韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.1.171
제 36집 제 1호, 2022. 3. 171-199

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 1, Mar. 2022. 171-199

2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 분석

박 민 구 (인천백학초등학교, 교사)

본 연구에서는 2015 초등 수학 교과서 및 지도서에서 보완이 필요한 수학사 기술내용을 파악하고 이에 대한 보완방안을 제안하고자 한다. 이를 위해 2015 초등 수학 교과서 및 지도서 24종에 대한 문헌연구를 진행하였다. 연구의 결과는 다음과 같다. 2015 초등 수학 교과서 및 지도서에서 보완이 필요한 주제는 총 10가지 주제로 '고대 이집트인의 산술', '고대 이집트 수학 교과서 A'h-mosè 파피루스', '메소포타미아 고아카디안 사각띠', '메소포타미아 고바빌로니아인과 각도', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$', '이슬람인과 소수', '황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장', 'Archimedes와 실진법', '평면 디자인'이었으며, 이에 대한 구체적인 보완방안을 제안하였다. 이를 통해 기축시대 역사관점을 극복하고 고대 이집트, 고바빌로니아, 고대 그리스와 헬레니즘, 중앙아시아(이슬람 1000년), 유럽으로의 수학문화 전이를 인정하고 수용하게 되기를 기대한다.

Ⅰ. 서론

최근 들어 학교수학에 있어 수학사의 중요성이 부각되고 있다. 인류의 문명과 문화의 근원적인 힘이 수학이고 인류의 역사 또한 수학의 역사와 함께 시작되었다는 입장에서(교육부, 2015; Kline, 2005; Scarre · Fagan, 2015), 문화와 문명을 가르치는 학교수학이 수학사를 중요하게 여길 수밖에 없다는 것은 매우 자명해 보인다. 더욱이 여러 많은 학자들이 인지적 측면과 정의적 측면에서 학교수학에 대한 수학사의 효과성을 제시하기도 하였는데, 구체적으로 살펴보면 수학사는 수학의 역사성을 통해 학생들에게 유의미한 학습 기회를 제공하고, 학생들의 사고 발달과 함께 수학적 의사소통 능력, 성취 능력, 수학적 탐구능력을 강화시키며, 학생들이 창의적이고 논리적으로 문제를 해결할 수 있도록 돕고, 지식의 형성 과정에 대한 이해를 통해 학생들이 세밀하고 구체적이며 충실하고 의미 있게 수학을 이해하고 효과적으로 학습할 수 있도록 지원하며, 수학이 형식과 변화 · 발전 간의 균형 잡힌 유연한 학문이라는 것을 알게 해주고, 더불어 수학문화에 대한 학습 또한 지원한다고 제시하였다(고상숙, 2004; 고호경, 2004; 권오남 · 박정숙 · 김은지, 2013; 김민경, 2005; 부덕훈, 2015; 정해남, 2012; 진만영 · 김동원 · 송민호 · 조한혁, 2012; 한경혜, 2004, 2006; 허도하 · 오영열, 2011). 또한, 수학사는 학생들이 수학적 지식에 대한 가치를 알게 하고, 수학에 대한 부정적인 견해 대신 긍정적인 수학적 태도를 갖게 만들며, 흥미와 호기심을 유발하고, 학생 스스로 자신감을 갖고 적극적이며 능동적으로 수학수업에 참여할 수 있도록 변화시킨다고 제시하였다(고상숙, 2004; 고호경, 2004; 권오남 · 박정숙 · 김은지, 2013; 부덕훈, 2015; 이기돈 · 최영기, 2013; 차인숙 · 한정순, 2006; 한경혜, 2006; 한길준 · 이기환, 2006; 허도하 · 오영열, 2011).

이에 따라 수학사와 관련된 다양한 학교수학 연구들이 진행되어 왔다. 첫째, 학교수학의 특정 수학개념에 대한 수학사적 연구들이 있었다(박선용, 2018; 이지현 · 최영기, 2011; 정원, 2013). 둘째, 학교수학의 교사변인에 대한 수학사적 연구들이 있었다(심상길, 2010; 정해남, 2012; 최은아, 2015; 최은아 · 이경화, 2013). 셋째, 학교수학의 교수학습 과정에 대한 수학사적 연구들이 있었다(박선용, 2013; 부덕훈, 2015; 유금순 · 남영만, 2012; 이민희,

* 접수일(2022년 2월 28일), 심사(수정)일(2022년 3월 11일), 게재확정일(2022년 3월 26일)
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 2015 수학 교육과정, 수학 교과서, 수학 지도서, 수학사, 수학문화, 기축시대
* 본 연구는 저자의 2021년 박사학위 논문을 수정 보완한 것임.

2019; 이민희 · 임해미, 2013; 장혜원, 2011; 진만영 · 김동원 · 송민호 · 조한혁, 2012; 허도하 · 오영열, 2011). 넷째, 교과서 및 지도서를 비롯한 학교수학에서 활용되는 다양한 교수학습 자료에 대한 수학사적 연구들이 있었다(권오남 · 박정숙 · 김은지, 2013; 권오남 · 박지현 · 조형미 · 김미주, 2013; 김래영 · 김혜영 · 이현희, 2017; 김상훈 · 박제남, 2017; 김윤민 · 김부미, 2020; 김은숙 · 조완영, 2019; 박교식, 2012; 박제남, 2014a, 2014b; 박제남 · 장동숙, 2015; 박호연, 2014; 양성호 · 이경언, 2010; 양성현, 2014, 2018, 2020; 양성현 · 허난, 2018; 오택근, 2015; 이경언, 2010; 정수용 · 주미경 · 송륜진, 2014; 최지선, 2010). 이 중에서도 학교수학에서 차지하고 있는 교과서 및 지도서의 높은 위상과(황현미, 2013), 실제 국어, 도덕, 사회, 수학, 과학, 실과, 체육, 음악, 미술, 영어, 안전, 창의적체험활동 등 다양하고 여러 과목을 가르쳐야 하는 초등 교사의 경우 상대적으로 많은 전문성 신장 시간이 필요하기 때문에 교과서 및 지도서의 권위를 인정할 수밖에 없다는 점(여하은, 2019), 그리고 실제 수업목표, 수업내용, 평가 등의 핵심 교수학습 과정에서조차도 교과서 및 지도서를 우선적인 파트너로 받아들이고 있다는 점(김민혁, 2012), 마지막으로 최근 출간된 수학 교과서 및 지도서에서도 여전히 수학사 기술내용의 많은 부분에 문제가 있다는 점을(박제남, 2014a, 2014b) 종합적으로 고려해 볼 때, 본 연구자는 초등 수학 교과서 및 지도서에 대한 수학사적 연구가 매우 중요한 연구 주제라고 판단하였다.

그동안 교과서 및 지도서에 대한 수학사적 연구는 크게 두 가지 방향으로 이루어졌다. 첫째 교과서 및 지도서의 수학사 제시 실태에 대한 연구가 진행되었으며(김윤민 · 김부미, 2020; 김은숙 · 조완영, 2019; 박호연, 2014; 정수용 외, 2014), 둘째 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용에 대한 연구가 진행되었다(김상훈 · 박제남, 2017; 박제남, 2014a, 2014b; 박제남 · 장동숙, 2015; 오택근, 2015; 최지선, 2010). 이 중 수학사 제시 실태에 대한 연구의 경우 중등 교과서를 중심으로 현행 2015 교과서 및 지도서에 대한 분석이 진행되고 있었으나(김윤민 · 김부미, 2020; 김은숙 · 조완영, 2019), 수학사 기술내용에 대한 연구의 경우에는 현행 교과서 및 지도서에 대한 분석이 거의 진행되지 않았다. 중등교사와는 달리 전 과목의 많은 양을 가르쳐야 하는 초등교사의 경우 구조적으로 교과서 및 지도서에 대한 의존도가 높을 수밖에 없음에도 불구하고 현행 초등 교과서 및 지도서에 대한 수학사 기술내용 분석 연구가 거의 이루어지지 않았다는 점에서, 본 연구자는 현행 초등 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 분석 연구에 대한 필요성을 느끼고 되었고 이에 따라 본 연구를 수행하게 되었다.

본 연구는 현행 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용을 분석하는 것을 목적으로 한다. 이에 따른 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 중 보완이 필요한 주제는 무엇인가?

둘째, 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용을 어떻게 보완하면 좋겠는가?

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

박제남(2014a, 2014b)과 박제남 · 장동숙(2015)은 교과서의 바람직한 수학사 기술방안으로 사실적 기술과 포괄적 기술의 두 가지를 제시하였다. 먼저 사실적 기술이란 국제 수준의 논문 및 저서 다수에 제시된 학계의 보편타당한 이론을 기반으로 수학사를 기술하는 것을 의미하고, 그다음 포괄적 기술이란 수학은 역사 전반에 걸쳐 다양한 문명과의 상호작용으로 진화하고 발전해 간다는 입장에서(Jankvist, 2009) 여러 문명을 존중하고 기축시대 중심의 역사관점을 극복하며 고대 이집트, 고바빌로니아에서 고대 그리스와 헬레니즘, 중앙아시아(이슬람 1000년), 유럽으로의 수학문화의 전이를 인정하고 수용하는 관점으로 수학사를 기술하는 것을 뜻한다(박제남, 2014a, 2014b; 박제남 · 장동숙, 2015). 특히 박제남 · 장동숙(2015)은 사실적 기술과 포괄적 기술이 서로 독립적이

지 않고 상호 보완적인 관계라고 밝혔는데, 이는 학계의 보편타당한 이론을 기반으로 수학사를 사실적으로 기술하다 보면 자연스럽게 여러 문명의 수학문화 전이가 반영된 왜곡되지 않은 균형적인 관점의 포괄적 기술이 이루어진다고 주장하였다. 이와 관련하여 본 연구자는 교과서뿐만 아니라 지도서의 바람직한 수학사 기술방안의 경우에도 박제남(2014a, 2014b)과 박제남 · 장동숙(2015)이 제안한 사실적 기술과 포괄적 기술이 적용되어야 한다고 보았으며, 이에 따라 사실적 기술과 포괄적 기술을 본 연구의 분석 기준으로 삼았다.

가. 기축시대 중심의 역사관점의 극복

박제남(2014a, 2014b)과 박제남 · 장동숙(2015)은 교과서의 포괄적 기술을 위해 기축시대 중심의 역사관점을 극복해야 한다고 주장하였다. 수학에서 일컫는 “기축시대 (Jaspers, 1986, p. 29)”는 소크라테스, 플라톤, 아리스토텔레스가 출현하여 수학문화가 초월적으로 약진한 시대를 의미하는 것으로 대략 기원전 6세기부터 5세기경에 이루어진 고대 그리스의 기적을 나타내며 동시에 고대 이집트, 고바빌로니아 등에서 시작된 고대 고도의 수학문화를 부정하고 이에 대한 종식을 뜻하는 개념이다(Jaspers, 1986). 이에 대해 Bernal(2011, 2012)은 각종 사료를 들어 기축시대에 대한 주장을 논박하며 기축시대는 단지 고대 모델을 파괴하고 아리안 모델을 창안하기 위해 19세 초부터 만들어진 거짓된 주장으로 아시아와 아프리카의 청동기 시대를 부인하고 유럽이 세계 수학문화의 시초라는 왜곡된 개념일 뿐이라고 평가절하하였다. 이와 같은 맥락에서, 박제남 · 장동숙(2015)도 기축시대가 유럽 중심의 우월주의를 드러내는 동시에 상대적으로 고대 이집트, 고바빌로니아, 이슬람 등의 수학문화를 폄하하기 위해 만들어진 편향된 주장이라고 보았다. 따라서 기축시대 중심의 역사관점은 학생들에게 수학의 역사를 사실에 근거하여 스스로 탐구하게 만들지 않고 오히려 학생들에게 왜곡된 유럽 중심의 사관만을 강요하고 주입시키는 도구로 전락될 수 있다. 이에 따라 본 연구자는 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용에 혹시라도 기축시대 중심의 역사관점이 반영되어 있지는 않은지 분석하고자 하며, 분석 결과에 따라 이에 대한 구체적인 보완방안을 제안하고자 한다.

나. 수학문화의 전이를 인정하고 수용하는 관점

반면 기축시대 역사관점의 대척점에는 고대 이집트, 고바빌로니아, 고대 그리스와 헬레니즘, 중앙아시아(이슬람 1000년), 유럽으로의 수학문화 전이를 인정하고 수용하는 관점이 있다. 이 관점은 기축시대의 역사관점과는 정반대로 고대 모델을 인정하고 다양한 문명을 존중하며 세계 수학문화의 시초로 고대 이집트 및 고바빌로니아 등의 문화를 받아들인다(Bernal, 2011, 2012). 즉 이 관점은 여러 문명과의 상호작용 속에서 수학이 발달하고 진화해 간다는 시각으로(Jankvist, 2009), 고대 이집트 및 고바빌로니아 등에서 전이된 수학문화가 고대 그리스의 기적을 양산했을 가능성을 인정하며 이에 따라 유럽 중심의 우월주의 대신 유럽, 아시아, 아프리카 등의 모든 문명을 수용하는 태도를 보인다(박제남, 2014a, 2014b; 박제남 · 장동숙, 2015). 따라서 이 관점은 학생들을 편향된 시각이 아닌 균형적인 역사관으로 인도한다. 이에 본 연구자는 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용에 수학문화의 전이를 인정하고 수용하는 관점이 반영될 수 있도록 만들고자 한다.

2. 연구방법 및 절차

본 연구의 목적은 현행 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용을 분석하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 문헌연구의 방법으로 2015 초등 수학 1~6학년 교과서 12종(교육부, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d, 2019a, 2019b, 2019c, 2019d)과 지도서 12종(교육부, 2017e, 2017f, 2017g, 2017h, 2018e, 2018f, 2018g, 2018h, 2019e, 2019f, 2019g, 2019h)에 대한 분석을 진행하였다. 다만, 복습용 과제인 수학익힘책은 본 연구의 대상에서 제외하였다. 이때 수학 교과서의 경우에는 각 단원별 차시내용을 비롯하여 ‘수학으로

세상보기', '수학은 내친구'에 대해서도 분석하였고, 수학 지도서의 경우에는 실제 교실수업과 관련성이 적은 총론 및 복습용 과제인 '다시 알아보기'와 '더 알아보기'를 제외한 각론의 각 단원별 차시내용 및 단원개관, 단원지도 유의사항, 단원배경지식에 대해 분석하였다.

이에 대한 구체적인 연구설계는 [그림 Ⅱ-1]과 같다. 첫째, 김래영 외(2017)의 연구를 참고하여 수학사 문헌연구를 기반으로 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 분석 단위인 글 단독 내용, 글과 그림 혼합 내용, 글과 그림 및 수학적 표상의 혼합 내용에 대한 1차 개괄적 분석을 진행하여 문제가 되는 수학사 기술내용을 개략적으로 파악하였다. 이때 동일한 단원의 동일하거나 유사한 분석 단위는 통합하여 대표적인 하나로 분석하였고 다른 단원의 동일하거나 유사한 분석 단위는 각각 분리하여 분석하였다. 그다음 김윤민 · 김부미(2020), 박제남(2014a, 2014b), 박제남 · 장동숙(2015), 박호연(2014), 양성호 · 이경언(2010), 정수용 외(2014)의 연구를 참고하여 연번, 학년, 학기, 쪽수, 단원, 영역, 차시, 수학사 주제, 분류코드로 구성된 분석틀을 개발한 후 1차 분석 결과를 정리하였는데, 이때 분류코드는 수학문명의 발생 및 중요도 순인 고대 이집트(A), 고바빌로니아(B), 고대 그리스와 헬레니즘(C), 중앙아시아(이슬람 1000년)(D), 유럽(E), 중국(F), 인도(G), 한국(H), 일본(I), 기타(J)로 코딩하였다.

둘째, 1차 분석 결과를 토대로 일부 동일하거나 유사한 주제의 경우 통합하거나 범주화하여 총 10가지의 문제가 되는 수학사 주제를 설정하고 수학사 문헌연구를 기반으로 한 2차 심층 분석을 진행하였다. 이때 문제가 되는 수학사 주제는 구체적으로 '고대 이집트인의 산술', '고대 이집트 수학 교과서 A′h-mosè 파피루스', '메소포타미아 고아카디안 사각띠', '메소포타미아 고바빌로니아인과 각도', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$', '이슬람인과 소수', '황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장', 'Archimedes와 실진법', '평면 디자인'이었다. 그런 후, 각 주제별로 2차 분석 결과를 정리하였다.

셋째, 2차 분석 결과를 토대로 각 주제별로 연구결과를 정리하고 결론 및 제언을 기술하였다.

〈1차 개괄적 분석〉		〈2차 심층 분석〉		〈연구결과 정리〉
교과서 및 지도서의 문제가 되는 수학사 기술내용 파악	⇨	문제가 되는 부분을 10가지의 주제로 범주화하여 문헌연구 진행	⇨	각 주제별로 구체적인 보완 방안 제안, 결론 및 제언 기술

[그림 Ⅱ-1] 연구설계의 단계

Ⅲ. 연구결과 및 논의

본 연구를 진행한 결과 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 중 보완이 필요한 주제는 총 10가지 주제로 '고대 이집트인의 산술', '고대 이집트 수학 교과서 A′h-mosè 파피루스', '메소포타미아 고아카디안 사각띠', '메소포타미아 고바빌로니아인과 각도', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율', '고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$', '이슬람인과 소수', '황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장', 'Archimedes와 실진법', '평면 디자인'이었다. 이에 대한 구체적인 보완방안은 다음과 같다.

1. 고대 이집트인의 산술

가. 고대 이집트인과 Zero

4학년 1학기 지도서 151쪽(교육부, 2018g)에는 고대 이집트인이 '0'을 사용하지 않았다고 제시되어 있다. 그러

나, Bernal(2017)과 Merzbach · Boyer(2000)에 따르면 고대 이집트인은 0을 사용한 것으로 보인다. 김주영 · 김성숙(2001)에 따르면 0은 '기호로서의 0'과 '수로서의 0'으로 구분되는데, 사실 고대 이집트인은 자리표기법을 적용하지 않아 기호로서의 0이 불필요해 보이는 10진 가법 단순 그룹핑법(simple grouping system) 기수법을 사용했기 때문에(Eves, 2005; Kline, 2016; Merzbach · Boyer, 2000) 고대 이집트인은 0을 사용하지 않았을 거라고 오해할 가능성이 있다. 그러나 고대 이집트인은 기호로서의 0 대신 수로서의 0을 사용했다. 실제로 파피루스 세로 셈 계산 과정에서는 받아 올림에서 생기는 "아무것도 없음 (Anthony · Walshaw, 2010, p. 38)"을 공백으로 표기하기도 하였고(Bernal, 2017; Gillings, 1972), 모스크바 파피루스 문제 19에서는 '$+4$의 덧셈에 대한 역원'을 이용하며 Brahmagupta가 언급한 0의 성질인 '(어떤 수)$-$(어떤 수)$=0$'을 적용하기도 하였으며(백대현, 2019; Bernal, 2017; Gillings, 1972; Kaplan, 2003), 부기 회계의 총수입과 총지출의 차이 계산 시 발생하는 0의 경우와 무덤 및 피라미드 건축 시 수평선의 기준점에서 위와 아래를 구분할 때 필요한 0의 경우에는 공백 대신 실제 기호인 '아름다운'을 의미하는 상형문자 "𓄤, nfr (Bernal, 2017, p. 360)"를 사용하기도 했다(Bernal, 2017; Joseph, 2008). 결과적으로 고대 이집트인은 기호로서의 0은 사용하지 않았지만 수로서의 0은 사용한 것인데, 기호로서의 0을 사용하지 않았던 까닭은 고대 이집트인의 기수법에는 불필요했기 때문으로 현대의 위치 수체계(positional numeral system)를 기준으로 고대 이집트인이 0을 사용하지 않았다고 주장하는 것은 논리적 모순으로 보인다. 따라서 지도서(교육부, 2018g)의 내용을 고대 이집트인은 0을 사용한 것으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

나. 고대 이집트인의 2배 계산법

2학년 1학기 지도서 301쪽(교육부, 2017g)에는 고대 이집트인의 곱셈법인 2배 계산법에 대해 곱해지는 수를 분해하여 계산하는 방법이라고 제시되어 있으나 이는 오기이며, 2배 계산법은 곱해지는 수가 아닌 곱하는 수를 분해하여 계산하는 방법이다(Chace, 1979). 또한 3학년 1학기 지도서 226쪽(교육부, 2018e)에는 2배 계산법에 대한 예시로, $32\times1=32$, $32\times2=64$, $32\times4=128$을 통해 32×4를 구하도록 제시되어 있으나, [그림 Ⅲ-1]과 같이 실제 고대 이집트인이 사용한 2배 계산법과는 형식적인 측면에서 차이가 있다(Chace, 1979). 따라서 지도서(교육부, 2017g, 2018e)의 내용을 실제 고대 이집트인이 사용한 2배 계산법으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

한편, 두 지도서(교육부, 2017g, 2018e) 모두 고대 이집트인이 2배 계산법을 사용한 이유로 추정되는 곱셈의 횟수를 줄여 연산의 효율성을 극대화한 "최적화 알고리즘 (박제남, 2014a, p. 497)"에 대해 아무런 언급도 없다. 구체적으로 살펴보면 [그림 Ⅲ-1]과 같이 A'h-mosè 파피루스 문제 32의 경우 12×12를 구하는 문제인데 (Chace, 1979), 이 문제는 동수누가로 구할 경우 총 11번의 연산이 필요하지만 2배 계산법으로 구할 경우에는 $12\times2^1=24$, $12\times2^2=48$, $12\times2^3=96$, $(12\times2^2)+(12\times2^3)=144$의 총 4번 연산만으로도 가능하다(박제남, 2014a). 따라서 지도서(교육부, 2017g, 2018e)에 고대 이집트 2배 계산법의 핵심인 최적화 알고리즘에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

【문제 32】 12 곱하기 12를 구해보자.	
1	12
2	24
\4	48
\8	96
합계	144.

[그림 Ⅲ-1] A'h-mosè 파피루스 문제 32 (출처: Chace, 1979, p. 39)

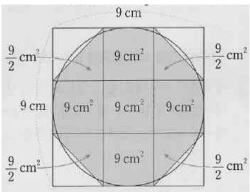
2. 고대 이집트 수학 교과서 A′h-mosè 파피루스

가. A′h-mosè 파피루스 제작 시기

6학년 2학기 교과서 108쪽(교육부, 2019d)에는 A′h-mosè 파피루스 제작 시기가 기원전 1650년경으로 제시되어 있다. 많은 학자들이 A′h-mosè 파피루스의 제작 시기를 기원전 1650년경으로 추정하고는 있지만(Burton, 2013; Chace, 1979; Eves, 2005; Gillings, 1972; Merzbach · Boyer, 2000), 이 외에 다른 추정들도 있다(박민구 · 박제남 · 홍경희, 2017; Cajori, 1919; Kline, 2016). 구체적으로 살펴보면 1700년 이전에 제작되었다는 추정도 있고(Cajori, 1919), 기원전 1700년경이라는 추정도 있으며(Kline, 2016), 기원전 1606년이라는 추정도 있다(박민구 · 박제남 · 홍경희, 2017). 다만, A′h-mosè 파피루스의 제작 시기를 정확하게 추정하는 것은 매우 어렵기 때문에(박민구 · 박제남 · 홍경희, 2017), 차선책으로 교과서(교육부, 2019d)에 A′h-mosè 파피루스 제작 시기에 대한 다양한 추정들 모두를 동시에 제시하는 것이 타당해 보인다.

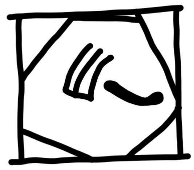
나. A′h-mosè 파피루스 문제 48의 원의 넓이

66학년 2학기 교과서 108쪽(교육부, 2019d)에는 [그림 Ⅲ-2]와 같이 지름이 $9\,\mathrm{cm}$ 인 원의 넓이를 구하는 A′h-mosè 파피루스 문제 48이 제시되어 있다(Chace, 1979). A′h-mosè 파피루스에는 원의 넓이를 구하는 문제가 문제 41, 42, 43, 48, 50의 총 다섯 문제 제시되어 있는데(Chace, 1979), 고대 이집트인은 문제 48을 포함해서 다섯 문제 모두 원의 넓이를 (원의 넓이)=(지름$\times\frac{8}{9})^2$ 으로 근사하여 구했다(Burton, 2013; Chace, 1979; Eves, 2005; Kline, 2016; Merzbach · Boyer, 2000). 이에 대해 박민구 · 박제남 · 홍경희(2017)는 고대 이집트인이 원을 정사각형화 했기 때문이라고 주장했다. 한편 고대 이집트인이 지름이 9 인 원의 넓이를 정사각형의 넓이 64 로 근사하여 구한 이유에 대해 Kline(2016)과 Merzbach · Boyer(2000)는 [그림 Ⅲ-2]의 A′h-mosè 파피루스 문제 48에서 추정할 수 있다고 언급했는데, 이는 Vogel의 주장을 인용한 것으로 보인다(Vogel, 1958: 재인용 Gillings, 1972). Vogel(1958: 재인용 Gillings, 1972)은 A′h-mosè 파피루스 문제 48의 그림에서 내부의 도형을 원이 아닌 팔각형으로 해석하며, 원의 넓이와 유사한 팔각형의 넓이 63 에서 한 변이 $\sqrt{63}$ 인 정사각형을 유추하여 $\sqrt{63}\approx\sqrt{64}\,(=8)$ 를 통해 결과적으로 지름이 9 인 원의 넓이가 한 변이 8 인 정사각형의 넓이 64 로 근사하여 구해진 것 같다고 추정하였다. 물론, 지름이 9 인 원의 넓이를 한 변이 8 인 정사각형의 넓이로 근사하여 구한 이유에 대해 Vogel의 주장과는 전혀 다른 새로운 추정들도 있다(박민구 · 박제남 · 홍경희, 2017; Engels, 1977; Robins · Shute, 1987). 아무튼 교과서(교육부, 2019d)에서는 A′h-mosè 파피루스 문제 48에 대한 Vogel의 주장을 제시한 것처럼 보이는데(Vogel, 1958: 재인용 Gillings, 1972), 다만 Vogel(재인용, Gillings, 1972)은 지름이 9 인 원의 넓이를 한 변이 8 인 정사각형의 넓이 64 로 근사하여 구하는 과정에서 팔각형이 이용된 것 같다고 주장한 것일 뿐이었지 지름이 9 인 원의 넓이를 팔각형의 넓이 63 으로 근사하여 구했다고 주장한 것은 아니었다. 하지만 교과서(교육부, 2019d)에서는 지름이 $9\,\mathrm{cm}$ 인 원의 넓이가 팔각형의 넓이 $63\,\mathrm{cm}^2$ 와 유사하다는 내용만 제시되어 있을 뿐 팔각형을 통해 결과적으로 지름이 $9\,\mathrm{cm}$ 인 원의 넓이를 정사각형의 넓이 $64\,\mathrm{cm}^2$ 로 근사하여 구했다는 언급은 전혀 없어, 마치 고대 이집트인이 지름이 $9\,\mathrm{cm}$ 인 원의 넓이를 팔각형의 넓이 $63\,\mathrm{cm}^2$ 로 근사하여 구한 것처럼 오해할 가능성이 있다. 따라서 교과서(교육부, 2019d)의 제시된 내용에 팔각형의 넓이를 통해 결과적으로 고대 이집트인은 지름이 $9\,\mathrm{cm}$ 인 원의 넓이를 한 변이 $8\,\mathrm{cm}$ 인 정사각형의 넓이 $64\,\mathrm{cm}^2$ 로 근사하여 구했다는 내용을 추가하는 것이 필요해 보인다.



- 원과 겹쳐서 그린 팔각형의 넓이를 이용하여 원의 넓이를 구할 수 있을까요? 그렇게 생각한 이유를 이야기해 보세요.
- 팔각형의 넓이를 구해 보세요.
- 원의 넓이를 구해 보세요. (원주율 : 3.14)
- 팔각형의 넓이와 원이 넓이의 차는 얼마인지 구해 보세요.

(a)



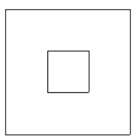
1	8	\1	9
2	16	2	18
4	32	4	36
\8	64	\8	72
		합계	81

(b)

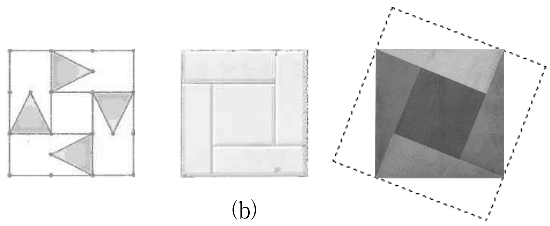
[그림 Ⅲ-2] (a) 6학년 2학기 교과서 108쪽, (b) A'h-mosè 파피루스 문제 48
(출처: 교육부, 2019d, p. 108; Chace, 1979, p. 48)

3. 메소포타미아 고아카디안 사각띠

2학년 2학기 교과서 133쪽(교육부, 2017d), 3학년 1학기 교과서 42쪽과 39쪽(교육부, 2018a)에는 [그림 Ⅲ-3]과 같이 "고아카디안 사각띠(박제남 · 박민구, 2019, p. 162)"가 제시되어 있는데, 고아카디안 사각띠는 기원전 3,000년경 원시 수메르 젬댓 나스르 시대의 UE 3,393에서 유래된 같은 중심으로 포개어진 두 개의 정사각형 도형을 말한다(박제남 · 박민구, 2019).



(a)

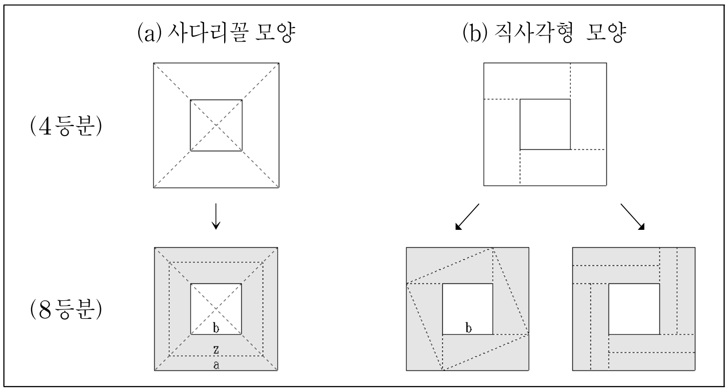


(b)

[그림 Ⅲ-3] (a) UE 3,393의 고아카디안 사각띠, (b) 2학년 2학기 교과서 133쪽, 3학년 1학기 교과서 42쪽, 39쪽
(출처: 교육부, 2017d, p. 133; 2018a, p. 42, p. 39; 박제남 · 박민구, 2019, p. 162)

고아카디안 사각띠는 [그림 Ⅲ-4]와 같이 등분하는 방법에 따라 크게 사다리꼴 모양과 직사각형 모양으로, 그리고 등분 수에 따라 4등분과 8등분으로도 구분된다(박제남 · 김상훈, 2017). 이러한 고아카디안 사각띠는 그동안 다양한 분야에서 활용되었다(김상훈 · 박제남, 2017; 박제남 · 김상훈, 2017; 박제남 · 박민구, 2019). 첫째 수학 분야에서는 고바빌로니아 점토판 VAT 8512, IM 58045, IM 67118, BM 15285의 앞면 #12와 고바빌로니아인의 시간-각속도 그래프 등에 활용되었으며(김상훈 · 박제남, 2017; 박제남 · 김상훈, 2017), 둘째 디자인 분야에서는 히바의 주마 모스크와 사각띠 목조문, 콰라칸 묘지탑의 벽돌쌓기 패턴, 이스파한의 자메 모스크 · 타쉬켄트의 바라크 한

마드라사 · 사마르칸트의 틸라 카리 마드라사의 세라믹 패널, Omar Khayyam의 삼각형 디자인, 타쉬켄트 보도블록 등에 활용되었다(박제남 · 김상훈, 2017; 박제남 · 박민구, 2019). 셋째 건축 분야에서는 데우 칼라 요새와 도성지 토프락 칼라에 활용되었다(박제남 · 박민구, 2019). 그러나, 교과서(교육부, 2017d, 2018a)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 고아카디안 사각띠에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.



[그림 III-4] 고아카디안 사각띠의 분류 (출처: 박제남 · 김상훈, 2017, p. 33, p. 44)

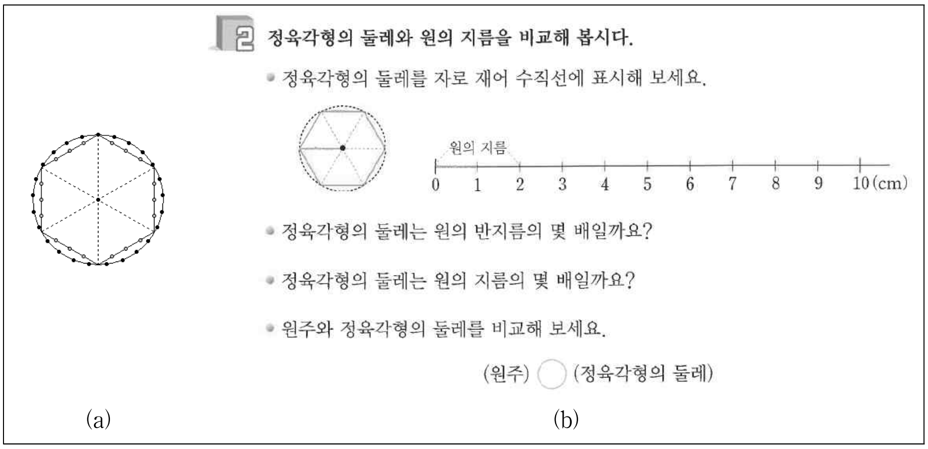
4. 메소포타미아 고바빌로니아인과 각도

2학년 2학기 지도서 219쪽(교육부, 2017d)에는 원 한 바퀴가 360° 가 된 이유가 고대 문명에서 1년을 360일로 계산했기 때문이라고 설명하며, 360일이라는 날짜에서 각도가 유래되었다고 제시되어 있다. 그러나, 실제 각도는 고바빌로니아인이 발견한 황도 12궁에서 유래된 것으로 보인다(Brummelen, 2009; Kline, 2016; Neugebauer, 1969; Ossendrijver, 2016). 기원전 5세기 고바빌로니아인은 황도 12궁을 발견했는데(Kline, 2016; Neugebauer, 1969), Brummelen(2009)은 고바빌로니아인이 황도 12궁을 각각 30 uš로 나누어 총 360 단위로 세분화한 것이 각도의 유래인 것 같다고 추정하였다. 한편, 여기에서 1 uš 는 태양이 하루 동안 이동한 대략적인 길이를 의미하는데(Brummelen, 2009), 아마도 지도서(교육부, 2017d)에서는 Brummelen(2009)의 추정을 잘못 제시한 것처럼 보인다. 한편 Kline(2016)과 Neugebauer(1969)도 고바빌로니아의 천문학 때문에 원이 360° 로 분할될 수 있었다고 추정했으며, Ossendrijver(2016)에 따르면 고바빌로니아인은 기원전 350년에서 50년 사이에 시간 $(days)$ -각속도($^{\circ}/day$) 그래프를 이용하여 목성의 위치를 계산했는데, 이때 이미 알고 있었던 각도의 개념을 실제 활용했던 것으로 보인다. 따라서 지도서(교육부, 2017d)의 내용을 각도는 고바빌로니아인의 황도 12궁 발견에서 유래된 것으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

5. 고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율

6학년 2학기 교과서 93쪽(교육부, 2019d)에는 반지름이 1인 원에 내접하는 정육각형을 통해 원주율을 짐작해 보는 활동이 제시되어 있는데, 교과서(교육부, 2019d)에 제시된 내용은 [그림 Ⅲ-5]와 같이 고바빌로니아 점토판 TMS 3 BR 30의 내용이다(Bruins · Rutten, 1961; Eves, 2005; Neugebauer, 1969). 그러나, 교과서(교육부, 2019d)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 고바빌로니아 점토판 TMS 3 BR 30에 대한 설명을 추가하는 것이 필요

해 보인다.



[그림 III-5] (a) 고바빌로니아 점토판 TMS 3 BR 30, (b) 6학년 2학기 교과서 93쪽
(출처: 교육부, 2019d, p. 93; Bruins · Rutten, 1961, p. 28; Eves, 2005, p. 48; Neugebauer, 1969, p. 47)

또한 6학년 2학기 교과서 107쪽(교육부, 2019d)에는 원주율에 대한 예시로 원주율 3과 3.14가 제시되어 있는데, 원주율 3은 고대 이집트인과 고바빌로니아인이 사용한 원주율이고 원주율 3.14는 고대 이집트인이 사용한 원주율이다(박제남, 2017; 박제남, 2020; Beard, 1968; Friberg, 2007b; Katz, 2007). 그러나, 교과서(교육부, 2019d)에는 원주율 3과 3.14만 제시되어 있을 뿐 고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율과 관련된 아무런 언급도 없어 이에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

가. 고대 이집트인과 원주율

고대 이집트인은 원주율 3이나 3.14 또는 3.16을 사용했다(박제남, 2020; Beard, 1968; Chace, 1979; Engels, 1977; Friberg, 2007b; Gillngs, 1972; Petrie, 2013; Robins · Shute, 1987; Vogel, 1958: 재인용 Gillings, 1972). 원에 내접하는 한 변이 12인 정삼각형에 대한 문제인 P.Cairo #36에서는 (원주)=(지름)×3을 통해 $\pi=3$을 사용했고(박제남, 2020; Friberg, 2007b), Khufu왕의 대피라미드에서는 높이가 h, 밑면의 한 변이 2d일 때 $2\pi h \approx 2d \times 4$, $h : 2d \approx 7 : 11$을 통해 $\pi \approx \frac{22}{7}$ ($\fallingdotseq 3.14$)를 사용했으며(박제남, 2020; Beard, 1968; Petrie, 2013), A′h-mosè 파피루스 문제 50에서는 지름이 9인 원의 넓이를 한 변이 8인 정사각형의 넓이 64로 근사하여 $\pi \times (\frac{9}{2})^2 \approx 64$, $\pi \approx \frac{256}{81}$ ($\fallingdotseq 3.16$)을 사용했다(박제남, 2020; Chace, 1979; Engels, 1977; Gillngs, 1972; Robins · Shute, 1987; Vogel, 1958: 재인용 Gillings, 1972).

나. 고바빌로니아인과 원주율

고바빌로니아인은 원주율 3 또는 3.125를 사용했다(박제남, 2017; Bruins · Rutten, 1961; Eves, 2005; Katz, 2007; Neugebauer, 1969). 원주가 약 3인 원의 넓이를 구하는 문제인 고바빌로니아 점토판 YBC 7302 앞면에서는 (원의 넓이)$\approx$(원주)$^2 \times 0;05$에서 $\pi r^2 \approx (2\pi r)^2 \times 0;05$, $\pi \approx 3$을 사용했고(박제남, 2017; Katz, 2007), 점

토판 TMS 3 BR 30에서는 (정육각형의 둘레) $\approx$ (원주) $\times\, 0;57,36$ 에서 $\pi \approx \frac{25}{8}(=3.125)$ 를 사용했다(박제남, 2020; Bruins · Rutten, 1961; Eves, 2005; Neugebauer, 1969).

6. 고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$

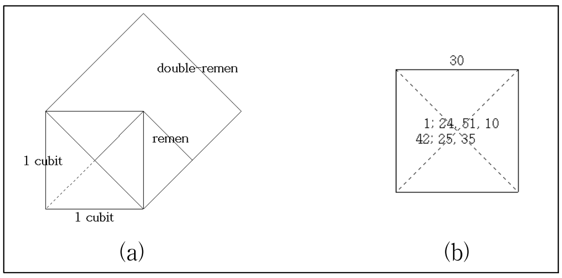
4학년 2학기 지도서 124쪽(교육부, 2018h)에는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이 제시되어 있는데, $\sqrt{2}$ 는 고대 이집트인과 고바빌로니아인이 사용한 무리수이다(Friberg, 2007a; Gillings, 1972). 그러나, 지도서(교육부, 2018h)에는 숫자 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 만 제시되어 있을 뿐 고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$ 와 관련된 아무런 언급도 없어 이에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

가. 고대 이집트인과 $\sqrt{2}$

고대 이집트인은 [그림 Ⅲ-6]과 같이 double-remen 즉 한 변이 royal cubit으로 1 cubit인 정사각형의 대각선 $\sqrt{2}$ cubit $(=29.1325$ 인치)과 remen 즉 double-remen의 절반인 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cubit$(=14.5666$ 인치)을 사용했다(Gillings, 1972).

나. 고바빌로니아인과 $\sqrt{2}$

고바빌로니아인은 고바빌로니아 점토판 YBC 7289와 TMS 3 BR 31에서 $\sqrt{2}$ 를 사용했는데 [그림 Ⅲ-6]과 같이 YBC 7289에서는 $\sqrt{2}=1;24,51,10\left(\approx\frac{577}{408}\right)$ 로 사용했고 TMS 3 BR 31에서는 $\sqrt{2}=1;25\left(=\frac{17}{12}\right)$ 로 사용했다(Friberg, 2007a). 다만, 이때 YBC 7289의 경우 $\sqrt{2}$ 는 정사각형의 대각선을 의미하고 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 은 대각선의 절반을 뜻한다(Friberg, 2007a). 이 외에도 고바빌로니아인은 $\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{10}$ 도 사용했는데 TMS 3 BR 27에서는 $\sqrt{3}=1;45\left(=\frac{7}{4}\right)$ 로 사용했고 TMS 3 BR 28에서는 $\sqrt{10}=3;10\left(=\frac{19}{6}\right)$ 으로 사용했다(Friberg, 2007a).



[그림 Ⅲ-6] (a) 고대 이집트인의 $\sqrt{2}$, (b) 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$ (점토판 YBC 7289)
(출처: Friberg, 2007a, p. 127; Gillings, 1972, p. 208)

7. 이슬람인과 소수

가. 소수에 대한 Simon Stevin의 공적

3학년 1학기 지도서 296쪽(교육부, 2018e)에는 Simon Stevin이 소수를 이론적으로 정립한 학자로, 4학년 2학기 지도서 186쪽(교육부, 2018h)에는 최초로 소수와 소수 계산법을 소개한 학자로, 같은 지도서 194쪽(교육부, 2018h)에는 소수의 정의를 정립한 학자로 제시되어 있다. 그러나 Simon Stevin 이전에도 몇 명의 이슬람인들은 이미 소수를 완벽하게 사용하고 있었다(Katz, 2009; Kline, 2005; Merzbach · Boyer, 2000). 대표적인 예로, 먼저 이슬람 수학자 al-Uqlīdisī는 탈라스 전투 이후 이슬람에 전해진 종이를 이용하여 소수점이 있는 소수를 중국 이외의 지역에서 최초로 사용하고 기록하였는데(이희수, 2015; Berggren, 1986; Katz, 2009; Saidan, 1966), 이때 al-Uqlīdisī는 소수점 뒤의 0의 불필요성에 대해 잘 알고 있었고 소수의 덧셈과 곱셈 또한 할 수 있었으나(Saidan, 1966) Katz(2009)는 al-Uqlīdisī가 정확하게 소수의 의미를 이해하고 있었는지 알 수는 없다고 언급했다. 하지만, Katz(2009)는 또 다른 이슬람 수학자 al-Samaw'al의 경우 소수의 개념을 명확하게 이해하여 유리수나 무리수를 근사할 때에도 소수를 사용할 수 있었다고 평가하였으며 al-Kāshī에 대해서는 정수 자리와 소수 자리를 구분하는 소수 표기법을 통해 소수의 자리값 체계를 완성하였다고 제언하였다. 따라서, Simon Stevin이 10진 소수를 유럽에 전파하면서 소수가 유럽에 널리 퍼지게 된 것은 분명하지만(Berggren, 1986; Burton, 2013; Katz, 2009; Merzbach · Boyer, 2000; Saidan, 1966; Sarton, 1935), 그렇다고 해도 Simon Stevin이 소수를 창안했다거나 최초로 소수 체계를 정립했다는 주장은 사실이 아닌 것으로 보인다(Merzbach · Boyer, 2000). 한편 Katz(2009)는 Simon Stevin이 이슬람 수학의 영향을 받은 것은 아닌 것 같다고 추정하면서도 소수에 대한 이슬람의 영향에 대해서는 좀 더 많은 연구가 필요하다고 언급했다. 따라서 지도서(교육부, 2018e, 2018h)에 제시된 내용은 Simon Stevin의 공적에 대한 지나친 과장으로 보이며, 이슬람 수학자들을 중국인을 제외하고 소수를 본격적으로 사용하며 이론적으로 정립한 학자로 소개하고 Simon Stevin은 유럽에 10진 소수를 전파한 학자로 수정하는 것이 타당해 보인다.

나. al-Uqlīdisī와 al-Kāsh의 소수 곱셈법

5학년 2학기 지도서 241쪽(교육부, 2019f)에는 분수를 이용한 소수 곱셈법의 예시로 $5\times 0.7 = 5\times\frac{7}{10} = \frac{5\times 7}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$가 제시되어 있는데, 지도서에 제시된 방법은 [그림 Ⅲ-7]과 같이 al-Uqlīdisī가 135×1.1^5을 계산할 때 실제 사용한 분수를 이용한 소수 곱셈법이다(Berggren, 1986). 그러나, 지도서(교육부, 2019f)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 al-Uqlīdisī의 소수 곱셈법에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

$$135\times\left(1+\frac{1}{10}\right) = \frac{(135\times 11)}{10} = 148.5$$

$$148.5\times\left(1+\frac{1}{10}\right) = \frac{(148.5\times 11)}{10} = 148\times\left(\frac{11}{10}\right)+0.5\times\left(\frac{11}{10}\right) = 162.8+0.55 = 163.35$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 135 & \rightarrow & 1485 & \rightarrow & 16335 & \rightarrow & 179685 & \rightarrow & 1976535 & \rightarrow & 21741885 \\ 135 & & 1485 & & 16335 & & 179685 & & 1976535 & & \end{array}$$

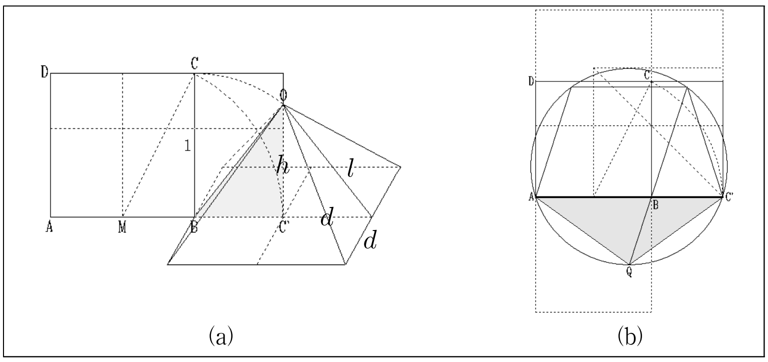
[그림 Ⅲ-7] al-Uqlīdisī의 분수를 이용한 소수 곱셈법 (출처: Berggren, 1986, p. 38)

또한 5학년 2학기 교과서 87쪽(교육부, 2019b)에는 자연수와 소수점 위치를 이용한 소수 곱셈법의 예시로 0.8×0.9를 $8\times9=72$에서 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$을 통해 $0.8\times0.9=0.72$를 구하도록 제시되어 있는데, 이 방법은 al-Kāsh가 14.3×25.07을 계산할 때 실제 사용한 방법으로 al-Kāshs는 143×2507에서 $10^{m}\cdot10^{n}=10^{m+n}$을 통해 14.3×25.07을 $(143\times2507)\times10^{-3}$으로 구하였다(Saidan, 1966). 그러나, 교과서(교육부, 2019b)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 al-Kāsh의 소수 곱셈법에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

8. 황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장

5학년 2학기 지도서 263쪽(교육부, 2019f)에는 황금비에 대해 소개하며 참고문헌으로 김진호 · 강진경(2010)의 《피보나시 수열과 황금비》를 언급하고 있으나 이는 오기이며, 실제 참고문헌은 김진호 · 김인경(2010)의 《피보나치 수열과 황금비》이다.

또한 지도서 같은 쪽(교육부, 2019f)에는 황금비를 옛날부터 수학, 음악, 미술 등에서 중요하게 다룬 시각적으로 가장 안정감 있는 $1:1.618$의 비율로 설명하고 있지만, 오히려 이러한 표현은 황금비를 지나치게 과장한 것일 뿐이라는 주장도 있다(박제남, 2014b). 사실 황금비라는 호칭은 1835년 Ohm이 Euclid(1956a)의 “extreme and mean ratio (Euclid, 1956a, p. 267)”를 특별한 이유도 없이 가장 이상적인 비율이라는 의미의 “Goldene Schnitt (Livio, 2002, p. 6)”로 바꿔 부르면서 사용되기 시작했는데, 박제남(2014b)은 19세기 초 기축시대 역사관점에 따라 고대 모델을 아리안 모델로 바꾸는 과정에서 황금비의 뿌리를 고대 그리스로 보는 학자들이 extreme and mean ratio를 과대 포장하다가 ‘황금비’라는 호칭을 탄생시켰다고 주장했다. 사실 황금비의 뿌리에 대해서는 [그림 Ⅲ-8]과 같이 두 가지 주장이 있는데, 첫 번째 주장은 Khufu왕의 대피라미드에 extreme and mean ratio가 존재하기 때문에 황금비의 뿌리를 고대 이집트로 봐야 한다는 주장이고(박제남, 2014b; Bartlett, 2014; Beard, 1968) 두 번째 주장은 Khufu왕의 대피라미드에는 extreme and mean ratio가 없고 피타고라스 학파의 Hippasus가 정오각형에서 extreme and mean ratio를 최초로 발견했기 때문에 황금비의 뿌리를 고대 그리스로 봐야 한다는 주장이다(Fritz, 1945; Markowsky, 1992; Merzbach · Boyer, 2000; Moh, 1992). 따라서 지도서(교육부, 2019f)의 황금비라는 호칭과 황금비에 대한 성스러운 설명은 황금비의 뿌리를 고대 그리스로 봐야 한다는 학자들의 견해만을 제시한 것으로 보이며, 편향되지 않은 균형적인 시각을 위해 황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장 모두를 동시에 제시하는 것이 타당해 보인다.



[그림 Ⅲ-8] (a) Khufu왕의 대피라미드와 황금비, (b) 정오각형과 황금비 (출처: 박제남, 2014b, p. 296; Euclid, 1956b, p. 453)

9. Archimedes와 실진법

6학년 2학기 지도서 281쪽(교육부, 2019h)에는 실진법이 원 안에 도형을 채워 원의 넓이를 구하는 방법이라고 제시되어 있는데, 실제 실진법은 "굴곡진 도형의 넓이와 부피를 계산하는 방법(Kline, 2016, p. 67)"으로 원의 넓이의 경우에는 원과 내접 및 외접된 정다각형과의 넓이의 차를 줄이는 방법을 뜻한다(Boyer, 2008; Burton, 2013).

또한 6학년 2학기 지도서 268쪽(교육부, 2019h)에는 Archimedes가 실진법으로 원하는 만큼 원의 넓이에 가까운 값을 구했다고 제시되어 있어 마치 실진법에 극한 개념이 적용된 것처럼 보이는데, 실제 실진법에는 극한 개념이 없으며(김상훈 · 박제남, 2017; Kline, 2016) 오히려 항상 "남겨진 양(Boyer, 2008, p. 39)"이 존재한다.

마지막으로 6학년 2학기 지도서 281쪽(교육부, 2019h)에는 Archimedes가 실진법을 이용하여 원 안에 삼각형 6조각, 12조각, 그리고 더 작은 조각을 채워 원의 넓이를 구한 것처럼 제시되어 있는데, 실제 Archimedes는 원 안에 삼각형을 채우지도 않았고 이를 통해 원의 넓이를 직접적으로 구한 것도 아니었으며 다만 [그림 Ⅲ-9]와 같이 명제1을 통해 원의 넓이를 구하는 공식이 πr^2이라는 것을 밝혔고(Heath, 2002) 명제3을 통해 원에 정6각형, 정12각형, 정24각형, 정48각형, 정96각형을 내접 및 외접시키며 원주율의 범위를 구했던 것이다(박제남, 2011; 박제남 · 남호영, 2012; Burton, 2013). 따라서 지도서(교육부, 2019h)의 내용을 Archimedes가 실제 사용한 실진법에 대한 내용으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

◦ 명제1. 원의 넓이는 직각을 낀 한 변이 그 원의 반지름과 같고 다른 한 변이 그 원의 둘레와 같은 직각삼각형의 넓이와 같다.

◦ 명제2. 원의 넓이 대 그 지름의 제곱의 비는 11대 14와 매우 비슷하다.

◦ 명제3. 임의의 원주와 지름의 비율은 $3\frac{1}{7}$배보다는 작지만 $3\frac{10}{71}$배보다는 크다.

[그림 Ⅲ-9] 《원의 측정》에 제시된 Archimedes의 명제 (출처: Burton, 2013, pp. 241-243)

(a) Archimedes의 실진법　　(b) A′h-mosè 파피루스 문제 48

[그림 Ⅲ-10] Archimedes의 실진법과 A′h-mosè 파피루스 문제 48에 대한 비교
(출처: Burton, 2013, p. 242; Chace, 1979, p. 48)

한편 Archimedes 실진법의 뿌리에 대해서는 두 가지 주장이 있는데(박제남, 2020; 박제남 · 장동숙, 2015; Bernal, 2017; Diop, 1991; Palter, 1993), [그림 Ⅲ-10]을 참고해 보자. 첫 번째 주장은 Archimedes의 실진법과 A′h-mosè 파피루스 문제 48의 전체적인 외형이 유사하고 Archimedes가 알렉산드리아에서 학업을 진행했기 때문에 Archimedes 실진법의 뿌리를 고대 이집트 A′h-mosè 파피루스 문제 48로 봐야 한다는 주장이고(Bernal, 2017; Diop, 1991) 두 번째 주장은 Archimedes가 실제 이용한 실진법은 정다각형을 원에 내접 및 외접시킨 것이었는데 A'h-mosè 파피루스 문제 48의 팔각형은 정다각형도 아니고 원에 내접 및 외접된 것도 아니기 때문에 Archimedes 실진법을 Archimedes만의 독창적인 업적으로 봐야 한다는 주장이다(Palter, 1993). 그러나 지도서(교육부, 2019h)에는 Archimedes 실진법의 뿌리와 관련된 아무런 언급도 없는데 수학사적 중요성을 고려하여 이에 대한 두 가지 주장 모두를 동시에 추가하는 것이 필요해 보인다.

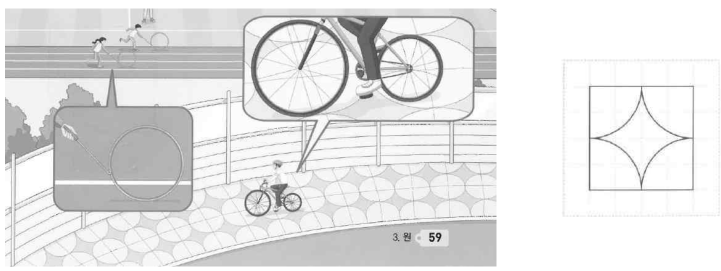
10. 평면 디자인

가. 테셀레이션

4학년 1학기 지도서 261쪽(교육부, 2018g)에는 참고문헌으로 권성룡, 김남균, 류성림, 박정선(2012)의 《테크놀로지와 함께 하는 수학교육》을 언급하며 어떠한 틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 것이 테셀레이션이고 테셀레이션은 정규 테셀레이션, 반정규 테셀레이션, 준정규 테셀레이션, 비정규 테셀레이션의 4가지로 분류되며 Escher의 테셀레이션도 테셀레이션에 포함된다고 제시되어 있다. 그러나 사실 테셀레이션은 "겹치지 않으면서도 빈공간 없이 평면을 채우는 다각형의 집합(Martin, 1982, p. 117)"으로 Regular, Semiregular of Archimedean, Dual의 3가지로 분류된다(Martin, 1982). 다만 지도서(교육부, 2018g)에 제시된 정규 테셀레이션은 Regular와, 반정규 테셀레이션은 Semiregular of Archimedean과 같은 개념이다(권성룡 외, 2012; Martin, 1982). 그러나 그 외에 지도서(교육부, 2018g)에 제시된 준정규 테셀레이션과 비정규 테셀레이션은 테셀레이션으로 볼 수 없으며(Martin, 1982), Escher의 테셀레이션도 다각형 집합이 아니므로 테셀레이션 대신 월페이퍼군으로 봐야 한다(Liu · Collins, 1998; Martin, 1982; Morandi, 2007). 따라서 지도서(교육부, 2018g)의 내용을 학계의 보편타당한 이론에 따른 테셀레이션에 대한 내용으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

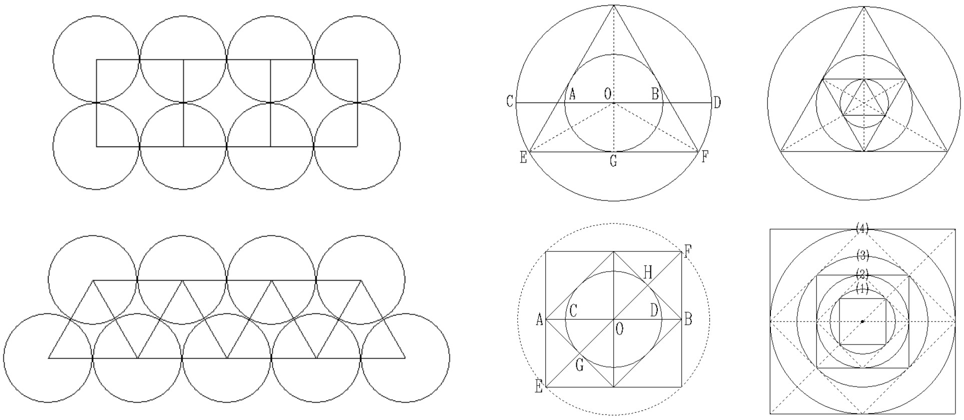
나. 정적조화

3학년 2학기 교과서 59쪽과 69쪽(교육부, 2018b)에는 [그림 Ⅲ-11]과 같이 "정적조화(Hambidge, 1967, p. ix)"가 제시되어 있는데, 정적조화는 평면의 규칙적 배열 또는 방사형 배열을 말한다(Hambidge, 1967). Hambidge(1920)는 [그림 Ⅲ-12]와 같이 총 6가지의 정적조화를 제시했는데, 이 중 교과서(교육부, 2018b)에 제시된 정적조화는 Hambidge(1920)의 평면형 정적조화 중 첫 번째인 연속된 정사각형이다. 그러나, 교과서에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 정적조화에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.



(a) (b)

[그림 Ⅲ-11] 3학년 2학기 교과서 (a) 59쪽과 (b) 69쪽 (출처: 교육부, 2019d, p. 59, p. 69)



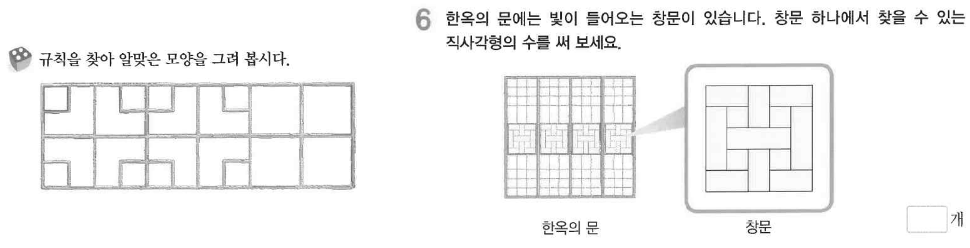
(a) 평면형 정적조화　　(b) 방사형 정적조화

[그림 Ⅲ-12] Hambidge가 제시한 정적조화 (출처: Hambidge, 1920, pp. 138-140)

다. 대칭군

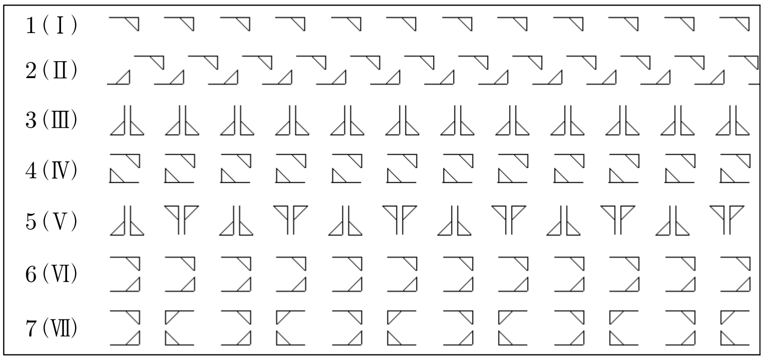
2학년 2학기 교과서 133쪽(교육부, 2017d)과 3학년 1학기 교과서 47쪽(교육부, 2018a)에는 [그림 Ⅲ-13]과 같이 프리즈군이 제시되어 있다(Liu · Collins, 1998).

유클리드 평면 R^2의 부분집합 S에서 등거리 변환으로 만든 부분군을 “대칭군(Fraleigh, 2016, p. 112)”이라고 하는데(Fraleigh, 2016) 모든 대칭군은 “프리즈 군(Liu · Collins, 1998, pp. 5-10)” 또는 “월페이퍼군(Liu · Collins, 1998, pp. 5-10)”을 만들게 되며, 이때 프리즈군은 생성 영역이 좌우 양 쪽 방향으로만 반복되는 패턴을 말하고 프리즈군은 [그림 Ⅲ-14]와 같이 총 7가지로 분류된다(Liu · Collins, 1998). 교과서(교육부, 2017d, 2018a)에 제시된 프리즈군은 모두 평행이동, 180° 회전, 수평반사, 수직 반사가 가능한 프리즈군 7(Ⅶ)이다(Liu · Collins, 1998, p. 8). 그러나, 교과서(교육부, 2017d; 2018a)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 프리즈군에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

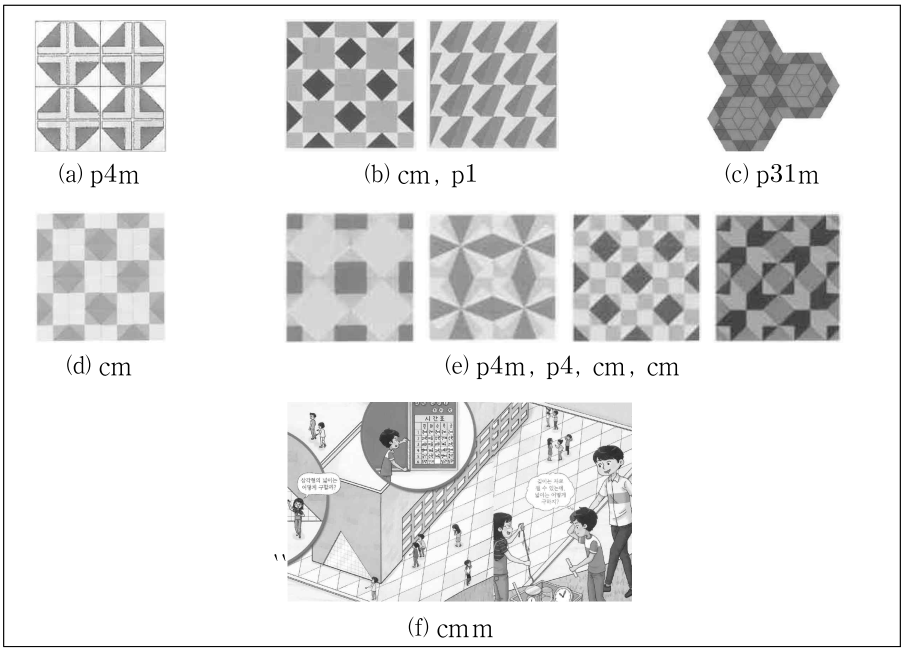


(a)　　(b)

[그림 Ⅲ-13] (a) 2학년 2학기 교과서 133쪽 수록 내용, (b) 3학년 1학기 교과서 47쪽 수록 내용
(출처: 교육부, 2017d, p. 133; 교육부, 2018a, p. 47)



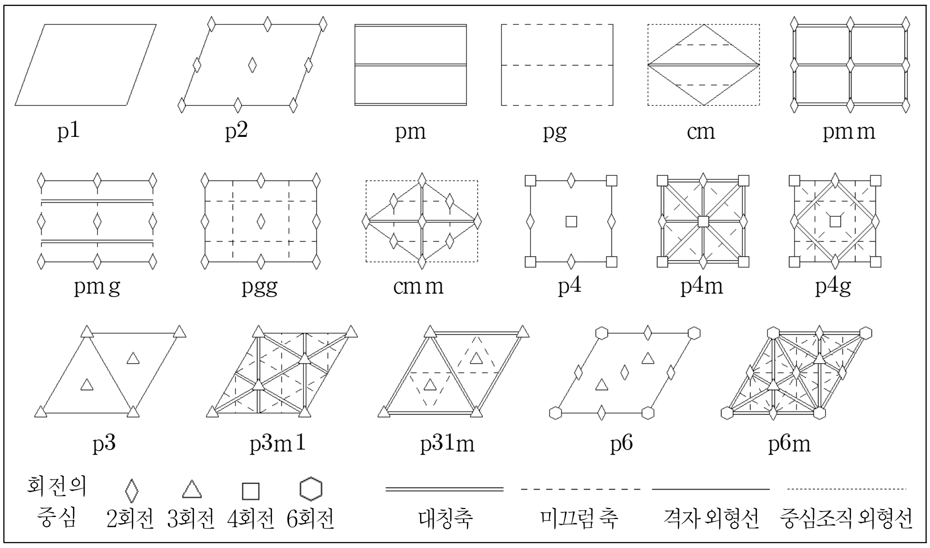
[그림 Ⅲ-14] 7가지 프리즈군에 대한 분류 (출처: Liu · Collins, 1998, p. 6)



[그림 Ⅲ-15] (a) 2학년 2학기 교과서 142쪽, (b) 2학년 2학기 지도서 309쪽, (c) 3학년 1학기 교과서 84∼85쪽, (d) 4학년 1학기 교과서 106쪽, (e) 4학년 1학기 지도서 265쪽, (f) 5학년 1학기 교과서 108∼109쪽 (출처: 교육부, 2017d, p. 142; 2017h, p. 309; 2018a, pp. 84-85; 2018c, p. 106; 2018g, p. 265; 2019a, pp. 108-109)

또한 2학년 2학기 교과서 142쪽(교육부, 2017d), 2학년 2학기 지도서 309쪽(교육부, 2017h), 3학년 1학기 교과서 84∼85쪽(교육부, 2018a), 4학년 1학기 교과서 106쪽(교육부, 2018c), 4학년 1학기 지도서 265쪽(교육부, 2018g), 5학년 1학기 교과서 108∼109쪽(교육부, 2019a)에는 [그림 Ⅲ-15]와 같이 월페이퍼군이 제시되어 있다(Liu · Collins, 1998, p. 8). 월페이퍼군은 대칭군 중 프리즈군을 제외한 패턴을 말하는데(Liu · Collins, 1998), 월페이퍼군은 [그림 Ⅲ-16]과 같이 총 17가지로 분류된다(Schattschneider, 1978). 2학년 2학기 교과서 142쪽(교육부,

2017d)의 월페이퍼군은 180° 회전, 90° 회전, T1 반사, T2 반사, D1 반사, D2 반사가 가능한 p4m 이고, 2학년 2학기 지도서 309쪽(교육부, 2017h)의 월페이퍼군은 모든 회전은 불가능하지만 D1 반사가 가능한 cm 과 모든 회전 및 모든 대칭이 불가능한 p1 이며, 3학년 1학기 교과서 84~85쪽(교육부, 2018a)의 월페이퍼군은 120° 회전, T1 반사, T2 반사, D1 반사가 가능한 p31m 이다. 4학년 1학기 교과서 106쪽(교육부, 2018c)의 월페이퍼군은 모든 회전은 불가능하지만 D1 반사가 가능한 cm 이고, 4학년 1학기 지도서 265쪽(교육부, 2018g)의 월페이퍼군은 180° 회전, 90° 회전, T1 반사, T2 반사, D1 반사, D2 반사가 가능한 p4m, 180° 회전, 90° 회전이 가능하지만 모든 대칭이 불가능한 p4, 모든 회전은 불가능하지만 D1 반사가 가능한 cm 2개이다. 5학년 1학기 교과서 108~109쪽(교육부, 2019a)의 월페이퍼군은 180° 회전, D1 반사, D2 반사가 가능한 cmm 이다. 그러나 교과서(교육부, 2017d; 2017h; 2018a; 2018c; 2018g; 2019a)에는 이와 관련된 아무런 언급도 없어 월페이퍼군에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.



[그림 Ⅲ-16] 17가지 월페이퍼군에 대한 분류 (출처: Schattschneider, 1978, p. 442)

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구에서는 사실적 기술과 포괄적 기술을 기준으로 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용을 분석한 후 보완이 필요한 주제를 오해 없이, 누락 없이, 균형적인 시각에 따라 어떻게 보완하면 좋을지 연구하였다. 이에 대한 연구결과는 다음과 같다.

첫 번째 주제인 '고대 이집트인의 산술'과 관련하여 고대 이집트 수학이 폄하되지 않도록 '고대 이집트인과 Zero'에서는 고대 이집트인이 0을 사용한 것으로 수정하는 것이 타당해 보이고 '고대 이집트인의 2배 계산법'에서는 고대 이집트인이 실제 사용한 곱셈법으로 수정하되 핵심이 되는 최적화 알고리즘에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

두 번째 주제인 '고대 이집트 수학 교과서 A'h-mosè 파피루스'와 관련하여 'A'h-mosè 파피루스 제작 시기'에서는 사실적 기술에 따라 A'h-mosè 파피루스 제작 시기에 대한 다양한 추정들 모두를 동시에 제시하는 것이

타당해 보이고, ‘A′h-mosè 파피루스 문제 48의 원의 넓이’에서는 오해가 없도록 팔각형의 넓이를 통해 결과적으로 고대 이집트인은 지름이 9 cm 인 원의 넓이를 한 변이 8 cm 인 정사각형의 넓이 64 cm^2 로 근사하여 구했다는 내용을 추가하는 것이 필요해 보인다.

세 번째 주제인 ‘메소포타미아 고아카디안 사각띠’에서는 고바빌로니아 수학이 누락되지 않도록 고아카디안 사각띠에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

네 번째 주제인 ‘메소포타미아 고바빌로니아인과 각도’에서는 오해가 없도록 각도는 고바빌로니아인의 황도 12 궁 발견에서 유래된 것으로 수정하는 것이 타당해 보인다.

다섯 번째 주제인 ‘고대 이집트인과 고바빌로니아인의 원주율’에서는 고대 이집트 수학과 고바빌로니아 수학이 누락되지 않도록 고바빌로니아 점토판 TMS 3 BR 30에 대한 설명 및 고대 이집트인과 고바빌로니아인이 실제 사용한 원주율에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

여섯 번째 주제인 ‘고대 이집트인과 고바빌로니아인의 $\sqrt{2}$ ’에서는 고대 이집트 수학과 고바빌로니아 수학이 누락되지 않도록 고대 이집트인과 고바빌로니아인이 실제 사용한 $\sqrt{2}$ 에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

일곱 번째 주제인 ‘이슬람인과 소수’와 관련하여 ‘소수에 대한 Simon Stevin의 공적’의 경우 이슬람 수학이 누락되지 않도록 중국인을 제외하고 소수를 본격적으로 사용하며 이론적으로 정립한 학자로 이슬람 수학자들을 소개하고 균형적인 시각을 위해 Simon Stevin을 유럽에 10진 소수를 전파한 학자로 수정하는 것이 타당해 보이며 ‘al-Uqlīdisī와 al-Kāsh의 소수 곱셈법’의 경우 이슬람 수학이 누락되지 않도록 al-Uqlīdisī와 al-Kāsh가 실제 사용한 소수 곱셈법에 대한 설명을 추가하는 것이 필요해 보인다.

여덟 번째 주제인 ‘황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장’에서는 참고문헌에 대한 오기를 수정하고 균형적인 시각을 위해 황금비의 뿌리를 고대 이집트의 Khufu왕의 대피라미드로 봐야 한다는 주장과 고대 그리스 피타고라스 학파의 Hippasus로 봐야 한다는 두 가지 주장 모두를 동시에 제시하는 것이 타당해 보인다.

아홉 번째 주제인 ‘Archimedes와 실진법’에서는 사실적 기술에 따라 Archimedes가 실제 사용한 실진법에 대한 내용으로 수정하는 것이 타당해 보이고 수학사적 중요성을 고려하여 Archimedes 실진법의 뿌리에 대한 내용을 언급하되 균형적인 시각을 위해 Archimedes 실진법의 뿌리를 고대 이집트 A′h-mosè 파피루스 문제 48로 봐야 한다는 주장과 Archimedes만의 독창적인 업적으로 봐야 한다는 두 가지 주장 모두를 동시에 추가하는 것이 필요해 보인다.

열 번째 주제인 ‘평면 디자인’과 관련하여, ‘테셀레이션’에서는 사실적 기술에 따라 테셀레이션에 대한 내용을 수정하는 것이 타당해 보이고 ‘정적조화’ 및 ‘대칭군’에서는 수학사적 중요성에 따라 정적조화와 프리즈군 및 월페이퍼군에 대한 설명을 추가하여 누락되지 않도록 하는 것이 필요해 보인다.

연구 결과를 토대로 몇 가지의 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 교과서 및 지도서를 기술할 때에는 사실적 기술과 포괄적 기술에 따라 기술하되 기축시대 중심의 역사관점을 극복하고 여러 다양한 문명을 존중하며 고대 이집트, 고바빌로니아, 고대 그리스와 헬레니즘, 중앙아시아(이슬람 1000년), 유럽으로의 수학문화 전이를 인정하고 수용하는 관점에서 기술할 수 있도록 노력해야 한다. 이와 관련하여 4학년 1학기 교과서 33쪽 하단(교육부, 2018c)에는 [그림 Ⅳ-1]과 같이 활동하면서 알게 된 점과 느낀 점의 예시로 고대 이집트 숫자에 대한 단점이 제시되어 있는데, 비록 제시된 내용이 틀린 표현은 아니라 할지라도 은연중에 학생들이 고대 이집트 수학을 폄하하도록 만들 수는 있다고 생각한다. 따라서 이왕이면 고대 이집트 수학을 존중할 수 있도록 고대 이집트 숫자에 대한 장점으로 수정하는 것이 좋아 보인다.

[그림 Ⅳ-1] 4학년 1학기 교과서 33쪽 수록 내용 (출처: 교육부, 2018c, p. 33)

둘째, 선행연구들을 정확하게 분석하여 이전과 동일한 실수를 반복하지 말고 교과서 및 지도서를 기술해야 한다. 예를 들어, 고대 이집트인의 2배 계산법의 핵심인 최적화 알고리즘, 각도의 유래, Simon Stevin에 대한 과장된 기술, 황금비의 뿌리에 대한 두 가지 주장, Archimedes의 업적에 대한 내용은 이미 박제남(2014a, 2014b), 박제남·장동숙(2015)이 2009 초·중등 교과서 분석 결과에서 보완을 제안한 내용이지만 2015 초등 교과서 및 지도서에서도 여전히 보완되지 않았다는 것을 알 수 있었다. 따라서 앞으로 출간될 교과서 및 지도서에서는 이러한 실수를 반복하지 말아야 한다.

셋째, 교과서 및 지도서에 고대 그리스와 헬레니즘, 유럽의 수학에 비해 상대적으로 비중이 적은 고대 이집트, 고바빌로니아, 중앙아시아(이슬람 1000년) 등의 수학 내용을 좀 더 적극적으로 반영해야 한다(정수용 외, 2014). 물론 이를 위해 먼저 많은 수학자들이 고대 이집트, 고바빌로니아, 중앙아시아(이슬람 1000년)의 수학과 관련된 연구를 수행해야 할 것이다.

넷째, 우리 수학의 정체성을 세우고 가치를 인정하며 보존하자는 의미에서 교과서 및 지도서에 한국 및 동양 수학의 비중을 좀 더 늘릴 필요가 있다. 특히 2015 초등 교과서 및 지도서(교육부, 2017b, 2017c, 2017e, 2017g, 2017h, 2018a, 2018d, 2018e, 2018h, 2019a, 2019b, 2019e, 2019f)에는 한국 및 동양 수학과 관련하여 '산가지, 마방진, 칠교판, 백제시대 곱셈구구표, 육십갑자' 등이 제시되어 있었는데 아직 많이 부족한 상태이다.

다섯째, 본 연구와 관련하여 몇 가지 다음과 같은 후속연구를 제안한다. 첫째, 본 연구에서는 2015 초등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 중 보완이 필요한 주제를 찾고 이에 대한 구체적인 보완방안을 제안하였으나, 실제 해당 교과서 및 지도서 상의 구체화된 보완 사례는 명시하지 못하였다. 따라서 국가수준 교육과정의 성격, 목표, 내용 체계 등과 해당 학년의 학습 수준 및 학습 범위, 후속 중등 학습과의 계열성, 그리고 교사교육 자료로의 교사용지도서의 역할 등을 종합적으로 고려한 교과서 및 지도서 상의 구체화된 보완 사례의 개발과 관련된 후속연구가 필요하다. 둘째, 교과서 및 지도서 상의 구체화된 보완 사례에 대한 학교 현장에서의 효과성 검증 후속연구가 필요하다. 셋째, 초중등의 총괄적인 실태 파악을 위해 2015 중등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용 분석과 관련된 후속연구가 필요하다. 마지막으로, 앞으로 개발될 2022 초중등 수학 교과서 및 지도서의 수학사 기술내용과 관련된 후속연구가 필요하다.

참 고 문 헌

고상숙 (2004). 수학교육에서 수학사적 고찰을 통한 기하학적·대수학적 두 접근 방법의 의의. 한국수학사학회지, 17(1), 87-96.

Koh, S. S. (2004). Significance of Geometrical and Algebraic Approaches through the History of Mathematics in Mathematics Education. *Journal for History of Mathematics*, 17(1), 87-96.

교육부 (2015). 수학과 교육과정: 교육부 고시 제2015-74호 별책 8. 세종: 교육부.

Ministry of Education. (2015). *Mathematics Curriculum: Proclamation of the Ministry of Education #2015-75 Annex 8*. Sejong: Ministry of Education

교육부 (2017a). 초등학교 수학 1-1: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017a). *Elementary School Mathematics Textbook 1-1: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017b). 초등학교 수학 1-2: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017b). *Elementary School Mathematics Textbook 1-2: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017c). 초등학교 수학 2-1: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017c). *Elementary School Mathematics Textbook 2-1: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017d). 초등학교 수학 2-2: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017d). *Elementary School Mathematics Textbook 2-1: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017e). 초등학교 수학 1-1 교사용 지도서: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017e). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 1-1: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017f). 초등학교 수학 1-2 교사용 지도서: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017f). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 1-2: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017g). 초등학교 수학 2-1 교사용 지도서: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017g). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 2-1: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2017h). 초등학교 수학 2-2 교사용 지도서: 1-2학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2017h). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 2-2: 1-2 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018a). 초등학교 수학 3-1: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018a). *Elementary School Mathematics Textbook 3-1: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018b). 초등학교 수학 3-2: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018b). *Elementary School Mathematics Textbook 3-2: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018c). 초등학교 수학 4-1: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018c). *Elementary School Mathematics Textbook 4-1: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018d). 초등학교 수학 4-2: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018d). *Elementary School Mathematics Textbook 4-2: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018e). 초등학교 수학 3-1 교사용 지도서: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018e). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 3-1: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.

교육부 (2018f). 초등학교 수학 3-2 교사용 지도서: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018f). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 3-2: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae

Edu.
교육부 (2018g). 초등학교 수학 4-1 교사용 지도서: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2018g). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 4-1: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2018h). 초등학교 수학 4-2 교사용 지도서: 3-4학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2018h). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 4-2: 3-4 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019a). 초등학교 수학 5-1: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019a). *Elementary School Mathematics Textbook 5-1: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019b). 초등학교 수학 5-2: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019b). *Elementary School Mathematics Textbook 5-2: 5-6 Grades Clusterss*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019c). 초등학교 수학 6-1: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019c). *Elementary School Mathematics Textbook 6-1: 5-6 Grades Clusterss*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019d). 초등학교 수학 6-2: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019d). *Elementary School Mathematics Textbook 6-2: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019e). 초등학교 수학 5-1 교사용 지도서: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019e). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 5-1: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019f). 초등학교 수학 5-2 교사용 지도서: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019f). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 5-2: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019g). 초등학교 수학 6-1 교사용 지도서: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019g). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 6-1: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
교육부 (2019h). 초등학교 수학 6-2 교사용 지도서: 5-6학년군 수학. 서울: 천재교육.
Ministry of Education (2019h). *Elementary School Mathematics Teacher Guide 6-2: 5-6 Grades Clusters*. Seoul: Chunjae Edu.
권성룡・김남균・류성림・박성선 (2006). 테크놀로지와 함께 하는 수학교육. 서울: 경문사.
Kwon, S. R., Kim, N. K., Ryu, S. R. & Park, S. S. (2006). *Mathematics Education with Technology*. Seoul: Kyungmoon-Sa.
권오남・박정숙・김은지 (2013). 수학기계를 활용한 수학사 수업. 한국수학사학회지, 26(4), 301-320.
Kwon, O. N., Park, J. S. & Kim, E. J. (2013). Instructions of History of Mathematics with Mathematical Machines. *Journal for History of Mathematics*, 26(4), 301-320.
권오남・박지현・조형미・김미주 (2013). '수학사탐구형' 고등학교 스토리텔링 모델 교과서 개발 사례. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 27(3), 221-248.
Kwon, O. N., Park, J. H., Cho, H. M. & Kim, M. J. (2013). Development of the Model Textbook Based on Storytelling : The Case of 'Inquiry into History of Mathematics' Type. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 27(3), 221-248.
김래영・김혜영・이현희 (2017). 수학 교육에의 조선 산학 활용 방안: 닮음을 중심으로. 교과교육학연구, 21(2), 71-83.
Kim, R. Y., Kim, H. Y. & Lee, H. H. (2017). Using Chosun Mathematics in Mathematics Education: Focusing on Similarity. *Journal of Research in Curriculum & Instruction*, 21(2), 71-83.

김민경 (2005). 초등수학 교육과정에서 수학사 관련 내용 분석 및 적용. 한국수학사학회지, 18(2), 43-54.

Kim, M. K. (2005). An Analysis of Application of Mathematical History into Elementary Mathematics Education. *Journal for History of Mathematics*, 18(2), 43-54.

김민혁 (2012). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사 (국내석사학위논문). 서강대학교교육대학원.

Kim, M. H. (2012). *Secondary Mathematics Teachers' Use of Mathematics Textbooks and Teachers' Guide (Master's thesis)*. Sogang University Graduate School of Education.

김상훈・박제남 (2017). 중등수학 교과서가 다루는 미적분 역사 서술의 비판과 대안: 17세기까지의 미적분의 역사를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 31(2), 139-152.

Kim, S. H. & Park, J. N. (2017). Criticism and Alternatives of Calculus History Described by Secondary School Mathematics Textbooks: Focusing on the History of Calculus until the 17th Century. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 31(2), 139-152.

김윤민・김부미 (2020). 2015 개정 중학교 수학 교과서의 수학사 활용에 대한 분석. 학습자중심교과교육연구, 20(2), 585-612.

Kim, Y. M. & Kim, B. M. (2020). Analysis of the History of Mathematics used 2015 Revised Middle School Mathematics Textbooks. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 20(2), 585-612.

김은숙・조완영 (2019). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학 Ⅱ> 교과서에 나타난 수학사 활용 유형 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 33(4), 471-488.

Kim, E. S. & Cho, W. Y. (2019). An Analysis of the Patterns of Using History in <Mathematics Ⅱ> Textbook Developed under the 2015-Revised Curriculum. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 33(4), 471-488.

김주영・김성숙 (2001). 영의 역사와 영에 얽힌 오류들. 한국수학사학회지, 14(1), 101-108.

Kim, J. Y. & Kim, S. S. (2001). The History of Zero and Errors Related to Zero. *Journal for History of Mathematics*, 14(1), 101-108.

김진호・김인경 (2010). 피보나치 수열과 황금비: 수학의 역사 제1권. 서울: 교우사.

Kim, J. H. & Kim, I. K. (2010). *The Fibonacci Sequence and the Golden Ratio: A History of Mathematics Volume I.* Seoul: Kyowoo-Sa.

박교식 (2012). 수학교육에서의 스토리텔링 방식 적용을 위한 소재 연구: 지수용육도와 지수귀문도를 중심으로. 한국학교수학회논문집, 15(1), 155-169.

Park, K. S. (2012). A Study on Finding Topics for the Application of Storytelling Method in Mathematics Education: Centered on JiSuYongYukDo and JiSuGuiMunDo. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 15(1), 155-169.

박민구・박제남・홍경희 (2017). 고대 이집트인들의 원의 구적과 직각삼각형의 인식. 한국수학사학회지, 30(4), 221-232.

Park, M. G., Park, J. N. & Hong, K. H. (2017). Squaring the Circle and Recognizing Right Triangles of Ancient Egyptians. *Journal for History of Mathematics*, 30(4), 221-232.

박선용 (2013). Barrow 정리의 수학사적 분석과 그에 따른 교육적 시사점에 대한 연구. 한국수학사학회지, 26(1), 85-101.

Park, S. Y. (2013). A Historical Analysis of Barrow's Theorem and Its Educational Implication. *The Korean Journal for History of Mathematics*, 26(1), 85-101.

박선용 (2018). 극한과 무한집합의 상호작용과 그 교육적 시사점에 대한 역사적 연구. 한국수학사학회지, 31(2), 73-91.

Park, S. Y. (2018). A Historical Study on the Interaction of the Limit-the Infinite Set and Its Educational Implications. *The*

Korean Journal for History of Mathematics, 31(2), 73-91.
박제남 (2011). 사범대생을 위한 수리논술. 서울: 경문사.
Park, J. N. (2011). *Discuss and Writing of Mathematics for College of Education Students*. Seoul: Kyungmoon-Sa.
박제남 (2014a). 초등학교 수학 교과서가 다루는 수학사의 보완방안: 수학문화의 전이를 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 28(4), 493-511.
Park, J. N. (2014a). A Direction of a Complement of the Elementary School Mathematics History Described in the Texts: Focusing on Mathematical Transculture. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 28(4), 493-511.
박제남 (2014b). 황금비와 수학교육 담론. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 28(2), 281-302.
Park, J. N. (2014b). The Golden Ratio and Mathematics Education Issues. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 28(2), 281-302.
박제남 (2017). 중등수학교육과 창의적 논술지도. 서울: 경문사.
Park, J. N. (2017). *Secondary Mathematics Education and Teaching Creative Essay Writing*. Seoul: Kyungmoon-Sa.
박제남 (2020). 고대 이집트, 고바빌로니아, 고대 그리스 수학에 나타난 원주율 논쟁. 한국수학사학회지, 33(4), 223-236.
Park, J. N. (2020). *Controversial History of Pi in Ancient Egypt, Old Babylonia, and Ancient Greek Mathematics*. *Journal for History of Mathematics*, 33(4), 223-236.
박제남・김상훈 (2017). 이슬람 아트 디자인: 우즈베키스탄 세라믹패널 및 보도블록 디자인을 중심으로. 한국이슬람학회논총, 27(2), 31-60.
Park, J. N. & Kim, S. H. (2017). Islamic Art Designs: Focused on the Uzbekistan Ceramic Penal and Sidewalk Block Designs. *Korean Association of Islamic Studies*, 27(2), 31-60.
박제남・남호영 (2012). π-4천년 역사의 흔적 (제1판 2쇄). 서울: 교우사.
Park, J. N. & Nam, H. Y. (2012). *π-Traces of History of 4,000 Years*. Seoul: Kyowoo-Sa.
박제남・박민구 (2019). 이슬람 예술 디자인에서 회전하는 알몬드와 오마르 하얌의 삼각형. 한국수학사학회지, 32(4), 159-173.
Park, J. N. & Park, M. G. (2019). Ring of Four Almonds and the Omar Khayyam's Triangle in Islamic Art Design. *Journal for History of Mathematics*, 32(4), 159-173.
박제남・장동숙 (2015). 중등 수학교과서가 다루는 수학사의 비판과 대안. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 29(2), 157-196.
Park, J. N. & Jang, D. S. (2015). Study on Criticism and Alternative on the History of Mathematics Described in the Secondary School Mathematics Textbooks. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 29(2), 157-196.
박호연 (2014). 중등 수학 교과서 분석을 통한 수학사 사용 현황 조사 및 자료 제시. (국내석사학위논문). 이화여자대학교교육대학원.
Park, H. Y. (2014). *Research on the Uses of the History of Mathematics Through the Analysis of Secondary School Mathematics Textbooks and the Supporting Data (Master's thesis)*. Ewha Womans University Graduate School of Education.
백대현 (2019). 초등학교 수학에서 0의 의미와 성질에 대한 고찰. 한국초등수학교육학회지, 23(1), 43-57.
Paek, D. H. (2019). Some Notes on the Meaning and the Properties of Zero in Elementary School Mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 23(1), 43-57.
부덕훈 (2015). 수학사 기반 학습자 중심 수학동아리 효과 분석 연구. 한국수학사학회지, 28(1), 45-62.
Boo, D. H. (2015). A Study on Effect of Learner Centered Mathematical Club Based on Mathematics History. *Journal for*

History of Mathematics, 28(1), 45-62.

심상길 (2010). 수학사 활용에 대한 예비교사들의 인식 분석. 한국수학교육학회지시리즈 E <수학교육논문집>, 24(3), 831-842.

Sim, S. K. (2010). Analysis of Pre-Service Teachers' Perceptions on Utilizing History of Mathematics. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 24(3), 831-842.

양성호・이경언 (2010). 수학 교수-학습에서의 동양 수학사 활용에 관한 연구. 한국수학교육학회지시리즈 A <수학교육>, 49(1), 15-37.

Yang, S. H. & Lee, K. E. (2010). A Study on The Application of Oriental History of Mathematics in School. *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 49(1), 15-37.

양성현 (2014). 원용삼방호구의 수학교육적 활용. 한국수학사학회지, 27(5), 313-327.

Yang, S. H. (2014). Utilizing 'Wonyongsambanghogu' in Mathematics Education. *Journal for History of Mathematics*, 27(5), 313-327.

양성현 (2018). 조선 후기 산학서에 수록된 망해도술의 내용 분석 및 수학교육적 활용 방안. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 28(1), 49-73.

Yang, S. H. (2018). An Investigation of the Height Measurement of Island Recorded in Mathematics Books of the Late Chosun Dynasty and its Pedagogical Applications. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(1), 49-73.

양성현 (2020). 묵사집산법에 수록된 퇴타개적문의 현대적 재구성 및 수학교육적 활용 방안. 한국수학사학회지, 33(1), 1-19.

Yang, S. H. (2020). A Modern Reconstruction of the Problems on the Sums of Sequences in MukSaJipSanBup and its Pedagogical Applications. *Journal for History of Mathematics*, 33(1), 1-19.

양성현・허난 (2018). 측량도해의 현대적 해석 및 수학교육적 활용 방안. 한국수학사학회지, 31(3), 127-150.

Yang, S. H. & Huh, N. (2018). The Modern Explication of CheukRyangDoHae and its Pedagogical Applications. *Journal for History of Mathematics*, 31(3), 127-150.

여하은 (2019). 초등학교 교사의 수학 교과용도서 사용 실태 조사 (국내석사학위논문). 서울교육대학교교육전문대학원.

Yeo, H. E. (2019). *An Analysis on Mathematics Textbooks Use by Elementary School Teacher (Master's thesis)*. Graduate School of Education Seoul National University of Education.

오택근 (2015). 수학사에 기초한 벡터의 내적과 외적의 연결. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 25(2), 177-188.

Oh, T. K. (2015). Connecting the Inner and Outer Product of Vectors Based on the History of Mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematic*, 25(2), 177-188.

유금순・남영만 (2012). 수학사를 활용한 수학수업이 수학과 학습 태도에 미치는 영향. 동아시아 수학 저널, 28(4), 383-401.

Yoo, K. S. & Nam, Y. M. (2012). The Effect of Mathematics History Teaching and Learning on Mathematics Learning Attitude. *East Asian Mathematical Journal*, 28(4), 383-401.

이경언 (2010). 황윤석의 『산학입문』과 학교수학에의 응용. 제주대학교 교육과학연구소 교육과학연구, 12(1), 149-165.

Lee, K. E. (2010). Hwang Yun-suk's『Sanhakyibmun』 and It's Application to School Mathematics. *Journal of Education Science*, 12(1), 149-165.

이기돈・최영기 (2013). 수학사의 지적 흥미를 고려한 복소수의 두 가지 제시 방법. 한국수학사학회지, 26(4), 259-275.

Lee, G. D. & Choi, Y. G. (2013). Two Presentation Ways of Complex Numbers Consulting History and Intellectual Interest. *Journal for History of Mathematics*, 26(4), 259-275.

이민희 (2019). 수학사를 활용한 협력적 문제해결과정에서 나타난 담화 분석. 학습자중심교과교육연구, 19(16), 311-333.

Lee, M. H. (2019). Analysis of Discourses in Collaborative Problem Solvung Using Mathematics History. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 19(16), 311-333.

이민희・임해미 (2013). 수학사를 활용한 융합적 프로젝트기반학습(STEAM PBL)의 설계 및 효과 분석. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 15(1), 159-177.

Lee, M. H. & Rim, H. M. (2013). A Design and Effect of STEAM PBL Based on the History of Mathematics. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 15(1), 159-177.

이지현・최영기 (2011). 학교수학과 대학수학에서 정의와 증명 개념 변화에 대한 수학사적 분석. 대한수학교육학회지, 21(1), 57-65.

Lee, J. H. & Choi, Y. G. (2011). Historical Analysis of Definition and Proof Conceptions in the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 21(1), 57-65.

이희수 (2015). 이슬람 학교: 이희수 교수의 종횡무진 이슬람 강의록, 이슬람의 탄생, 이슬람교 그리고 여성. 경기도: 청아.

Lee, H. S. (2015). *Islamic School: Professor Hee-soo Lee's Inexhaustible Lecture Notes on Islam, the Birth of Islam, Islam and Women*. Gyeonggi-do: Chungabook.

장혜원 (2011). Stevin의 <소수>의 수학사적 의의와 수학교육적 함의. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 21(2), 121-134.

Chang, H. W. (2011). Historical Significance and Didactical Implications of Stevin's <La Disme>. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 21(2), 121-134.

정수용・주미경・송륜진 (2014). 수학 교과서 속 수학자들에 대한 비판적 분석: 융합적 협업으로서 다문화교육적 관점에서. 한국수학교육학회 2014 춘계학술대회프로시딩, 2014(1), 109-116.

Jeong, S. Y., Ju, M. K. & Song, R. J. (2014). A Critical Analysis of the Mathematicians in Mathematics Textbooks: From the Perspective of Multicultural Education as Inclusive Cooperation. *The Korean Soc. Math. Ed. Proceedings of the KSME 2014 Spring Conference on Math. Edu. April 4-5*, 2014(1), 109-116.

정원 (2013). 연속 개념에 대한 불연속적인 교육 방식의 문제: 수학교육과 수학사 융합의 현황과 사례연구. 한국과학사학회지, 35(3), 521-542.

Jung, W. (2013). The Problem of Discontinuous Method of Mathematical Teaching: A Case on Concept of Continuity. *The Korean History of Science Society*, 35(3), 521-542.

정해남 (2012). 예비수학교사를 위한 수학사 활용 방안. 한국수학사학회지, 25(3), 141-157.

Jung, H. N. (2012). Using History of Mathematics for Prospective Mathematics Teachers. *The Korean Journal for History of Mathematics*, 25(3), 141-157.

진만영・김동원・송민호・조한혁 (2012). 원뿔곡선의 수학사와 수학교육. 한국수학사학회지, 25(4), 83-99.

Jin, M. Y., Kim, D. W., Song, M. H. & Cho, H. H. (2012). The history of Conic Sections and Mathematics Education. *The Korean Journal for History of Mathematics*, 25(4), 83-99.

차인숙・한정순 (2006). 초등학생을 대상으로 한 '수학자 수학사 특강'의 학습효과. 한국수학사학회지, 19(4), 133-150.

Cha, I. S. & Han, J. S. (2006). The Effects of a Mathematics History Lecture by a Mathematician on Elementary Mathematics Education. *Journal for History of Mathematics*, 19(4), 133-150.

최은아 (2015). 예비 초등교사의 한국수학사 활용에 대한 인식. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문

집>, 29(3), 491-511.

Choi, E. A. (2015). Prospective Elementary School Teachers' Perception on Using the History of Korean Mathematics. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, 29(3), 491-511.

최은아・이경화 (2013). 한국수학사 활용을 위한 예비교사들의 지식 연구. 한국수학교육학회 2013 춘계학술대회 프로시딩, 2013(1), 27-37.

Choi, E. A. & Lee, K. H. (2013). A Study on the Knowledge of Prospective Teachers for Using the History of Korean Mathematics. *The Korean Soc. Math. Ed. Proceedings of the KSME 2013 Spring Conference on Math. Edu. April 5-6*, 2013(1), 27-37.

최지선 (2010). 수학사 고찰을 통한 교과서의 닮음 정의에 대한 분석과 비판. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 20(4), 529-546.

Choi, J. S. (2010). An Analysis and Criticism on the Definition of the Similarity Concept in Mathematical Texts by Investigating Mathematical History. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 20(4), 529-546.

한경혜 (2004). 수학교육에서의 '기본개념'과 수학사의 접목: 평균값의 예를 통해서 본 수업 모형. 한국수학사학회지, 17(3), 73-92.

Han, K. H. (2004). Fundamental ideas in Mathematics Education and Using History of Mathematics. *Journal for History of Mathematics*, 17(3), 73-92.

한경혜 (2006). 수학과 교수-학습에서 수학사 활용의 교육적 함의: 수월성 교육을 중심으로 한 미적분 지도의 예. 한국수학사학회지, 19(4), 31-62.

Han, K. H. (2004). Didactical Meaning of using History of Mathematics in Teaching and Learning Mathematics. *Journal for History of Mathematics*, 19(4), 31-62.

한길준・이기환 (2006). 수학사를 활용한 대안학교의 수학교육. 한국수학사학회지, 19(2), 89-100.

Han, G. J. & Lee, K. H. (2006). Mathematics Education for Alternative Schools using History of Mathematics. *Journal for History of Mathematics*, 19(2), 89-100.

허도하・오영열 (2011). 의사소통 중심의 수학사 기반 수업이 초등학생의 수학적 의사소통과 태도에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, 15(2), 463-485.

Heo, D. H. & Oh, Y. Y. (2011). The Influence of Mathematical History-Based Mathematics Teaching on Mathematical Communication and Attitudes of Elementary Students. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, 15(2), 463-485.

황현미 (2013). 초등학교 교사들의 수학교과서 사용 실태 분석 및 수준 모델 개발 (국내박사학위논문). 한국교원대학교대학원.

Hwang, H. M. (2013). *An Analysis and Level Development of Mathematics Textbooks Use by Elementary Teachers (Doctor's thesis)*. Graduate School of Korea National University of Education.

Anthony, G. J., & Walshaw, M. A. (2004). Zero: A "None" Number?, *Teaching Children Mathematics*, 11(1), 38-42.

Bartlett, C. (2014). The Design of The Great Pyramid of Khufu. *Nexus Network Journal*, 16, 299-311.

Beard, R. S. (1968). The Fibonacci Drawing Board Design of the Great Pyramid of Gizeh. *The Fibonacci Quarterly*, 6, 85-87.

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Bernal, M. (2011). 블랙 아테나: 서양고전 문명의 아프리카˙아시아적 뿌리 (제1권, 제4판, 오홍식 옮김). 서울: 소나무. (원서출판 1987).

Bernal, M. (2012). 블랙 아테나: 서양고전 문명의 아프리카˙아시아적 뿌리 (제2권, 오홍식 옮김). 서울: 소나무. (원서출판 1991).

Bernal, M. (2017). 블랙 아테나의 반론 (오홍식 옮김). 서울: 소나무. (원서출판 2001).

Boyer, C. B. (2008). 미분적분학사: 그개념의 발달 (제2판, 제2쇄, 김경화 옮김). 서울: 교우사. (원서출판 1949).

Bruins, E. M., & Rutten, M. (1961). *Textes Mathématiques de Suse*. Paris: Librairie Orientaliste Paul Geuthner.

Brummelen, G. V. (2009). *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. New Jersey: Princeton University Press.

Burton, D. (2013). 수학의 역사: 입문 (제7판, 허민 옮김). New York: McGraw-Hill. (원서출판 2011).

Cajori, F. (1919). *A History of Mathematics (2nd Ed)*. London: The Macmillan company.

Chace, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus: Free Translation and Commentary with Selected Photographs, Transcriptions, Transliterations, and Literal Translations*. Ohio: Mathematical Association of America.

Diop, C. A. (1991). *Civilization or Barbarism: An Authentic Anthropology (Ngemi, Y.-L, M. Trans), In Salemson, H, J., & Jager, M. (Eds.)*. New York: Lawrence Hill Books.

Engels, H. (1977). Quadrature of the Circle in Ancient Egypt, *Historia Mathematica*, 4, 137-140.

Euclid. (1956a). *The Thirteen Books of the Elements (2nd Ed, Vols. 2, Heath, T, L. Trans)*. New York: Dover.

Euclid. (1956b). *The Thirteen Books of the Elements (2nd Ed, Vols. 3, Heath, T, L. Trans)*. New York: Dover.

Eves, H. (2005). 수학사 (이우영, 신항균 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1992).

Fraleigh, J. (2016). 현대대수학 (제7판, 강영욱, 강병련 옮김). 서울: 성진미디어. (원서출판 2003).

Friberg, J. (2007a). *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. New Jersey: World Scientific.

Friberg, J. (2007b). *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*. New York: Springer.

Fritz, K. (1945). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, 46(2), 242-264.

Gillings, R. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover.

Hambidge, J. (1920). *Dynamic Symmetry; The Greek Vase*. New York: Yale University Press.

Hambidge, J. (1967). *The Elements of Dynamic Symmetry*. New York: Dover.

Heath, T. L. (2002). *The Works of Archimedes*. New York: Dover.

Jankvist, U. T. (2009). A Categorization of the “Whys” and “Hows” of Using History in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

Jaspers, K. (1986). 역사의 기원과 목표 (백승균 옮김). 서울: 이화여자대학교출판부. (원서출판 1949?).

Joseph, G. G. (2008). A Brief History of Zero. *Tārīkh-e ʹElm: Iran Journal for the History of Science*, 6, 37-48.

Kaplan, R. (2003). 존재하는 무: 0의 세계 (심재관 옮김). 서울: 이끌리오. (원서출판 1999).

Katz, V. (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. New Jersey: Princeton University Press.

Katz, V. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction. (3rd Ed)*. London: Pearson Education.

Kline, M. (2005). 수학, 문명을 지배하다 (박영훈 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1953).

Kline, M. (2016). 수학사상사 (심재관 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1972).

Liu, Y., & Collins, R. (1998). Frieze and Wallpaper Symmetry Groups Classification under Affine and Perspective Distortion. *Technical Report CMU-RI-TR-98-37*, The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, 1-55.

Livio, M. (2002). *The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books.

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal*, 23(1), 2-19.

Martin, G. (1982). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry, In Gehring, F, W., & Halmos, P, R. (Eds.)*. New York: Springer.

Merzbach, U. & Boyer, C. B. (2000). 수학의 역사 (제2판, 양영오, 조윤동 옮김). 서울: 경문사. (원서출판 1991).

Moh, T, T. (1992). *Albebra*. New Jersey: World Scientific.

Morandi, P, J. (2007). *Symmetry Groups: The Classification of Wallpaper Pattern Mathematics 482/526*. Las Cruces: New Mexico State University Press.

Neugebauer, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity (2nd Ed)*. New York: Dover.

Ossendrijver, M. (2016). Ancient Babylonian Astronomers Calculated Jupiter's Position from the Area under a Time-Velocity Graph. *Science*, 351(6272), 482-484.

Palter, R. (1993). Black Athena, Afro-Centrism, and the History of Science. *History of Science*, 31(3), 227-287.

Petrie, W. M. F. (2013). *Seventy Years in Archaeology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Robins, G., & Shute, C. (1987). *The Rhind Mathematical Papyrus: An Ancient Egyptian Text*. London: British Museum.

Saidan, A. S. (1966). The Earliest Extant Arabic Arithmetic: Kitāb al-Fusūl fī al Hisāb al-Hindī of Abū al-Hasan, Ahmad ibn Ibrāhīm al-Uqlīdisī. *Isis*, 57(4), 475-490.

Sarton, G. (1935). The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585). Together with a History of the Decimal Idea and a Facsimile (No. XVII) of Stevin's Disme, *Isis*, 23(1), 153-244.

Scarre, C., & Fagan, B. (2015). 고대 문명의 이해 (제3판, 이청규 옮김). 서울: 사회평론. (원서출판 2008).

Schattschneider, D. (1978). The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation. *American Mathematical Monthly*, 85(6), 439-450.

An Analysis of Descriptions about the History of Mathematics in the 2015 Mathematics Textbooks and Teacher Guides for Elementary School Level

Park, Mingu
Beakhac elementary school, Incheon, Korea
E-mail : 22152154@inha.edu

In this study, we review contents to supplement the descriptions of the history of mathematics in the 2015 mathematics textbooks and teacher guides for the elementary school level and offer our opinion on them. For this purpose, we conducted a literature review on 24 types of 2015 mathematics textbooks and teacher guides for the elementary school level. The results of this study are as follows: A total of 10 topics were found whose contents were supplemented with descriptions. They were the "Arithmetic of the Ancient Egyptians," the "A'h-mosè Papyrus in Mathematics Textbooks of the Ancient Egyptians," "The Old Akkadian Square Band in Mesopotamia," "The Relationship of the Old Babylonians in Mesopotamia with the Angle," "The Pi of the Ancient Egyptians and the Old Babylonians," "The Square Roots 2 of the Ancient Egyptians and the Old Babylonians," "The Relationship of the Islamites with the Decimal Fraction," "Two Arguments for the Roots of the Golden Ratio," "The Relationship of Archimedes with the Exhaustion Method," and "The Design of Flats." Then, their specific supplements were suggested. It is expected that this will overcome the perspective of the history of the Axial Age and acknowledge and accept the perspective evidencing the transfer of mathematical culture from Ancient Egypt and Old Babylonia to Ancient Greece and Hellenism, and then through Central Asia to Europe.

---

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key words : 2015 mathematics curriculum, mathematics textbooks, mathematics teacher guides, history of mathematics, culture of mathematics, Axial Age