Journal of Convergence for Information Technology
Vol. 12. No. 3, pp. 252-258, 2022

e-ISSN 2586-4440
DOI : https://doi.org/10.22156/CS4SMB.2022.12.03.252

Robust PCA를 활용한 이공계 대학생의 확률 및 통계 개념 이해도 분석

유용석
인천대학교 전자공학과 부교수

Clustering Analysis of Science and Engineering College Students' understanding on Probability and Statistics

Yongseok Yoo
Associate Professor, Department of Electronics Engineering, Incheon National University

요 약 본 연구에서는 실제 대학의 소규모 강좌에서 확률과 통계에 대한 수강생들의 이해도를 쉽고 빠르게 분석하기 위한 방법을 제안한다. 95명의 이공계 대학생을 대상으로 확률과 통계에 대한 컴퓨터 기반 검사를 시행하였다. 학생들의 응답을 Robust PCA와 가우시안 혼합 모델을 사용하여 7개의 군집으로 나눈 뒤, 각 군집 별로 주제별 성취도를 분석하였다. 상위권 군집은 통계적 추정을 제외한 다른 주제들에 대해서 대체로 높은 성취도를 보였으며, 저성취 군집들은 서로 다른 주제에 대해서 강약점을 보였다. 제안하는 기법은 기존에 널리 쓰이는 PCA를 사용하여 차원 축소 후 군집 분석을 수행한 것 보다 각 군집들의 특성이 더 분명하게 나타냈다. 이는 각 군집 별 특징에 따른 개별화된 학습 전략을 개발하는 데 활용될 수 있다.

주제어 : 대학생, 확률과 통계, 군집분석, Robust PCA, 학습 전략

Abstract In this study, we propose a method for analyzing students' understanding of probability and statistics in small lectures at universities. A computer-based test for probability and statistics was performed on 95 science and engineering college students. After dividing the students' responses into 7 clusters using the Robust PCA and the Gaussian mixture model, the achievement of each subject was analyzed for each cluster. High-ranking clusters generally showed high achievement on most topics except for statistical estimation, and low-achieving clusters showed strengths and weaknesses on different topics. Compared to the widely used PCA-based dimension reduction followed by clustering analysis, the proposed method showed each group's characteristics more clearly. The characteristics of each cluster can be used to develop an individualized learning strategy.

Key Words : College students, Probability and statistics, Clustering analysis, Robust PCA, Learning strategy

1. 서론

1.1 확률과 통계 교육의 중요성

확률적 사고의 중요성과 그 교육 방안에 대한 연구가 꾸준히 이루어져왔다. 확률과 통계는 그 자체로 중요한 학문 분야일 뿐만 아니라 불확실한 현실 세계에서 경쟁력을 가지도록 도와준다[1]. 대한민국의 교육과정에도 확률과 통계의 중요성이 꾸준히 강조되고 있으며, 효과적인 교육 방법에 대한 다양한 연구가 수행되고 있다[2-4]. 그러나 확률 및 통계 교육의 연구 대상은 대부분 고등학생에게 집중되어 있으며[4], 일부 초등학생과 예비 교사를 대상으로 한 연구에 국한된다[5,6]. 정작

*This research was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korea government (MSIT) (No. 2020R1G1A1011136) and Incheon National University Research Grant in 2020.
*Corresponding Author : Yongseok Yoo (yyoo@inu.ac.kr)
Received February 20, 2022
Revised March 6, 2022
Accepted March 20, 2022
Published March 28, 2022

확률과 통계의 개념을 숙지하고 자신의 전공 분야에 활용해야 하는 이공계 대학생에 대한 연구는 부족하다. 따라서 본 연구에서는 이공계 대학생을 대상으로 확률과 통계에 대한 이해도를 측정하고 효과적인 교육 방안에 대해서 탐색한다.

1.2 실용적인 분석 방법의 필요성

본 연구는 소규모 수업에서 각 피험자의 개별적인 학습 특성을 쉽고 빠르게 분석하는 것을 목표로 하였다. 이를 위해서는 기존에 교육 측정 분야에서 널리 쓰이는 대규모 시험 기반의 분석을 적용하기 어려운 한계점이 존재한다. 예를 들어 문항 반응 이론은 피험자의 능력에 따른 각 문항을 정답을 맞힐 확률로 정의되는 문항 특성 곡선을 활용하여 학생들의 응답으로부터 능력을 예측한다[7-9]. 이를 위한 문항 개발과 문항 특성 곡선 계산은 대규모 집단 연구를 통해서만 가능하다. 최근 큰 관심을 받고 있는 인지 진단 모형[10-15]을 적용할 경우 학생의 능력치를 인지 요소별로 세분화 하여 각 인지 요소별 능력치를 예측할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 또한 각 문항과 인지 요소와의 관계를 정확히 계산하는 것이 선행되어야 하며[16-19], 이는 대규모 집단 연구를 필요로 한다.

본 연구에서는 실제 대학 현장에서 100 명 미만의 소규모 강좌를 개설하고 운영할 때 확률과 통계에 대한 수강생들의 이해도를 쉽고 빠르게 분석하기 위한 방법을 제안한다. 시험 문항은 교수자가 직접 개발하여 활용하며 이를 표준화하는 대규모 연구가 불가능한 상황을 가정한다. 학생의 문항 반응을 분석하여 내재된 패턴을 쉽고 빠르게 분석할 수 있는 방법을 제안한다.

1.3 비지도 학습 기반 분석 기법

최근 비지도 학습 기반의 학습 성취도 분석 방법이 활발히 연구되고 있다. 선행 연구[20]에서는 학생의 문항 응답 데이터를 PCA (Principal Component Analysis)[21,22]를 활용하여 데이터의 차원을 축소한 후 K 평균 군집화 방법[21,23]과 가우시안 혼합 모델 (Gaussian Mixture Model; GMM)[21,24]을 적용하여 학생들의 학습 성취도를 문항과 내용 요소 차원에서 각각 분석하였다. 그 결과 가우시안 혼합 모델을 사용하는 것이 저성취 그룹에 속한 학생들의 학습 패턴을 더 잘 분류해 낸다는 결론을 도출하였다.

그러나 선행 연구에서 제안한 기법은 이상치(outlier)에 민감한 한계점을 가진다. 예를 들어 일부 고득점 학생들이 성취도가 낮은 그룹으로 분류되는 오류가 발생한다. 본 논문에서는 이상치에 강인한 개선된 성취도 분석 방법을 제안한다. 이를 위해 PCA 대신 이상치에 강인한 Robust PCA (RPCA)[25]를 가우시안 혼합 모델과 결합하여 사용한다. 동일 데이터에 대해 제안하는 기법과 기존 PCA 기반의 분석 결과를 비교한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 연구에 활용된 데이터 수집 방법 및 분석 방법을 설명한다. 3장에서는 PCA와 RPCA를 사용한 각 그룹의 성취도 분석 결과를 비교한다. 이후 4장에서 결론과 후속 연구를 제안한다.

2. 연구 방법

2.1 데이터 수집

본 연구에 활용된 데이터는 다음과 같은 방법으로 수집되었다. 먼저 확률과 통계 교과목의 여섯 가지 주제를 선정하였다. 선정된 주제는 중복 조합(T1), 확률(T2), 조건부 확률(T3), 확률 변수(T4), 확률 분포(T5), 통계적 추정(T6)이다. 각 주제에 대해 사지선다 형태의 문항 2개씩 출제한 뒤, 이 중에서 총 10개의 문항을 선택하였다. 선택된 문항은 중복 조합 1 문항, 확률 2 문항, 조건부 확률 2 문항, 확률 변수 2 문항, 확률 분포 2 문항, 그리고 통계적 추정 1 문항이었다.

선정된 문항들을 활용하여 95명의 이공계 대학생을 대상으로 컴퓨터 기반 검사를 시행하였다. 시험 응시 시간은 50분이었으며, 평균 응시 시간은 30분이었다. 10개 문항에 대해 학생들이 보인 응답을 1(정답)과 0 (오답)으로 변환하였다.

2.2 데이터 분석

데이터 분석은 Fig. 1에 요약된 것과 같이 차원축소와 군집 분석 단계를 거친다. 차원 축소 단계에서는 기존에 널리 쓰이는 PCA 기법과 이상치에 강인한 RPCA 기법을 적용한 뒤, 각 경우에 대해서 GMM 알고리즘을 사용하여 군집 분석을 수행한다.

차원 축소 단계는 다음과 같이 수행되었다. PCA와 RPCA 적용 시 공통적으로 응답 데이터로부터 평균 점수를 빼고 표준편차로 나누어 이를 통해 1과 0 형태의

응답 데이터가 평균이 0이고 표준편차가 1인 실수 값을 갖는 10차원 벡터로 표현되었다. 이를 통해 입력 데이터의 평균에 의한 영향를 제거하고 반응들 간의 상관관계를 나타내는 covariance matrix에 기반 한 PCA 혹은 RPCA 적용이 용이하게 하였다. 10차원의 입력 데이터로부터 covariance matrix를 계산한 후 고유치 분석을 통해 10개의 주성분(principal component)을 계산한다. 이때 주성분은 대응하는 고유치 값의 내림차순으로 정리한다. 고유치 값의 누적합을 계산한 뒤 전체 분산으로 나누어 설명 분산(explained variance)을 계산한다(Fig. 2). 설명 분산 비율이 80% 이상 되는 차원의 최소값이 두 알고리즘 모두 7이므로 입력 데이터를 7차원 축소하였다. 10개의 주성분 중에서 대응하는 고유치 값이 큰 상위 7개의 주성분을 선택하여 이 선택된 주성분에 투영(projection)하여 10차원의 입력 데이터를 7차원으로 축소하였다.

RPCA와 PCA의 가장 큰 차이점은 covariance matrix 계산 시에 이상치를 고려하는지 여부이다. PCA는 입력 데이터를 모두 사용하여 covariance matrix를 계산하는 반면, RPCA는 입력 데이터 중 이상치를 명시적 검출하여 이상치를 제외한 데이터를 사용하여 주성분을 계산한다는 점이다. RPCA 계산 시에는 평균은 원점으로 고정하였으며, covariance matrix 만을 MCD covariance 알고리즘[25]을 사용하여 계산하였다. 이를 통해 95개의 응답 데이터 중에 11개의 응답 데이터가 이상치로 검출되었으며, 나머지 84개의 응답 데이터를 사용하여 covariance matrix가 계산되었다.

PCA와 RPCA의 효과를 비교하기 위하여 PCA와 RPCA를 사용하여 계산된 고유값와 고유벡터를 비교하였다. 크기순으로 정렬된 10 쌍의 고유값에 대해 대응표본 t 검정을 수행하여 PCA와 RPCA 사용 시 고유치 값의 차이가 있는지 확인하였다. 10 쌍의 고유 벡터는 10 차원의 수치이므로 직접적인 비교가 어렵다. 따라서 PCA의 각 고유 벡터와 대응하는 RPCA의 고유 벡터 사이의 내적을 구한 뒤, 내적 값의 절대값이 1과 차이가 있는지 단일 표본 t 검정을 수행하였다.

차원 축소된 데이터는 GMM을 사용하여 군집화하였다. 군집의 수(k)를 결정하기 위해 k를 1부터 7까지 변화시키며 GMM을 사용한 군집 분석을 수행하고, 각 k에 대해 AIC(Akaike Information Criterion)[26] 값을 계산하였다. AIC 값이 최소가 되는 k 값을 최적의 군집의 수로 선택하였다.

군집화 후에 분류된 그룹 내의 학생들 평균 총점 이 높은 그룹부터 내림차순으로 정렬하였다. 즉 Group 1 이 평균 성취도가 가장 높은 군집이다. 각 군집에 대해서 각 주제별 평균 점수를 측정하여 주제별 성취도를 계산하였다. 성취도 값이 양수이면 해당 주제에 대해서 전체 학생의 평균보다 더 높은 성취도를 보였음을 의미한다.

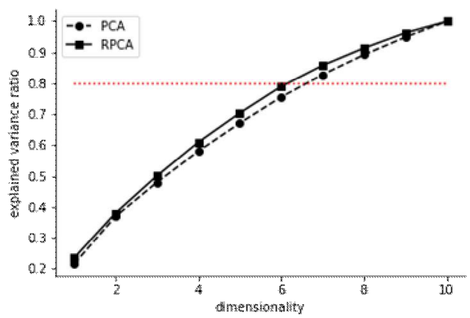

Fig. 2. Explained variance ratio as a function of the dimensionality for PCA (dashed) and RPCA (solid)

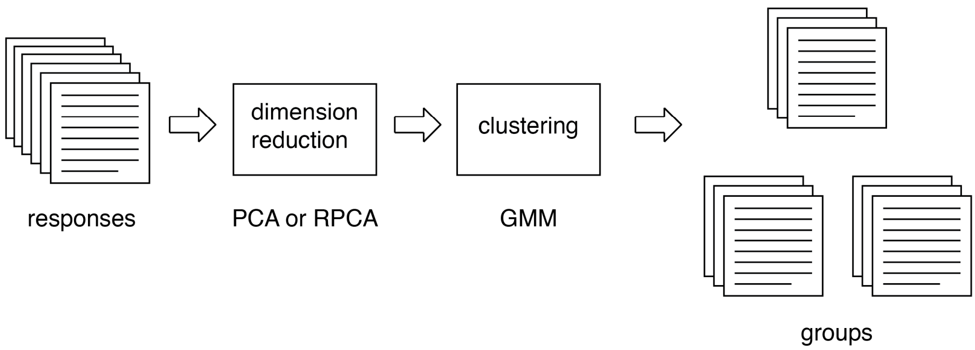

Fig 1. Schematic diagram of the clustering analysis

3. 연구 결과

PCA와 RPCA에 의해 계산된 주성분들의 방향 사이에는 통계적으로 유의미한 차이가 발견되었다. PCA와 RPCA에 의해 계산된 고유치 값들 사이에는 통계적으로 유의미한 차이가 발견되지 않았다(p=0.33, paired t-test). 그러나 PCA와 RPCA의 주성분들 사이의 내적의 절대값은 1과 통계적으로 유의미하게 달랐다(p=0.001, 1 sample t-test).

PCA와 RCPA로 서로 다른 기법으로 데이터의 차원을 축소했을 때 GMM 군집화 적용 시 서로 다른 최적의 그룹 수를 나타냈다. PCA의 경우 5개의 군집으로 나누는 것이 가장 작은 AIC 값을 보였으며, 그룹의 개수를 늘이면 AIC 값이 오히려 증가하였다(Fig. 3 점선). RPCA의 경우 7개의 군집이 최소의 AIC 값을 보여 최적의 군집 분석 결과로 나타났다(Fig. 3 실선).

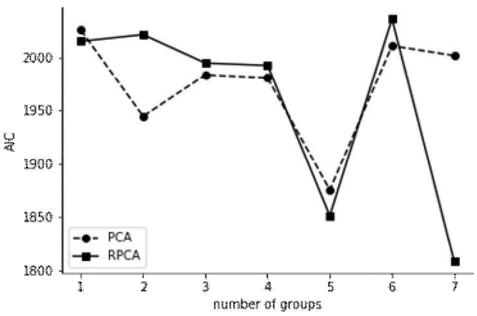

Fig. 3. AIC values for different numbers of groups for PCA (dashed) and RPCA (solid).

PCA 적용 후 GMM을 적용하여 최적의 군집 수인 5개의 군집으로 분류할 경우, 군집들의 각 주제별 성취도는 Fig. 4A와 같다. 상위권 군집들 (Group 1, 2)은 모든 주제에 대해서 대체로 높은 성취도를 보였다. 하위권인 Group 4의 경우 최하위권인 Group 5에 비해서 조건부 확률(T3)의 이해도가 더 높은 것을 확인할 수 있다.

비교를 위해 PCA 적용 후 GMM을 적용하여 7개의 군집으로 분류한 경우 주제별 성취도는 Fig. 4B와 같다. 군집의 수는 많아졌으나 각 군집별 차이점이 두드러지지 않았다. 이는 군집의 수를 7로 늘렸을 때 군집의 수가 5인 경우에 비해 AIC 값이 오히려 증가한 것과 일치한다. 따라서 군집의 수를 늘리는 것만으로는 분석의 정확도를 높일 수 없었다.

RPCA에 의한 군집 분석 결과(k=7)는 각 군집들이 더 뚜렷한 차별성을 보였다 (Fig. 4C). 특히 이런 특성은 중위권과 하위권 군집의 이해도를 더 확연하게 구별해 주었다. 예를 들어 Group 1과 2와 같은 상위권 그룹의 경우 모든 주제에 대해서 대체적으로 고른 성취도를 보였다. 중위권 Group 3, 4, 5의 경우 특정 주제에 대해서는 이해도가 높았으나 다른 주제에 대한 이해도는 상대적으로 낮았다. 하위권 학생은 경우 중복 조합(T1), 확률(T2), 조건부 확률(T3)에 대한 이해도의 여부에 따라 Group 6과, 7로 나뉘었으며, 두 군집 모두 확률 변수(T4), 확률 분포(T5), 통계적 추정(T6)의 주제에 대해서는 현저히 낮은 성취도를 보였다.

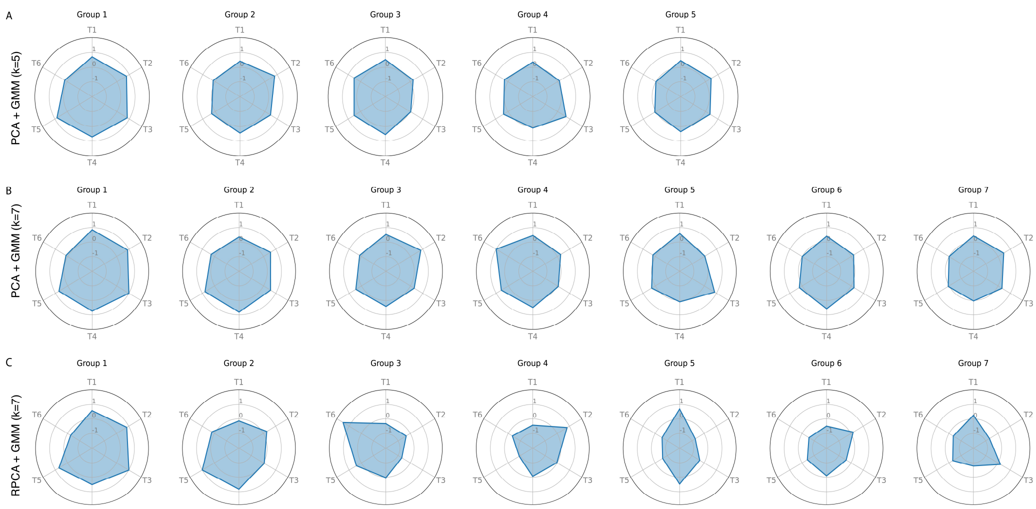

Fig. 4. Topic-wise achievements using PCA and GMM with k=5 (A), PCA and GMM with k=7, and RPCA and GMM with k=7

따라서 PCA 기반의 기존 분석방법과 이상치를 고려하는 RPCA 기반의 분석 기법을 비교하면 다음과 같다. 먼저, 각 기법에서 최적의 군집수를 적용할 경우(PCA, k=5; RPCA, k=7), PCA (Fig. 4A) 보다 RPCA 기반의 기법(Fig. 4C)이 각 군집별 세부 특성을 더 자세하게 보여주었다. 다음으로 군집의 수를 동일하게 고정하고 (k=7) PCA (Fig. 4B)와 RPCA(Fig. 4C)를 비교할 경우에도 RPCA 기반의 기법에서 PCA 기반의 기존 기법보다 각 군집의 특성이 더 뚜렷하게 나타났다.

4. 결론 및 논의

본 논문에서는 표준화된 검사가 어려운 소규모 수업에서 비지도 학습을 활용한 학생들의 성취도 분석 방법을 연구하였다. 확률 통계 교과목에서 95명 학생 문항 응답 데이터를 수집하였다. 기존 연구에서 사용되는 PCA와 이상치에 강하게 동작하는 RPCA를 사용하여 차원을 축소한 뒤, 각각의 경우에 대해서 가우시안 혼합 모델을 적용하여 각각 5 군집과 7 군집으로 분류하였다. 그리고 각 군집에 대해서 주제별 세부 성취도를 계산하였다.

어떤 차원 축소 기법을 사용하는지 여부가 주제 별 성취도 분석 결과에 큰 영향을 미치는 것을 확인하였다. 기존 연구와 같이 차원 축소와 군집화 알고리즘을 차례로 적용하는 것은 차원 축소 알고리즘을 통해 입력 데이터의 전체적인 패턴을 파악한 후 군집화 분석을 통해 보다 세부적인 패턴을 분석하기 위한 것이었다. 본 연구에서는 전처리 단계인 차원 축소 알고리즘의 선택이 최종 분석 결과에 상당한 영향을 줄 수 있음을 확인하였다. 차원 축소 시 RPCA를 사용하여 이상치를 제외하는 것이 PCA를 사용하여 모든 데이터를 사용하는 것보다 다음 단계의 군집 분석에서 군집별 차이점이 잘 드러나도록 하였다.

PCA와 RPCA는 동일한 입력 데이터로부터 서로 다른 방향의 주성분을 찾아내었고, 이는 차원 축소와 군집화 결과에 차이를 발생하였다. PCA 적용 후 군집 분석을 수행했을 경우 보다 RPCA 적용 후 군집 분석을 수행했을 때 각 군집들 간의 차이점이 더 명확하게 나타났다. 특히 이 차이점은 저성취 군집들의 주제 별 세부 성취도 분석에 두드러지게 나타났다. 저 성취 군집들은 서로 다른 주제에 대해서 강약점을 가진다는 것이 RPCA와 군집분석을 결합하여 사용함으로써 발견할 수 있었다.

주제별 성취도 분석 결과는 고성취 그룹의 학습에 대해서도 시사점을 제공한다. 최상위 군집(Group 1)은 모든 주제에 대한 성취도가 전반적으로 높았으나, 통계적 추정(T6)의 성취도은 다른 요소에 비해 낮았다. 흥미로운 점은 Group 3의 경우 오히려 통계적 추정에 대한 성취도가 매우 높은 반면 다른 주제에 대해서는 평균 수준의 성취도를 보였다. 이는 상위권 학생들에게 통계적 추정에 대한 새로운 학습 전략의 필요성을 보여준다.

통계적 추정이 상위권 학생들에게도 어려울 수 있다는 점은 다양한 시사점을 함의한다. 본 연구 결과에서 최상위권 군집(Group 1)의 경우에도 통계적 추정의 성취도가 상대적으로 낮았다는 점은 통계적 추정이 다른 주제에 비해서 학생들이 습득하기 어렵다는 선행 연구와 일치한다[27-30]. 본 연구와 가장 관련이 깊은 대학생을 대상으로 하는 연구[29]에서도 일반적인 대학생들은 표집 분포와 신뢰구간을 제대로 이해하지 못하고 다양한 오개념을 가지고 있다고 보고된 바 있다.

내용적인 면에서도 통계적 추정은 다른 주제와 다른 성질을 가진다. 다른 다섯 가지 주제(T1~T5)들은 공리적 확률론을 바탕으로 형식적인 논리에 기반하여 문제를 해결한다. 반면, 통계적 추정(T6)은 개념적으로 빈도적 확률에 근거하며 주어진 문제에서 모집단과 표본을 명확히 파악하고 그 관계를 통해 추정을 수행해야 한다[31-32]. 특히 중위권인 Group 3의 경우 다른 주제들(T1~T5)에 대한 성취도에 비해 통계적 추정(T6)에 대한 성취도가 유난히 높게 보이는 현상이 관찰되었다. 이는 Group 3의 학생들이 치밀한 연역적 사고력은 다소 부족한 반면 비형식적인 문제 해결능력은 상대적으로 높을 것으로 예상된다. 이런 학생들을 위한 특화된 학습 전략이 요구된다.

성취도가 낮은 하위 군집이 주제별 다른 패턴을 보여주었다는 점은 저성취 그룹에 대해서도 학습 주제에 따른 특화된 학습 전략을 설계할 필요가 있다는 사실을 내포한다. 본 연구에서 선택된 6개의 학습 주제들 중 4개는 선행지식 관계가 크다. 조건부 확률(T3)을 이해하기 위해서는 확률(T2)의 개념을 명확히 이해해야 하며, 확률 분포(T5)를 이해하기 위해서는 확률 변수(T4) 지식이 선행되어야 한다. 이는 Group 4와 Group 6의 조건부 확률(T3)에 대한 성취도가 확률(T2)에 대한 성취도 보다 낮으며 확률 분포(T5)에 대한 성취도가 확률 변수(T4)에 대한 성취도가 더 낮은 것으로 확인할 수

있다. 그러나 Group 5와 Group 7의 경우는 주제의 선행 관계와 상관없이 특정 주제(Group 5의 경우 T1과 T4, Group 7의 T3)에 대해서만 높은 성취도를 보이며 다른 주제에 대해서는 성취도가 현저히 낮았다. 따라서 주제에 따른 선행지식 관계와 달리 이상 학습 패턴을 보이는 Group 5와 Group 7과 같은 학생들에 대해서는 다른 학습 전략을 적용할 필요가 있다.

본 연구는 소규모 수업에서 비지도 학습을 통한 군집별 성취도 세부 분석의 가능성을 확인하였다. 궁극적으로는 일선의 교육 현장에서 교사가 쉽고 편하게 사용 가능한 학습 분석 방법과 결과를 한눈에 파악할 수 있는 시각화 기법의 개발과 그룹별 학습 전략 개발이 중요한 향후 연구의 주제가 될 것이다.

또 다른 중요한 연구주제는 입력 데이터의 차원이 증가할 경우에 적용 가능한 분석 기법을 연구하는 것이다. 본 연구에서는 소규모 수업에 쉽게 적용 가능한 분석 기법을 연구하였다. 따라서 학생의 수와 문항의 수가 제한적인 상황을 가정하였다. 그러나 학생 수를 고정하더라도 문항의 수를 늘이거나 시험의 회수를 늘여서 취득한 데이터의 차원이 증가할 경우에 차원축소와 군집분석의 효과적인 적용 방안에 대한 연구가 필요할 것이다.

REFERENCES

[1] G. A. Jones. (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Springer Science & Business Media.

[2] Ministry of Education. (1997). *The 7th national mathematics curriculum.*

[3] D. H. Jang & H. J. Lee. (2004). A Study on Probability and Statistics Education in 1-10 Grade Mathematics Textbooks in Korea. *The Korean Journal of applied Statistics, 18(1)*, 229-249. DOI : 10.5351/KJAS.2005.18.1.229

[4] M. S. Park & E. J. Lee. (2021). An Analysis of Domestic Research Trends of Probability Education. *Journal of the Korean School Mathematics, 24(4)*, 349-367. DOI : 10.30807/ksms.2021.24.4.002

[5] K. S. Oh. (2011). Probability and statistics curriculum in school. *Journal of the Korean Data And Information Science Society, 22(6)*, 1097-1103.

[6] C. I. Kim & Y. J. Jeon. (2018). A Study on Pre-service Mathematics Teachers' some Misconceptions in the Statistics and Probability. *ournal of the Korean School Mathematics, 21(4)*, 469-483. DOI : 10.30807/ksms.2018.21.4.008

[7] F. B. Baker & S-H. Kim. (2004). *Item response theory: Parameter estimation techniques.* CRC Press.

[8] S. E. Embretson & S. P. Reise. (2013). *Item response theory.* Psychology Press.

[9] C. D. Desjardins & O. Bulut. (2018). *Handbook of Educational Measurement and Psychometrics using R.* CRC Press,

[10] M. von Davier & Y. S. Lee. (2019). *Handbook of diagnostic classification models.* Springer International Publishing.

[11] A. A. Rupp & J. L. Templin. (2008). Unique characteristics of diagnostic classification models: A comprehensive review of the current state-of-the-art. *Measurement, 6(4)*, 219-262. DOI : 10.1080/15366360802490866

[12] M. Birenbaum, A. E. Kelly & K. K. Tatsuoka. (1993). Diagnosing knowledge states in algebra using the rule-space model. *Journalfor Research in Mathematics Education, 24(5)*, 442-459. DOI: 10.5951/jresematheduc.24.5.0442

[13] K. K. Tatsuoka. (1983). Rule space: An approach for dealing with misconceptions based on item response theory. *Journal ofeducational measurement*, 345-354.

[14] J. P. Leighton, M. J. Gierl & S. M. Hunka. (2004). The attribute hierarchy method for cognitive assessment: A variation on Tatsuoka's rule-space approach. *Journal of educational measurement, 41(3)*, 205-237. DOI : 10.1111/j.1745-3984.2004.tb01163.x

[15] M. J. Gierl, C. Alves & R. T. Majeau. (2010). Using the attribute hierarchy method to make diagnostic inferences about examinees' knowledge and skills in mathematics: An operational implementation of cognitive diagnostic assessment. *International Journal of Testing, 10(4)*, 318-341. DOI : 10.1080/15305058.2010.509554

[16] J. de la Torre. (2008). An empirically based method of Q-matrix validation for the DINA model: Development and applications. *Journal of Educational Measurement, 45*, 343-362. DOI : 10.1111/j.1745-3984.2008.00069.x

[17] L. T. DeCarlo, (2012). Recognizing uncertainty in the Q-matrix via a Bayesian extension of the DINA model. *Applied Psychological Measurement, 36*, 447-468. DOI : 10.1177/0146621612449069

[18] C. Y. Chiu. (2013) Statistical refinement of the Q-matrix in cognitive diagnosis. *Applied Psychological Measurement, 37,* 598-618.
DOI : 10.1177/0146621613488436

[19] H. Koh, W. Jang & Y. Yoo. (2021). On Validating Cognitive Diagnosis Models for the Arithmetic Skills of Elementary School Students. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 12(12)*, 51-55.
DOI : 10.14569/IJACSA.2021.0121207

[20] W. Jang & Y. Yoo. (2020). Analysis of the Status of Students' Knowledge Using Unsupervised Learning. *Journal of The Korean Institute of Intelligent Systems. 30(4),* 314-324.
DOI : 10.5391/JKIIS.2020.30.4.315

[21] T. Hastie, R. Tibshirani, & J. Friedman. (2009). *The elements of statistical learning*. New York: springer.

[22] I. T. Jolliffe. (1986). *Principal component analysis.* Springer.

[23] J. A. Hartigan & M. A. Wong. (1979). Algorithm AS 136: A k-means clustering algorithm. J*ournal of the royal statistical society. series C, 28(1),* 100-108.
DOI: 10.2307/2346830

[24] L. Xu & M. I. Jordan. (1996). On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures. *Neural computation, 8(1)*, 129-151.
DOI: 10.1162/neco.1996.8.1.129

[25] P. J. Rousseeuw & K. V. Driessen. (1999). A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. *Technometrics, 41(3)*, 212-223.

[26] K. P. Burnham & D. R. Anderson. (2004). Multimodel inference: understanding AIC and BIC in model selection. *Sociological methods & research, 33(2),* 261-304.
DOI : 10.1177/0049124104268644

[27] J. Y. Lee & K. H. Lee. (2017). Study on the Levels of Informal Statistical Inference of the Middle and High School Students. *School Mathematics 19(3)*, 533-551.

[28] M. S. Park, M. Park, K. H. Lee & E. S. Ko. (2011). Middle School Students' Statistical Inference Engaged in Comparing Data Sets. *School Mathematics 13(4)*, 599-614.

[29] Y. M. Jee & Y. Yoo. (2019). Undergraduates' Understanding of Sampling Distribution and Confidence Interval in Statistical Inference. *School Mathematics, 21(1).* 125-153.
DOI : 10.29275/sm.2019.03.21.1.125

[30] E. S. Ko & K. H. Lee. (2011). Pre-service Teachers' Understanding of Statistical Sampling. *Journal of Educational Research in Mathematics 21(1),* 17-32.

[31] L. Saldanha & P. Thompson. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational studies in mathematics, 51(3)*, 257-270.
DOI : 10.1023/A:1023692604014

[32] D. Ben-Zvi & J. B. Garfield. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Kluwer academic publishers.

유 용 석(Yongseok Yoo) [정회원]

· 2002년 8월 : 서울대학교 전기공학부 (공학 학사)
· 2005년 2월 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 (공학 석사)
· 2014년 5월 : University of Texas at Austin (Ph.D.)
· 2017년 3월 ~ 현재 : 인천대학교 전자공학과 부교수
· 관심분야 : 인공지능, 계산 뇌과학, 학습 이론
· E-Mail : yyoo@inu.ac.kr