The Mathematical Education. Vol. 61, No. 1, 109-126
http://doi.org/10.7468/mathedu.2022.61.1.109

Print ISSN 1225-1380
Online ISSN 2287-9633

Research Article

An Analysis of Teachers' Knowledge on the Strategies for Understanding and Solving Equations by Fourth Graders

Pang, JeongSuk[1] · **Lee, Yujin**[2]
[1]Professor, Department of Elementary Education (Mathematics Education), Korea National University of Education
[2]Teacher, Daejeon Heungryong Elementary School

*Corresponding Author : Lee, Yujin (kjyjl4231@naver.com)

Abstract

The purpose of this study is to explore how well teachers anticipate students to understand and solve equations. For this purpose, a questionnaire of the equal sign was developed, and 20 fourth-grade classes were selected as research participants. Teachers in each class were asked to predict various strategies on how their own students would respond to the questionnaire, and a total of 450 students from the 20 classes solved the questionnaire. As a result of the analysis, the teachers could predict students' computational strategies and relational strategies easily but did not fully understand that some students used both strategies or employed incorrect computational or relational strategies. The students tended to use relational strategies better than the teachers expected. They also employed operational strategies more often than the teachers expected. The teachers predicted that students' strategies would be influenced by the types of the problems such as equation-structure items and equation-solving items, whereas the students were more influenced by the forms of equations in the problems. Based on these results, several implications for the knowledge to which teachers needed to attend were discussed so that elementary school students could enhance the relational understanding of the equal sign.

Key words : equal sign, equation, relational understanding, knowledge of student understanding, teacher knowledge

초등학교 4학년 학생들의 등식 이해 및 해결 전략에 대한 교사의 지식 분석

방정숙[1] · **이유진**[2]
[1]한국교원대학교 교수, [2]흥룡초등학교 교사

*교신저자 : 이유진 (kjyjl4231@naver.com)

초록

본 연구의 목적은 학생들의 등식 이해 및 해결 전략에 대해서 교사가 얼마나 잘 예상하는지 탐색하는 것이다. 이를 위해 등호 이해 검사지를 개발하였고, 4학년 20개 학급을 연구대상으로 선정하였다. 각 학급의 교사에게 담당 학생들이 검사지 문항을 어떻게 해결할 것인지 다양한 전략을 예상하게 하고, 실제 학생 전략과 비교·분석하였다. 그 결과 교사들은 전반적으로 학생들의 계산적 전략과 관계적 전략에 대해서는 비교적 쉽게 예상할 수 있었던 반면, 학생들이 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하기도 한다는 점, 틀린 계산적 전략이나 틀린 관계적 전략을 사용하기도 한다는 점 등에 대해서는 충분히 이해하지 못하는 것으로 드러났다. 또한, 교사들이 예상한 것보다 학생들은 관계적 전략을 더 잘 사용할 수 있었고, 등식의 형태에 좀 더 영향을 많이 받는 것으로 나타났다. 이와 같은 연구 결과를 토대로 초등학교 학생들이 등호에 대한 관계적 이해를 진작할 수 있도록 교사에게 필요한 지식에 대하여 시사점을 논의하였다.

주요어 : 등호, 등식, 관계적 이해, 학생 이해 지식, 교사 지식

Received January 22, 2022 **Revised** February 11, 2022 **Accepted** February 11, 2022
2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
Copyright © 2022 The Korean Society of Mathematical Education.
This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http: //creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

서론

등호는 동치 관계를 나타내는 기호로, 초등학교 1학년부터 수학의 여러 영역에 걸쳐 빈번하게 다루어진다. 이처럼 등호는 수학의 기본적이며 핵심적인 기호이지만 학생들은 매우 다양한 관점으로 등호를 이해하며 이 과정에서 어려움을 겪기도 한다. 학생들이 등호를 이해하는 관점을 구분하는 기준이나 관련 용어는 연구자마다 조금씩 차이가 있지만 크게 연산적 관점과 관계적 관점으로 나눌 수 있다(Kieran, 1981). 이러한 기준에 따르면 등호를 제대로 이해한다는 것은 관계적으로 이해하는 것으로 등호를 두 식의 동치 관계를 나타내는 기호로 인식하고 등식을 실행해야 하는 일련의 계산이 아니라 등식 자체로 추론할 수 있다는 것이다(Blanton et al., 2011; Kieran, 1981; Stephens et al., 2013). 특히 등호를 관계적으로 파악하는 것은 산술뿐만 아니라 이후의 대수 학습에도 도움을 주기 때문에 등호를 관계적으로 이해하는 것은 중요하다(Byrd et al., 2015; Matthews & Fuchs, 2020).

이러한 중요성에도 불구하고 학생들의 등호에 대한 이해를 다룬 연구를 살펴보면, 많은 학생들이 등호를 '무엇인가 하라'는 연산적인 관점에서 이해하는 문제점을 지적하고 있다(Kim et al., 2016; McNeil & Alibali, 2005; Stephens et al., 2013). 예를 들어, Kim 외 (2016)에서 2~6학년 학생들을 대상으로 등호 이해를 검사한 결과, '6-4+3=□+3'에서 □의 값을 구할 때, 좌변에 제시된 수를 모두 계산하여 5로 답하는 경우를 볼 수 있었다. Pang과 Choi (2016)도 초등학교 3학년을 대상으로 조사한 결과 등호를 '연산의 결과'나, '~이다'와 같이 연산적 관점에서 설명하는 경우가 많다고 지적했다.

이에 학생들이 왜 등호를 관계적으로 이해하기 어려워하는지 그 원인을 분석하고 이를 바탕으로 등호를 관계적으로 지도하는 방안을 모색하는 연구들이 진행되었다. 예를 들어 몇몇 연구에서는 교과서나 교육과정에서 주로 표준구조의 등식을 지나치게 많이 사용함으로써 학생들이 등호에 대해 연산적 관점을 강화하게 된다고 주장하였고(Capraro et al., 2010; Li et al., 2008; McNeil et al., 2015; Yim, 2013), 실제 수업에서 교사가 다양한 형태의 등식을 사용하거나, 적절한 시각적 교구를 사용하여 등호의 의미를 설명하는 것 등은 학생들이 등호를 관계적으로 이해하는 데 도움이 된다고 보고하였다(Bajwa & Perry, 2021; Blanton et al., 2018; Molina & Ambrose, 2008; Stephens et al., 2020). 이처럼 학생들이 등호를 관계적으로 이해하도록 지도하는 데 중요한 역할을 하는 교사에 대한 관심이 높아지면서 등호와 관련된 교사의 지식을 알아보는 연구도 진행되었다. 예를 들어, Fauskanger와 Mosvold (2013)는 교사들의 등호에 대한 이해를 조사하였고 Fischer 외 (2019)는 등호 지도에 초점을 맞춘 교사 교육 프로그램을 실시한 뒤 그 효과를 검증하였다. 이러한 연구들은 공통적으로 교사의 수업 방식이 학생들의 등호에 대한 이해에 영향을 끼치며, 특히 교사의 등호에 대한 내용지식 뿐만 아니라 학생들의 오류나 그 바탕이 되는 학생 사고를 이해하는 것도 중요함을 지적하고 있다(Vermeulen & Meyer, 2017).

한편 국내에서는 초등학생의 등호에 대한 이해를 조사하거나, 지도 방안에 대해서 논의하는 연구는 활발하게 진행되어 온 반면, 등호를 지도하는 교사에 대한 연구는 별반 없다. 드물게 초등학교 교사를 대상으로 등호에 대한 내용지식과 교수지식을 함께 연구한 사례(Jung & Choi, 2014)가 있으나 학생들이 등호를 잘못 사용하는 경우에 대한 일반적인 경험을 서술하도록 하거나 학생의 예상 오답을 검사지에 제시하는 등 등호와 관련된 학생 이해 지식을 면밀히 살펴보기에 부족한 측면이 있었다. 이에 본 연구에서는 학생들의 등식 이해 및 구체적인 해결 전략에 대한 교사의 이해 지식을 상세히 분석하고자 다양한 구조의 등식과 문항 형태를 제시하였다. 특히, 교사에게 일반적으로 학생들이 해당 문항을 어떻게 해결할지 조사하는 형태가 아니라, 한 학기 이상 담임을 맡아 수학을 지도하고 있었던 학급의 학생들이 해당 문항을 어떻게 해결할지 예상해보게 하고 어느 정도의 비율로 특정 전략을 사용할 것인지까지 예상해보게 함으로써 가르치고 있는 학생들에 대해서 얼마나 잘 이해하고 있는지를 분석하였다. 교사가 예상한 전략과 실제 학생들의 응답을 비교하여 분석함으로써 좀 더 유의미한 연구결과를 얻고자 하였다. 이러한 연구결과를 토대로 등호에 대한 관계적 이해를 신장하는 데 도움이 되도록 교사에게 필요한 지식에 대해서 시사점을 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

이론적 배경

학생들의 등호에 대한 이해

학생들의 등호에 대한 이해를 다룬 다수의 선행연구에서는 등식 구조에 따라 정답률이나 등호에 대한 관점이 달라질 수 있음을 지적했다(Kim et al., 2016; Matthews et al., 2012). 즉, 등식의 구조가 학생들의 등호 이해와 밀접하게 관련되어 있으며, 등식의 구조에 따라 학생들이 등호를 어떻게 이해하는지 살펴볼 필요가 있다는 것이다. 대부분의 선행연구에서 등식의 구조는 Table 1처럼 등호를 중심으로 양변이 어떻게 배치되어 있는지에 따라 구분하였다.

Table 1. Structure of equation.

Structure of equation		Example
standard equation structure	an equation with an operation only on the left of the equal sign	a + b = c
non-standard equation structure	an equation with an operation only on the right of the equal sign	c = a + b
	an equation with no operations	a = a
	an equation with operations on both sides of the equal sign	a + b = c+ d

Table 2. Levels of students' understandings for the equal sign.

Levels of students' understandings for the equal sign				Related literature
rigid operational level	flexible operational level	basic relational level	comparative relational level	Rittle-Johnson et al. (2011)
operational view		relational-computational view	relational-structural view	Stephens et al. (2013)
operational thinking	emergent relational thinking	relational thinking		Blanton et al. (2018)
operational thinking		computational thinking	relational thinking	current study

등식의 구조에 따른 학생들의 반응을 살펴보면 대부분 비표준구조의 등식을 해결하기 어려워했으며, 비표준구조의 등식에서 등호를 '문제에 대한 답'이나 '무엇인가를 하라'라는 잘못된 의미로 해석하여 오류를 범하기도 했다. Rittle-Johnson 외 (2011)도 등식 구조에 따른 해결 능력과 등호의 의미 이해를 기준으로 수준을 구분했다. 이에 따르면 표준구조의 등식(a+b=c)만 해결할 수 있는 경우 1수준으로 구분했으며, 비표준구조의 등식 중 c=a+b나 a=a와 같은 구조의 등식을 해결할 수 있는 경우를 2수준으로 구분했다. 그리고 양쪽에 연산이 있는 a+b=c+d와 같은 구조의 등식을 해결할 수 있는 경우를 3수준으로, 모든 구조의 등식을 해결할 수 있고 이때 등식의 보상 전략을 사용하거나 등식을 변형하여 등식을 해결하는 경우를 4수준으로 구분하였다. 이렇듯 학생들의 등호에 대한 이해를 정리한 연구를 살펴보면 Table 2와 같다.

Stephens 외 (2013)와 Blanton 외 (2018)는 유사하게 3수준으로 등호에 대한 이해를 구분하였다. 구체적으로 Stephens 외 (2013)는 '8+4=□+5' 등식에서 8+4=12나 8+4=12+5=17처럼 좌변의 수를 더하거나 주어진 등식의 모든 수를 더해 답하는 '연산적 관점', 8+4는 12이기 때문에 5를 더해 12가 되는 수 □를 찾을 수 있고, 양쪽에 연산이 있는 'a+b=c+d'와 같은 등식도 해결할 수 있는 '관계-계산적 관점', 5가 4보다 1만큼 크기 때문에 □는 8보다 1 작다는 관계를 통해 □에 7을 넣는 '관계-구조적 관점'으로 나누었다. 공통적으로 학생이 등호를 양변이 같다는 관계적 의미로 이해한다는 것은 모든 구조의 등식을 해결할 수 있으며 더 나아가 등호 양변에 있는 식을 비교하여 등식을 해결, 해석, 추론할 수 있다는 것까지 포함하는 개념으로 보았다. 이렇듯 학생의 등호에 대한 이해를 분석하기 위해서는 다양한 구조의 등식을 제시해야 하며, 등호 양변에 있는 식을 비교하여 등식을 해결, 해석, 추론할 수 있는 문항을 제시해야 한다. 즉, a+b=c와 같은 표준구조의 등식을 해결하는 과정만 살펴보아서는 학생의 등호에 대한 이해 수준을 판별하기 어렵다. 구체적으로 학생이 3+5=□와 같은 등식을 성공적으로 해결했다 하더라도 학생이 등호를 관계적으로 이해했는지 연산적으로 이해했는지 판별하기 어렵거나 학생이 등식을 해석 및 추론할 여지가 없기 때문에 학생이 등식을 해석 및 추론하기를 기대하기 어렵다는 한계가 있다.

본 연구에서는 개별 학생의 등호 이해 수준을 명확하게 구분하는 것이 아니라 문항별 학생 반응의 유형과 교사 예상을 비교하는 데 목적이 있으므로 학생들의 다양한 반응을 살펴보기에 용이한 비표준구조의 등식을 활용하였다. 또한 교사와 학생의 반응을 비교 분석해야 함으로 선행연구를 바탕으로 하되 지필 검사를 통해 분석하기에 용이한 연산적 사고, 계산적 사고, 관계적 사고에 따른 전략으로 구분하였다.

등호와 관련된 교사지식 연구

다수의 선행연구에서 교사의 수업방식이 학생들의 등호에 대한 이해에 영향을 끼친다고 지적한다(Asquith et al., 2007; Blanton et al., 2019; Fischer et al., 2019; Jacobs et al., 2007). 기본적으로 교사의 교수 행위는 교사지식을 토대로 발현되며, 학생들의 오류를 진단하고 원인을 해석하기 위해서도 교사지식이 뒷받침되어야 하기 때문이다(Ma, 1999).

등호와 관련된 교사지식 연구를 살펴보면 우선 교사들이 등호에 대한 관계적 이해의 중요성을 충분히 인식하지 못하고 수업에서 주로 표준구조의 등식만 반복적으로 다루게 될 때 학생들의 연산적 관점이 강화된다고 한다(Alibali et al., 2007; Carpenter et al., 2003; Matthews et al., 2012; Rittle-Johnson et al., 2011). 즉, 교사가 수업에서 다루는 등식의 종류가 학생들의 등호에 대한 이해에 영향을 끼친다는 것이다. 특히 Yim (2013)은 '5＋2=7'과 같은 등식을 교사들에게 읽게 했을 때 '5 더하기 2는 7'과 같이 왼쪽부터 오른쪽으로 차례로 읽음으로써 좌변의 계산 결과를 우변에 적도록 하는 연산적 관점을 강화할 수 있다고 지적했다. 이는 교사들이 등호에 대한 관계적 이해의 중요성을 간과한 결과이다.

반면 등호에 대한 관계적 이해를 강조한 전문성 개발 과정에 참여한 교사들이 지도한 학급의 학생들은 등호에 대해 더 잘 관계적으로 이해했다(Blanton et al., 2019; Fischer et al., 2019). 즉, 전문성 개발 과정을 통해 교사들이 등호에 대한 관계적 이해의 중요성과 의미를 이해하게 되자, 해당 학급의 학생들이 등식이나 대수 문제를 더 잘 해결하고 관계적 전략을 더 많이 사용할 수 있었다. 예를 들어 Fischer 외 (2019)는 등호 지도에 초점을 맞춘 교사 교육 프로그램을 설계하고 실험을 통해 프로그램의 효과를 살펴보았다. 그 결과 해당 프로그램에 참여한 교사들에게 지도를 받은 실험집단과 그렇지 않은 통제집단 학생들의 사전 사후 검사에서 실험집단의 점수가 더 높았으며, 특히 등식 쓰기 부분에서 더 뛰어난 성취 결과가 드러났다.

이처럼 교사는 학생의 등호에 대한 이해에 영향을 미치는 중요한 요소 중 하나이지만 몇몇 선행연구에서는 학생들을 지도하는 교사들도 등호에 대해 잘못 이해하고 있거나 학생들의 오류를 제대로 이해하지 못한다고 지적하였다. 예를 들어 Fauskanger와 Mosvold (2013)는 일부 교사가 '14+5=19+5=24+5=□'를 수학적으로 틀렸다고 생각하지 않는 경우가 있음을 보고하였는데, 이와 유사한 오류가 예비 교사들에게도 나타났다(Prediger, 2010; Stephens, 2006). 국내에서도 자연수의 혼합계산에 대한 초등학생들과 예비교사들의 오류를 분석한 결과 예비교사들이 등호를 동치를 나타내는 기호가 아닌 문제해결 단계의 입력-출력의 과정을 표현하는 기호로 잘못 사용한 문제점을 확인할 수 있었다(Lee, 2017).

앞서 살펴본 등호에 대한 내용지식의 부족 외에 학생들의 오개념을 인식하고 이해하는 부분에 있어서도 부족함이 나타났다. Jacobs 외 (2007)가 교사들에게 등식 문항을 해결하기 위해 학생들이 어떤 전략을 사용할지 예상해보도록 한 결과 교사들의 19%만이 5개 문항 중 4개 이상의 문항에 대해 관계적 전략을 예상할 수 있었다. 또한 Vermeulen과 Meyer (2017)는 교사들에게 주어진 문제를 해결하는데 발생할 수 있는 학생 오류와 오류의 원인, 지도 방안을 써 보도록 한 결과, 교사들의 학생 이해 지식이 부족하다는 것을 확인할 수 있었다. 이처럼 등호에 대한 교사지식을 분석함으로써 교사들의 부족한 부분을 파악하고자 했지만, 실제 학생 반응과 비교하여 분석한 연구는 드물었다. 이에 본 연구에서는 등호에 대한 교사지식 중에서도 학생 이해 지식에 초점을 맞추어 학생들의 다양한 해결 전략을 교사가 얼마나 잘 알고 있는지 교사의 예상과 실제 학생 응답과 비교하여 분석함으로써 등호 지도에 실질적인 시사점을 제공하고자 하였다.

연구방법

연구대상

본 연구는 학생들의 등식 이해 및 해결 전략에 대한 교사의 이해 지식을 분석하기 위해 여러 구조의 등식을 다루는 데 무리가 없으며 자연수의 사칙연산에 대해 모두 학습하였고 연산 능력의 제한을 비교적 적게 받을 수 있는 4학년을 대상 학년으로 선정하였으며, 해당 학년의 초등학생과 담임교사를 대상으로 하였다. 본 연구의 목적상 담임교사와 학생이 같은 학급이어야 하므로 학급을 단위로 하는 군집표집을 실시하였으며, 지역의 규모에 따른 학생 수를 고려하여 표집 학급 수를 결정하였다. 그 결과 서울에서 3학급, 광역시에서 6학급, 중소도시에서 8학급, 읍면 지역에서 3학급을 선정하여 전체 20개 학급을 대상으로 하였다. 연구대상이 된 담임교사 20명의 교직 경력을 살펴보면 3년 미만이 2명, 3년 이상 6년 미만이 3명, 6년 이상 10년 미만이 6명, 10년 이상이 9명이었다. 또한 초등수학교육이나 수학영재로 석사 학위를 가지고 있는 교사가 2명 포함되어 있었다. 연구대상이 된 20개 학급의 학생 수는 적게는 18명, 많게는 30명까지 있기도 하였으나 학생 수가 22～24명인 학급 수가 많았고 전체 학생 수는 450명이었다.

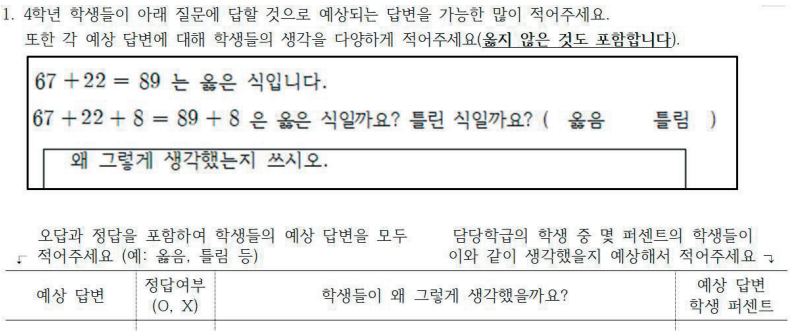
검사 도구

본 연구에서는 Rittle-Johnson 외 (2011)에 제시된 문항을 변형하여 검사 도구로 사용하였으며, 국제비교연구(Simsek et al., in press)의 일환으로 조사된 자료 중 한국 검사자료를 활용하였다. 검사 문항은 학생용의 경우 Table 3과 같이 크게 등식 구조, 등호 정의, 등식 해결의 3가지 유형으로 구성되었으며 교사용 검사지는 이 중 2, 3, 6-2, 8번 문항을 학생들이 어떻게 해결하는지 묻는 형태로 구성하였다.

Table 3. Task.

Type	Number	Characteristic	Explanation
equation-structure items	1	true-false	3=3 (True, False)
	2	descriptive	67+22=89 is true. Is 67+22+8=89+8 true or false? How do you know?
equal-sign items	3	descriptive	What does the equal sign mean?
	4	true-false	The equal sign means the same as. (True, False)
	5	multiple-choice	Which of the definitions above is the best definition of the equals sign? (same , add, answer of the problem, two sides can be swapped)
equation-solving items	6-1	descriptive	17+29=□+28. Show your working.
	6-2	descriptive	66-□=64-37. Show your working.
	7	descriptive	2×□=58, 2×□×8=58×8. Is the number that goes in the box the same in the following two number sentences? How do you know?
	8	descriptive	87+99=86+98+□. Show your working.

구체적으로 교사용 검사지는 Figure 1과 같이 예상되는 학생 답변과 정답여부, 해결 전략을 쓰도록 하였으며 예상되는 답변을 가능한 한 많이 적도록 안내하였다. 더불어 해당되는 답변을 응답한 학생이 담당학급의 학생 중 몇 퍼센트 정도로 예상하는지 %로 기술할 수 있도록 안내하였다. 본 논문에서는 학생의 등식 이해 및 해결 전략과 교사의 예상 전략 간의 관계를 살펴보고자 하였기 때문에 등호의 의미를 기술하도록 한 3번 문항을 제외한 2, 6-2, 8번을 대상으로 분석하였다.


1. 4학년 학생들이 아래 질문에 답할 것으로 예상되는 답변을 가능한 많이 적어주세요.
또한 각 예상 답변에 대해 학생들의 생각을 다양하게 적어주세요(옳지 않은 것도 포함합니다).

67 + 22 = 89 는 옳은 식입니다.
67 + 22 + 8 = 89 + 8 은 옳은 식일까요? 틀린 식일까요? (옳음 틀림)
왜 그렇게 생각했는지 쓰시오.

오답과 정답을 포함하여 학생들의 예상 답변을 모두 적어주세요 (예: 옳음, 틀림 등)
담당학급의 학생 중 몇 퍼센트의 학생들이 이와 같이 생각했을지 예상해서 적어주세요

예상 답변	정답여부 (O, X)	학생들이 왜 그렇게 생각했을까요?	예상 답변 학생 퍼센트

Figure 1. Example of the tasks for teachers.

자료 수집 및 분석

자료는 학급 단위로 수집되었으며 담임교사가 학생들의 해결 전략을 예상하도록 하는 검사지를 먼저 작성한 후 각 학급의 학생들이 담임교사의 감독 아래 40분 동안 직접 검사지에 기술하도록 함으로써 학생 답변이 교사의 예상에 영향을 주지 않도록 하였다. 수집된 검사지의 학생 반응은 선행연구의 내용을 기초로 하여 크게 연산적 전략, 계산적 전략, 관계적 전략, 전략혼재, 기타로 구분하여 각각 O, C, R CR, N으로 코딩하였다. 이때 본 연구에서 '연산적 전략'이란 등호가 양변이 같음을 나타내는 관계적 기호임을 이해하지 못한 채 사용되는 잘못된 전략으로, 양변을 각각 계산한 후 같음을 확인하는 '계산적 전략'과 구분된다. '관계적 전략'은 좌변과 우변을 각각 계산하는 것이 아니라 양변의 관계에 주목하여 같다는 것을 찾는 것으로 '계산적 전략'과 구분된다. 세부적으로 잘못된 등호 지식을 사용한 경우인 '연산적 전략'과 무응답이나 자신의 전략을 설명하지 못한 경우인 '기타 전략'을 제외한 '계산적', '관계적', '전략혼재'의 경우는 각각 옳은 전략과 틀린 전략으로 나누어 1과 2로 번호를 붙여 코딩하였다. 분석 기준을 확정하기 위해 우선 학생 자료 중 일부 50개에 대해서 초등 수학 교육 전문가 1명 및 대학원에서 초등 수학 교육으로 박사 과정 중인 교사 4명이 각자 코딩하였다. 이때 일치도가 80% 이상인 경우를 기준으로 일치하지 않은 경우에는 논의를 진행하였다. 이후 나머지 자료 200개에 대해서 각자 코딩하였으며, 필요시 논의를 통해 최종 코드를 확정하였다. 문항 6-2를 예로 들어 각 전략에 대한 세부 분류 및 예시를 제시하면 Table 4와 같다.

Table 4. Analytic framework for equation solution strategies.

Strategy	Code	Explanation	Example of responses for Item 6-2
operational	O	incorrect knowledge of the equal sign	64-37=27, so it is 27. 64-2=64, so it is 2.
right computational	C1	calculation of both sides	64-37=27, so 66-27=39.
wrong computational	C2		64-37=37, so 66-37=29.
right relational	R1	understanding the structure of both sides	Because 66 is 2 larger than 64, □ is 39, 2 larger than 37.
wrong relational	R2		Because 66 is 2 larger than 64, □ is 35, 2 smaller than 37.
right mixed	CR1	using both computational and relational strategies	64-37=27, 66-39=27. When it is 64, 37 is subtracted. 66 is 2 larger than 64, so 37+2=39.
wrong mixed	CR2		64-37=27, 66-35=27. When it is 64, 37 is subtracted. 66 is 2 larger than 64, so 37-2=35.
others	N	failed to explain	I found the answer, but couldn't explain how to find it.
		no response or wrong answer	Wrong answers that do not belong to any of the above strategies. I don't know.

전략별로 교사의 예상 답변을 분류한 뒤 해당 전략을 응답할 것으로 예상한 학생 비율(%)을 합산하였다. 이를 통해 얼마나 많은 학생들이 해당 전략을 이용할 것으로 교사가 예상하는지 살펴보고 문항별, 전략별 차이를 분석하였다. 또한 각각의 전략을 예상한 교사 수를 함께 분석하여 교사들이 잘 예상하는 전략과 잘 예상하지 못하는 전략이 무엇인지 살펴보았다. 이후 전략별로 실제 학생 응답을 분류한 뒤 전략별로 실제 응답 학생 비율(%)과 교사의 예상 비율(%)을 비교하여 교사의 예상이 잘 적중한 부분과 그렇지 못한 부분은 무엇인지 분석하였다.

결과분석 및 논의

교사의 학생 전략 예상에서 드러나는 특징 분석

전반적인 교사 예상의 특징

교사들을 대상으로 현재 지도하고 있는 학급의 학생들이 각각의 문항을 해결할 때 어떤 전략을, 얼마나 많은 학생들이 사용할 것으로 예상하는지 비율을 %로 나타내보도록 하였다. 이를 연산적, 계산적, 관계적, 전략혼재, 기타의 5가지 전략으로 구분하여 코딩한 후 문항별로 나누어 분석하였으며, 이를 종합하여 정리하면 Figure 2와 같다. 공통적으로 세 문항에서 모두 교사들은 학생들이 계산적 전략(C)을 가장 많이 사용할 것으로 예상하였으며, 다음으로 관계적 전략(R)을 많이 사용할 것으로 예상하였다. 또한 연산적

(O) 전략이나 기타(N) 전략과 같은 틀린 전략은 훨씬 적은 학생들이 사용할 것으로 예상하거나 전략 자체를 제시하지 않은 경우가 많았다. 또한 모든 문항에서 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하는 전략혼재(CR)를 예상한 교사는 단 한 명도 없었다.

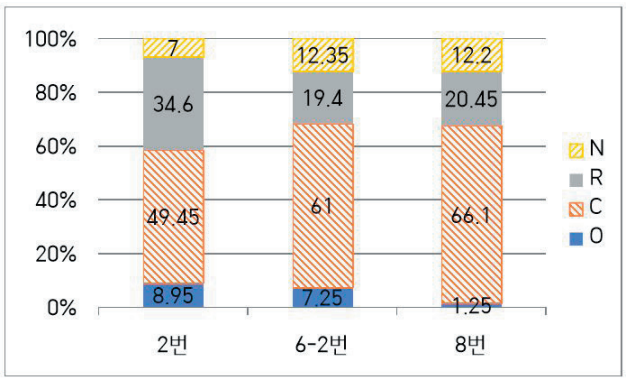


Figure 2. Overall analysis of teacher expectations by Items.

문항별 차이를 살펴보면 6-2번과 8번은 교사 전략 예상의 비율이 유사한 데 반해 2번은 다른 양상을 보인다. 구체적으로 참 거짓을 판별하는 2번 문항과 달리 특정한 값을 구하는 6-2, 8번 문항의 경우 교사들은 학생들이 계산적 전략(C)을 더 많이 사용할 것으로 예상하였으며 관계적 전략(R)은 상대적으로 적게 사용할 것으로 예상했다. 구체적인 교사의 응답 내용에도 차이가 있었는데 6-2, 8번 문항의 경우 계산적 전략(C)에서 수를 대입하거나 □를 양변에 더하거나 빼는 방식을 사용할 것으로 예상했다는 점이 특징이다. 또한 구체적인 값을 구해야 하는 6-2나 8번 문항의 경우 2번 문항에 비해 정답이지만 전략을 설명하지 못하거나 무응답 혹은 오답(N)인 경우를 더 많이 예상했다.

한편 유사한 문항 형태인 6-2번과 8번 문항 사이에도 약간의 차이가 있었다. 8번 문항의 경우 양변이 각각 '87+99'와 '86+98+□'으로 유사성이 명확하게 보이고 □의 위치가 등호의 바로 뒤에 있지 않았기 때문에 연산적 전략(O)을 예상한 교사의 수가 2번이나 6-2번에 비해 크게 감소하였다. 이처럼 등식의 참 또는 거짓을 판별하는지, 아니면 구체적인 값을 구하는지와 같은 문항 형태가 교사의 예상에 영향을 끼치는 것으로 나타났다. 즉, 교사들은 문항의 형태가 학생들의 사고 전략에 영향을 줄 것으로 예상했다.

문항별 교사 예상의 특징

등식 구조 문항(2번)에 대한 교사 예상의 특징

문항별로 교사의 예상 전략 각각을 옳은 전략 사용과 틀린 전략 사용으로 나누고 실제 학생 반응에서 나타난 전략혼재 부분 즉, 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용한 경우도 추가하여 분석하였는데, 그 결과는 Table 5와 같다.

Table 5. Analysis of teacher expectations in Item 2.

2. 67 + 22 = 89 는 옳은 식입니다.

67 + 22 + 8 = 89 + 8 은 옳은 식일까요? 틀린 식일까요? (옳음 틀림)

Strategy		Average of teacher expectations (%)	The number of teachers who expected the strategy (N=20)
operational strategy	O	8.95	13
computational strategy	C1	44.70	18
	C2	4.75	9
relational strategy	R1	34.60	18
	R2	-	-
mixed strategy	CR1	-	-
	CR2	-	-
other strategy	N	7.00	9

교사들은 계산적 전략 중에서도 옳은 계산적 전략(C1)을 44.70%의 학생들이 사용할 것으로 가장 높게 예상하였으며, 그 다음으로 관계적 전략 중 옳은 관계적 전략(R1)을 사용할 것으로 예상하였다. 더불어 20명 중 18명의 교사가 옳은 계산적 전략(C1)과 옳은 관계적 전략(R1)을 예상한 반면, 틀린 관계적 전략(R2), 전략혼재(CR)의 경우를 예상한 교사는 한 명도 없었다.

이처럼 교사는 옳은 전략 즉, 옳은 계산적 전략과 옳은 관계적 전략을 많이 예상하였으나, 연산적 전략, 틀린 계산적 전략은 각각 13명, 9명의 교사만 예상했다. 또한 연산적 전략의 경우 Figure 3처럼 우변에는 좌변에 제시된 연산의 결과값이 제시되어야 한다고 생각하는 경우가 있었으며, 67+22+8=89+8에서 '+8'은 무시하고 89가 아닌 67+22+8의 결과값인 97이어야 한다고 생각하는 경우가 있었다. 옳은 관계적 전략(R1)의 경우 크게 양변에 똑같이 8을 더해서 등식이 성립함을 보이거나 67+22=89를 67+22+8=89+8에 대입하거나 67+22=89이기 때문에 67+22+8과 89+8이 결국 같다는데 초점을 두어 설명했다. 이 외에도 전략을 제대로 표현하지 못하거나 무응답(N)인 경우에 대해서도 20명 중 9명의 교사가 예상하였다.

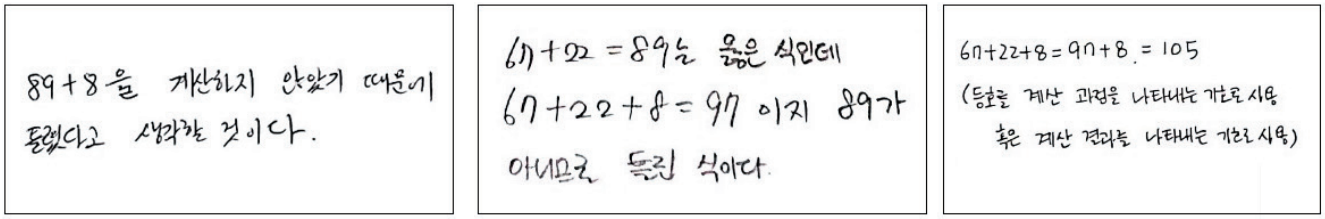


Figure 3. Teacher expectations for the operational strategy (O) in Item 2.

등식 해결 문항(6-2번)에 대한 교사 예상의 특징

6-2번 문항을 좀 더 세부적으로 분류하여 살펴본 결과는 Table 6과 같다. 교사들은 2번 문항과 마찬가지로 계산적 전략, 관계적 전략의 순으로 학생들의 예상 반응을 높게 예상했다. 하지만 옳은 계산적 전략과 옳은 관계적 전략의 예상 비율을 살펴보면 2번 문항에서는 각각 약 45%와 35%로 예상한 반면 6-2번 문항에서는 각각 약 56%와 16%로 차이가 두드러졌다.

Table 6. Analysis of teacher expectations in Item 6-2.

6. □에 알맞은 수를 써넣으시오.

2) 66 − □ = 64 − 37

Strategy		Average of teacher expectations (%)	The number of teachers who expected the strategy (N=20)
operational strategy	O	7.25	12
computational strategy	C1	55.95	20
	C2	5.05	7
relational strategy	R1	16.05	17
	R2	3.35	8
mixed strategy	CR1	-	-
	CR2	-	-
other strategy	N	12.35	11

세부 전략별로 살펴보면 교사 20명 모두 옳은 계산적 전략(C1)을 예상할 수 있었으며, 옳은 관계적 전략(R1)은 17명의 교사가 예상한 것으로 보아 교사들이 대부분 옳은 전략에 대해 예상할 수 있다는 것을 알 수 있다. 특히 옳은 계산적 전략(C1)의 경우 2번 문항과 달리 구체적인 값을 구하는 문항이기 때문에 일일이 수를 대입하여 정답을 찾거나 양변에 □를 더해준 뒤 양변에서 27을 빼는 방법을 제시한 경우가 많았다.

반면 연산적 전략(O)은 12명의 교사가, 틀린 계산적 전략(C2), 틀린 관계적 전략(R2)은 각각 7, 8명의 교사가 예상하였다. 연산적 전략(O)의 경우 66-□=64만 보고 □를 2로 생각하거나 우변의 계산 결과인 64-37=27을 □라고 생각하는 경우, 또 등호 양변에 똑같이 37을 넣어야 한다고 생각하는 경우를 제시했다. 다만 2번 문항에서와 마찬가지로 전략혼재(CR)를 예상한 교사는 한 명도 없었다.

하지만 2번 문항에서 틀린 관계적 전략(R2)을 예상한 교사가 한 명도 없었던 것과 달리 6-2번 문항에서는 8명이 틀린 관계적 전략을 예상했다는 차이가 나타났다. 틀린 관계적 전략(R2)은 Figure 4처럼 “66에서 2개가 줄어서 64이므로 37에서 2개가 줄어야 □가 된다. 따라서 답은 35이다.”처럼 양변의 관계를 살펴보았지만 2라는 차이를 더해주지 않고 오히려 빼줘서 발생하는 오류를 제시한 경우가 많았다.

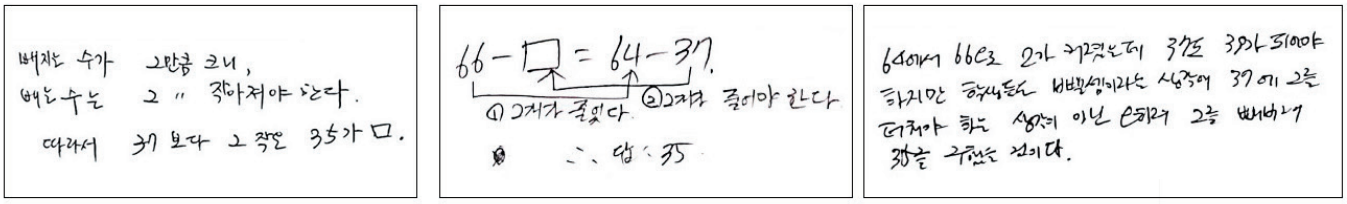


Figure 4. Teacher expectations for wrong relational strategies (R2) in Item 6-2.

등식 해결 문항(8번)에 대한 교사 예상의 특징

마지막으로 8번 문항을 분석한 결과는 Table 7과 같다. 교사들은 앞서 두 문항과 마찬가지로 대부분 계산적 전략을 가장 많이 사용할 것으로 예상했으며 그 다음으로 관계적 전략을 사용할 것으로 예상하였다. 반면 연산적 전략을 예상한 교사의 비율은 1.25%로 앞선 두 문항보다 매우 낮았다.

Table 7. Analysis of teacher expectations in Item 8.

8. □에 알맞은 수를 써넣으시오.

87 + 99 = 86 + 98 + □

Strategy		Average of teacher expectations (%)	The number of teachers who expected the strategy (N=20)
operational strategy	O	1.25	3
computational strategy	C1	62.20	20
	C2	3.90	5
relational strategy	R1	17.30	19
	R2	3.15	5
mixed strategy	CR1	-	-
	CR2	-	-
other strategy	N	12.20	14

세부 전략별로 살펴보면 앞선 문항들과 동일하게 계산적 전략 중에서도 옳은 계산적 전략(C1)을 가장 많이 사용할 것으로 예상했으며 그 다음으로 관계적 전략 중 옳은 관계적 전략(R1)을 사용할 것으로 예상하였다. 특히 옳은 계산적 전략(C1)은 20명의 교사 모두가, 옳은 관계적 전략(R1)은 20명 중 19명의 교사가 예상한 것으로 보아 교사 대부분은 옳은 계산적 전략과 옳은 관계적 전략에 대해 예상할 수 있었던 반면, 앞선 두 문항에서와 마찬가지로 전략혼재(CR)의 경우를 예상한 교사는 한 명도 없었다. 다만 6-2번 문항과 마찬가지로 틀린 관계적 전략(R2)을 예상한 교사가 있었다.

연산적 전략의 경우 87+99의 결과값을 □라고 생각하거나 우변에 좌변과 같은 99를 그대로 대입해야 한다고 생각하는 경우가 있었으며, 계산적 전략의 경우 앞선 6-2번 문항과 마찬가지로 구체적인 값을 구하는 문항이기 때문에 일일이 수를 대입하여 정답을 찾는 경우는 동일하게 나타났으나 양변에 □를 더하거나 빼주는 방법을 제시한 경우는 없었다. 또한 틀린 관계적 전략(R2)의 경우 "87에서 86은 1 감소하고, 99에서 98도 1 감소했으므로 변화가 없다고 착각했을 학생들이 있을 것이다." 또는 "99는 98보다 1 크므로 □는 1이다."처럼 양변의 관계를 살펴보았지만 양변에 차이가 없거나 차이가 1뿐이라고 생각할 것이라 예상하였다.

한편 Figure 5처럼 앞선 문항들에서 나타나지 않은 독특한 전략을 제시한 경우가 있었다. 예를 들어 등식의 좌변이나 우변을 87에서 99로, 또는 86에서 98로 "더하는 수가 12씩 커져 98 다음 110으로 생각"하거나 "99-87=12, 98-86=12여서 12라고 생각"한 경우이다. 등식에 제시된 각 수의 규칙성을 파악하여 가장 마지막에 제시된 □값을 추측한 전략으로 학생들이 '='에 대해 고려하지 않을 것으로 예상한 것이다.

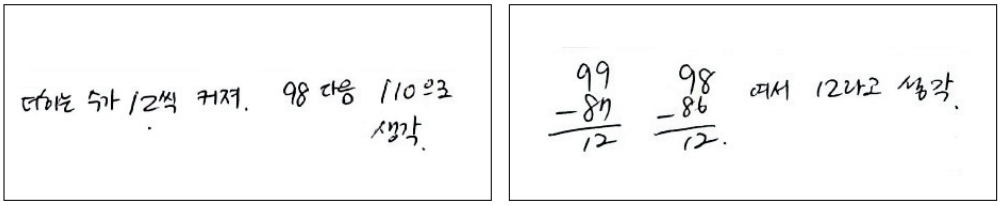


Figure 5. Teacher expectations for other strategy (N) in Item 8.

이처럼 등식의 참과 거짓을 판별하는지 또는 구체적인 값을 구하는지와 같은 문항 형태와 제시된 등식의 형태가 교사의 예상에 영향을 끼친 것으로 생각된다. 즉, 교사들은 문항과 등식 형태에 따라 학생들의 사고 전략에 대해 다르게 예상했다.

교사의 예상과 학생의 실제 응답 분석

전반적인 교사 예상과 학생의 실제 응답 사이의 비교 분석

교사들을 대상으로 현재 지도하고 있는 학급의 학생들이 각각의 문항을 해결할 때 어떤 전략을, 얼마나 많은 학생들이 사용할 것으로 예상하는지 비율(%)로 나타낸 것과 실제 학생들이 동일한 문항을 해결할 때 사용한 전략 비율(%)을 연산적, 계산적, 관계적, 전략혼재, 기타로 구분하여 코딩한 후 문항별로 나누어 분석하였으며, 이를 종합하여 정리하면 Table 8과 같다.

Table 8. Analysis of teacher expectations and student responses.

Strategy		Item 2			Item 6-2			Item 8		
		Teacher (%)	Student (%)	Gap* (%p)	Teacher (%)	Student (%)	Gap* (%p)	Teacher (%)	Student (%)	Gap* (%p)
operational strategy	O	8.95	16.08	7.13	7.25	13.83	6.58	1.25	4.00	2.75
computational strategy	C	49.45	44.80	4.65	61.00	43.68	17.32	66.10	44.89	21.21
relational strategy	R	34.60	26.74	7.86	19.40	28.48	9.08	20.45	29.33	8.88
mixed strategy	CR	-	6.21	6.21	-	4.57	4.57	-	0.67	0.67
other strategy	N	7.00	6.17	0.83	12.35	9.44	2.91	12.20	21.11	8.91

*gap between 'teacher expectations' and 'student responses'

첫째, 학생들은 문항을 해결할 때 전반적으로 교사가 예상하는 것보다 계산적 전략은 적게 사용하고 관계적 전략은 더 많이 사용하였음을 알 수 있다. 모든 문항에서 교사와 학생 모두 계산적 전략(C)에 대한 응답이 가장 많고 그 다음으로 관계적 전략(R)의 순으로 응답했지만 세 문항에서 모두 계산적 전략(C)은 교사의 예상보다 실제 학생의 응답률이 낮았으며, 두 문항에서 관계적 전략(R)은 교사의 예상보다 실제 학생의 응답률이 더 높았다. 문항별로도 차이가 있는데 구체적인 값을 묻는 6-2번, 8번 문항에서 이러한 교사와 학생의 차이가 더 두드러졌다. 특히 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하는 전략(CR)을 사용하는 경우 관계적 전략도 사용할 수 있다고 보았을 때, 그 차이는 더 두드러진다. 교사 예상과 학생 실제 응답 사이의 차이를 보면 교사는 구체적인 값을 묻

는 문항에서 계산적 전략을 많이 사용할 것으로 예상하였지만, 학생들은 그보다 계산적 전략을 훨씬 적게 사용하고 교사의 예상보다 관계적 전략을 더 많이 사용한 것을 알 수 있다. 이처럼 교사가 예상하는 것보다 학생들은 문항을 해결하는 데 있어 관계적 전략을 훨씬 더 많이 사용하였음을 알 수 있다.

둘째, 교사와 달리 학생들은 문항별로 계산적 전략과 관계적 전략의 사용 비율에 큰 차이를 보이지 않았다. 교사 예상과 학생 실제 응답 사이의 차이를 분석한 결과 2번 문항의 경우 교사 예상과 학생 실제 응답 사이의 오차가 가장 적었으며, 8번 문항, 6-2번 문항의 순으로 오차가 높게 발생한 것으로 나타났다. 이는 참, 거짓만을 묻는 2번 문항과 달리 6-2번, 8번 문항의 경우 구체적인 값을 구하는 문제이기 때문에 교사는 학생들이 계산적 전략을 다른 문항에 비해 많이 사용할 것으로 예상한 반면, 실제 학생들은 세 문항에서 계산적 전략을 사용한 비율이 크게 다르지 않았기 때문으로 보인다. 즉, 6-2번, 8번 문항의 경우 교사의 예상보다 학생들은 계산적 전략은 더 적게, 관계적 전략은 더 많이 사용했기 때문으로 보인다.

또한 전반적으로 살펴보았을 때, 학생의 경우 문항에 따른 전략의 차이가 크지 않은 반면, 교사의 경우 문항별 전략 차이가 두드러졌다. 교사는 참, 거짓만을 묻는 2번 문항과 구체적인 값을 구하는 6-2번, 8번 문항 사이의 전략별 응답 비율 차이가 두드러진 반면 학생들은 계산적 전략과 관계적 전략의 응답 비율이 문항별로 큰 차이를 보이지 않았다. 구체적으로 교사는 2번 문항에서 계산적 전략을 약 49% 사용할 것으로 예상한 반면, 나머지 두 문항은 각각 약 61%, 66%로 계산적 전략을 사용할 것으로 예상해 큰 차이를 보였다. 관계적 전략도 2번 문항은 약 35%로 나머지 두 문항에서 각각 약 19%, 20%를 예상한 것과 큰 차이가 있었다. 반면 학생의 경우 세 문항에서 계산적 전략의 응답 비율은 각각 약 45%, 44%, 45%로 매우 유사했으며, 관계적 전략의 응답 비율도 각각 약 27%, 28%, 29%로 유사했다. 이를 종합해 보았을 때 교사들의 예상과 달리 구체적인 값을 구하는 형태와 참, 거짓을 판별하는 형태의 차이는 학생들의 전략에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 보인다.

마지막으로 응답 비율이 높지는 않지만 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하는 전략(CR)을 사용하는 학생들이 있음에도 교사는 이를 전혀 예상하지 못했다. 학생들이 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하는 것은 관계적 전략을 단독으로 사용하는 것만으로는 논리적으로 부족하다고 여기는 경향이 반영된 것임으로 이에 대한 교사의 이해가 필요하다.

문항별 교사의 예상과 학생의 실제 응답 사이의 비교 분석

전반적인 분석을 바탕으로 문항별로 전체 교사와 학생의 응답을 살펴본 후, 개별 사례를 통해 학생 응답과 교사 예상에 어떠한 차이가 있는지 좀 더 상세히 분석하였다. 이를 통해 문항에 따라 교사가 비교적 잘 예상하는 학생의 전략과 잘 예상하지 못하는 전략이 무엇인지 비교해보고 문항별, 전략별 차이가 존재하는지 살펴보았다.

(1) 등식 구조 문항(2번)에 대한 세부 분석

Table 8에서 문항 2번에 해당하는 부분을 살펴보면 교사와 학생 모두 계산적 전략(C)에 대한 응답이 가장 많고 그 다음으로 관계적 전략(R)의 순으로 응답했다. 학생들은 교사의 예상보다 계산적 전략과 관계적 전략을 각각 덜 사용하였으며, 오히려 연산적 전략을 사용하거나 전략을 혼재하는 경향이 드러났다. 특히 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용한 전략혼재(CR)의 학생 응답 비율이 6.21%로 드러났는데, 교사는 이를 전혀 예상하지 못했다. 이러한 전반적인 분석 결과를 바탕으로 전략을 옳은 전략(1)과 틀린 전략(2)으로 더 세부적으로 나누어 분석한 결과는 Table 9와 같다.

Table 9. Analysis of teacher expectations and students responses in Item 2.

Strategy		Teacher (%)	Student (%)	Gap (%*p*)
operational strategy	O	8.95	16.08	7.13
computational strategy	C1	44.70	42.14	2.56
	C2	4.75	2.66	2.09
relational strategy	R1	34.60	26.74	7.86
	R2	-	-	-
mixed strategy	CR1	-	6.21	6.21
	CR2	-	-	-
other strategy	N	7.00	6.17	0.83

우선 교사와 학생 집단 모두 가장 많이 응답한 계산적 전략을 살펴보면, 옳은 계산적 전략(C1)에 대한 응답이 틀린 계산적 전략(C2)에 대한 응답보다 월등하게 많았다. 다음으로 관계적 전략을 살펴보면, 틀린 관계적 전략(R2)에 대한 응답은 없고 모두 옳은 관계적 전략(R1)을 사용한 것으로 드러났다. 이는 참, 거짓만을 묻는 2번 문항의 특성상 관계적으로 사고했을 때 오답이 나오기 어려웠기 때문으로 여겨진다. 다만 학생들은 교사가 예상한 것보다는 C1, C2, R1 전략을 상대적으로 적게 사용했다. 반면에, 연산적 전략(O)의 경우 교사의 예상보다 더 많은 학생들이 응답했다. 학생들의 응답을 구체적으로 살펴보면, 우선 주어진 '67+22+8=89+8'은 '67+22+8=89+8=97'처럼 계산결과가 나오지 않아 완결되지 않은 등식이라고 생각하거나 등호 뒤에는 반드시 계산결과만 나와야 한다고 생각하여 '67+22+8=89+8'에서 89 대신 97이 들어가야 한다고 생각하는 경우, 또 앞선 두 가지 유형이 합쳐져서 '67+22+8=97+8=105'처럼 생각하는 경우로 나누어 볼 수 있었다. 이처럼 학생들이 연산적 전략을 활용한 사례를 살펴보면 학생들이 등호에 대해 제대로 이해하지 못한 것에서 비롯된 오류임을 알 수 있다.

한편, 모든 교사가 예상하지 못한 전략혼재(CR)의 경우를 살펴보면 Figure 6처럼 학생들이 하나의 전략만 사용해도 충분함에도 불구하고 계산적 전략과 관계적 전략을 모두 사용한 것을 알 수 있다. 특히 학생 응답에서 이미 관계적 전략을 통해 67+22+8과 89+8이 같음을 아는 상태에서 둘이 같음을 나타내기 위해 97을 사용하거나 좀 더 확실한 설명을 위해 계산한 결과를 제시한 것을 보면 관계적 전략을 계산적 전략에 비해 부족한 설명이거나 확실하지 않은 설명으로 생각하는 경향이 반영된 것으로 보인다.

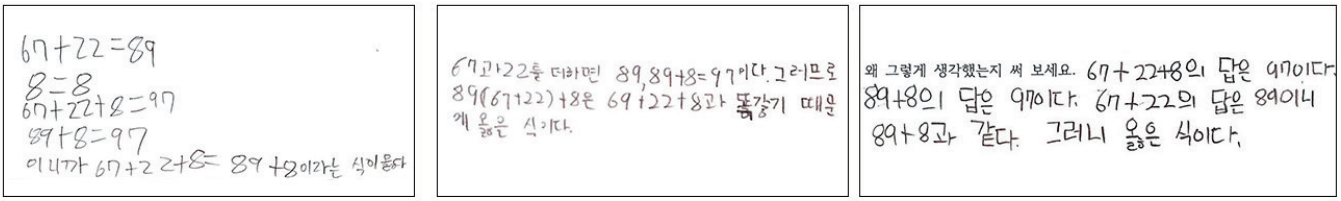


Figure 6. Student responses for mixed strategy (CR) in Item 2.

(2) 등식 해결 문항(6-2번)에 대한 세부 분석

Table 8에서 문항 6-2번에 해당하는 부분을 살펴보면 교사와 학생 모두 계산적 전략(C)에 대한 응답이 가장 높았지만, 교사의 경우는 약 61%의 학생이 계산적 전략을 사용할 것이라 예상한 데 반해 실제 학생의 약 44%만 사용하는 차이가 나타났다. 반면 관계적 전략(R)의 경우 교사는 약 19%의 응답률을 예상한 반면에 실제 학생의 응답률은 약 28%로 교사의 예상보다 높게 나타났다. 연산적 전략(O)의 경우 학생들은 교사의 예상보다 약 2배가량 많이 사용한 것으로 나타났다. 또한 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용한(CR) 학생이 약 5%로 나타났지만 이를 예상한 교사는 아무도 없었으며, 이러한 전반적인 분석 결과를 바탕으로 전략을 옳은 전략(1)과 틀린 전략(2)으로 더 세부적으로 나누어 분석한 결과는 Table 10과 같다.

Table 10. Analysis of teacher expectations and students responses in Item 6-2.

Strategy		Teacher (%)	Student (%)	Gap (%*p*)
operational strategy	O	7.25	13.83	6.58
computational strategy	C1	55.95	35.39	20.56
	C2	5.05	8.29	3.24
relational strategy	R1	16.05	15.73	0.32
	R2	3.35	12.75	9.40
mixed strategy	CR1	-	3.99	3.99
	CR2	-	0.58	0.58
other strategy	N	12.35	9.44	2.91

우선 교사와 학생 집단 모두 가장 많이 응답한 계산적 전략을 살펴보면, 옳은 계산적 전략(C1)에 대한 응답이 틀린 계산적 전략(C2)에 대한 응답보다 월등하게 많았다. 그러나 옳은 계산적 전략(C1)의 경우 교사는 약 56%를 예상한 반면에 실제 학생들의 응답은 약 35%에 지나지 않아 그 오차가 가장 큰 것으로 드러났다. 반면에 틀린 계산적 전략(C2)의 경우 교사는 약 5%를 예상한 반면에 학생들은 약 8%의 응답을 보였다. 여기서 주목할 만한 것은 다른 두 문항의 틀린 계산적 전략에 대한 학생 응답률(2.66%, 3.56%)에 비해 6-2번 문항에서 8.29%로 가장 높게 나타났다는 것이다. 이에 구체적인 학생 응답을 살펴보면 Figure 7과 같이 대부분 뺄셈을 덧셈처럼 잘못 생각하는 오류가 많았다. 예를 들어 '66-□=64-37'을 '66+□=64+37'처럼 인식하여 64+37에서 66을 뺀 35를 답으로 제시하는 경우가 가장 흔했다. 이 외에도 '64-37'을 37로 잘못 계산하거나 66에서 '64-37'을 빼지 않고 더해주는 단순 계산 실수도 나타났다. 반면에, 교사들의 응답을 살펴보면 '계산 과정에서 잘못 계산하는 경우'처럼 추상적으로 답하거나 '64-37'을 37로 잘못 계산하는 경우가 대부분으로 학생 응답과는 차이가 있었다. 이처럼 교사들은 학생의 계산 오류에 대해 추상적으로 생각하거나 '64-37'을 '64+37'로 계산할 수 있다는 것을 예상하지 못하는 것으로 나타났다.

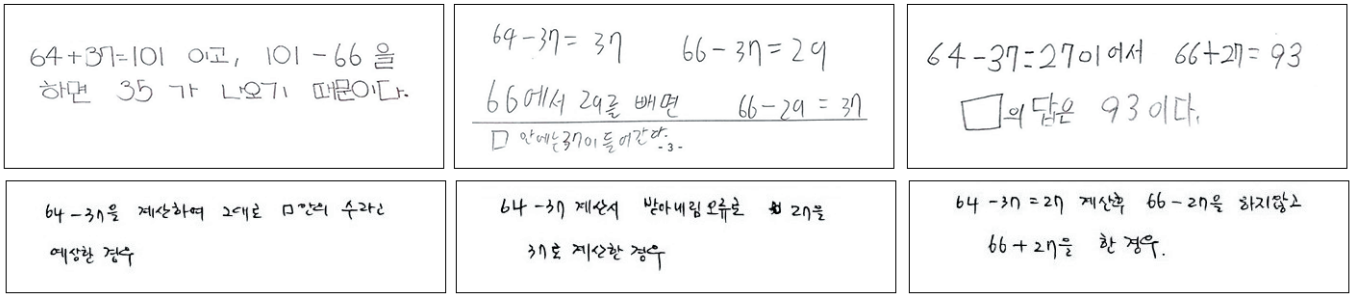


Figure 7. Teacher expectations and student responses for wrong computational strategy (C2) in Item 6-2.

다음으로, 옳은 관계적 전략(R1)에 대해서는 교사의 예상 응답과 학생들의 실제 응답 비율이 매우 유사했던 반면에 틀린 관계적 전략(R2)에 대해서는 주목할 만한 차이가 드러났다. 교사의 경우 틀린 관계적 전략을 약 3% 정도로 낮게 예상한 반면 학생은 실제 약 13%의 응답률을 보여 큰 차이가 나타났다. 즉, 교사가 예상한 것보다 학생들은 관계적 전략을 잘못 사용하는 경우가 많았는데, 이는 '66-□=64-37'이라는 문항의 특성상 66과 64, 37과 □의 관계를 살펴 등식을 해결했지만 "64에서 66이 되도록 37에서 2를 주었다"처럼 뺄셈 연산은 무시한 채 문제를 해결하거나 "66이 64보다 2가 더 많기 때문에 □에는 37보다 2 더 작은 숫자가 나와야 한다."처럼 양변의 관계를 살펴 문제를 해결했지만 덧셈처럼 더 적게 빼주는 실수가 많았기 때문으로 보인다.

한편, 연산적 전략(O)의 경우 교사의 예상보다 더 많은 학생들이 이 전략을 사용했다. 학생들의 응답을 구체적으로 살펴보면, 우선 '66-□=64-37'에서 '66-□=64'의 부분만 인식하여 □의 값을 2로 응답한 경우가 있었다. 이는 등호 뒤에는 반드시 답이 나와야 한다는 오개념이 반영된 것으로 우변 전체를 인식하지 못하고 64만 답으로 인식한 것이다. 이와 유사하게 '66-□=64-37'에서'□=64-37'의 부분만 인식하여 □의 값을 27로 응답한 경우가 있었다. 이는 앞서 2라고 응답한 오류처럼 등호는 답을 나타내는 기호라는 오개념과 주로 교과서에서 좌변에 식과 우변에 □를 주고 값을 구하는 방식처럼 좌우만 바꾸어 생각한 오류가 더해진 것으로 보인다. 이 외에도 등식이나 연산 기호를 무시한 채 모든 수를 더해서 답을 하거나(예, 66+64+37), 우변과 똑같이 37을 쓰는 등의 오류도 나타났다.

(3) 등식 해결 문항(8번)에 대한 세부 분석

Table 8에서 문항 8번에 해당하는 부분을 살펴보면 교사와 학생 모두 계산적 전략(C)에 대한 응답이 가장 높았지만, 교사의 경우는 약 66%의 학생이 계산적 전략을 사용할 것이라 예상한 데 반해 실제 학생의 약 45%만 사용하는 차이가 나타났다. 반면 관계적 전략(R)의 경우 교사는 약 20%의 응답률을 예상한 반면에 실제 학생의 응답률은 약 29%로 교사의 예상보다 높게 나타났다. 이러한 경향은 앞의 문항 6-2번에 대한 분석과 유사하다. 다만 문항 8번에 대한 분석에서 추가적으로 주목할 만한 것은 무응답 혹은 전략을 설명하지 못하는 기타 오답(N) 반응이 높았다는 점이다. 이러한 전반적인 분석 결과를 바탕으로 전략을 옳은 전략(1)과 틀린 전략(2)으로 더 세부적으로 나누어 분석한 결과는 Table 11과 같다.

Table 11. Analysis of teacher expectations and student responses in Item 8.

Strategy		Teacher (%)	Student (%)	Gap (%p)
operational strategy	O	1.25	4.00	2.75
computational strategy	C1	62.20	41.33	20.87
	C2	3.90	3.56	0.34
relational strategy	R1	17.30	28.89	11.59
	R2	3.15	0.44	2.71
mixed strategy	CR1	-	0.67	0.67
	CR2	-	-	-
other strategy	N	12.20	21.11	8.91

우선 교사와 학생 집단 모두 가장 많이 응답한 계산적 전략을 살펴보면, 옳은 계산적 전략(C1)에 대한 응답이 틀린 계산적 전략(C2)에 대한 응답보다 월등하게 많았다. 그러나 옳은 계산적 전략(C1)의 경우 교사는 약 62%를 예상한 반면에 실제 학생들의 응답은 약 41%에 지나지 않아 그 오차가 가장 큰 것으로 드러났다. 학생들이 틀린 계산적 전략(C2)을 사용한 경우는 3.56%로 6-2번 문항과 비교하였을 때 낮은 편이었다.

다음으로 관계적 전략을 살펴보면, 옳은 관계적 전략(R1)의 경우 교사는 약 17%를 예상한 반면에 실제 학생들의 응답은 약 29%로, 학생들은 교사의 예상보다 훨씬 더 많은 학생들이 옳은 관계적 전략을 활용할 수 있음을 알 수 있다. 학생들이 틀린 관계적 전략(R2)을 사용한 경우는 0.44%로 6-2번 문항과 비교하였을 때 매우 낮았다.

한편, 연산적 전략(O)의 경우 교사와 학생 비율이 각각 1.25%와 4.00%로 다른 두 문항에 비해 현저히 낮았다. 연산적 전략(O)에서 나타난 학생 오류를 살펴보면 '87+99=86+98+□'를 해석하는 과정에서 등호를 +처럼 인식하고 모든 수를 더해서 □의 값을 177로 응답한 경우가 많았다. 또 '87+99=86+98+□'에서 '86+98+□'의 부분만 인식하여 □의 값을 '86+98'인 184로 응답한 경우도 많았다. 이는 학생들이 주로 좌변의 식을 계산하여 우변의 □ 값을 구하는 방식에 익숙하기 때문에 이러한 형태에 맞춰 '87+99=86+98+□'를 해석한 것으로 보인다. 이 외에도 98과 86의 차를 구하여 12라고 답하거나 주어진 네 수 중 일부만 더하는 등의 오류도 나타났다. 반면에, 교사들의 응답을 살펴보면 학생이 제시한 오답은 전혀 예상하지 못한 것을 알 수 있다. 교사의 경우 좌변을 계산하여 □의 값을 제시하거나 위치적 유사성으로 인해 좌변의 99를 우변에 그대로 대입하는 연산적 전략을 예상했지만 학생들은 상대적으로 □와 인접한 '86+98'을 □의 값으로 제시하거나 □를 제외한 모든 수를 더해서 답하는 오류를 보였다.

마지막으로, 기타(N)의 경우 다른 두 문항과 비교했을 때 2배 이상 높게 나타났다. 즉, 일부 오답 반응(O, C2, R2)은 낮은 대신 무응답 혹은 기타 오답(N) 반응이 높은 것으로 학생들이 자신의 풀이방법을 설명하기 어려워하거나 아예 답변하지 못한 경우가 많다는 것을 의미한다. 이는 문항 8번에 제시된 등식 '87+99=86+98+□'는 앞서 참, 거짓을 판별하는 등식 '67+22+8=89+8'이나 □가 포함된 '66-□=64-37'보다 학생들에게 어렵게 느껴졌던 것으로 보인다. 또한 학생들의 응답을 살펴보면, 다른 문항과 달리 등식에 제시된 각 수의 규칙성을 파악하여 답을 추측하는 새로운 유형의 오답이 많았다. 구체적으로 Figure 8처럼 제시된 등식 '87+99=86+98+□'에서 87-86-□의 수열에 집중하여 □의 값을 85로 답하거나 "(더하는 수가) 12씩 커지기 때문에" □의 값을 110으로 생각한 것처럼 연산기호나 등호를 무시한 채 등식에 제시된 수의 규칙을 통해 마지막에 제시된 □값을 추측하였다.

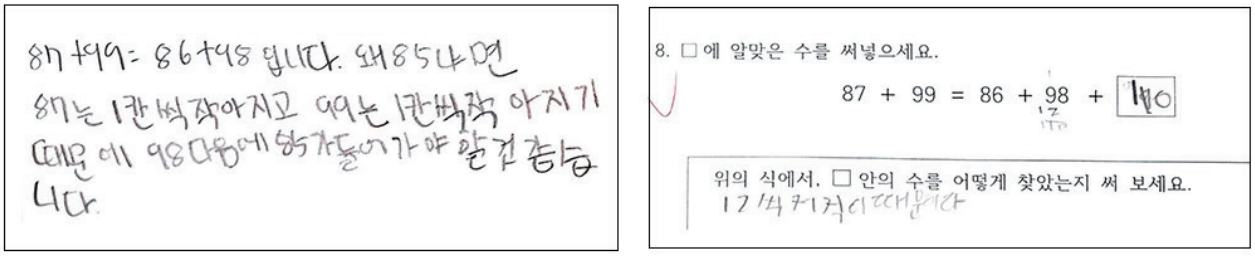


Figure 8. Student responses for other strategy (N) in Item 8.

결론 및 제언

본 연구에서는 등식 문항을 해결하는 초등학교 학생들의 전략을 교사가 예상해 보도록 하고 이를 실제 학생들이 사용한 전략과 비교하였다. 특히 다른 선행연구와 다르게, 본 연구대상 교사들이 한 학기 이상 담임교사로 가르치고 있는 학생들을 대상으로 하여 그 학생들이 주어진 특정 문항을 해결하기 위해 어떤 전략을 얼마만큼 사용할지에 대해서 구체적으로 답변하게 함으로써 교사의 학생 이해 지식을 분석하였다. 연구 결과를 종합하면서 등호에 대한 교사의 학생 이해 지식의 특징 및 이와 관련된 논의를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 등식 문항을 해결할 때 가장 많이 나타나는 계산적 전략과 관계적 전략을 살펴보면 교사와 학생 집단 모두 계산적 전략에 해당하는 응답이 가장 높았고 그 다음으로 관계적 전략에 대한 응답이 높았다. 이는 국내 선행연구에서 학생들이 주로 관계적 전략과 계산적 전략을 사용한다는 것과 일맥상통하는 결과이며(Kang, 2009; Kim et al., 2016) 교사가 이러한 학생들의 전략 사용을 비교적 잘 예상하고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 세 문항에서 공통적으로 옳은 계산적 전략이나 옳은 관계적 전략을 예상한 교사 수가 20명 중에서 17명 이상으로 나타나 대부분의 교사들이 학생들의 옳은 계산적 전략과 옳은 관계적 전략을 잘 이해하고 있다고 볼 수 있다. 특히 이러한 결과는 교사들의 관계적 전략에 대한 이해가 학생들의 등호 이해에 유의미한 영향을 끼친다는 연구결과(Simsek et al., in press)에 비추어 보았을 때 고무적인 결과라 할 수 있다.

그러나 교사의 예상과 학생의 실제 응답 사이의 차이에 주목해 보면 개선의 여지가 많다. 먼저 학생들은 교사가 예상한 것보다 계산적 전략을 적게, 관계적 전략을 많이 사용하고 있었다. 학생들의 이러한 전략 사용은 문항 유형에 거의 영향을 받지 않는 것으로 드러났다. 즉 교사들은 구체적인 값을 구하는 유형이나 주어진 등식의 참, 거짓을 판별하는 유형이 학생들의 전략 선택에 영향을 미칠 것으로 예상했으나 학생들은 세 문항에서 계산적 전략과 관계적 전략의 사용 비율이 비슷한 것으로 나타났다. 이런 측면에서 학생들이 등식 문항을 해결할 때 어떤 요소에 의해 전략 선택에 영향을 받는지에 대한 연구와 함께 교사가 이를 잘 이해하려는 노력이 필요해 보인다.

둘째, 본 연구에서 학생들은 교사가 예상한 것보다 관계적 전략을 더 많이 사용하는 경향이 있다는 점은 고무적이다. 구체적으로 2번 문항에서는 교사의 예상보다 학생들이 관계적 전략을 덜 사용했지만 나머지 2개 문항에서는 더 많은 학생들이 관계적 전략을 사용할 수 있었다. 등호에 대한 관계적 이해의 중요성과 학생들이 실제 관계적 전략을 사용하여 등식 문항을 해결하는 비율이 예상보다 높다는 점을 감안해 볼 때 교사가 수학 수업에서 등호를 다룰 때 적극적으로 학생들의 등호에 대한 관계적 이해를 촉진할 필요가 있다.

이와 더불어 주목할 만한 것은 교사는 계산적 전략과 관계적 전략을 함께 사용하는 경우를 예상하지 못했으나 실제 세 문항 모두에서 학생들은 전략을 함께 사용하는 경우가 있었다는 것이다. 학생들의 응답을 살펴보면 관계적 전략을 사용할 수 있음에도 불구하고 주어진 식이 옳은 식인지 설명할 때, 그리고 □의 수를 어떻게 찾았는지 설명할 때 계산적 전략으로 검산 과정을 거친 것으로 보인다. 이렇듯 두 가지 전략을 함께 사용하는 예는 이전까지의 국외연구 사례에서 발견되지 않은 것으로, 계산이 복잡하지 않은 식에 대해서 실제 양변을 각각 계산하고 그 결과가 같다는 것까지 제시함으로써 자신의 생각이 확실히 맞다는 것을 보이기 위한 것이라고 생각된다. 이에 학생들이 관계적 전략을 덜 정교하거나 불확실한 전략으로 인식하지 않도록 지도할 필요가 있다.

셋째, 교사가 전반적으로 잘 예상하지 못한 전략은 학생들의 틀린 전략이었다. 계산적 전략과 관계적 전략의 경우, 틀린 계산적 전략이나 틀린 관계적 전략을 예상한 교사 수는 20명 중 9명 이하로, 옳은 계산적 전략이나 옳은 관계적 전략을 예상한 교사 수의 절반에 지나지 않는다. 학생들의 틀린 계산적 전략을 자세히 살펴보면 문항에 제시된 등식의 형태나 주어진 연산의 종류가 학생들의 답변에 영향을 주는 것처럼 보인다. 예를 들어 6-2번 문항의 경우 문제에서 주어진 뺄셈 대신에 오히려 더해주는 틀린 계산적 전략을 많이 사용하였다. 또한 6-2번과 8번 문항에서 틀린 관계적 전략을 응답한 학생 비율을 살펴보면 각각 12.75%와 0.44%로 큰 차이를 보였는데, 이는 두 문항 모두 구체적인 값을 구하는 문항이었지만 제시된 등식의 특성이 달랐기 때문으로 보인다. 하지만 두 문항에서 교사가 예상한 틀린 관계적 전략의 비율은 각각 3.35%와 3.15%로 크게 다르지 않은 것으로 볼 때, 교사가 이러한 등식의 특성에 따른 학생들의 응답 차이를 제대로 예상하지 못하고 있음을 알 수 있다. 학생들이 어떤 전략을 사용하는지 뿐만 아니라 언제 어떻게 사용하는지 알아야 교사가 구체적인 피드백을 제공하기가 용이할 것이다.

또한 잘못된 등호 지식을 적용한 연산적 전략의 경우 세 문항 모두에서 교사가 예상한 것보다 학생들은 2배 남짓 더 많이 사용하는 것으로 드러났다. 예를 들어, 8번 문항의 경우 □의 위치가 가장 마지막에 제시되었기 때문에 앞서 제시된 모든 수들을 더해 □의 값을 구하는 연산적 전략이 많이 사용되었다. 그러나 교사들은 추상적으로 학생들의 틀린 전략을 짐작할 뿐 구체적인 오류 양상을 잘 예상하지 못하는 것으로 나타났다. 이와 더불어, 본 연구대상 학생들이 4학년 학생들이었음을 감안한다면 여전히 등호를 계산한 결과만을 나타내기 위한 도구로 인식하는 것은 분명하게 교정되어야 한다. 연산적 전략과 맥을 같이 하는, 등호에 대한 산술적 관점은 학년이 올라간다고 해서 쉽게 교정되는 것이 아니고 후속 학습에 치명적인 영향을 끼친다는 점을 고려할 때(Alibali et al., 2007; Britt & Irwin, 2011; Byrd et al., 2015), 초등학교 4학년 학생들이 가지고 있는 연산적 전략에 대해서 교사가 제대로 이해하고 교정할 수 있어야 할 것이다. 교사가 학생들의 구체적인 오류를 잘 예상하지 못한다면 수업 시간에 그러한 오류를 보인다고 하더라도 주목하기가 쉽지 않고 즉석에서 적절한 피드백을 제공하기가 쉽지 않기 때문에, 등식을 해결하는 과정에서 나타나는 학생들의 구체적이고 다양한 오답반응을 교사들에게 제시하고 그 과정에서 나타나는 학생들의 사고과정을 이해하게 할 필요가 있다. 실제로 다수의 연구에서 등호와 관련된 전문성 개발 프로그램에 참여한 교사가 지도한 학생들이 등호에 대해 더 잘 이해하고 관계적 전략을 사용하여 문제를 해결할 수 있었고(Fischer et al., 2019; Jacobs et al., 2007) 교과서에 제시되는 등식 구조보다 교사지식이 학생의 등호 이해에 더 많은 영향을 준다는 것을 볼 때(Simsek et al., in press), 등호 지도에 있어 교사의 역할이 중요함을 알 수 있다.

본 연구는 초등학교 4학년 학생들의 등호 이해 및 등식 해결 전략에 대한 교사의 지식을 분석한 것으로, 연구대상 교사와 학생 집단을 연결하여 교사의 학생 이해 지식을 조금 더 면밀히 분석한 것이다. 초등학교에서 등호의 관계적 이해의 중요성을 감안할 때, 교사가 학생들의 전략을 잘 예상하고 지도할 필요가 있다. 특히 교사가 잘 예상하지 못하거나 교사의 예상 비율과 실제 학생들의 응답 비율의 차가 큰 전략에 대해서 교사가 좀 더 학생들의 의도를 이해하고 틀린 전략에 대해서 명확히 교정하는 데 본 연구가 작은 도움이 되기를 기대한다.

REFERENCES

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249-272. https://doi.org/10.1080/10986060701360910

Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 221-247. https://doi.org/10.1080/10986060701360902

Bajwa, N. P., & Perry, M. (2021). Features of a pan balance that may support students' developing understanding of mathematical equivalence. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 1-27. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1700587

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E., & Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blanton, M., Otálora, Y., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. B., Gibbins, A., & Kim, Y. (2018). Exploring kindergarten students' early understandings of the equal sign. *Mathematical Thinking and Learning, 20*(3), 167-201. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1474534

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai, & E. Kunth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 137-159). Springer.

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences, 38*, 61-67. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.01.001

Capraro, R. M., Capraro, M. M., Yetkiner, Z. E., Özel, S., Kim, H. G., & Küçük, A. R. (2010). An international comparison of grade 6 students' understanding of the equal sign. *Psychological Reports, 106*(1), 49-53. https://doi.org/10.2466/PR0.106.1.49-53

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann.

Fauskanger, J., & Mosvold, R. (2013). Teachers' mathematical knowledge for teaching equality. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 289-296). PME.

Fischer, J. P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J. F. (2019). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education, 34*(2), 439-456. https://doi.org/10.1007/s10212-018-0384-y

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288. https://doi.org/10.2307/30034868

Jung, H. J., & Choi, C. W. (2014). An analysis of elementary school teacher's knowledge of concept of equality. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 18*(2), 211-236.

Kang, M. H., (2009). Study of elementary school students' concept of equal sign through the analysis of their corrent responses to nonstandard structure of equivalent equation problems. *Open Education Practice Study, 14*, 17-30.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kim, J. W., Choi, J. Y., & Pang, J. S. (2016). How do elementary school students understand '='? Performance on various item types. *Journal of Educational Research in Mathematics, 26*(1), 79-101.

Lee, D. H. (2017). An analysis on the error types of elementary students and pre-service teachers in mixed calculations of natural number. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 20*(2), 141-161.

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction, 26*, 195-217. https://doi.org/10.1080/07370000801980845

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Routledge.

Matthews, P. G., & Fuchs, L. S. (2020). Keys to the gate? Equal sign knowledge at second grade predicts fourth‐grade algebra competence. *Child Development, 91*(1), 14-28. https://doi.org/10.1111/cdev.13144

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 316-350. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0316

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., & Dunwiddie, A. E. (2015). Arithmetic practice can be modified to promote understanding of mathematical equivalence. *Journal of Educational Psychology, 107*(2), 423. https://doi.org/10.1037/a0037687

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, 76*(4), 883-899. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 30*, 61-80.

Pang, J. S., & Choi, I. Y. (2016). An analysis of algebraic rhinking by third graders. *Education of Primary School Mathematics, 19*(3), 223-247. https://doi.org/10.7468/jksmec.2016.19.3.223

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85-104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Simsek, E., Xenidou-Dervou, I., Hunter, J., Dowens, M. G., Pang, J., Lee, Y., McNeil, N., Kirkland, P., & Jones, I. (in press). Factors associated with children's understanding of mathematical equivalence: An investigation across six countries. *Journal of Educational Psychology.* https://doi.org/10.1037/edu0000747

Stephens, A., Sung, Y., Strachota, S., Torres, R. V., Morton, K., Gardiner, A. M., Blanton, M., & Stroud, R. (2020). The role of balance scales in supporting productive thinking about equations among diverse learners. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-18. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1793055

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 173-182. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.02.001

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 249-278. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136-147. https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343

Yim, J. H. (2013). Discrepancy between reading and writing equality number sentences in Korean language. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 17*(2), 207-223.