The Mathematical Education. Vol. 61, No. 1, 157-178
http://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.1.157

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

Preservice teachers' understanding of fraction multiplication through problem posing and solving in Korea and the United States

Yeo, Sheunghyun[1] · **Lee, Jiyoung**[2*]
[1]Professor, University of Alabama
[2]Teacher, Songshin Elementary School

[*]Corresponding Author : Lee, Jiyoung (ez038@naver.com)

Abstract

Mathematics teachers' content knowledge is an important asset for effective teaching. To enhance this asset, teacher's knowledge is required to be diagnosed and developed. In this study, we employed problem-posing and problem-solving tasks to diagnose preservice teachers' understanding of fraction multiplication. We recruited 41 elementary preservice teachers who were taking elementary mathematics methods courses in Korea and the United States and gave the tasks in their final exam. The collected data was analyzed in terms of interpreting, understanding, model, and representing of fraction multiplication. The results of the study show that preservice teachers tended to interpret (fraction)×(fraction) more correctly than (whole number)×(fraction). Especially, all US preservice teachers reversed the meanings of the fraction multiplier as well as the whole number multiplicand. In addition, preservice teachers frequently used 'part of part' for posing problems and solving posed problems for (fraction)×(fraction) problems. While preservice teachers preferred to a area model to solve (fraction)×(fraction) problems, many Korean preservice teachers selected a length model for (whole number)×(fraction). Lastly, preservice teachers showed their ability to make a conceptual connection between their models and the process of fraction multiplication. This study provided specific implications for preservice teacher education in relation to the meaning of fraction multiplication, visual representations, and the purposes of using representations.

Key words : fraction multiplication, elementary preservice teachers, problem posing, problem solving

문제제기 및 해결을 통한 한국과 미국 예비교사의 분수 곱셈 이해 탐색

여승현[1] ·**이지영**[2*]
[1]앨러바마대학교 교수, [2]송신초등학교 교사

[*]교신저자 : 이지영 (ez038@naver.com)

초록

본 연구에서는 한국과 미국의 초등예비교사들의 분수 곱셈에 대한 이해를 살펴보기 위해서 문제제기 및 문제해결 과제의 수행 결과를 분석하였다. 연구 결과, 첫째, (분수)×(분수)의 상황에 비해서 (자연수)×(분수)에서 피승수와 승수의 위치를 혼동하여 승수를 분수가 아닌 자연수로 생각하는 경향이 더 많이 나타났다. 둘째, (분수)×(분수)에서는 집합이나 길이에 비해서 넓이 모델을 선호하는 것으로 나타났고, 대부분의 예비교사들이 주어진 수식의 계산과정이 나타나도록 모델을 연결하여 설명하였다. 이를 바탕으로 예비교사의 곱셈의미 이해에 대한 연구의 시사점을 제언하였다.

주요어 : 분수 곱셈, 초등예비교사, 문제제기, 문제해결

Received February 9, 2022 **Revised** February 14, 2022 **Accepted** February 21, 2022
2000 Mathematics Subject Classification : 97B50, 97C30
Copyright © 2022 The Korean Society of Mathematical Education.
This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http: //creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

효과적인 수학수업을 위해서 교사는 다양한 지식이 필요하다. 교사의 능력은 교사의 교과에 대한 지식에 달려있다고 주장할 만큼 교사 지식은 많은 연구들에서 주목되어왔다(Ma, 1999). Shulman (1986)이 교사가 가져야 할 지식을 내용적 지식과 교수학적 내용 지식으로 나눈 이래로, 수학교육에서도 수학 내용적 지식과 수학을 가르칠 때 필요한 교수학적 지식을 세분화하여 교사가 어떤 지식을 가지고 있는지 또 어떻게 이러한 지식을 교사들에게 길러줄 수 있는지에 대한 연구들이 지속적으로 수행되어왔다(e.g., Ball et al., 2008; Son & Lee, 2016). 그 중, 수학 내용적 지식은 학생들이 수학수업시간에 배워야 할 내용에 대한 교사들의 이해정도를 나타내며, 이는 실제 수업에서 관찰가능한 수업관행에도 영향을 준다(Wilkins, 2008). 그러나 초등예비교사들의 수학 내용적 지식을 살펴본 연구들은 예비교사들의 개념적 또는 내용적 지식이 절차적 지식의 유창성에 비해서 부족함을 지속적으로 보고하였다(e.g., Adu-Gyamfi et al., 2019; Siegler & Lortie-Forgues, 2015). 이러한 선행 연구 결과들은 초등예비교사들의 수학 내용적 지식의 현재 수준을 진단하고, 이를 발전시킬 필요가 있음을 시사한다.

특히, 분수 연산은 초등학교에서 매우 핵심적인 내용임에도 불구하고 어린 학생들부터 성인, 그리고 교사에 이르기까지 어려워하는 내용 영역 중 하나이다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Yeo, 2021; Yeo & Webel, 2022). 분수의 덧셈(e.g., Son & Hwang, 2021)과 뺄셈(e.g., Bansilal & Ubah, 2020), 곱셈(e.g., Son & Lee, 2016)과 나눗셈(e.g., Li & Kulm, 2008)에 이르기까지 교사들과 예비교사들의 지식과 이해를 탐색한 연구들이 다양하게 이루어졌다. 이러한 기존 연구들은 문제의 해결과정에서 나타나는 예비교사의 해결 전략을 바탕으로 그들이 어떻게 해당 연산의 개념을 이해하는지에 그 초점이 있었다. 이에 예비교사들의 수학 내용적 지식과 이해를 탐색하기 위해서 문제제기를 활용한 연구들이 지속적으로 이루어졌다(e.g., Toluk-Uçar, 2009; Xie & Masingila, 2017; Yao et al., 2021). 주어진 식을 보고 문제를 제기하거나 문장제를 보고 문제를 변형하는 과정에서 관련된 수학적 내용 지식이 부족하다면 해결 가능한 문제를 정교하게 만들 수 없기 때문이다. 국내에서도 문제제기를 활용하여 분수의 연산에 대한 예비교사의 이해를 탐색한 연구가 수행되어 왔다. Noh 외 (2016)는 분수 나눗셈과 관련하여 예비교사들이 스토리 문제제기를 할 때 나타나는 오류유형과 이러한 오류를 발생시키는 원인을 분석한 결과, 초등예비교사들이 분수 나눗셈의 의미를 구현하여 문제를 만드는 것에 어려움을 겪고 있음을 보고하였다. 이상의 연구들은 문제제기나 문제해결 과정을 통해서 예비교사가 분수 연산을 어떻게 이해하고 있는지 구체적으로 탐색하였다는 점에서 의의가 있지만, 문제제기 또는 문제해결 중에서 어느 한 부분에 초점을 두었다는 점에서 한계가 있다.

이와 다르게 일부 연구에서는 연구대상자가 직접 문제제기를 하고 그 문제를 해결하는 과정을 전반적으로 탐색하여 연구대상자들이 특정 학습내용에 대해 어떻게 이해하고 있는지를 보다 구체적으로 살펴보았다(e.g., Toluk-Uçar, 2009; Xie & Masingila, 2017; Yao et al., 2021). 따라서 본 연구는 초등예비교사들로 하여금 주어진 분수 곱셈식에 대한 문장제를 제기한 후에 시각적 모델을 활용하여 문제를 해결하거나, 문제 해결을 먼저 한 후에 문장제를 제기하도록 하여, 문제 제기와 문제 해결에서 나타나는 초등예비교사들의 분수 곱셈에 대한 이해를 다면적으로 분석하였다. 특히, 분수의 연산 중에서 곱셈을 선택한 이유는 곱셈에 관여하는 양을 조작하는 과정에서 양 사이의 관계와 단위 구조에 대한 기본적이면서도 정교한 내용적 지식이 필요하기 때문이다. 자연수가 승수인 분수의 곱셈 $a/b \times c$의 경우에는 기존의 자연수 곱셈의 동수누가의 개념(a/b를 c회 반복)을 활용하여 문제를 부분과 전체의 2수준 단위 구조(1/b; 1)로 해결하는 것이 어느 정도 가능하지만, $a/b \times c/d$는 두 분수가 가지는 전체 즉 기준 단위가 서로 다르기 때문에 3수준 단위 구조($1/b \times d$; 1/b; 1)를 구성하고 활용해야 한다는 점에서 더욱 복잡하다(Steffe & Olive, 2010). 그러므로 예비교사들이 어떠한 수학 내용적 지식을 가지고 있는지 알아보기 위해서는 분수 곱셈에 관여하는 양과 곱셈 연산을 어떻게 이해하고 있는지 문제제기와 문제해결 과정에서 다면적으로 살펴보는 것이 중요하다. 이에 분수의 곱셈에 대한 문제제기와 문제해결에서 드러나는 한국과 미국의 초등예비교사들의 이해를 탐색하고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

1. 한국과 미국의 예비교사들의 문제제기에서 나타나는 분수 곱셈의 이해는 어떠한가?
2. 한국과 미국의 예비교사들의 문제해결에서 나타나는 분수 곱셈의 이해와 모델 활용은 어떠한가?

본 연구를 통해서 예비교사들의 분수 곱셈 이해를 다면적으로 탐색하는 방안에 대한 새로운 논의는 물론 예비교사교육 프로그램에서 분수 연산에 대한 내용을 구성하고 가르치는 데 있어 중요한 시사점을 논의하였다.

이론적 배경

수학교육에서의 문제제기

최근 수학교육에서는 학습자가 능동적으로 지식을 구성해 나갈 수 있고 미래사회를 대비할 수 있는 역량을 기를 수 있도록 문제해결 중심의 수업이 강조되어왔다. 문제해결에 대한 관심이 높아짐에 따라서 이와 관련하여 수학적 문제를 어떻게 만들 것인가에 대한 문제제기에 대해서도 연구들이 지속적으로 이루어지고 있다(e.g., Cai & Hwang, 2020; Singer et al., 2013). 문제제기는 단순히 새로운 문제를 만드는 것뿐만 아니라 학생이 배우고 있는 수학내용에 대한 수학적 사고를 엿볼 수 있는 통로로 활용될 수 있다(Silver, 1994). 또한, 교사들에게는 학생의 수학적 이해를 점검할 수 있는 기회를 제공하기도 하고 무엇보다도 교사 자신의 문제제기에 관련된 역량은 교사들의 수학적 이해와도 깊은 관련이 있다(Cai & Hwang, 2020).

문제제기는 먼저 문제를 만들고 해결하는 다양한 상황에 대한 인식의 정도 차이에 따라 열린 문제제기, 반구조화된 문제제기, 그리고 구조화된 문제제기 세 가지로 분류할 수 있다(Stoyanova & Ellerton, 1996). 열린 문제제기는 열린 수학적 상황에서 문제를 제기하는 것으로 예를 들어 '직각삼각형에 관한 문제를 만드시오.'와 같이 수학적 내용이나 원리를 바탕으로 문제를 만드는 사람에 따라서 다양한 맥락이나 조건을 정해서 문제를 만들 수 있다(Stoyanova, 1998). 이와 달리 반구조화된 문제제기와 구조화된 문제제기는 일단 문제의 구체적인 맥락이나 상황을 제공한 뒤에 이를 바탕으로 문제를 만들 것을 요구한다. 반구조화된 문제제기는 개인의 기존의 수학적 경험으로부터 지식, 능력, 개념, 관계를 적용하여 수학적 구조를 탐색하고 완성 또는 주어진 그림이나 수식을 이용하여 문제를 만드는 것이다. 구조화된 문제제기는 주어진 상황을 바탕으로 문제를 만들고 정해진 연산을 활용해야한다. 예를 들어, Christou 외 (2005)는 초인종 문제를 이용하여 두 문제제기 유형의 차이를 설명하였다. '어제 저녁 파티에 초인종이 10번 울렸습니다. 첫 번째 초인종이 울리고 1명이 들어왔습니다. 그 다음부터는 이전의 초인종이 울렸을 때 보다 3명이 더 많이 입장하였습니다.'를 바탕으로 문제를 만드는 것은 반구조화된 문제제기로 초인종이 울린 횟수를 바탕으로 다양한 유형의 수학적 구조를 선택하여 문제를 만들 수 있다. 반면에, 구조화된 문제제기는 '오늘은 셀리의 파티가 있는 날입니다. 첫 번째 초인종이 울리고 1명이 들어왔습니다. 두 번째 초인종이 울리고 3명이 들어왔습니다. 세 번째 초인종이 울리고 5명이 들어왔습니다. 네 번째 초인종이 울리고 7명이 들어왔습니다. 이처럼 지난번 초인종이 울렸을 때 보다 2명이 더 많이 입장합니다. 답이 25명이 되도록 문제를 만드시오.'와 같이 초인종이 울린 순서보다 2명이 더 입장하는 수학적 구조를 바탕으로 문제를 만들어야 한다.

예비교사의 문제제기와 분수 곱셈에 대한 이해

문제제기는 수학적 내용을 학습하는 학습자뿐만 아니라(Baumanns & Rott, 2021) 해당 내용을 가르치는 교사들에 이르기까지(Osana & Pelczer, 2015) 다양한 대상에 대한 연구들이 진행되어왔다. 마찬가지로, 예비교사들의 문제제기를 활용한 연구들도 최근 주목을 받고 있다(Cai & Hwang, 2020). 일부 연구는 문제제기를 통해 만들어진 문제들이 수업과 학생의 학습을 결정짓는 데 큰 역할을 하는 것에 주목하여 문제제기 그 자체가 목적이며 효과적인 수학수업을 위해 중요함을 강조한다(National Council of Teachers of Mathematics, 2000). 이와 달리, 문제제기를 예비교사들의 지식이나 관행을 발달시키기 위한 교육적 도구로서 또 진단적 도구로서, 수단으로 보는 연구들도 있다(e.g., Kotsopoulos & Cordy, 2009; Silver, 1994; Tichá & Hošpesová, 2013; Yao et al., 2021). Silver와 Cai (2005)는 문제제기를 교육적 도구로 예비교사들이 교실의 특정 상황과 관련하여 문제를 만들 수 있는 상황을 제시하고 이와 관련된 문제제기 역량을 탐색하였다. Kotsopoulos와 Cordy (2009)는 문제제기 활동을 예비교사들이 가진 수학적 이해를 탐색할 수 있는 기회로 마련하였다. 유사하게 국내에서는 Noh 외 (2016)에서 초등예비교사들이 분수 나눗셈 문제를 만들 때 가지고 있는 전문적인 지식과 오류유형을 분석하여 예비교사교육에서 내용적 지식과 상황적 이해가 동시에 이루어지는 것이 중요함을 강조하였다. 이와 같이 진단적 도구로서 문제제기는 수학적 탐색과 이해를 위한 촉진제로 활용될 수 있다(Hošpesová & Tichá, 2015). 그러나 이는 다시 말해 예비교사들의 개념적 이해 부족이 문제제기 실행에서의 어려움과 직접적으로 연결될 수 있음을 의미한다(Isik & Kar, 2012).

분수 곱셈에서는 예비교사가 제기한 문장제를 통해 분수 곱셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지 살펴봄으로써 예비교사의 분수 곱셈에 대한 이해를 탐색할 수 있다. 이를 살펴봄으로써 예비교사가 분수 곱셈에서 피승수와 승수, 그리고 두 양을 곱한다는 것을 어떻게 이해하고 있는지 등을 보다 자세히 살펴볼 수 있다.

본 연구에서는 여러 선행연구에서 제시한 다양한 분수 곱셈 의미를 연구의 목적에 따라 동수누가, 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율, 직사각형 넓이, 교차 부분으로 구분한다(e.g., Lee & Pang, 2019; Van de Walle et al, 2019; Webel & DeLeeuw, 2016). Chong (2013)과 Greer (1992)가 지적한 바와 같이 각각의 의미는 서로 엄밀하게 구분되는 것이 아니므로 이하에서는 본 연구에서 무엇에 초점을 두고 구분하였는지를 설명한다.

동수누가 의미는 우유를 2/5 L씩 3번 마시는 상황과 같이 같은 양이 반복되는 상황이다. 승수가 자연수인 분수 곱셈에서는 자연스러운 상황이지만, 승수가 분수인 상황에서 적용하기 어렵다는 점에서 한계가 있다.

부분의 부분 의미는 전체 보자기의 3/4 중에서 2/5만큼의 양을 구하는 상황으로 전체의 부분의 부분을 전체의 부분으로 다시 해석하는 것이다. 부분의 부분 의미는 분수끼리의 곱셈에도 적용할 수 있다는 장점이 있지만 각각의 분수가 어떤 양의 부분을 나타낸다는 점에서 대분수나 가분수에 그대로 적용하기에는 어려움이 있다.

곱셈적 비교 의미는 "A의 리본이 3/4 m이고 B의 리본은 A의 리본의 2/5배이다. B의 리본의 길이는 얼마인가?"와 같이 두 가지 대상을 곱셈적으로 비교하는 상황이다. 이는 "몇의 몇 배"라고 표현함으로써 분수 종류에 관계 없이 모든 곱셈 상황에서 사용할 수 있다.

비율 의미는 "1 m에 3/4 kg인 철사가 있다. 철사 2/5 m의 무게는 얼마인가?"와 같이 서로 다른 두 종류의 양(예, 길이와 무게) 사이의 일정한 관계에 따라 한 양에 해당하는 다른 양의 크기를 구하는 상황이다. 비율 의미는 곱셈에 관여하는 두 종류의 네 양 사이의 관계에 초점을 맞추도록 돕는다. 이는 부분과 부분, 곱셈적 비교 의미가 어느 한 종류의 양에만 초점을 맞추고 있다는 점에서 차이가 있다. Van de Walle 외 (2019)는 승수가 자연수인 비율 상황을 동수누가 의미로 제시하였으나, 승수가 분수인 비율 상황은 부분의 부분이나 곱셈적 비교 의미 등과 연결되므로 이를 따로 구분할 필요가 있다.

직사각형 넓이 의미는 "가로가 3/4 m이고 세로가 2/5 m인 직사각형의 넓이는 몇 m^2인가?"와 같이 같은 차원의 두 양(예, 길이)을 곱해서 새로운 차원의 양(예, 넓이)을 만드는 상황이다. 동수누가, 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율 의미에서는 피승수는 전체 1을 기본 단위로 하는 양이고, 승수는 다시 피승수를 새로운 단위로 하는 양 또는 연산자 역할을 한다. 하지만 직사각형 넓이 의미에서는 피승수와 승수가 모두 같은 1 m를 기본 단위로 하고 곱은 새로운 단위인 1 m^2를 기본 단위로 한다. 다만 초등학교에서는 곱셈이 이와 같이 새로운 차원을 만들어내는 연산이라는 것에 초점을 두어 다루지 않기 때문에 부분의 부분이나 배 의미 등과 연결하여 다룬다(예, 6/20 m^2는 1/20 m^2가 3칸씩 2줄인 직사각형의 넓이).

마지막으로 본 연구에서는 분수 곱셈에서 전체의 2/3와 전체의 3/4이 서로 교차하는 양을 구하는 상황을 다른 의미와 구분하기 위해 교차 부분이라고 지칭한다. Yim (2012)은 Figure 1과 같이 한 직사각형의 2/3와 3/4이 서로 교차하여 만들어지는 부분을 "m(A)=2/3, m(B)=3/4일 때, m(A∩B)=m(A)×m(B)와 같이 곱사건의 확률 공식 P(A∩B)=P(A)×P(B)와 같은 형태로 표현되는 곱(p. 141)"으로 설명한다. Lee와 Shin (2011), Webel 외 (2016), Yim (2012) 등의 여러 연구자들은 초등학교에서 다루는 분수 곱셈에서 이러한 의미에 주의할 필요가 있음을 지적한다. 왜냐하면 이 의미는 초등학교에서 많이 활용하는 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율의 의미와 다르게 피승수와 승수의 기본 단위가 전체 1로 같기 때문에 학생들로 하여금 피승수와 승수에 대한 이해에 혼란을 유발할 수 있으며, 서로 교차한 양이 왜 곱셈의 결과를 의미하는지를 이해하지 못한 상태에서 절차적으로만 접근하게 할 위험이 있기 때문이다.

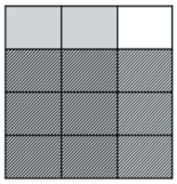


Figure 1. Intersecting part (Yim, 2012, p. 139).

예비교사의 문제해결과 분수 곱셈에 대한 이해

예비교사의 분수 곱셈에 대한 이해를 탐색하기 위해서는 문제제기에서 분수 곱셈 문장제를 어떻게 제시하는지를 살펴보는 것만으로는 부족하다. 분수 곱셈 문장제를 바르게 제기할 수 있다고 하더라도 시각적 모델을 이용하여 계산 과정을 설명하고 결과를 구

하려면 보다 폭넓은 지식이 필요하다. 이에 문제해결에서 예비교사 또는 교사가 사용한 다양한 시각적 표현을 통해 분수 곱셈을 어떻게 이해하고 있는지를 탐색한 연구가 지속적으로 이루어지고 있다(e.g., Luo et al., 2011; Tobias, 2012; Watanabe, 2003; Webel et al., 2016). 예비교사들은 분수 곱셈을 시각적 모델을 이용하여 해결하는 과정에서 다양한 어려움을 겪을 수 있는데 이는 분수 곱셈에 대한 의미와 피승수, 승수, 곱의 기본 단위에 대한 이해, 단위의 다양한 구조에서 각 분수의 적절한 기본 단위를 구분하고 개념화하는 것, 상황에 적절한 분할 조작과 알고리즘 도출까지, 고려해야 할 점이 매우 많기 때문이다(Tobias, 2012; Webel et al., 2016). 예를 들어 Luo 외 (2011)에서 미국과 대만의 일부 예비교사들은 Figure 2를 4/5×3/4에 대한 적절하지 않은 모델로 보았다. 예비교사들은 그 이유로 두 분수의 기본 단위가 서로 같지 않기 때문이라고 하였다. 이를 통해 일부 예비교사들은 분수 곱셈을 피승수와 승수의 기본 단위가 무조건 서로 같은 상황으로 받아들이고 있다는 것을 알 수 있다. 이는 분수 곱셈이 과연 무엇을 의미하고 결과를 구하기 위해서 어떠한 조작을 하는지 등의 분수 곱셈에 대한 예비교사들의 이해와 직접적으로 연결된다. 따라서 문제해결에서 예비교사들이 제시한 시각적 모델과 활용을 구체적으로 분석함으로써 예비교사의 분수 곱셈 이해에 대한 구체적인 정보를 얻을 수 있다.

Figure 2. Correct picture for 4/5×3/4 chosen as incorrect (Luo et al, 2011, p. 169).

분수 곱셈의 시각적 표현은 분수 곱셈의 의미, 모델의 유형, 모델의 사용 목적 측면에서 구체적으로 살펴볼 수 있다. 분수 곱셈의 의미는 앞에 기술되어 있으므로 본 절에서는 모델의 유형과 모델 사용 목적에 대해 설명한다.

모델 유형은 모델의 모양에 따라 집합 모델, 길이 모델(수직선, 띠), 넓이 모델(원, 직사각형, 기타) 등으로 구분된다(Lamon, 2012; Lee & Pang, 2019; Reys et al., 2014; Webel et al., 2016; Yeo, 2019; Yim, 2012). 또한 이러한 모델들은 제시된 양을 이산적으로 표현하였는지, 연속적으로 표현하였는지에 따라 세분할 수 있다. 즉 집합 모델은 이산 모델이고 길이 및 넓이 모델은 연속 모델이다. Figure 3과 같이 하나의 모델 안에 이산적인 표현과 연속적인 표현이 동시에 제시되는 경우도 있다. 본 연구에서는 이러한 모델을 혼합 모델이라고 지칭한다.

(a) Set and Area model
(Reys et al., 2014, p. 280)

(b) Set and Length model
(Yim, 2012, p. 146)

Figure 3. Representative examples of mixed models.

분수 곱셈에서 집합 모델은 (자연수)×(분수) 또는 (분수)×(분수) 등에서 직사각형 배열 형태로 사용될 수 있다. 예를 들어, 24×3/8과 같이 피승수인 자연수가 분수의 분모의 배수일 때 동그라미를 분수의 분모만큼 행이나 열에 배열하여 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 길이 모델은 수직선과 띠(또는 막대)로 다시 구분할 수 있다. 띠는 직사각형 모양이지만 수직선과 유사하게 한 방향으로만 분할하여 사용한다는 점에서 길이 모델로 구분할 수 있다. 이에 비해 넓이 모델은 직사각형이나 원과 같이 여러 방향으로 분할하여 사용하는 경우이다. 길이 모델과 넓이 모델은 피승수와 승수의 분수 종류에 상관없이 모든 분수 곱셈 상황에서 사용할 수 있다는 장점이 있다. 혼합 모델은 길이 모델과 넓이 모델을 계속 연결해서 사용하지 않고 마치 이산량처럼 따로 떨어뜨려서 제시한다는 특징이 있다. 예를 들어 Figure 3의 (b)는 4×2/3를 나타내기 위해 이산적으로 표현된 4개의 띠 각각을 3등분하고 2만큼 색칠하여 연속적인 양을 표현할 수 있다.

한편 분수 곱셈에서 시각적 모델의 사용 목적에 대해 구체적으로 분석한 연구는 드물다. 예외적으로 Lee와 Pang (2019)은 분수 곱셈에 대한 시각적 표현이 교과서에 어떤 목적으로 사용되었는지를 “분수 곱셈의 맥락 제시, 분수 곱셈의 결과 표현, 분수 곱셈 알고

리즘을 설명하기 위한 목적”으로 구분하여 분석하였다. 또한 Izsák (2008)은 분수 곱셈을 가르치는 데 필요한 수학 지식을 탐색하기 위해 교사가 가지고 있는 단위 구조와 모델을 사용하는 교수법적 목적 간의 관계를 살펴보았다. 예를 들어 교사들은 Figure 2와 같은 그림이 제시되었을 때 4/5×3/4에 적합한 그림인지를 판단하는 것에서 더 나아가 이러한 표현을 4/7×3/5과 같은 분수 곱셈에서도 그대로 적용할 수 있는지, 그림을 통해 분수 곱셈 알고리즘을 어떻게 설명할 수 있는지 등을 생각해야 한다. Izsák (2008)은 시각적 모델의 교수법적 사용 목적으로 4가지를 제시하였는데 첫 번째는 수치적 계산을 하여 답을 구한 후에 모델에 그 답을 단순히 나타내기 위한 것(illustrating)이다. 두 번째는 여러 문제에서 모델을 사용하여 해결하고 결과로 나온 수치적 값에서 분모끼리 곱하고 분자끼리 곱하는 패턴을 찾아 계산 방법을 추측하는 것(inferring)이다. 세 번째는 그려진 양의 구조를 통해, 즉 그림을 통해 계산 과정을 논리적으로 추론하는 것(deducing)이다. 마지막으로 학생들의 다양한 사고에 반응하면서 분수 곱셈에 관여하는 양의 구조를 적절하고 다양하게 표현함으로써 조정하는 것(adapting)이다.

연구방법

참여자

본 연구는 문제제기와 문제해결을 통해 한국과 미국의 초등예비교사들이 분수 곱셈을 어떻게 이해하고 있는지를 탐색하기 위해서, 연구자들이 맡은 강좌를 수강하고 있는 한국과 미국의 초등예비교사들을 연구 대상으로 하였다. 두 나라의 예비교사들을 대상으로 한 이유는 첫째, 두 나라의 곱셈 수식 제시 순서가 서로 다르기 때문에 이로 인해 문제제기와 문제해결 과정에서 예비교사들의 분수 곱셈 이해가 매우 다양하게 드러날 것이라 예상되었기 때문이다. 이렇게 문화적, 교육적으로 다른 맥락에서 자료를 수집하고 분석함으로써 예비교사의 분수 곱셈에 대한 이해를 다각도로 탐색하고 이를 통해 교사 교육 측면에서 보다 구체적인 시사점을 도출하고자 하였다. 둘째, 두 나라의 예비교사들은 두 연구자들이 접근가능한 집단이었기 때문이다. 다만 두 나라 사이의 문화적, 교육적 맥락이 다르기 때문에(Ma, 1999), 본 연구에서는 초등예비교사들의 분수 곱셈 이해의 차이를 직접적으로 비교 분석하기 보다는 나라별로 두드러지게 나타나는 특징을 중심으로 어떻게 분수 곱셈의 의미를 활용하고 이해하는지를 탐색하는 데 초점을 두었다.

본 연구에 참여한 초등예비교사는 총 41명으로, 한국의 경우에는 G교육대학교에 수학교육방법론을 듣는 3학년 학생 17명이고 미국은 A주립대학교의 초등교육프로그램에서 수학교육방법론을 듣는 3학년 24명의 학생들이다. 각각의 수업은 해당 예비교사교육 프로그램에서 유일하게 수학교육방법론을 배울 수 있는 강좌이고, 연구자들은 사전에 분수에 대한 학습내용을 공유하여 예비교사들이 유사한 내용을 학습하도록 하였다. 또한, 두 국가의 예비교사들은 수업에서 수식을 바탕으로 문제를 만들어보는 자유문제제기와 조건이나 구하고자 하는 것을 변경하는 문제변형, 그리고 시각적 모델을 활용하여 연산문제를 해결하는 방법에 대해서도 공통적으로 학습하였다.

자료수집

본 연구의 자료는 분수학습을 포함한 방법론 수업을 마친 뒤 2021년 하반기 학기말 시험의 일부 항목을 통해 수집되었다. 예비교사들에게 본 연구의 목적에 대해 설명하고 학기말 시험의 일부 항목에 대한 자료를 수집하는 것에 동의를 구하였다. 문제제기 및 문제해결에 대한 초등예비교사의 분수 곱셈 이해를 탐색하기 위해서 연구자들은 예비교사들의 분수 이해에 대한 선행연구를 바탕으로 Table 1과 같이 두 가지 과제를 만들었다(e.g., Xie & Masingila, 2017; Yao et al., 2021). 첫 번째 과제는 (자연수)×(분수) 상황으로 5×2/3에 관한 문제제기와 문제해결을 하는 것이고, 두 번째 과제는 (분수)×(분수) 상황으로 승수와 피승수가 모두 분수인 3/4×2/5에 대한 것이다. 두 번째 문제와 달리 첫 번째 문제에서 피승수를 분수가 아닌 자연수로 제시한 이유는 승수와 피승수의 의미를 곱셈기호를 기준으로 생각하는 것이 아니라 주어진 수의 종류로 인해서 예비교사들이 단순히 자연수 부분을 승수로 생각하는 경향이 있는지를 탐색하기 위한 것이다. (자연수)×(분수)에서는 주어진 수식을 보고 먼저 문제를 제기하는 자유문제제기(1a)를 수행한 뒤, 제기된 문제를 보고 시각적 모델을 이용하여 문제를 해결한다(1b). 마지막으로 (1a)에서 제기된 문제를 바탕으로 조건이나 구하고

자 하는 것을 바꾸는 문제변형 과정을 거친다(1c). 단, 문제변형에서는 3개 정도의 문제를 만들 것을 권장하였다. 이에 반해, (분수)×(분수)에서는 주어진 식을 보고 먼저 그림을 이용하여 문제를 해결한 뒤에(2a) 해결전략에 알맞은 문제를 자유롭게 제기하고(2b), 다양한 변형을 통해서 새로운 문제를 만들어 낸다(2c). 이때, 문제제기와 문제해결의 순서를 바꾼 것은 하나의 활동이 다른 활동에 영향을 줄 수 있음으로 이를 통제하기 위함이다.

Table 1. Problem posing and solving tasks

Type	Task
Whole number ×Fraction[1]	1. Using the equation 5×2/3[2]. (a) Pose a story problem reflecting the given number expression. Explain how you pose the problem. (b) Solve the posed problem and illustrate a strategy with a diagram. Make sure to clearly record your explanations next to the diagram or representations. Describe how problem posing influences your solution strategy? (c) Pose many story problems based on the problem in (a) by modifying constraints or goals (Please do not solve the posed problems).
Fraction ×Fraction	2. Using the equation 3/4×2/5[3]. (a) Solve the given number expression with a diagram. Explain how your diagram is connected to the number expression. (b) Pose a story problem reflecting the strategy you used in (a). Explain how you pose the problem. Describe how your solution strategy influences the posed problem. (c) Pose many story problems based on the problem in (a) by modifying constraints or goals (Please do not solve the posed problems).

분석 준거

문제제기와 문제해결에서 나타나는 분수 곱셈의 이해를 분석하기 위해서 분수 곱셈의 의미와 분수의 시각적 표현에 대한 선행연구인 Lee와 Pang (2019)을 수정보완하여 분석준거를 마련하였다. Lee와 Pang (2019)은 분수의 의미 이해와 시각적 표현에 대한 분류를 중심으로 분석준거를 제시하였지만 본 연구에서는 이를 보완하여 해석(interpreting), 이해(understanding), 모델(model), 표현(representing)의 네 가지 준거를 바탕으로 분석하였다(Table 2 참고).

Table 2. Analytic focus.

Dimension		Component
Interpreting	I1	Different operations
	I2	Confusing meanings of factors
	I3	Correctly interpreting
Understanding	U1	Improper or not multiplication
	U2	Intersecting part
	U3	Equal group
	U4	Part of part
	U5	Comparison
	U6	Rate
	U7	Area or array
Model	M1	Set Model
	M2	Length model (a: Tape, b: Number line)
	M3	Area model (a: Circle, b: Rectangle)
	M4	Others
Representing	R1	Improper or not multiplication
	R2	Situation only
	R3	Result only
	R4	Process of multiplication

1 미국식 표현과는 다르게 한국에서는 본 표현을 자연수가 피승수이고 분수가 승수로 해석한다. 독자들의 이해를 돕기위해서 한국식 표현을 기준으로 본 원고에서 기술하고자 한다

2 한국의 경우에는 곱셈에서 먼저 오는 수가 피승수의 역할을 하므로 5×2/3로 과제를 제시하였지만, 미국에서는 먼저 오는 수가 승수의 역할을 하기 때문에 2/3×5로 문제를 제시하였다.

3 마찬가지로 한국의 예비교사를 대상으로는 3/4×2/5로 제시하였으나 미국의 예비교사들에게는 2/5×3/4으로 문제를 제시하였다.

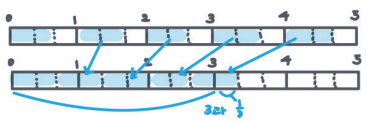
먼저 문제제기와 문제해결활동에서 분수 곱셈의 의미를 어떻게 해석하고 이해하는지에 대해 두 가지 준거를 사용하여 초등예비교사들이 가지는 분수 곱셈에 대한 이해를 탐색하였다. 이때, 문제제기는 주어진 식을 바탕으로 완전히 새로운 문장제를 만드는 자유문제제기와 이미 만들어진 문장제의 조건이나 구하고자 하는 바를 변화시키는 문제변형을 모두 포괄하여 나타낸다. '분수 곱셈의 해석'은 곱셈의 의미를 중심으로 승수와 피승수의 의미에 대해서 바르게 이해하는지를 분석하였다. 곱셈이 아닌 덧셈과 같이 다른 연산의 상황으로 문제를 제기하거나 해결하는 '다른 연산'(I1), 승수와 피승수의 의미를 반대로 잘못 해석하는 '인수 혼동'(I2), 그리고 주어진 승수와 피승수를 바르게 인식하는 '바르게 해석'(I3)으로 분류하였다. 다음으로, '분수 곱셈의 이해'는 곱셈의 다양한 의미를 분수상황에서 어떻게 활용하는지를 살펴보았다. '부적절 또는 비곱셈상황'(U1)은 분수 곱셈이 아닌 다른 분수 연산으로 해석하는 경우를 나타낸다. '교차 부분'(U2)은 전체에서의 한 부분과 전체에서의 다른 한 부분이 교차하는 양을 구하는 상황을 의미한다. '동수누가'(U3)는 '3씩 4묶음'과 같이 같은 수를 반복하여 더하는 것을 의미한다. '부분의 부분'(U4)은 전체가 되는 기준량이 자연수나 분수로 제시되고 그것에 대한 부분이 차지하는 양을 의미한다. '곱셈적 비교'(U5)는 '3의 4배'와 같이 어떤 묶음을 단위로 재구성하여 주어진 양을 확대나 축소함을 의미한다. '비율'(U6)은 '사과 3개씩 한 바구니'와 같이 주어진 피승수가 서로 다른 두 단위(즉, 개와 바구니) 사이의 비율의 관점으로 제시된 경우를 의미한다. 마지막으로, '넓이 또는 배열'(U7)은 제기된 문제의 맥락이나 해결의 전략이 직사각형의 넓이를 구하거나 배열의 상황과 연결하여 곱의 결과를 구하는 것을 의미한다.

특히, 문제해결에서 분수 곱셈의 의미를 탐색한 다음, 어떤 모델을 어떻게 표현하여 주어진 문제를 해결하는지를 살펴보았다. '모델'에서는 어떠한 종류의 구체적 표상을 활용하였는지에 대해 살펴보았다. '집합 모델'(M1)은 점이나 원과 같은 모델을 이용하여 하나를 나타내는 기준 모델이 더 이상 나누어지지 않고 여러 개의 기준 모델이 모여서 전체를 나타내는 상황을 의미한다. '길이 모델'(M2)은 양의 크기를 선의 길이를 통해서 나타내는 모델로, 띠처럼 연속적인 길이를 나타내는 모양을 이용하거나(M2a) 수직선을 활용할 수도 있다(M2b). 또한, '넓이 모델'(M3)은 도형의 전체 넓이를 전체로 보고 양을 나타내는 모델로, 원(M3a) 또는 직사각형(M3b) 모델을 활용한다. 특히 본 연구에서는 한 방향으로만 분할하였다고 하더라도 정사각형에 가까운 직사각형을 활용한 경우는 넓이 모델로 구분하였다. 그리고, 위의 기준에서 제시되지 않은 모델이 사용되는 경우인 '기타'(M4)로 분류하였다. '표현'에서는 초등예비교사들이 특정 모델을 활용하여 어느 정도까지 주어진 문제의 해결과정을 표현하는지 살펴보았다. '부적절 또는 비곱셈상황'(R1)은 분수 곱셈이 아닌 덧셈과 같은 다른 연산으로 문제를 이해하고 해결하는 것을 의미한다. '상황'(R2)은 주어진 문제의 상황만을 모델을 통해서 나타내는 경우를 의미한다. '결과'(R3)는 분수 곱셈의 결과를 나타내는 경우를 의미한다. 이 경우에는 어떻게 그 결과에 도달했는지 추론하기가 어렵다. '곱셈계산과정'(R4)은 분수 곱셈 상황과 결과뿐만 아니라 결과를 도출하는 과정까지 모두 표현한 경우이다.

자료 분석

자료 분석을 위해 41명의 예비교사가 제출한 과제의 결과를 분석준거에 따라 두 연구자가 코딩하였다. 문제제기와 문제해결에서 각각 두 가지와 네 가지 영역으로 분석을 하였으며, 구체적인 예시는 Table 3과 같다.

Table 3. Example of coding.

Example	Dimension	Code
[Posing] 준기의 끈의 길이는 5 m의 2/3입니다. 준기의 끈의 길이는 몇 m입니까?	Interpreting Understanding	I3 U4
[Solving] 	Interpreting Understanding	I3 U4
각 1 m를 동일하게 3등분씩 하여 그 중에 2개를 칠했다. 이후 그것을 빈 공간 없이 한 곳으로 모아 결과값을 보았는데, 온전한 자연수 3과 그리고 3등분 중 한 칸이 칠해진 것을 통해 3과 1/3 m이라는 결과를 도출하였다.	Model Representing	M2a R4

위의 예시에서 주어진 수식 5×2/3에서 한 예비교사가 제기한 문제는 5 m라는 전체 길이의 2/3에 해당하는 부분의 길이를 찾아내는 것이므로 피승수와 승수를 바르게 구분한 경우에 해당한다(I3). 그리고, 주어진 길이 전체에 대한 부분을 구하는 것이므로 '부분의 부분'의 의미에 해당한다(U4). 제기된 문제를 해결하는 과정에서도 해당 학생은 띠와 같은 길이 모델(M2a)를 사용하여 승수와 피승수를 바르게 표현하였다(I3). 또한, 각 1 m의 2/3를 색칠하여 나타내는 과정을 통해서 분수 곱셈을 부분의 부분 의미로 표현하였고(U4), 시각적 모델을 통해 분수 곱셈의 계산 과정까지 설명하였다(R4).

분석의 신뢰도 확보를 위해서 먼저 1차 코딩에서는 두 명의 연구자가 전체 분석 사례의 20%를 해석, 이해, 모델, 표현의 관점에서 각각 코딩하고 교차 검토하였다. 일치하지 않는 코딩은 논의를 통해서 분석의 준거를 수정하거나 코딩이 합치되도록 반복적으로 비교하고 검토하였다. 수정된 분석의 준거를 바탕으로 나머지 항목에 대해 연구자들은 독립적으로 2차 코딩을 실시하였고, 다시 다른 사례 20%를 중심으로 교차 검토하였다. 각 분석 준거별로 코딩의 내적 일치도가 0.9이상이었고 (Viera & Garrett, 2005), 일치되지 않는 결과는 합치에 이를 때까지 재논의하였다. 이후, 두 명의 연구자가 독립적으로 모든 사례에 대한 코딩을 수정한 후에 최종적으로 교차 검토를 진행하였다.

결과분석

자유문제제기 및 문제변형에서 분수 곱셈의미

Table 4는 한국 예비교사가 주어진 분수 곱셈식에 대해 자유문제제기를 하고 그 문제를 변형하는 과정에서 드러난 분수 곱셈의 의미를 분석한 결과이다.

Table 4. Frequency (percent) of Korean PSTs' interpretation and understanding of fraction multiplication in problem posing and reformulation (N=17).

Code	Whole number×Fraction		Fraction×Fraction	
	Free Posing	Reform	Free	Reform
I1	0(0)	-	1(5.9)	-
I2	8(47.1)	-	1(5.9)	-
I3	9(52.9)	-	15(88.2)	-
Sum	17(100)	-	17(100)	
U1	0(0)	3(7.0)	1(5.9)	5(11.6)
U2	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
U3	1(5.9)	4(9.3)	0(0)	0(0)
U4	7(41.2)	10(23.3)	14(82.4)	23(53.5)
U5	1(5.9)	7(16.3)	1(5.9)	6(14.0)
U6	8(47.1)	13(30.3)	0(0)	3(7.0)
U7	0(0)	6(14.0)	1(5.9)	6(14.0)
Sum	17(100)	43(100)	17(100)	43(100)

Note, I1: Different operations, I2: Confusing meanings of factors, I3: Correctly interpreting, U1: Improper or not multiplication, U2: Intersecting part, U3: Equal group, U4: Part of part, U5: Comparison, U6: Rate, U7: Area or array

한국의 예비교사는 (자연수)×(분수)의 경우 과반수 이상(52.9%)의 학생들이 승수와 피승수의 역할에 대해서 바르게 이해하고 있었다. 그리고 주로 비율(47.1%)과 부분의 부분(41.2%) 의미로 주어진 곱셈식인 5×2/3에 대한 문장제를 제기하였다. 제기된 문제를 변형하는 경우에도 비율이 30.3%, 부분의 부분이 23.3%로 자주 활용되었지만 다른 곱셈의 의미도 다양하게 활용되었다. 특히, 넓이나 배열은 14%로 자유문제제기에서는 찾아볼 수 없었던 곱셈의 의미였지만 변형의 단계에서 한국의 예비교사들이 보다 자주 활용하는 것을 알 수 있었다. 예를 들어, 예비교사 A는 5×2/3를 보고 부분의 부분 의미를 활용해서 "준기의 끈의 길이는 5 m의 2/3입니다. 준기의 끈의 길이는 몇 m입니까?"와 같이 문제를 제기하였다. 여기에서 처음 주어진 끈의 길이인 5 m는 피승수에 해당하고 피승수

의 부분인 2/3는 승수에 해당하므로 주어진 분수 곱셈을 바르게 이해하여 문제상황으로 나타냈다고 볼 수 있다. 예비교사 A는 주어진 문제를 "가로가 5 cm, 세로가 2/3 cm인 직사각형의 넓이를 구해봅시다."로 변형하여, 제시된 수식은 변경하지 않은 채 해당 문제를 넓이를 구하는 문제로 변형하였다.

(분수)×(분수)의 경우에 한국 예비교사의 88.2%가 피승수와 승수의 의미를 바르게 해석하였다. 곱셈의 의미는 부분의 부분을 82.4%로 많이 활용하였고 곱셈적 비교의 의미와 넓이 및 배열의 의미도 5.9%씩 활용하였다. 문제변형 단계에서도 부분의 부분을 53.5%로 가장 많이 활용하였고 자유문제제기와는 달리 비율을 새롭게 활용하여 문제를 만들기도 하였다(7%). 예를 들어, 예비교사 B는 3/4×2/5에 대한 문제를 제기할 때 부분의 부분의 의미를 활용하여 "예랑이는 조각보를 만드는 데 전체 보자기의 3/4중에서 2/5를 사용했습니다. 예랑이가 사용한 보자기는 전체의 얼마인지 알아봅시다." 와 같이 문제를 만들었다. 조각보의 전체가 1일 때 그 중 3/4만큼을 새로운 단위로 하여 그에 대한 2/5를 찾아내는 문제로 피승수와 승수의 의미를 정확하게 해석하여 문제를 제기하였다. 예비교사 B는 주어진 문제를 변형할 때 분수는 그대로 활용하면서 "막대의 무게가 1 m에 3/4 kg입니다. 2/5 m의 무게는 몇 kg일까?" 와 같이 비율의 의미로 변경하였다. 단위 길이당 막대의 무게를 두 단위 사이의 비율관계로 나타내고, 특정 길이에 해당하는 막대의 무게를 찾아내도록 하였다.

Table 5는 미국 예비교사가 주어진 분수 곱셈식에 대해 자유문제제기를 하고 그 문제를 변형하는 과정에서 드러난 분수 곱셈의 의미를 분석한 결과이다.

Table 5. Frequency (percent) of US PSTs' interpretation and understanding of fraction multiplication in problem posing and reformulation (N=24).

Code	Whole number×Fraction		Fraction×Fraction	
	Free Posing	Reform	Free	Reform
I1	0(0)	-	5(20.8)	-
I2	24(100)	-	13(54.2)	-
I3	0(0)	-	6(25.0)	-
Sum	24(100)	-	24(100)	-
U1	0(0)	0(0)	5(20.8)	5(7.7)
U2	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
U3	7(29.2)	7(10.8)	0(0)	1(1.5)
U4	0(0)	0(0)	19(79.2)	44(67.7)
U5	3(12.5)	10(15.4)	0(0)	1(1.5)
U6	14(58.3)	48(73.8)	0(0)	4(6.1)
U7	0(0)	0(0)	0(0)	1(1.5)
Sum	24(100)	65(100)	24(100)	56(100)

Note, I1: Different operations, I2: Confusing meanings of factors, I3: Correctly interpreting, U1: Improper or not multiplication, U2: Intersecting part, U3: Equal group, U4: Part of part, U5: Comparison, U6: Rate, U7: Area or array

구체적으로 살펴보면, 미국의 예비교사들은 먼저 (자연수)×(분수)의 경우 주어진 식으로부터 문제를 제기할 때 피승수와 승수의 순서를 바꾸어서 생각하는 경향이 있었다. 또한, 곱셈의 의미의 경우 문제제기에서는 비율을 활용하는 경우가 58.3%로 가장 많이 나타났고 동수누가는 29.2%, 그리고 곱셈적 비교가 12.5% 순으로 나타났다. 문제변형에서도 비율이 73.8%로 가장 많이 나타났고 곱셈적 비교가 15.4%, 동수누가는 10.8% 순으로, 비율과 곱셈적 비교의 의미로 제시한 경우가 조금 늘어났다. 그러나 비율의 경우, 모두 승수가 자연수인 비율 상황으로 동수누가와 같은 상황이었다. 예를 들어, 예비교사 C는 식 5×2/3[4]를 보고 "바나나 한 송이의 무게는 2/3파운드입니다. Jessica가 5송이를 산다면 바나나의 총 무게는 얼마입니까?"와 같이 바나나 개수와 무게에 대한 비율 상황으로 문제를 만들었다. 그러나 주어진 수식이 가지는 5×2/3의 문제상황을 만드는 것이 아니라 2/3×5(2/3씩 5묶음 또는 2/3의 5배)의 상황으로 바꾸어서 문제를 제기하였다. 이처럼 자연수 부분을 묶음의 수 즉, 승수로 간주하는 경향은 이어지는 문제변형에서도 마찬가지로 드러난다. 예비교사 C는 문제의 상황을 바나나에서 풍선으로 변경하여 "풍선 한 묶음이 2/3 파운드입니다. 5 묶음을 샀다면, 풍선의 무게는 얼마입니까?"와 같이 처음 제기한 문제와 같은 비율의 의미를 이용하여 문제를 변형하였다.

4 실제로 미국 예비교사들에게 제시된 문제는 2/3×5이지만 독자들의 이해를 돕기 위해 본문에서는 한국 제시 방법에 따라 5×2/3로 수정하여 기술하였다. 이는 이후 제시된 곱셈식 모두에 해당된다.

미국의 예비교사들은 (분수)×(분수)에 대한 문제를 제기하고 해결하는 과정에서는 (자연수)×(분수)에 비해 보다 정확하게 피승수와 승수의 관계를 이해하고, 또한 더 다양한 곱셈의 의미로 문제를 제시하였다. 3/4×2/5에 대한 문제를 만들 때 여전히 절반 이상인 54.2%의 예비교사들은 피승수와 승수를 바르게 구분하는 데 어려움을 보였지만, 25%의 예비교사는 3/4의 2/5에 해당하는 부분이나 3/4의 2/5배와 같이 바른 의미로 문제를 제기하였다. 곱셈의 의미와 관련하여 자유문제제기에서는 79.2%의 예비교사들이 부분의 부분으로 나타냈고, 변형을 하는 과정에서도 부분의 부분을 67.7%로 가장 많이 제시하였다. 또한, 비율(6.1%), 넓이(1.5%) 등 다른 의미들도 추가적으로 활용하였다. 예를 들어, 예비교사 D는 "아이스크림 가게에서 라지 사이즈의 초코 밀크쉐이크를 만드는데 3/4컵의 우유를 사용하고 미디움 사이즈는 라지 사이즈에 사용되는 우유의 2/5가 사용된다. 미디움 사이즈의 초코 밀크쉐이크를 만드는 데 사용된 우유의 양은 얼마인가?"와 같이 문제를 만들었다. 이는 피승수인 3/4컵의 우유를 기준량으로 생각하고 부분이 되는 2/5만큼의 양을 구하는 부분의 부분 의미이다. 해당 문제를 변형할 때도, "Hannah에게 피자의 3/4이 남았을 때, Chloe는 남은 피자의 2/5를 먹었습니다. 남은 피자의 양은 얼마입니까?"와 같이 맥락을 바꾸었지만 기존 문제와 마찬가지로 승수와 피승수의 의미를 원래 식(2/5×3/4)에 맞게 변형하고 이를 이용하여 3/4-(2/5×3/4) 상황으로 확장하였다.

그러나 이러한 분수 곱셈의 의미 해석은 자연수를 피승수로 하는 경우와는 달랐다. 예비교사 D는 "Sarah가 올해의 제빵 행사를 위해서 쿠키를 만들고 있습니다. 충분한 양을 만들어 팔기 위해서 조리법의 5배의 재료들이 필요하다고 합니다. 원래 조리법에서는 2/3컵의 우유가 필요하다고 할 때, Sarah가 사용할 우유는 모두 얼마입니까?"와 같이 비록 자연수 5를 먼저 제시하였지만 이를 배의 의미로 활용하여 자연수를 피승수가 아닌 승수로 제시하였다. (자연수)×(분수)에 비해 (분수)×(분수) 상황이 더욱 복잡한 양적 구조를 가지고 있음에도 (분수)×(분수)에서 피승수와 승수를 더 잘 구분하였다는 것은 예비교사들이 곱셈식의 제시 순서에 상관없이 자연수를 승수로 받아들이는 경향을 가지고 있음을 짐작할 수 있다.

요약하면, 한국과 미국의 예비교사는 특히 (자연수)×(분수)에 대한 상황을 문장제로 제시하는 데 큰 차이가 있음을 알 수 있었다. 한국은 절반 정도의 예비교사들이 문제를 만들 때 해당하는 승수와 피승수의 역할을 바르게 이해하였지만 미국의 경우에는 모든 예비교사들이 자연수 부분을 승수로 잘못 생각하고 문제를 만들었다. 분수 곱셈의 의미에 대해서도 공통적으로 비율의 의미를 가장 많이 활용하였지만 미국의 경우에 동수누가로 해석하는 경우가 상대적으로 많이 나타나고, 한국의 경우에는 부분의 부분을 활용하는 경우가 두드러지게 나타났다.

문제해결에서 나타난 예비교사의 분수 곱셈에 대한 이해

시각적 모델에 나타난 분수 곱셈의 의미

Table 6은 한국 예비교사가 제시한 시각적 모델에서 찾을 수 있는 수식의 형태와 분수 곱셈의 의미를 분석한 결과이다.

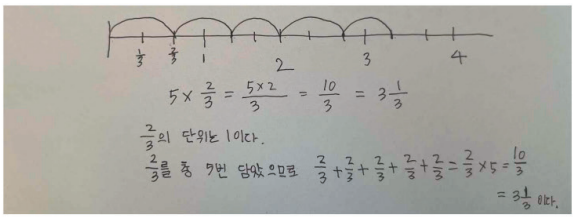
Table 6. Frequency(percent) of Korean PSTs' interpretation and understanding of fraction multiplication in problem solving (N=17).

Code	Whole number×Fraction	Fraction×Fraction
I1	1(5.9)	1(5.9)
I2	8(47.1)	0(0)
I3	8(47.1)	16(94.1)
Sum	17(100)	17(100)
U1	0(0)	1(5.9)
U2	0(0)	2(11.8)
U3	5(29.4)	0(0)
U4	8(47.1)	12(70.6)
U5	0(0)	1(5.9)
U6	4(23.5)	0(0)
U7	0(0)	1(5.9)
Sum	17(100)	17(100)

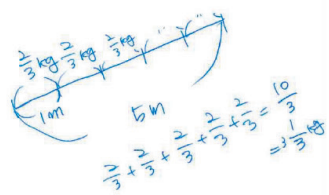
Note, I1: Different operations, I2: Confusing meanings of factors, I3: Correctly interpreting, U1: Improper or not multiplication, U2: Intersecting part, U3: Equal group, U4: Part of part, U5: Comparison, U6: Rate, U7: Area or array.

한국 예비교사들은 (자연수)×(분수)와 (분수)×(분수)를 시각적 모델을 이용하여 해결하는 문항에서 문제제기와 유사하게 표현하였다. 즉, (자연수)×(분수)에서는 문제제기와 유사하게 47.1%의 예비교사들이 승수가 자연수인 상황으로 모델을 제시하였다. 분수끼리의 곱셈에서는 대부분의 학생들(94.1%)이 모델에 피승수와 승수를 바르게 표현하였다.

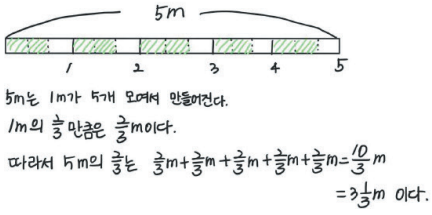
시각적 모델에서 나타난 분수의 의미는 (자연수)×(분수)에서는 부분의 부분 47.1%, 동수누가 29.4%, 비율 23.5%로 제시되었다. 특히 (자연수)×(분수)를 (분수)×(자연수)로 표현한 8명의 예비교사들은 모두 Figure 4의 (a)와 같이 동수누가(5회)나 Figure 4의 (b)와 같이 두 종류의 양을 동시에 표현함으로써 승수가 자연수인 비율의 의미(3회)로 제시하였다. 반면에 (자연수)×(분수) 상황으로 알맞게 나타낸 또다른 8명의 예비교사들은 Figure 4의 (c)와 같이 부분의 부분(7회)이나 승수가 분수인 비율의 의미(1회)로 제시하였다. (분수)×(분수)에서는 70.6% 예비교사들이 부분의 부분 의미로 시각적 모델을 제시하였다. 그 이외에 Figure 4의 (d)와 같이 교차부분(11.8%)이나 곱셈적 비교(5.9%), 직사각형 넓이(5.9%) 의미가 제시되었다.



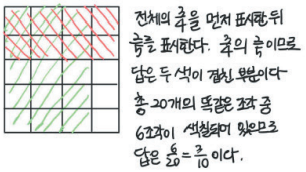
(a) an example for U3



(b) an example for U6



(c) an example for U4



(d) an example for U2

Figure 4. The meanings of multiplication revealed in the visual representations presented by Korean PSTs.

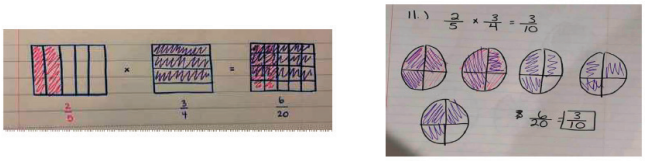
Table 7은 미국 예비교사가 제시한 시각적 모델에서 찾을 수 있는 수식의 형태와 분수 곱셈의 의미를 분석한 결과이다.

Table 7. Frequency (percent) of US PSTs' interpretation and understanding of fraction multiplication in problem solving (N=24).

Code	Whole number×Fraction	Fraction×Fraction
I1	0(0)	2(8.3)
I2	24(100)	11(45.8)
I3	0(0)	11(45.8)
Sum	24(100)	24(100)
U1	0(0)	5(20.8)
U2	0(0)	12(50.0)
U3	24(100)	0(0)
U4	0(0)	7(29.2)
U5	0(0)	0(0)
U6	0(0)	0(0)
U7	0(0)	0(0)
Sum	24(100)	24(100)

Note, I1: Different operations, I2: Confusing meanings of factors, I3: Correctly interpreting, U1: Improper or not multiplication, U2: Intersecting part, U3: Equal group, U4: Part of part, U5: Comparison, U6: Rate, U7: Area or array.

미국은 (자연수)×(분수)에서 100%의 예비교사들이 문제제기와 동일하게 동수누가의 의미인 (분수)×(자연수)로 시각적 모델을 제시하였다. (분수)×(분수)에서는 피승수와 승수의 위치를 바르게 제시한 경우와 서로 바꾸어서 제시한 경우가 각각 45.8%로 나타났다. 특징적인 것은 (분수)×(분수)에서는 50%의 예비교사들이 Figure 5와 같이 시각적 모델을 교차 부분의 의미로 나타냈다는 것이다. 이에 해당하는 예비교사들은 대부분 (a)와 같이 직사각형 넓이 모델을 이용하여 분수의 곱셈을 두 분수량이 교차하는 부분으로 표현하였지만, (b)와 같이 원을 이용하여 전체 원 5개의 2/5를 분홍색으로 색칠하고 다시 전체 원 5개의 각각의 3/4씩 다른 색으로 칠하여 겹치는 부분으로 표현하기도 하였다. 이는 두 분수의 기본 단위가 원 5개로 서로 같다는 점에서 부분의 부분 의미를 표현하는 것과는 구분할 필요가 있다. 그 이외에 부분의 부분 29.2%, 분수 곱셈에 적합하지 않은 상황도 20.8% 제시되었다.



(a) (b)

Figure 5. Representative examples for U2.

요약하면, 예비교사들이 시각적 모델에 피승수와 승수를 표현한 것을 분석한 결과, 문제제기와 비슷한 경향을 보임을 알 수 있다. 즉, 미국 예비교사들은 한국 예비교사들에 비해 피승수와 승수의 위치를 혼동하는 경우가 많았으며, 두 나라의 예비교사들은 분수끼리의 곱셈보다 (자연수)×(분수)에서 피승수와 승수의 위치를 혼동하여 자연수를 피승수로 보는 경향이 강했다. 분수 곱셈의 의미와 관련하여서는 한국 예비교사들은 두 가지 곱셈 상황에서 모두 부분의 부분 의미로 시각적 모델을 표현한 반면에 미국 예비교사들은 (자연수)×(분수)에서는 동수누가, (분수)×(분수)에서는 교차 부분의 의미로 가장 많이 제시하였다. 특히 미국 예비교사들은 문제제기에서는 교차 부분의 의미를 활용한 경우가 없었으나 문제해결에서는 이를 많이 활용하는 모습을 보였다.

시각적 모델의 유형

Table 8은 한국 예비교사가 제시한 시각적 모델을 유형별로 분석한 결과이다.

Table 8. Frequency (percent) of Korean PSTs' models of fraction multiplication in problem solving (N=17).

Code		Whole number×Fraction			Fraction×Fraction		
		D or C	M	Sum	D or C	M	Sum
M1		0(0)	-	0(0)	0(0)	-	0(0)
M2	a	7(41.2)	0(0)	13(76.5)	3(17.6)	0(0)	5(29.4)
	b	6(35.3)	0(0)		2(11.8)	0(0)	
M3	a	0(0)	2(11.8)	4(23.5)	1(5.9)	0(0)	12(70.6)
	b	2(11.8)	0(0)		11(64.7)	0(0)	
M4		0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
Sum		15(88.2)	2(11.8)	17(100)	17(100)	0(0)	17(100)

Note, D: Discrete model, C: Contiuous model, M: Mixe.d model, M1: Set model, M2: Length model (a: Tape, b: Number line), M3: Area model (a: Circle, b: Rectangle), M4: Others.

한국 예비교사는 (자연수)×(분수)와 (분수)×(분수) 모두 연속적으로 모델을 제시한 경우가 더 많았다. 이러한 경우는 (자연수)×(분수)에서는 88.2%, (분수)×(분수)에서는 100%로 압도적이었다. 모델의 종류에서는 두 곱셈 상황에서 차이가 나타났는데, (자연수)×(분수)에서는 Figure 4의 (a), (b)와 같은 길이 모델이 76.5%, (분수)×(분수)에서는 Figure 4의 (d)와 같은 넓이 모델이 70.6%로 가장 많이 사용되었다. 주목할만한 점은 (자연수)×(분수)에서 시각적 모델을 동수누가나 승수가 자연수인 비율 상황으로 표현한 경우에도 대부분 길이 모델로 연속적으로 제시하였다는 점이다. 또한 (자연수)×(분수)에서 혼합 모델이 11.8% 사용된 것 외에 이산적인 집합 모델은 제시되지 않았다.

Table 9는 미국 예비교사가 제시한 시각적 모델을 유형별로 분석한 결과이다.

Table 9. Frequency (percent) of US PSTs' models of fraction multiplication in problem solving (N=24).

Code		Whole number×Fraction			Fraction×Fraction		
		D or C	M	Sum	D or C	M	Sum
M1		1(4.2)	-	1(4.2)	2(8.3)	-	2(8.3)
M2	a	0(0)	5(20.8)	5(20.8)	2(8.3)	2(8.3)	4(16.7)
	b	0(0)	0(0)		0(0)	0(0)	
M3	a	1(4.2)	6(25.0)	17(70.8)	3(12.5)	2(8.3)	18(75.0)
	b	1(4.2)	9(37.5)		13(54.2)	0(0)	
M4		0(0)	1(4.2)	1(4.2)	0(0)	-	0(0)
Sum		3(12.5)	21(87.5)	24(100)	20(83.3)	4(16.7)	24(100)

Note, D: Discrete model, C: Contiuous model, M: Mixed model, M1: Set model, M2: Length model (a: Tape, b: Number line), M3: Area model (a: Circle, b: Rectangle), M4: Others

미국 예비교사들은 (자연수)×(분수)에서는 Figure 6의 (a)와 같은 혼합 모델(87.5%)을, (분수)×(분수)에서는 Figure 6의 (b)와 같은 연속적인 모델(83.3%)을 가장 많이 사용하였다. 두 가지 곱셈 상황에서 모두 넓이 모델을 가장 많이 사용하였는데 (자연수)×(분수)에서 70.8%, (분수)×(분수)에서 75.0%의 예비교사가 넓이 모델을 사용하였다.

(a) (b)

Figure 6. Model types most used by US PSTs.

요약하면, 한국 예비교사들은 두 가지 상황 모두에서 연속적인 모델을 가장 많이 사용하였지만 (자연수)×(분수)에서는 길이 모델을, (분수)×(분수)에서는 넓이 모델을 많이 사용하였다. 반면에 미국 예비교사들은 두 가지 상황 모두에서 넓이 모델을 가장 많이 사용하였지만, (자연수)×(분수)에서는 혼합 모델을 (분수)×(분수)에서는 연속 모델을 많이 사용하였다.

시각적 모델의 사용 목적

Table 10과 Table 11은 각각 한국과 미국 예비교사가 모델을 사용한 목적을 정리한 것이다. 모델의 사용 목적과 관련하여서는 각 나라 예비교사들이 구분되는 특징을 보이기 보다는 공통점을 보였다. 두 나라의 예비교사들은 모두 모델을 통해 상황이나 결과만을 나타내는 것을 넘어서서 분수 곱셈의 계산 과정까지 설명하고자 하였다. 구체적으로 한국은 (자연수)×(분수)에서 82.4%, (분수)×(분수)에서 70.6%의 예비교사들이, 미국은 각각 70.8%와 75.0%의 예비교사들이 이러한 특징을 보였다.

Table 10. Frequency (percent) of Korean PSTs' purposes of using models of fraction multiplication in problem solving (N=17).

Code	Whole number×Fraction	Fraction×Fraction
R1	0(0)	1(5.9)
R2	2(11.8)	3(17.6)
R3	1(5.9)	1(5.9)
R4	14(82.4)	12(70.6)
Sum	17(100)	17(100)

Note, R1: Improper or not multiplication, R2: Situation, R3: Result, R4: Process of multiplication

Table 11. Frequency (percent) of US PSTs' purposes of using models of fraction multiplication in problem solving (N=24).

Code	Whole number×Fraction	Fraction×Fraction
R1	1(4.2)	5(20.8)
R2	5(20.8)	1(4.2)
R3	1(4.2)	0(0)
R4	17(70.8)	18(75.0)
Sum	24(100)	24(100)

Note, R1: Improper or not multiplication, R2: Situation, R3: Result, R4: Process of multiplication

예비교사들이 시각적 모델을 어떤 목적으로 사용하였는지를 (분수)×(분수)를 중심으로 살펴보면 분수 곱셈에 적합하지 않은 모델을 제시한 R1의 대표적인 사례는 Figure 7과 같다. 한국은 5.9%, 미국은 20.8%의 예비교사들이 이와 같은 모델을 제시하였다. R1에 해당하는 예비교사들은 공통적으로 분수 2/5와 3/4, 3/10을 각각 그림으로 표현하는 데에만 집중하였다. 피승수 2/5와 승수 3/4의 각각의 단위가 되는 양을 서로 같거나 관련없는 양으로 표현한 것으로 보아 이들은 피승수와 승수의 의미나 역할을 바르게 이해하지 못하고 있음을 짐작할 수 있다. 특히 Figure 7의 (b)와 같은 경우는 마치 교차 부분의 의미처럼 2/5와 3/4의 기준 단위를 동일한 양(전체 수직선)으로 보고 표현하였지만 곱셈의 결과를 서로 겹치는 부분으로 생각한 것이 아니라 각각의 양을 모두 취함으로써 분수 덧셈처럼 표현하였다. 분수 곱셈의 의미에 따라 다르지만, 초등학교에서 많이 사용하는 동수누가, 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율 등의 의미에서는 승수는 피승수에 가해지는 연산자로서의 역할을 한다. 즉 승수의 기준 단위는 피승수가 된다. 하지만 R1에 해당하는 예비교사들은 피승수와 승수의 이러한 관계를 표현하지 못하였다. 즉 이들은 그림을 통해 문제를 해결한 것이 아니라 수치적 계산을 통해 그 값을 도출하였다는 것을 알 수 있다.

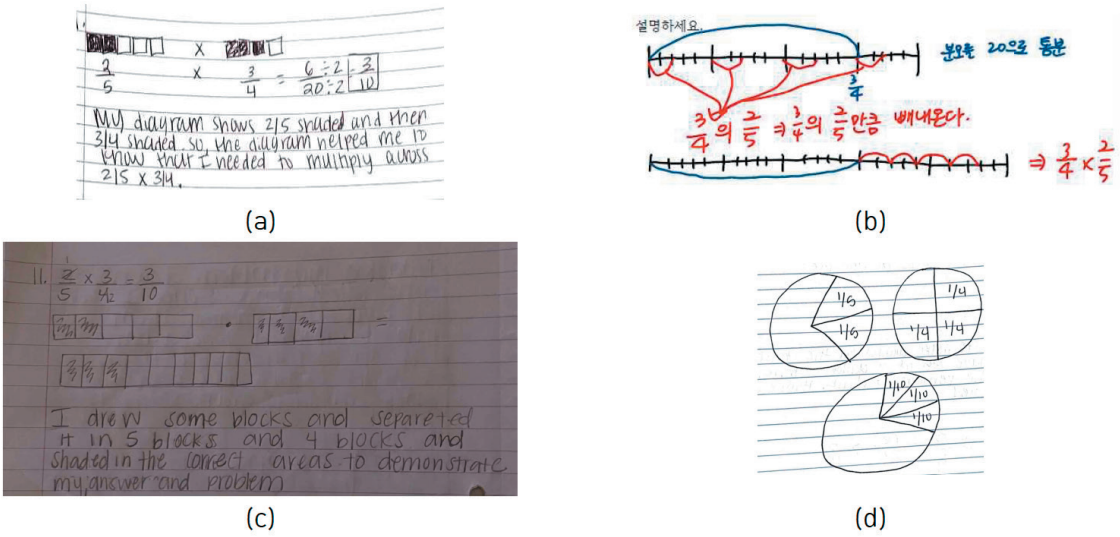
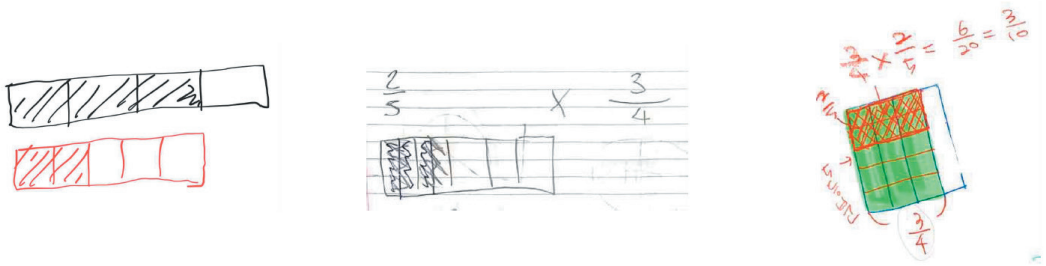


Figure 7. Representative examples for R1.

분수 곱셈 상황만 표현한 경우인 R2의 대표적인 사례는 Figure 8과 같다. 한국은 17.6%, 미국은 4.2%의 예비교사들이 이와 같은 모델을 제시하였다.



(a) (b) (c)

Figure 8. Representative examples for R2.

R1과 다르게 R2에 해당하는 예비교사들은 피승수는 전체를 기준 단위로, 승수는 피승수만큼을 기준 단위로 잘 나타내었다. 즉 승수가 피승수에만 작용하는 연산자임을 그림으로 표현하였지만 그 양을 다시 전체를 기준 단위로 해석하는 과정을 모델에 표현하지 못하였다. 특히 Figure 8의 (a)와 같은 경우는 3/4의 2/5를 나타내기 위해 1/4이 3인 양을 한꺼번에 5등분하였지만 시각적 모델을 이용하여 문제를 해결하기 위해서는 각각의 1/4를 5등분하는 분할 과정이 필요하다. Figure 8의 (c)와 같이 직사각형 넓이 모델을 이용하면 이러한 한계를 극복할 수 있지만 부분의 부분이 전체의 6/20임을 보여주기 위해서는 여전히 남은 1/4까지 5등분하여 나타낼 필요

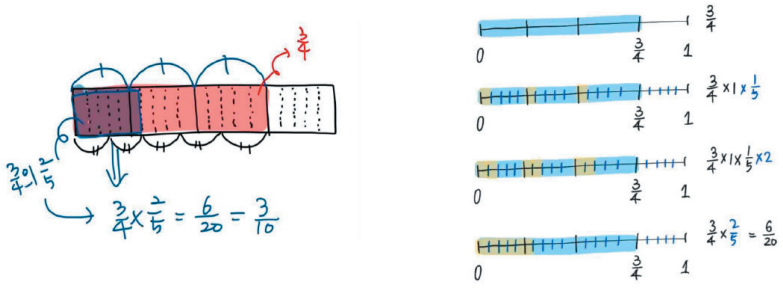
분수 곱셈 결과를 표현한 경우인 R3의 대표적인 사례는 Figure 9와 같다. 한국에서만 1명(5.9%)의 예비교사가 이와 같은 모델을 제시하였다.

Figure 9. Representative examples for R3.

이 경우에는 Figure 7의 (d)와 다르게 피승수를 전체의 3/4으로, 승수를 3/4의 2/5만큼으로 표현하고, 곱셈의 결과인 3/10을 나타냈다. 하지만 곱셈의 결과인 3/10이 어떠한 과정을 거쳐 도출되는지는 시각적 모델에 구체적으로 제시되어 있지 않다.

종합하면, R1, R2, R3에 해당하는 예비교사들는 곱셈의 계산 결과인 3/10(또는 6/20)을 시각적 모델을 이용하여 구한 것이라기 보다는 수치적인 계산을 통해 값을 구한 후에 이를 시각적 모델에 표현한 것임을 알 수 있다.

이에 비해 R4에 해당하는 예비교사들은 시각적 모델을 이용하여 분수 곱셈의 상황, 결과, 그리고 결과를 도출하는 과정을 모두 표현하였다. 주목할만한 것은 한국은 70.6%, 미국은 75.0%로 대부분의 학생들이 이러한 목적으로 모델을 사용하였다는 것이다. 이에 해당하는 대표적인 사례를 먼저 길이 모델과 관련하여 살펴보면 Figure 10과 같다.



(a) (b)

Figure 10. Representative examples for M2 and R4.

두 경우에 해당하는 예비교사들은 모두 분수 곱셈에서 피승수 3/4을 1/4이 3인 수로 보고 각각의 1/4을 5등분하였다. 두 예비교사는 이후에 승수인 2/5만큼 취하는 방법이 서로 달랐다. (a)에 해당하는 예비교사는 각각의 1/4를 5등분하면 1/20이 15인 수가 되므로 15개를 5등분한 것 중에 2만큼을 취해서 6/20을 구하였다. (b)에 해당하는 예비교사는 3/4의 각각의 1/4에 2/5를 색칠한 다음 그 양들을 모아 6/20을 구하였다. 특히 이 예비교사는 "문제에서 피승수는 3/4, 승수는 2/5이다. 이때 승수는 피승수를 승수의 분모만큼 줄이고(×1/5), 분자만큼 늘리는(×2) 연산자 역할을 한다. 처음 그림에서 두 번째 그림으로 넘어갈 때 네 개로 나누어진 칸 각각을 다섯 칸씩 다시 나눈다(×1/5, 재귀분할). 세 번째 그림에서는 곱하여진 분자(×2)를 표현하였다(분배분할). 노랗게 색칠된 칸을 모으면 3/10(이다)"라고 기술함으로써 그림을 통해 분수 곱셈 과정을 상세하게 설명하였다. 이러한 방법은 승수가 피승수에 작용하는 연산자 역할을 한다는 것을 잘 나타낼 뿐만 아니라 분수 곱셈 결과를 구하는 과정에 사용하는 여러 조작 활동을 알고리즘과 연결하여 설명할 수 있다는 점에서 중요하다.

R4에 해당하는 예비교사들은 길이 모델보다는 넓이 모델을 더 많이 사용하였다. 이러한 경우의 대표적인 사례를 직사각형 넓이 모델과 관련하여 살펴보면 Figure 11과 같다. 이 경우는 크게 4가지로 구분되는데 (a)에 해당하는 예비교사는 전체 직사각형을 4등분하여 피승수인 3/4만큼 색칠한 후에 승수인 2/5를 표현하기 위해 다시 전체 직사각형을 다른 방향으로 5등분하였다. 그리고 색칠된 3/4의 2/5만큼을 다른 색으로 색칠하였다. 이에 비해 (b)에 해당하는 예비교사는 전체 직사각형을 4등분하여 전체의 3/4을 표현한 후에 승수인 2/5를 표현하기 위해 색칠된 3/4만 먼저 다른 방향으로 5등분하고 그 중에서 2만큼을 다른 색으로 칠하여 3/4의 2/5가 의미하는 양을 표현하였다. 그 이후에 해당 양이 전체의 얼마인지 알아보기 위해서 남은 1/4도 5등분을 하여(점선으로 표시) 전체가 20등분된 양 중에서 6만큼에 해당한다는 것을 표현하였다. 특히 이 예비교사는 "먼저 단위량으로 하는 정사각형을 기준으로 3/4을 표시했다(파란색 네모). 그리고 파란색 네모의 2/5를 노란색 네모로 표현했다. 그 다음으로 노란색 네모가 전체 정사각형의 얼마인지를 확인하기 위해 점선으로 나머지도 똑같이 나누어 주었다(초록색 점선). 그래서 전체 20등분 중 6개의 조각에 해당한다고 표시하였고, 이를 약분해 3/10으로 나타내었다."라고 해당 과정을 구체적으로 기술하였다. (a)에 비해 (b)는 부분의 부분 의미의 분수 곱셈에서 승수 2/5가 전체 직사각형이 아닌 피승수인 3/4에 가해지는 연산자라는 것을 더욱 명확하게 보여준다. (a)와 같은 방법은 승수인 2/5를 표현하기 위해 전체 직사각형을 한꺼번에 5등분함으로써 부분의 부분 의미에서 승수의 기준 단위가 피승수라는 중요한 아이디어를 간과하게 할 우려가 있다. 한편 부분의 부분 의미가 아닌 다른 곱셈의 의미로 직사각형 모델을 사용한 경우도 있었다. (c)는 교차 부분의 의미로 3/4과 2/5가 서로 겹쳐서 생겨난 양을 분수 곱셈으로 표현하였고 (d)는 가로가 3/4이고 세로가 2/5인 직사각형의 넓이를 구하는 방법으로 제시하였다.

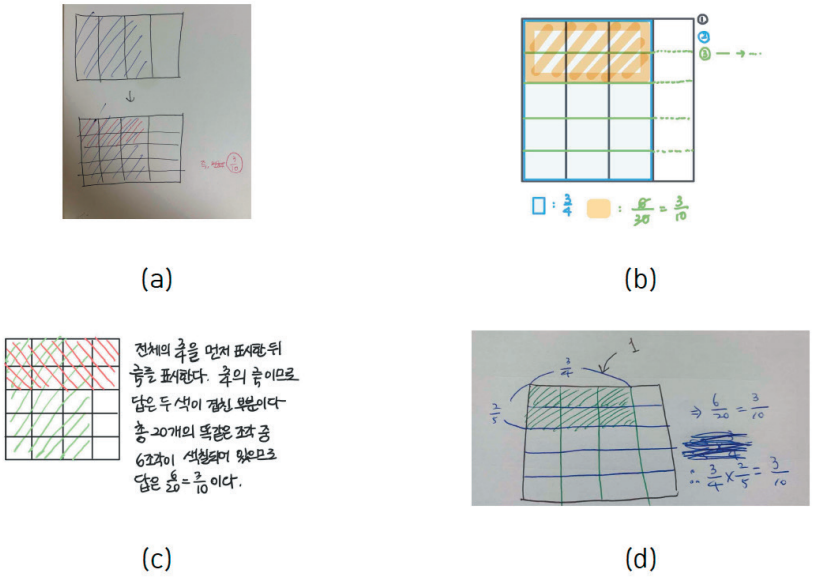


Figure 11. Representative examples for M3 and R4.

R4의 목적으로 직사각형 넓이 모델을 제시한 경우에 한국에서는 방법 (a)가 6회로 가장 많이 나타났고, (b)와 (d)는 각 1회, (c)는 2회 나타났다. 미국에서는 방법 (c)가 11회로 가장 많이 제시되었고 (a) 방법이 1회 제시되었다. 이 방법들은 모두 분수 곱셈의 상황, 결과뿐만 아니라 곱셈의 과정을 잘 설명할 수 있을뿐만 아니라 다른 분수 곱셈 상황에서도 모두 적용 가능한 것으로 분수 곱셈의 알고리즘을 설명하기에 유용하다. 하지만 초등학교 수준에서 분수 곱셈이 의미하는 것이 무엇인지, 그 의미에 따라 피승수와 승수의 역할은 무엇인지 등을 설명하기에 더욱 적합한 모델은 무엇일지 고려해볼 필요가 있다.

논의 및 결론

본 연구는 초등예비교사들의 문제제기와 문제해결에 대한 분석을 통해 예비교사들이 분수 곱셈을 어떻게 이해하고 있는지를 구체적으로 탐색하였다. 본 장에서는 연구 결과에서 두드러지게 나타난 예비교사들의 분수 곱셈에 대한 이해의 특징과 한계점을 논의하면서 초등교사교육에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

첫째, 초등예비교사들에게 자신이 제시한 문장제와 시각적 모델에서 무엇이 피승수이고 무엇이 승수인지를 구분해보게 하고 각각에서 분수 곱셈이 의미하는 바가 무엇인지를 탐색할 기회를 충분히 제공해야 한다. 본 연구에서 예비교사들은 (분수)×(분수)에 비해 (자연수)×(분수) 형태에서 피승수와 승수의 위치를 바꾸어서 문장제를 제기하고 문제를 해결하는 경향이 강했다(Tables 4, 5, 6, and 7 참고). 특히 미국의 경우 5의 2/3를 의미하는 수식의 형태가 2/3×5이기 때문에 100%의 예비교사가 2/3씩 5번에 해당하는 상황으로 문장제와 시각적 모델을 제시하였다. 하지만 한국의 경우에는 5의 2/3를 의미하는 수식의 형태가 5×2/3로 제시되었음에도 불구하고 (자연수)×(분수)에서 47.1%의 예비교사가 피승수와 승수를 바꾸어서 제시하였다. 물론 곱셈에서는 교환법칙이 성립되기 때문에 피승수와 승수의 순서를 바꾸어도 계산 결과에 영향을 미치지 않는다. 하지만 분수 곱셈의 의미를 개념적으로 이해하기 위해 맥락을 중심으로 접근할 때에는 특정 맥락에서 피승수와 승수가 비대칭적인 특징을 가지고 있기 때문에(Chong, 2013), 각각의 수를 무엇으로 보는가에 따라 상황 자체가 달라질 수 있다. 또한 (분수)×(분수)에서 일부 예비교사들은 Figure 7과 같이 하나의 단위를 기준으로 2/5와 3/4을 표현함으로써 분수 곱셈 상황 자체를 표현하는 것에도 어려움을 보였다. 따라서 예비교사들은 2/3×5와 5×2/3 또는 3/4×2/5와 2/5×3/4을 각각 문장제로 만들고 시각적 모델로 직접 표현해봄으로써 피승수와 승수의 위치가 바뀜으로 인해 각각의 상황이 어떻게 달라지는지를 문장제와 시각적 모델을 통해 심도있게 탐색할 필요가 있다.

둘째, 초등예비교사들은 분수 곱셈의 의미와 관련하여 문제제기와 문제해결에서 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율 등의 의미를 충분히 활용할 수 있어야 하고, 교차 부분이나 넓이의 의미와 관련하여서는 보다 신중하게 접근할 필요가 있음을 인식해야 한다. 전자와 후자의 가장 큰 차이점은 피승수와 승수가 어떤 단위를 기준으로 구성되는지이다. 부분의 부분, 곱셈적 비교, 비율의 의미에서는 피승수와 승수의 기준 단위가 서로 다르고 승수의 기준 단위는 피승수가 된다. 따라서 이 의미들로 분수 곱셈을 제시하면 피승수와 승수가 어떠한 역할을 하고, 분수 곱셈이 무엇을 의미하는지를 일관적으로 보여줄 수 있다는 장점이 있다. 하지만 교차 부분이나 넓이는 피승수와 승수가 서로 동일한 기준 단위를 가지고 구성되기 때문에 이들을 모두 한꺼번에 경험하게 하면 분수 곱셈에 대한 혼란을 유발하고 이로 인해 개념적인 접근보다는 절차적인 접근에 초점을 맞추게 될 수도 있다.

특히 교차 부분의 의미는 여러 연구에서 초등학교 수학에서 다루는 데 한계가 있음을 지적하였음에도, 이를 분수 곱셈의 의미로 따로 구분하여 구체적으로 탐색한 연구는 드물다(e.g., Lee & Pang, 2019; Lee & Shin, 2011; Yim, 2012). 선행연구에서는 교차 부분 의미를 대부분 시각적 모델에 표현하는 하나의 방법으로 다루거나 다른 의미와 구분하지 않고 포괄적으로 다루었다. 본 연구는 이와 다르게 교차 부분 의미를 분수 곱셈의 의미로 따로 구분하여 제시하였다. 부분의 부분의 의미에서는 피승수와 승수의 기준 단위가 서로 다르고, 넓이 의미에서는 각각의 분수가 길이지만, 교차 부분 의미에서는 피승수와 승수의 기준 단위가 서로 같고 각각이 하나의 넓이나 부분이라는 점에서 교차 부분의 의미는 다른 의미들과 구분될 필요가 있다. 따라서 예비교사는 분수 곱셈 의미 사이의 중요한 차이를 인식하고 이를 통해 어떤 분수 곱셈 의미가 초등학생들로 하여금 일관성을 유지하면서 분수 곱셈에 개념적으로 접근 가능하도록 돕는지를 판단해볼 필요가 있다. 특히 교차 부분 의미의 경우 서로 겹치는 부분이 왜 분수의 곱셈을 의미하는지 초등학

교 수준에서 이해하기 어렵고(Yim, 2012), Figure 7의 (b)와 같이 분수 곱셈을 덧셈으로 잘못 생각하게 할 수도 있으므로 이러한 사용을 재고할 필요가 있다.

셋째, 어느 한 가지 모델만 가지고 해당 상황을 설명하기 보다는 여러 예비교사가 제시한 다양한 모델에서 어떠한 공통점과 차이점 또는 한계점 등이 있는지를 탐색하도록 하여 분수 곱셈에 대한 이해를 더욱 신장하도록 도울 필요가 있다. 본 연구에서 (자연수)×(분수)의 경우에 한국 예비교사들은 대부분(76.5%) 연속적인 길이 모델을 사용하였고 (분수)×(분수)에서는 70.6%가 연속적인 넓이 모델을 사용하였다(Table 8 참고). 이는 각각의 분수 상황에서 2015 개정 수학과 교육과정에 의한 교과서에서 제시하고 있는 방법과 동일하다(Ministry of Education, 2019). 반면에 미국 예비교사들은 두 가지 상황 모두에서 넓이 모델을 가장 많이 사용하였지만, (자연수)×(분수)에서는 62.5%가 넓이와 집합 모델이 혼합된 혼합 모델을, (분수)×(분수)에서는 66.7%가 연속적인 넓이 모델을 많이 사용하였다(Table 9 참고). 그러나 학교 현장에서 예비교사들은 한가지 곱셈 문제에 대해서도 학생들의 다양한 표현을 접하고 이에 적절하게 반응할 수 있어야 한다(Lee & Pang, 2019). 이에 예비교사들은 주어진 분수 곱셈 상황을 집합, 길이, 넓이 모델 등으로 다양하게 나타내봄으로써 여러 종류의 모델 사이에 드러나는 특징에 대해 탐색해볼 수 있고 넓이 모델에 비해 길이 모델로 표현했을 때 어떠한 점에 주의해야 하는지 등을 논의해볼 수 있다. 예를 들어 Figure 8의 (a)와 같이 길이 모델에서는 피승수와 승수를 시각적으로 한눈에 인식할 수 있다는 장점이 있지만, 3/4을 한꺼번에 5등분하였을 때 각각에 해당하는 양이 얼마인지 알기 어렵다는 한계가 있다. 이에 반해, (c)와 같이 넓이 모델을 활용하면 여러 방향으로 분할하여 나타낼 수 있기 때문에 3/4에서 각각의 1/4를 동시에 5등분하여 나타낼 수 있다는 장점이 있다. 또한 Figure 8의 (b)와 (c)의 길이 모델과 넓이 모델을 통해 분수 곱셈에서 남은 부분도 다시 분할하는 아이디어가 중요함을 파악할 수 있다(Lee & Shin, 2011).

넷째, 초등예비교사들은 시각적 모델을 상황이나 결과만을 나타내는 목적으로 사용하는 것에서 더 나아가 시각적 모델을 이용하여 연산의 과정을 표현하고 설명함으로써 이를 알고리즘과 연결할 수 있어야 한다. 교사는 자신의 학생들로 하여금 분수 곱셈을 개념적으로 이해하도록 돕기 위해서 다양한 교수학적 도구(문장제, 시각적 모델, 실제 맥락 등)를 활용하여 분수 곱셈을 설명할 수 있어야 한다(Izsák, 2008). 분수 곱셈을 Figure 7과 같이 표현하면 오히려 시각적 모델을 통해 학생들에게 여러 오개념을 심어줄 수 있다. 또한 Figure 8, Figure 9와 같은 그림은 분수 곱셈의 상황이나 결과를 표현할 수는 있지만 그러한 결과가 나오기까지를 그림을 이용하여 설명하는 데 많은 한계를 가지고 있다. 이러한 경우는 교사가 학생들의 개념적 이해를 돕기 위해 시각적 모델을 사용하는 것이라고 보기는 어렵다. 표면적으로 다양한 방법을 통해 분수 곱셈을 표현하였지만 결국 분수 곱셈 공식을 적용하여 절차적으로 계산하는 것에서 더 나아갈 수가 없다. 하지만 Figure 10이나 Figure 11과 같은 경우는 시각적 모델을 통해 계산 과정을 설명할 수 있으며 분모끼리 곱하고 분자끼리 곱하는 분수 곱셈의 알고리즘과도 충분히 연결할 수 있다. 따라서 예비교사들에게 본인들이 제시한 여러 시각적 표현 중에서 어떤 방법이 해당 문제를 해결하는 데 유용할뿐 아니라 다른 분수 곱셈에서도 바로 적용할 수 있는지, 그로 인해 그림을 이용하여 분수 곱셈 알고리즘을 어떻게 설명할 수 있는지를 탐색해볼 기회를 충분히 제공해야 한다. 특히 한국 예비교사는 (분수)×(분수)를 Figure 11의 (a)와 같이(6회), 미국 예비교사는 (c)와 같이(11회) 제시한 경우가 많았는데, 이러한 표현을 통해 분수 곱셈 알고리즘을 도출해낼 수 있다고 하더라도 Figure 11의 (a)와 (b)를 비교해봄으로써 분수 곱셈의 의미를 충분히 표현하고 있는 것은 무엇인지, Figure 11의 (c)와 같은 표현이 초등학교 학생들 수준에서 유의미한지 등에 대해서도 고찰해볼 필요가 있다.

다섯째, 문제제기와 문제해결 사이에서 나타나는 예비교사들의 분수 곱셈에 대한 이해를 보다 종합적인 관점에서 탐색할 필요가 있다. 본 연구에서는 예비교사들의 이해를 문제제기의 관점과 문제해결의 관점으로 나누어 세부적인 분석 준거를 기준으로 독립적으로 탐색 및 분석하였다. 이러한 과정을 통해서 선행연구들(Toluk-Uçar, 2009; Xie & Masingila, 2017; Yao et al., 2021)과 마찬가지로 문제제기 및 해결 활동에서 예비교사들의 개념에 대한 인식을 확인하고 진단할 수 있었다. 그러나 Cai와 Hwang (2020)은 문제제기와 문제해결을 서로 밀접하게 영향을 주고 받는 관계로 학습자들이 유사한 문제를 해결할 때 문제제기에서 드러나는 능력이 어떻게 달라질 수 있는지에 대해서 탐색하였다. 본 연구에서 미국의 예비교사들은 문제제기에서는 교차 부분 의미를 제시하지 않았지만, 시각적 모델을 이용하여 문제를 해결할 때에는 50%의 예비교사가 해당 의미로 표현하였다(Tables 5 and 7 참고). 따라서 예비교사의 문제제기가 문제해결에 주는 영향이나, 문제해결이 문제제기에 주는 영향에 대해서 추가적인 후속 연구들이 이루어질 필요가 있다(Xie & Masingila, 2017).

본 연구의 결과는 예비교사들이 분수 곱셈을 어떻게 이해하고 있는지에 대한 매우 다양한 정보를 제공하였다. 본 연구에서 한국과 미국의 예비교사들은 분수 곱셈의 문제제기와 해결에서 분수 곱셈에 대한 이해와 관련하여 여러 차이점을 보여주었다. 물론 연구에 참여한 예비교사들이 각 나라의 예비교사를 대표하기 어렵고, 국가 간의 교육과정, 교사교육과정 등이 다르기 때문에 본 연구의 결과를 일반화하는 데는 많은 한계가 있다. 그럼에도 불구하고 본 연구에서는 여러 차이점 중에서 각 나라별로 두드러지게 나타나는 특징에 초점을 맞춤으로써, 각각의 분석 기준에 따라 어느 한 나라의 자료만으로는 살펴볼 수 없었던 다양한 이슈들을 탐색하고 이에 대한 구체적인 시사점을 논하였다. 본 연구의 결과를 바탕으로 분수나 다양한 연산에 관한 국가간 예비교사들이 가진 지식과 이해를 체계적으로 비교하는 연구들이 확장되어 이루어지기를 기대한다. 이러한 비교를 통해 국가별로 부족한 점을 반영하여 예비교사교육을 발전시켜나갈 수 있을 것이다(Lin et al., 2013). 또한 본 연구 결과에 제시된 사례들은 교사교육에서 교수자료로도 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

REFERENCES

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicope, R., & Boss, M. J. (2019). Making sense of fraction division: Domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 507–528.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Bansilal, S., & Ubah, I. (2020). The use of cross multiplication and other mal–rules in fraction operations by pre-service teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 58*, 100781.

Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning, 13*(2), 59-76.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*,101391.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3),293–316

Chong, Y. O. (2013). Teaching multiplication with whole numbers in elementary school mathematics: Focusing on the introduction of the concept of multiplication and multiplication facts. *School Mathematics, 15*(4), 889-920.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM Mathematics Education, 37*(3), 149-158.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.276–295). Simon & Schuster Macmillan.

Hošpesová, A., & Tichá, M. (2015). Problem posing in primary schoolteacher training. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 433-447). Springer.

Isik, C., & Kar, T. (2012). The analysis of the problems posed by the pre-service teachers about equations. *Australian Journal of Teacher Education, 37*(9), 93-113.

Izsák, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction, 26*, 95–143.

Kar, T., & Isik, C. (2014). Analysis of problems posed by pre-service primary teachers about adding fractions in terms of semantic structures. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 9*(2), 135-146.

Kotsopoulos, D., & Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 259-274.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3th ed.). Routledge.

Lee, J., & Pang, J. (2019). A comparative analysis of fraction multiplication in Korean and Japanese elementary mathematics textbooks: Focused on quantitative reasoning. *Journal of Educational Research in Mathematics, 29*(4), 831-854.

Lee, S. J., & Shin, J. (2011). Preservice teachers' key developmental understandings (KDUs) for fraction multiplication. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 14*(4), 477-490.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 40*(5), 833-843.

Lin, C. Y., Becker, J., Byun, M. R., Yang, D. C., & Huang, T. W. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics, 113*(1), 41-51.

Luo, F., Lo, J. J., & Leu, Y. C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics, 111*(4), 164–177.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Lawrence Erlbaum.

Ministry of Education (2019). *5-2 Mathematics textbook*. Seoul, Korea: Chunjae Textbooks.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Author.

Noh, J., Ko, H. K., & Huh, N. (2016). An analysis of pre-service teachers' pedagogical content knowledge about story problem for division of fractions. *Elementary Mathematics Education, 19*(1), 19-30.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A review on problem posing in teacher education. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 469-492). Springer.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2014). *Helping children learn mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 107*(3), 909–918.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 1-7.

Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-service teachers' understanding of fraction multiplication, representational knowledge, and computational skills. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 5-28.

Son, T., & Hwang. S. (2021). Examining teachers' noticing competency on students' problem-solving strategies: Focusing on errors in fraction addition and subtraction with uncommon denominators problems. *The Mathematical Education*, *60*(2), 229-247.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics analyses classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: A contemporary perspective* (pp. 164–185). MASTEC, Edith Cowan University.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in Mathematics Education, 4*(7), 518-525.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.

Tobias, J. M. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(2), 85–103.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 166-175.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J.M. (2019). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (9th ed.). Pearson.

Viera, A. J., & Garrett, J. M. (2005). Understanding inter observer agreement: The kappa statistic. *Fam Med, 37*(5), 360-363.

Watanabe, T. (2003). Teaching multiplication: An analysis of elementary school mathematics teachers' manuals from Japan and the United States. *The Elementary School Journal, 104*(2), 111-125.

Webel, C., & DeLeeuw, W. W. (2016). Meaning for fraction multiplication: Thematic analysis of mathematical talk in three fifth grade classes. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 123-140.

Webel, C., Krupa, E., & McManus, J. (2016). Using representations of fraction multiplication. *Teaching Children Mathematics, 22*(6), 366-373.

Wilkins, J. L. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 139-164.

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 101-118.

Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers'mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 937-949.

Yeo, S. (2019). Investigating children's informal knowledge and strategies: The case of fraction division. *Research in Mathematical Education*, *22*(4), 283-304.

Yeo, S. (2021). Semiotic mediation through technology: The case of fraction reasoning. *The Mathematical Education*, *60*(1), 1-19.

Yeo, S., & Webel, C. (2022). Elementary students' fraction reasoning: a measurement approach to fractions in a dynamic environment. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-27.

Yim, J. (2012). Models and the algorithm for fraction multiplication in elementary mathematics textbooks. *School Mathematics, 14*(1), 135-150.