\cot^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$를 다루고 있다. 이것은 우리나라 고등학교에서 다루는 삼각함수들 사이의 관계와 크게 다르지 않는다고 할 수 있다.

한편, 소단원 '역삼각함수'에 제시된 역삼각함수를 포함한 식들의 변환은 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$, $\arccos x+\arccos(-x)=\pi$, $\arctan(-x)=-\arctan x$, $\mathrm{arccot}(-x)=\pi-\mathrm{arccot}\,x$, $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$, $\arctan x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arccot}\,x$가 있다. 역삼각함수와 그 식들의 변환은 우리나라에서는 중등학교에서는 배우지 않으며, 주로 대학교에서 배우는 내용들이다.

<표 III-4> '삼각함수' 단원의 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용
수원(numerical circle)	수원, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면, 단위원, 주어진 수에 대응하는 점을 수원에 표시하기, 수원의 주어진 호에 대응하는 수를 구하기
좌표평면에서 수원	수원의 점에 대응하는 좌표평면의 좌표를 구하기, 좌표평면의 주어진 도형에 대응하는 수원의 수를 구하기
사인과 코사인, 탄젠트와 코탄젠트	수원의 점을 이용하여 수 t에 대한 코사인, 사인, 탄젠트, 코탄젠트의 정의, 삼각함수들 사이의 관계
변수가 수인 삼각함수	임의의 실수 t에 대한 삼각함수 $f(t)=\sin t$, $f(t)=\cos t$, $f(t)=\tan t$, $f(t)=\cot t$, 삼각함수들 사이의 관계
변수가 각인 삼각함수	각 α°의 사인, 코사인의 정의, $\alpha^\circ=\dfrac{\pi\alpha}{180}\mathrm{rad}$(라디안), $1\mathrm{rad}\approx 57.3^\circ$
함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$, 이들의 성질과 그래프	사인함수의 성질(정의역, 기함수, 증가 및 감소 구간, 함수의 유계, 함수의 최댓값과 최솟값, 연속, 치역), [위로 볼록인 구간][8], [아래로 볼록인 구간], 사인함수의 그래프 코사인함수의 성질(정의역, 우함수, 증가 및 감소 구간, 함수의 유계, 함수의 최댓값과 최솟값, 연속, 치역), [위로 볼록인 구간], [아래로 볼록인 구간], 코사인함수의 그래프
함수 $y=mf(x)$의 그래프 작도	사인함수와 코사인함수에 대한 $y=mf(x)$의 그래프
함수 $y=f(kx)$의 그래프 작도	사인함수와 코사인함수에 대한 $y=f(kx)$의 그래프
[조화진동의 그래프]	[조화진동의 방정식 $s=A\sin(\omega t+\alpha)$], [$s=A\sin(\omega t+\alpha)$의 그래프]
함수 $y=\tan x$와 $y=\cot x$, 이들의 성질과 그래프	$y=\tan x$의 성질(정의역, 주기성과 주기, 기함수, 증가구간, 위로도 아래로도 유계이지 않음, 최댓값도 최솟값도 없음, 연속인 구간, 치역), 탄젠트 함수의 그래프 코탄젠트 함수의 그래프
역삼각함수	함수 $y=\arcsin x$의 정의, [성질(정의역, 치역, 기함수, 증가함수, 연속함수)], $y=\arcsin x$의 그래프 함수 $y=\arccos x$의 정의, [성질(정의역, 치역, 기함수도 우함수도 아님, 감소함수, 연속함수)], $y=\arccos x$의 그래프 함수 $y=\arctan x$의 정의, [성질(정의역, 치역, 기함수, 증가함수, 연속함수)], $y=\arctan x$의 그래프 함수 $y=\mathrm{arccot}\, x$의 정의, [성질(정의역, 치역, 기함수도 우함수도 아님, 감소함수, 연속함수)], $y=\mathrm{arccot}\, x$의 그래프 역삼각함수를 포함한 식들의 변환

이제, 기본수준과 심화수준 교과서의 내용을 비교해 보자. 소단원 '함수 $y=\sin x$와 $y=\cos x$, 이들의 성질과 그래프'에서 심화수준에는 위로 볼록인 구간, 아래로 볼록인 구간의 내용이 추가되었다. 여기에는 $y=\sin x$는 구간 $[0,\pi]$에서 위로 볼록이고 구간 $[\pi,2\pi]$에서는 아래로 볼록이라는 성질, $y=\cos x$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$에서 위로 볼록이고 구간 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$에서는 아래로 볼록이라는 성질이 기술되어 있다. <표 II-2>에 제시된 MPRF의 기본수준과 심화수준 교육과정에서는 $y=\sin x$, $y=\cos x$과 관련하여 이들의 성질과 그래프, 주기성이 공통 내용으로 기술되었을 뿐, 살펴본 $y=\sin x$와 $y=\cos x$의 볼록성에 대해서는 그 차이가 기술되어 있지 않다. 이것은 기본수준과 심화수준 교육과정에서 같은 최소필수내용이 제시되고 교과서에서도 같은 주제를 다루지만, 실제로 기본수준과 심화수준 교과서에 기술된 학습 내용의 범위가 다른 경우라고 할 수 있다. 이를 통해, 기

8) 괄호 [ ] 안에 기술된 것은 심화수준 교과서에는 제시되었지만, 기본수준 교과서에는 빠진 내용이다.

본수준과 심화수준의 교육에서 같은 주제를 다루면서도 배우는 학습 내용의 범위와 양에 차등을 두어 수준별 교육을 할 수 있다는 것을 알 수 있다.

한편, 소단원 '조화진동의 그래프'는 기본수준에는 없고 심화수준에서만 다루는 소단원이다. 여기서는 $s=A\sin(\omega t+\alpha)$와 같은 조화진동 방정식에서 A, ω, α의 물리적 의미를 설명하고, A, ω, α가 주어진 구체적인 경우에 대해 그래프를 작도하는 활동이 제시되어 있다. 이러한 조화진동 $s=A\sin(\omega t+\alpha)$에 대한 내용이 심화수준에 포함되었다는 것은 삼각함수의 식을 변형하는 것뿐만 아니라, 삼각함수 식의 실세계 활용 가능성 또는 물리 교과와의 연결성 확인 등이 심화수준 교과서 구성의 한 방향이 될 수 있다는 것을 의미한다.

역삼각함수와 관련하여서는 기본수준에서는 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$를 '삼각방정식' 단원에서 방정식 풀이를 위해 필요한 정의와 그래프 정도만 다루고 있지만, 심화수준에서는 이 역삼각함수들을 '삼각함수' 단원에서 정의, 그래프뿐만 아니라 정의, 정의역, 치역, 기함수, 증가, 연속성 등의 함수적 성질을 다양하게 다루고 있다. 즉, 기본수준에서는 방정식 풀이를 위한 도구로써 역삼각함수를 다루었으며, 심화수준에서는 삼각함수의 역함수인 함수로 다루기 때문에 역삼각함수의 다양한 함수적 성질들을 제시한 것이다. 같은 학습 내용이라 하더라도 어느 단원에서 다루느냐에 따라 학습 내용의 양과 범위를 달리 할 수 있다는 것은 수학교육과정, 수학교과서의 구성에서 의미로운 시사점을 줄 수 있을 것이다.

다. '삼각방정식' 단원

기본수준과 심화수준의 교과서 '삼각방정식' 단원에 제시된 주요 내용들을 <표 III-5>로 나타낼 수 있다.

<표 III-5> '삼각방정식' 단원의 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용
평이한 삼각방정식과 부등식	방정식 $\cos x=a$의 풀이, 방정식 $\sin x=a$의 풀이, 방정식 $\tan x=a$의 풀이, [방정식 $\cot x=a$의 풀이], [삼각부등식의 풀이]
삼각방정식의 해법	새로운 변수 도입하는 치환 방법, 인수분해 방법, 동류삼각방정식[9]

기본수준에서는 $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\tan x=a$인 삼각방정식의 일반해를 다루지만, 심화수준에서는 $\cot x=a$인 삼각방정식의 일반해와 삼각부등식의 일반해를 추가로 다룬다. 즉, $|a|\le 1$인 경우에 $\cos x=a$의 해를 우리나라 수학 교과서에서는 특수해를 다루지만, 러시아의 교과서에서는 $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$인 일반해를 기본수준과 심화수준에서 모두 다루고 있다.

삼각부등식의 풀이와 관련하여서는 심화수준에서 삼각방정식 풀이를 바탕으로 삼각부등식의 풀이 방법을 설명하고, $\tan x<1$, $\tan x>-2$와 같은 삼각부등식의 풀이를 다루고 있다. 그리고 심화수준의 선택내용으로 $\begin{cases}\cos x\ge -\dfrac{2}{3}\\ \tan x\le 2\end{cases}$와 같은 연립부등식을 제시하였다.

심화수준과 기본수준 교과서 구성에서 한 가지 주목할 것은 심화수준에는 '삼각방정식의 해법'이라는 소단원이 독립적으로 기술되어 있지만, 기본수준에서는 이 소단원의 내용이 소단원 '삼각방정식'의 일부로 기술되어 있다. 그 결과, 심화수준과 기본수준의 교과서에서 삼각방정식 및 그 해법에 할애된 교과서 분량에도 차이가 나고, 그 기술의 양, 깊이에서도 차이가 난다. 즉, 심화수준 교과서에는 문제해결 방법에 많은 교수학적 관심과 강조가 나타나 있다고 할 수 있다.

---

9) $a\sin x+b\cos x=0$인 형태의 방정식을 동류일차삼각방정식이라 부르고, $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$인 형태의 방정식을 동류이차삼각방정식이라 부른다(Mordkovich & Semenov, 2009, p.191).

라. '삼각함수 식들의 변환' 단원

기본수준과 심화수준의 교과서 '삼각함수 식들의 변환' 단원에 제시된 주요 학습 내용을 <표 III-6>으로 나타낼 수 있다.

<표 III-6> '삼각함수 식들의 변환' 단원의 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용
사인과 코사인의 합과 차	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
탄젠트의 합과 차	$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
변형 공식	$n \in Z$에 대해 $\dfrac{\pi n}{2} \pm t$인 형태의 값을 포함하는 삼각함수 식을 변수 t에 대한 평이한 삼각함수 식으로 변형시키기
2배각 공식들, 차수를 낮추는 공식들	$\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$, $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$, $[\tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}]$
삼각함수의 합을 곱으로 변형	$\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x \pm y}{2} \cos\dfrac{x \mp y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$
삼각함수의 곱을 합으로 변형	$\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$, $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$, $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
[식 $A\sin x + B\cos x$를 $C\sin(x+t)$인 형태로 변형]	$[A\sin x + B\cos x = C\sin(x+t)$, 이때 $C = \sqrt{A^2+B^2}\,]$
[삼각방정식의 해법 (연속)]	[보조변수 도입 방법(새로운 변수 도입 방법의 부분적인 경우임)], [삼각함수 공식들과 결합하여 새로운 변수 도입 방법, 인수분해 방법을 이용하기]

소단원 '사인과 코사인의 합과 차'에는 기본수준과 심화수준 교과서에 모두 사인과 코사인의 합과 차 공식이 제시되어 있다. 그러나, 기본수준 교과서에는 공식과 공식을 활용한 문제해결만 있지만, 심화수준 교과서에는 공식뿐만 아니라 공식의 증명, 공식을 활용한 문제해결이 제시되어 있다. 여기서는 공식의 증명 여부를 중심으로 기본수준과 심화수준의 교과서 내용이 차등적으로 구성되어 있음을 알 수 있다.

탄젠트의 합과 차 공식에 관련하여, 사인과 코사인의 합과 차 공식과는 달리 기본수준 교과서에 이 공식의 증명이 선택내용으로 제시되어 있다(심화수준에서는 이 증명이 필수내용으로 제시되었음). 즉, Mordkovich는 기본수준 교과서에서 필수내용으로 부과되지 않는 공식의 증명에 대해서는 그 증명을 생략하거나 선택내용으로 제시하여 교사가 증명을 다룰지 여부를 선택할 수 있도록 하였다.

반각공식과 관련하여서는 <표 II-1>에서는 반각공식을 졸업요구수준은 아니지만 최소필수내용으로 제시하였지만, Mordkovich의 기본수준에서는 사인과 코사인의 반각공식만 다루고 탄젠트의 반각공식은 다루지 않았고, 심화수준에서만 탄젠트의 반각공식을 다루었다.

한편, 소단원 '식 $A\sin x + B\cos x$를 $C\sin(x+t)$인 형태로 변형'은 심화수준 교과서에만 있는 단원으로, 여기서는 $A\sin x + B\cos x = C\sin(x+t)$(이때 $C = \sqrt{A^2+B^2}$)를 유도하고 이를 이용하여 삼각함수 식의 최댓값과 최솟값을 구하고, 방정식 $5\sin x - 12\cos x = 13$을 푸는 것을 다루었다. 반면에, 기본수준에서는 유사

한 내용을 소단원 '삼각함수의 합을 곱으로 변형'에서 선택내용으로 제시하고 있다. 선택내용은 교사의 판단에 의해 지도할 수도 있고 생략할 수도 있기 때문에, 이 내용을 <표 Ⅲ-6>에는 괄호 [ ] 안에 표기하였다.

<표 Ⅲ-6>에서 소단원 '삼각방정식의 해법'은 기본수준에는 없지만 심화수준에 있는 소단원이다. 앞에서도 언급했듯이, 심화수준 교과서에서는 방정식의 해법(문제해결 방법)에 많은 관심이 주어졌다는 것을 알 수 있다. '삼각방정식' 단원에서는 기본수준과 심화수준 교과서에 유사한 방정식의 해법이 기술되었지만, 이 단원에서는 기본수준 교과서에는 방정식의 해법에 대한 기술이 전혀 없다.

이 소단원에 소개된 방정식의 해법 중의 하나인 보조변수의 도입 방법을 살펴보자. 이 방법은 $R(\sin x, \cos x)=0$과 같은 형태의 삼각방정식에 $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$임을 이용하여 $\tan\frac{x}{2}=u$로 치환하여 $R(\sin x, \cos x)=0$을 $R\left(\dfrac{2u}{1+u^2}, \dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)=0$과 같은 u에 대한 유리방정식으로 변형시켜 삼각방정식을 해결하는 방법이다. 이 방법은 우리나라에서는 고등학교에서는 다루지 않으며, 대학교의 수준에서 많이 다룬다.

마. '도함수' 단원

기본수준과 심화수준의 교과서 '도함수' 단원에 제시된 주요 내용을 <표 Ⅲ-7>로 나타낼 수 있다. 소단원 '수열'에서는 수열의 제시 방법으로 심화수준에서는 분석적 방법과 재귀적 방법이 소개되었는데, 기본수준에서는 재귀적 방법은 제시되지 않았다. 러시아 교과서에서는 $y_n=2^n$과 같이 일반항으로 수열의 제시되는 방법을 분석적 방법이라 하고, $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$와 같이 점화식의 형태로 수열이 제시되는 것을 재귀적 방법이라 부른다. 기본수준 교과서에서는 재귀적 방법이 다루어지지 않기 때문에 점화식에 대한 내용은 포함되지 않는다.

<표 Ⅲ-7>을 보면 기본수준과 심화수준에서 소단원 '수열의 극한'의 주요 학습 내용은 같지만, 그 안에서 다루는 정리, 성질에서는 차이가 있다. 실제로, 수열의 성질과 관련하여 수열의 극한은 오직 하나이며, 수렴하는 수열은 유계이고, 수열이 단조수열이고 유계이면 수열은 수렴한다는 성질 등이 심화과정에서 추가로 제시되었다. 그리고 임의의 자연수 지수 m과 임의의 k에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n^m}=0$이라는 것도 추가로 제시되었다.

기본수준과 심화수준에서 다루는 미분 공식으로는 $C'=0$, $x'=1$, $(kx+m)'=k$, $(x^2)'=2x$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$이 있으며, 미분 규칙들로는 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$, $(kf(x))'=kf'(x)$, $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $(x^n)'=nx^{n-1}$, $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$가 있다. 한편, 기본수준에서는 n계 도함수나 n계 도함수 구하는 것은 다루지 않는다.

<표 III-7> '도함수' 단원의 기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용

소단원 \ 수준	기본수준과 심화수준 교과서의 주요 학습 내용
수열	수열, 수열 제시의 분석적 방법, [수열 제시의 재귀적 방법], 위로 유계, 아래로 유계, 수열의 유계, 증가수열, 감소수열, 단조수열
수열의 극한	수열의 극한, 수렴, 발산, 수렴하는 수열의 성질들, 수열의 극한 계산(수열들의 합의 극한, 수열들의 곱의 극한, 수열들의 몫의 극한, 수열의 상수배의 극한), 무한등비급수의 합
함수의 극한	무한에서 함수의 극한: 수렴하는 함수들에 대해 합의 극한, 곱의 극한, 몫의 극한, 상수배의 극한; 점에서 함수의 극한, 점 $x=a$에서 함수 $y=f(x)$의 연속; 변수의 증분 Δx, 함숫값의 증분 Δy 또는 Δf
도함수의 정의	도함수의 개념으로 귀착되는 문제들, 점 x에서 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 도함수의 기하학적 의미, 도함수를 구하는 방법, 점 x에서 미분가능, 미분가능과 연속성
도함수의 계산	미분공식, 미분 규칙들, [n계 도함수의 개념], [n계 도함수 구하기]
[합성함수의 미분, 역함수의 미분]	[합성함수 미분], [역함수의 미분]
함수의 그래프에 대한 접선의 방정식	점 $M(a, f(a))$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 대한 접선의 방정식 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, 함수의 근삿값 $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$ 구하기
함수의 탐구를 위한 도함수의 활용	함수의 단조성 탐구, 함수의 극점 찾기. 정류점(stationary point), 임계점(critical point), 변곡점(inflection point), [중단점(breaking point)]; [항등식과 부등식 증명을 위해 도함수 활용하기]
함수의 그래프 작도	정류점과 임계점, 극점, 그래프와 x축, y축과의 교점, 함수의 불연속점을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 작도하기
최댓값과 최솟값을 구하기 위해 도함수의 활용	구간에서 정류점, 임계점, 극댓점, 극솟점을 이용하여 연속인 함수의 최댓값과 최솟값 구하기

기본수준에서는 합성함수의 미분이나 역함수의 미분은 다루지 않는데, 심화수준에서는 합성함수 미분으로 $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$, $(f(kx+m))'=k\cdot f'(kx+m)$을 다루며, 역함수 미분은 심화수준의 선택 내용으로 제시되어 있다. 역함수 미분에서는 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=g(y)$에 대해 $x_y{}'=\frac{1}{y_x{}'}$, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$이 제시되어 있는데, 이들은 우리나라에서는 대학교 수준의 미적분학에서 다루는 내용이다.

소단원 '함수의 탐구를 위한 도함수의 활용'에는 항등식과 부등식의 증명에 도함수를 활용하는 방법이 심화수준에만 제시되어 있다. 일반적으로 도함수의 활용은 함수의 그래프 탐구, 극값 구하는 것이 중심을 이루는데, 심화수준 교과서에서는 '연속함수 $y=f(x)$가 구간 X에서 상수함수일 필요충분조건은 구간 X의 모든 내부점에서 도함수가 0인 것'이라는 정리를 기술하고, 이를 이용하여 $\arctan x+\mathrm{arccot}\, x=\frac{\pi}{2}$와 같은 등식을 증명하였다. 이로부터, 심화수준 교과서의 한 특징으로 배운 개념(도함수)을 활용한 새로운 수학적 탐구(등식과 부등식의 증명)의 기회 부여라는 것을 알 수 있을 것이다.

4. 10학년 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에 제시된 학습 내용 기술의 비교

10학년 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에 제시된 주요 학습 내용을 살펴보았다. 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에서 같은 학습 내용을 다루지만, 학습 내용의 설명, 기술에서 차이를 보일 수 있는데, 기본수준과 심화수준 교과서를 비교하며 이를 살펴보자.

우선, 정의에 관련된 기술을 살펴보자. Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 기술된 수학적 개념의 정의를 비교하면, 대부분은 일치하지만, 약간의 차이를 보이는 것이 있다. 가령, 기본수준 교과서(Mordkovich, 2009, p.138)와 심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, p.299)에 수열의 위로 유계에 대한 정의가 각각 다음과 같이 기술되어 있다.

정의 2. 수열 (y_n)의 모든 항들이 어떤 수보다 크지 않으면, 수열을 위로 유계라고 부른다.
정의 2. 임의의 $n \in N$에 대해 부등식 $y_n \le M$이 성립하는 그러한 수 M이 존재하면, 수열 (y_n)을 위로 유계라고 부른다.

첫 번째 정의는 기본수준 교과서에 기술된 정의이고, 두 번째 것은 심화수준 교과서에 기술된 것인데, 두 정의의 그 의미는 같지만 기술 방식에서 차이가 난다. 심화수준 교과서의 정의는 기본수준 교과서에 비해 수식을 사용하여 엄밀하게 기술되어 있다고 할 수 있다. 같은 저자 그룹에 의해 저술된 같은 학년의 수학교과서에 기술된 수학적 정의가 그 엄밀성에서 차이가 난다는 것이 다소 생소할 수 있을 것이다. 그러나 러시아에서는 교과서마다 다른 수준의 엄밀성으로 수학적 정의가 기술되는 사례가 종종 있다.

가령, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서와 다른 저자 그룹의 심화수준 교과서에서 다른 엄밀성 수준에서 기술된 개념의 정의를 찾아볼 수 있다. Mordkovich & Semenov(2009, p.302)는 수열 (y_n)의 극한을 ‘수열의 어떤 항에서 시작하여 나머지 모든 항들이 점 b의 임의의 이미 선택된 근방에 속하면, 수 b를 수열 (y_n)의 극한이라 부른다’고 정의하였는데, Kolyagin et al.(2010, p.46)에서는 ‘각각의 $\varepsilon > 0$에 대해 $n \ge N_\varepsilon$인 모든 n이 부등식 $|x_n - a| < \varepsilon$을 만족시키는 그러한 N_ε이 존재하면, 수 a를 수열 $\{x_n\}$의 극한’이라고 정의하였다. 이때 Kolyagin et al.의 정의가 Mordkovich & Semenov의 정의보다 더 엄밀한 수학적 정의라 할 수 있을 것이다.

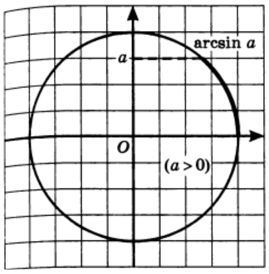
한편, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서를 비교하면, 정의에 대한 추가적인 기술(설명)에서도 차이점을 찾을 수 있다. 심화수준 교과서(또는 기본수준)에서는 정의에 대한 추가적인 기술이 있지만, 기본수준(또는 심화수준)에서는 그러한 기술이 생략되는 경우가 있는데, 대부분의 경우는 심화수준 교과서에는 정의에 대한 추가적인 기술이 있지만 기본수준에는 이것이 생략된다. 예를 들어, 심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, p.152)에서는 사인의 역함수 $\arcsin a$를 다음과 같이 정의하고 있다.

만약 $|a| \le 1$이면 $\arcsin a$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에서 사인값이 a인 수를 말한다. 즉, $|a| \le 1$이면,

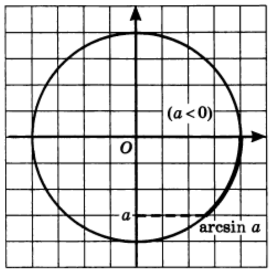
$$\arcsin a = t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

이와 같이 $\arcsin a$를 정의한 후에 추가적으로 다음 내용이 기술되어 있다(Mordkovich & Semenov, 2009, pp.152-153): ‘$\arcsin a$의 기하학적인 도해가 <그림 III-4(a), (b)>에 제시되어 있다. <그림 III-4(c)>는 $\arcsin(-a) = -\arcsin a$을 시각적으로 보여준다. 특히, 이 그림은 아크사인($\arcsin$)이라는 용어의 뜻을 포함

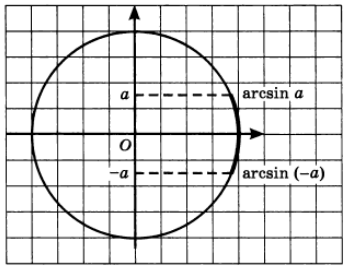
하고 있다: arcus는 라틴어로 호라는 뜻이다'.



[그림 III-4(a)] $\arcsin a$



[그림 III-4(b)] $\arcsin a$



[그림 III-4(c)] $\arcsin a$

그러나 기본수준 교과서에서는 아크사인의 정의에 대한 추가적인 기술이 생략되었다. 기본수준 교과서에 새로운 수학적 개념에 대한 상세한 설명이 추가적으로 기술되어야 할 것으로 생각될 수도 있지만, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서를 비교해 보면, 심화수준 교과서에 자주 추가적인 서술이 기술되어 있는 것을 확인할 수 있다. 이것은 추가적인 기술 자체가 학생들에게 학습 부담을 줄 수도 있고, 기본수준에 배정된 수학 교과 시간이 적다는 것을 고려한 것으로 추측할 수 있을 것이다.

정의에 대한 추가적인 기술의 다른 경우로, 심화수준 교과서에서는 정의에 대한 추가적인 설명이 필수내용으로 제시되어 있지만, 기본수준에서는 선택내용으로 제시되는 경우가 있다. 예를 들어, 심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, pp.302-303)에서는 수열의 극한을 정의하고 나서, 다음 내용이 일반내용으로 기술되어 있다.

> $\lim_{n\to\infty} y_n = b$라 하자. 구간 $(b-r_1, b+r_1)$, 즉 점 b의 근방을 잡자. 이때 r_1은 이 근방의 반지름이다 $(r_1 > 0)$. n_1항에서 시작하여 모든 수열이 이 근방에 속하게 되는 n_1이 존재한다: $y_{n_1} \in (b-r_1, b+r_1)$, $y_{n_1+1} \in (b-r_1, b+r_1)$, $y_{n_1+2} \in (b-r_1, b+r_1)$ 등. 만약 구간 $(b-r_2, b+r_2)$를 잡으면 어떻게 될 것인가? (중략)

그러나, 기본수준 교과서에서는 이 내용이 선택내용으로 기술되어 있다. 즉, 이 내용은 학습 상황과 학생들의 수준을 고려하여 교사의 선택에 의해 지도할 수도 있고 또는 지도하지 않을 수도 있는 것이다. 이와 같은 방법으로 수업 시간에 학생들에게 수준별 접근을 할 수 있으며, 이러한 접근이 수준별 차등화에 의한 수준별 교육이라 할 수 있다.

이제, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에서 정리(성질)의 기술에서 수준별 차이점을 살펴보자. 기본수준 교과서와 심화수준 교과서를 비교하면, 심화수준 교과서에 기술된 정리가 기본수준에서는 약화된 정리로 또는 정리가 아닌 내용 설명으로 기술된 경우가 있고, 심화수준에서 정리의 증명이 필수내용으로 기술된 것이 기본수준에서는 선택내용으로 기술되었거나 생략된 경우가 있다.

심화수준에 기술된 정리가 기본수준에서는 약화되어 기술된 경우를 살펴보자. 기본수준(Mordkovich, 2009, p.181)과 심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, p.362)에 상수함수와 관련하여 다음 정리가 각각 기술되어 있다.

정리. 개구간 X의 모든 점에서 등식 $f'(x)=0$이 성립하면, 함수 $y=f(x)$는 구간 X에서 상수함수이다.
정리. 연속함수 $y=f(x)$가 구간 X에서 상수함수일 필요충분조건은 구간의 모든 내부점에서 도함수가 0인 것이다.

첫 번째 정리는 기본수준 교과서에 기술된 것이고, 두 번째 정리는 심화수준 교과서에 기술된 것이다. 심화수준에서는 함수 $f(x)$가 상수함수일 필요충분조건이 기술되었지만, 기본수준 교과서에서는 이것이 약화되어 충분조건만 기술되어 있다.

이와 같은 차이의 원인은 이 정리가 기본수준과 심화수준 교과서의 어떤 맥락에서 기술되었는가를 분석해야 이해될 수 있을 것이다. 기본수준에서는 소단원 '함수의 탐구를 위한 도함수의 활용'에서 함수의 단조성 탐구를 위해 이 정리가 기술되었다. 그러나 심화수준에서는 함수의 단조성 탐구에서는 기본수준에서와 같이 충분조건만을 내용 설명으로 기술한 후에(정리의 형태가 아닌), 항등식과 부등식 증명을 위해 도함수 활용하기와 관련하여 위와 같은 필요충분조건을 포함한 정리로 기술하였다(기본수준에서는 도함수를 활용한 항등식과 부등식의 증명은 다루지 않음).

결국, 살펴본 두 정리는 상수함수와 도함수에 대한 같은 내용을 포함하고 있지만, 기본수준과 심화수준 교과서에서 그 역할과 쓰임이 다르기 때문에, 기본수준 교과서에서는 충분조건만 다루고 심화수준 교과서에서는 필요충분조건이 기술된 것이다.

한편, 심화수준 교과서에서는 성질로 기술되어 그 증명이 함께 제시되었는데 기본수준에서는 사실만 간단히 언급하는 경우가 있다. 심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, pp.124-125)에 사인함수의 주기성과 관련하여 다음 성질이 증명과 함께 기술되어 있다.

성질. 함수 $u=\sin t$는 주기함수이고, 기본주기는 2π이다.
증명. $T=2\pi$가 주기라는 것을 알 수 있는데, 이것은 수원에서 수 t, $t-2\pi$, $t+2\pi$에 대해 같은 점이 대응되기 때문이다. 즉 $\sin(t-2\pi)=\sin t=\sin(t+2\pi)$가 성립한다. 이제, 2π가 기본주기라는 것을 증명하자. 귀류법으로, $0<T_1<2\pi$인 주기 T_1이 존재한다고 가정하자. 그러면, 임의의 t에 대해 등식 $\sin(t+T_1)=\sin t$가 되므로, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T_1\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$이다. 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T_1\right)=1$로부터 $\frac{\pi}{2}+T_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$가 유도되며, $T_1=2\pi k$가 된다. 이것은 가정 $0<T_1<2\pi$에 모순된다. 결국, 2π가 함수 $u=\sin t$의 기본주기이다.

그러나 기본수준 교과서(Mordkovich, 2009, pp.74-75)에는 이 성질을 정리나 성질로 취급하지 않고 '임의의 x에 대해 등식 $\sin(x-2\pi)=\sin x=\sin(x+2\pi)$이 성립하므로, 함수 $y=\sin x$는 주기함수이고, 수 2π는 주기이다'라고 기술되어 있다. 결국, 기본수준 교과서가 심화수준 교과서보다 낮은 수준의 엄밀성으로 기술되었고 직관적인 이해를 바탕으로 기술되었다고 할 수 있을 것이다.

이제, 심화수준 교과서에서 정리의 증명이 필수내용으로 기술되었지만, 기본수준에서는 생략되었거나 선택내용으로 기술된 경우가 있다. 이러한 경우에 대해서는 앞에서 이미 언급하였고, 기본수준과 심화수준 교과서에서 어렵지 않게 찾을 수 있다. 이러한 접근을 통해, 기본수준의 교과서는 학습자의 부담을 줄이고 학습 시간도 절약할 수 있을 것으로 생각된다.

예를 들어, 기본수준과 심화수준 교과서에 함수의 다음 성질이 기술되어 있다: 성질 1. 만약 함수에 최솟값 $y_{\min}$가 존재하면, 이 함수는 아래로 유계이다; 성질 2. 만약 함수가 아래로 유계가 아니면, 이 함수에는 $y_{\min}$이 존재하지 않는다.

심화수준 교과서(Mordkovich & Semenov, 2009, p.70)에는 이 성질들에 대한 증명이 다음과 같이 기술되어 있다.

성질 1의 증명. 함수 $y=f(x)$가 집합 X에서 최솟값을 가진다고 하자. 이것은 임의의 $x \in X$에 대해 부등식 $f(x) \geq f(x_0)$인 점 $x_0 \in X$가 존재한다는 것을 의미한다. 결국, 정의에 의해 함수 $f(x)$는 아래로 유계가 된다.
성질 2의 증명. 이 성질은 귀류법으로 증명할 수 있다. 만약 $y_{\min}$이 존재한다고 가정하면, 성질 1에 의해 함수는 아래로 유계가 되며, 조건에 모순이 된다.

기본수준 교과서에는 이 증명이 제시되어 있지 않다. 이 성질들은 직관적으로는 자명한 것처럼 보이지만, 그 증명을 정의로부터 출발하여 기술하는 것은 자명하지 않을 수 있다. 기본수준에서는 증명없이 성질 자체의 직관적인 이해를 중심으로 교과서가 기술되었다면, 심화수준에서는 정의로부터 출발하여 논리적으로 성질을 유도하는 과정이 기술되었다는 것을 알 수 있다. 그렇다고, 기본수준 교과서에 정리의 증명이 모두 생략되는 것은 아니다. 예를 들어, 합의 미분을 나타내는 정리 $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$, 상수배의 미분을 나타내는 정리 $(kf(x))'=kf'(x)$에 대해서는 그 증명이 기술되어 있다.

한편, 탄젠트 합의 공식 $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x \tan y}$은 심화수준에서는 증명이 일반내용으로 제시되어 있지만, 기본수준에서는 선택내용으로 기술되어 있다. 이와 같이, 기본수준에서 증명을 선택내용으로 기술하는 것도 수준별 교육의 관점에서 보면, 수학교실에서 학생들의 수학적 흥미와 능력을 고려한 차별적 접근의 가능성을 가진다는 측면에서 의미로울 것이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

러시아는 수준별 수학교육과 관련하여 오랜 경험을 가지고 있으며, 현재 사용 중인 러시아의 10-11학년 수학과 교육과정은 기본수준과 심화수준으로 구성된 수준별 교육과정이다. 이때, 기본수준과 심화수준은 다루는 최소필수내용, 학생들에게 요구되는 수준 등에서 차이가 난다. 본 연구는 문헌분석연구로, 러시아의 수준별 수학교과서인 Mordkovich의 기본수준 ‘대수와 해석의 기초’ 10-11학년 교과서 중 10학년 내용과 Mordkovich & Semenov의 10학년 ‘대수와 해석의 기초’ 심화수준 교과서를 비교, 분석하여 수학교과서에 나타난 수준별 교육에 관련된 다양한 측면과 구체적인 내용을 제시하였다.

본 연구의 결론 및 제언은 네 가지 측면으로 기술할 수 있다. 첫째, MPRF의 기본수준 교육과정과 심화수준 교육과정의 최소필수내용을 Mordkovich의 기본수준 교과서, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서의 내용 기술을 조사하였다. MPRF의 교육과정에서 최소필수내용은 졸업요구수준과 졸업요구수준에 포함되지 않는 내용으로 구분되어 있으며, Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서 기술은 일반내용과 선택내용으로 구성되어 있다. 즉, 수준별 교과서인 이들 교과서의 내용 기술에도 일반내용과 선택내용의 두 수준이 구분되어 제시된 것이다.

MPRF 교육과정의 졸업요구수준 최소필수내용에 대한 설명은 Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에서 주로 일반내용으로 기술되었지만, 부연 설명, 증명, 예제의 일부는 선택내용으로 기술되었다. 이러한 교과서 기술을 통해 수학교실에서 수준별 차등화를 통한 수준별 수업의 가능성을 기대할 수 있을 것으로 생각된다. 교사는 학습 상황, 학생들의 흥미와 진로 등을 고려하여 수준별 교과서에서 선택내용의 지도 여부를 결정할 수 있기 때문에, 모든 학생들에 대한 획일적인 접근 방법에서 벗어날 수 있다. 한편,

졸업요구수준에 포함되지 않은 최소필수내용의 일부는 일반내용으로, 일부는 선택내용으로 기술되었다.

수준별 교과서에서 어떤 내용을 일반내용으로 기술하고, 어떤 내용을 선택내용으로 기술할 것인가는 MPRF 교육과정의 졸업요구수준에 의해 전적으로 결정되지는 못했다. 그러나 졸업요구수준의 최소필수내용보다 졸업요구수준에 들어가지 않는 내용이 선택내용으로 기술되는 경우가 비교적 많았다. 수학교과서에서 어떤 내용을 일반내용으로 제시하고, 어떤 내용을 선택내용으로 제시할 것인가는 수학교실에서 수준별 교육을 구현하는데 중요한 영향을 미칠 것이다. 본 연구에서는 최소필수내용이 선택내용으로, 일반내용으로 기술되는 대표적인 경우들을 제시하였지만, 후속연구를 통해 각각의 최소필수내용에 대해 수학교과서에 일반내용으로 기술되는 범위, 선택내용으로 기술되는 범위에 대한 질적인 자료들이 더 축적될 필요가 있을 것이다.

둘째, Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에만 포함된 단원인 '실수', '복소수'의 주요 학습 내용과 교과서 기술의 특징을 조사하였다. 수준별 교육과정이나 수준별 교과서에 대한 논의에서 어려운 문제 중의 하나가 공통내용과 심화내용을 결정하는 것이다. 우리나라의 제7차 수학과 교육과정에 '심화과정'이 기술되어 있지만, 이것으로는 충분하지 않다는 의견이 많았다. 본 연구에서는 러시아의 심화수준 교과서를 분석하여 <표 III-1>, <표 III-2>에 심화학습을 위한 주요 학습 내용을 제시하였고, 이 내용에 대한 교과서 기술의 특징으로 수학적 정리(성질)의 엄밀한 증명, 수학적 탐구 방법의 확장, 고등수학과의 연결성, 수학의 역사적 발생 과정에 대한 정보 제공, 수학의 다른 영역과의 연결성 강조 등을 분석하였다. 이러한 수학교과서의 특징은 심화수준의 수준별 교육에서는 학생들의 창의적 수학 탐구, 자기주도적인 수학적 활동에 긍정적인 영향을 미칠 것으로 생각된다.

수준별 교육에서 차별화된 심화학습 내용을 바탕으로 다양한 교육과정을 만드는 것은 의미있을 것이다. 본 연구에서는 러시아의 사례를 중심으로 심화학습의 내용을 제시하였지만, 심화학습 내용의 선정에 관련된 다양한 국가들의 자료를 수집하여 구체적으로 분석할 필요가 있다. 다른 나라의 교육과정 및 교과서 사례를 조사할 때 반드시 심화수준으로 한정할 필요는 없을 것이다. 예를 들어, 최은, 권오남(2020)은 우리나라와 호주, 핀란드의 수학교과서에서 삼각법 영역을 비교하였는데, 이와 같은 연구의 결과는 우리나라 교육과정의 내용적 다양성, 유연한 접근을 모색하는데 의미있는 자료가 될 것이다.

셋째, Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 공통으로 포함된 단원이 '함수', '삼각함수', '삼각방정식', '삼각함수 식들의 변환', '도함수'이다. 본 연구에서는 이 단원에 포함된 주요 학습 내용을 표로 정리하여 제시하였고, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서의 주요 학습 내용을 비교하여 심화수준 교과서에 추가된 학습 내용, 이들 교과서 기술에서의 차이점을 구체적으로 제시하였다.

같은 학습 내용에 대해서 기본수준 교과서와 심화수준 교과서가 다른 접근을 제시한 것이 있다. 예를 들어, 주기함수, 극값을 심화수준 교과서에서는 일반적인 함수의 맥락에서 설명하였지만, 기본수준 교과서에서는 이들을 특정한 함수와 관련지어 설명하여 학습 내용의 양, 학습 시간, 학습 부담의 경감 측면을 고려한 교과서 기술로 보인다. 이것은 수준별 교육과정이나 교과서의 기술에서 같은 학습 내용을 다루면서 학생들의 부담을 경감할 수 있는 한 전략이 될 수 있을 것이다. 우리나라에서도 수학과 교육과정을 개정하면서 학습량 경감을 위해 학습 주제의 취급 학년을 바꾸는 경우가 있는데, 유사한 맥락으로 이해될 수 있을 것이다.

한편, 같은 단원에서도 기본수준 교과서와 심화수준 교과서의 다루는 학습 내용에도 차이가 있었다. 즉, 기본수준 교과서의 학습 내용에 심화된 학습 내용을 추가하여 수준별 교육에 접근하는 방법이라 할 수 있다. 이때 추가된 학습 내용은 주로 수학의 활용에 관련된 내용(조화진동의 방정식과 그래프), 수학 자체의 심화된 내용(역삼각함수의 성질, 함수의 볼록성, 삼각부등식, 식 $A\sin x + B\cos x$의 변환, n계 도함수, 합성함수와 역함수의 미분), 수학적 문제해결 방법(삼각방정식의 해법)을 들 수 있다.

넷째, Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에 제시된 정의, 정리, 증명의 기술을 비교하여 그 차이점을 확인하였다. 우리나라의 수학교과서에 제시된 개념들의 정의는 비슷한 수준의 엄밀성을 가지지만, Mordkovich의 기본수준 교과서와 Mordkovich & Semenov의 심화수준 교과서에는 다른

엄밀성 수준으로 개념을 정의한 예들을 찾을 수 있었다. 그리고 기본수준 교과서에는 정리의 증명이 생략되는 경우가 심화수준 교과서보다 많았다.

이것은 수준별 교육에서 심화수준의 성격을 어떻게 규정하느냐에 따라 다양한 논의가 가능할 것이다. 만약, 심화수준에서 수학적 엄밀성을 강조하고, 기본수준에서는 직관적 접근을 강조한다면, 기본수준 교과서와 심화수준 교과서에서 개념을 다른 수준의 엄밀성에서 정의하고, 정리의 설명과 증명을 다른 엄밀성 수준으로 제시하는 것도 의미있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

Ministry of Education (1998). *Mathematics Curriculum*, Seoul: Daehan Textbook Co.

교육인적자원부 (2007). 수학과 수준별 학습 보조 자료 활용 안내서, 서울: 대한교과서주식회사.

Ministry of Education & Human Resources Development (2007). *A Guide to Using Learning Aids Materials for Differentiated Mathematics Instruction*, Seoul: Daehan Textbook Co.

김선희 (2015). 수학과 수준별 수업의 효과에 대한 메타분석, 한국수학교육학회지시리즈A: 수학교육, 54(4), 335-350.

Kim, S.H. (2015). A meta-analysis on the effects of the differentiated instruction in mathematics, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 54(4), 335-350.

도종훈・고정화 (2008). 성취수준별 대표문항의 개념 및 수준별 수업에의 활용 방안, 한국수학교육학회지시리즈 E: 수학교육논문집, 22(2), 109-124.

Do, J. & Ko, J. (2008). Representative items for each achievement level in the National Assessment of Educational Achievement of Mathematics : the Concept and Use for Individualized Education, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 22(2), 109-124.

우정호 (1997). 수학II, 서울: 지학사.

Uoo J.(1997). *Mathematics II*, Seoul: Jihaksa.

최승현・이대현 (2005). 수학과 단계형 수준별 교육과정 운영 실태 분석 및 개선 방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈A: 수학교육, 44(3), 325-336.

Choe, S. & Lee, D. (2005). An Analysis on the Implementation and the Methods of Development of the 7th Optional Mathematics Curriculum, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 44(3), 325-336.

최은・권오남 (2020). 한국, 호주, 핀란드의 수학 교과서에서 삼각법 영역 비교, 한국수학교육학회지시리즈E: 수학교육 논문집, 34(3), 393-419.

Choi, E. & Kwon, O. N. (2020). Comparison of Trigonometry in Mathematics Textbooks in Korea, Australia, and Finland, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 34(3), 393-419.

한인기 (2008). 수학교육의 차등화에 관련된 러시아의 초창기 연구들의 분석, 한국수학교육학회지시리즈E: 수학교육 논문집, 22(2), 187-209.

Han I.(2008). An Analysis of Various Russian Studies in an Early Stage Related with Differentiated Mathematics Education, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 22(2), 187-209.

한인기・강나경 (2014). 수학 문제해결 과정에서 학습행위 형성 수준에 대한 연구, 한국수학교육학회지시리즈A: 수학교육, 53(1), 75-92.

Han, I. & Kang, N. (2014). A study on learning action formation levels in the process of mathematics problem solving, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 53(1), 75-92.

황혜정 (2006). 국가 수준에 준하는 수학과 수준별 교수.학습 자료의 개발 및 활용, 한국학교수학회논문집, 9(3), 317-345.

Hwang, H. (2006). Development and its Application on Teaching and Learning Materials for Differentiated Instruction in Secondary School Mathematics, *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 9(3), 317-345.

Alimov Sh.A. et al. (2016). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10-11*, Moskva: Prosveshenie.

Dorofeev G.V., Kuznetsova L.V., Suvorova D.B. & Firsov V.V. (1990). Differentsiatsiya v obuchinii matematike, *Matematika v Shkole* 4, 15-20.

Gusev V.A. & Rubin A.G. (2016). *Geometriya 10*, Moskva: Balass.

Kalinin A.Yu. & Tereshin D.A. (2011). *Geometriya 10-11*, Moskva: MTsNMO.

Kolyagin Yu.M. et al. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Moskva: Prosveshenie.

Kolyagin Yu.M. et al. (2011). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Moskva: Prosveshenie.

Mordkovich A.G. & Semenov P.V. (2007). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 11*, Moskva: Mnemozina.

Mordkovich A.G. & Semenov P.V. (2010a). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10-11*, Metodicheskoe posobie dlya uchitelya, Moskva: Mnemozina.

Mordkovich A.G. & Semenov P.V. (2010b). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Metodicheskoe posobie dlya uchitelya, Moskva: Mnemozina.

Mordkovich A.G. & Semenov P.V.(2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Moskva: Mnemozina.

Mordkovich A.G. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10-11*, Moskva: Mnemozina.

MPRF (2004). *Federalnyi Komponent Gosudarstvennogo Standarta Obshego Obrazovaniya Chast II*, Moskva: MPRF.

MPRF (2010). Prikaz. Retrieved from http://docs.yandex.ru.

MPRF (2020). Prikaz №254(2020.05.24.). Retrieved from http://publication.pravo.gov.ru.

Nikolskii et al. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Moskva: Prosveshenie.

Pratusevich M.Ya., Stolbov K.M. & Golovin A.N. (2009). *Algebra i nachala matematicheskogo analiza 10*, Moskva: Prosveshenie.

Saakyan S.M. & Butuzov V.F. (2017). *Geometriya, Pourochnye razrabotki 10-11 klassy*, Moskva: Prosveshenie.

An Analysis of Differentiated Teaching Materials in the Russian Mathematics Textbooks

Han, Inki
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 52828, Korea
E-mail : inkiski@gnu.ac.kr

In relation to differentiated mathematics education, Russia has a longer experience in research and practice than Korea. The mathematics curriculum for 10-11 grades currently in use in Russia is a level-specific curriculum and consists of a basic level and an advanced level. And in Russia mathematics textbooks for 10-11 grades are also textbooks for each level. In this study, we analyzed basic level textbook and advanced level textbook written by the same author group among the textbooks 'Algebra and Introduction of Mathematical Analysis' of the 10th grade in Russia.

To analyze the main learning contents and textbook descriptions that were added in advanced level the 'real numbers' and 'complex numbers' sections were studied. The main contents of basic and advanced level textbooks for 'functions', 'trigonometric functions', 'trigonometric equations', 'conversions of trigonometric expressions', and 'derivatives', which are included in both basic and advanced textbooks were compared and analyzed, and the descriptive characteristics of the definitions and theorems presented in the two levels of textbooks were also compared and analyzed.

From the results of this study, it is expected that various information on the contents of various level textbooks of mathematics, the differences between textbooks for each level, and strategies for the composition of textbooks for various level can be accumulated.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : differentiated curriculum, differentiated education, mathematics textbook, basic level, in-depth level