

논문

## 원판형 이상체에 의한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식

임형래\*

부산대학교 지구과학교육과

### Closed-form Expressions of Magnetic Field and Magnetic Gradient Tensor due to a Circular Disk

Hyoungrae Rim\*

Department of Earth Science Education, Pusan National University

#### 요약

화산의 화도나 불발탄과 같이 축 대칭을 갖지만 단면의 반지름이 변하는 경우 대칭축에 수직인 얇은 원판들의 반응을 더하여 모델링하는 것이 효율적이다. 이런 모양의 이상체에 대한 자력 및 자력 변화율 텐서 모델링을 위해서는 얇은 원판에 대한 해석해가 필수적이다. 따라서 이 논문에서는 원판형 이상체에 대한 벡터 자력과 자력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 벡터 자력은 중력 변화율 텐서를 자력으로 변환하는 포아송 관계식을 이용하여 원판형 이상체의 기존 중력 변화율 텐서로부터 유도하였다. 자력 변화율 텐서는 직교 좌표계의 미분 관계식을 원통 좌표계로 미분 관계식으로 변환한 후 벡터 자력을 미분하여 유도하였다. 벡터 자력과 자력 변화율 텐서는 원판형 이상체의 축 대칭성을 이용한 립슈츠-한켈(Lipschitz-Hankel) 적분을 기반으로 구하였다.

#### 주요어

자력, 자력 변화율 텐서, 원판형 이상체, 립슈츠-한켈 적분

#### ABSTRACT

In case axial symmetrical bodies with varying cross sections such as volcanic conduits and unexploded ordnance (UXO), it is efficient to approximate them by adding the response of thin disks perpendicular to the axis of symmetry. To compute the vector magnetic and magnetic gradient tensor responses by such bodies, it is necessary to derive an analytical expression of the circular disk. Therefore, in this study, we derive closed-form expressions of the vector magnetic and magnetic gradient tensor due to a circular disk. First, the vector magnetic field is obtained from the existing gravity gradient tensor using Poisson's relation where the gravity gradient tensor due to the same disk with a constant density can be transformed into a magnetic field. Then, the magnetic gradient tensor is derived by differentiating the vector magnetic field with respect to the cylindrical coordinates converted from the Cartesian coordinate system. Finally, both the vector magnetic and magnetic gradient tensors are derived using Lipschitz-Hankel type integrals based on the axial symmetry of the circular disk.

#### KEYWORDS

magnetic field, magnetic gradient tensor, circular disk, Lipschitz-Hankel integral

## 서론

자력 탐사 방법은 오랜 기간 중요한 물리탐사 방법의 하나로 널리 사용되고 있고(Sarma *et al.*, 1999; Park *et al.*, 2014; Noh *et al.*, 2020), 최근 장비의 개발로 자력 변화율 탐사 방법

또한 여러 현장에서 일반적으로 적용되고 있다(Schmidt *et al.*, 2004; Oruç, 2010; Luo *et al.*, 2015; Yin *et al.*, 2016; Ren *et al.*, 2019). 자력이나 자력 변화율 탐사 자료를 해석하기 위해서는 자력 변화율 텐서의 근본 특성을 활용하거나(Heath *et al.*, 2005; Beiki *et al.*, 2012) 기본적인 형태의 이상체에 대한

Received: 24 January 2022; Revised: 23 February 2022; Accepted: 24 February 2022

\*Corresponding author

E-mail: brim2017@pusan.ac.kr

Address: 2 Busandaehak-ro, 63 beon-gil, Geumjeong-gu, Busan 46241, KOREA

©2022, Korean Society of Earth and Exploration Geophysicists

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

해석해를 사용해야 한다. 이상체의 단면이 원형인 경우 얇은 원판형 이상체의 조합으로 이상체를 모양을 재현할 수 있다. 이런 경우 이상체의 자력 또는 자력 변화를 반응을 계산하기 위해서는 원판형 이상체에 대한 자력과 자력 변화율 해석해를 사용하는 것이 필수적이다.

이전에는 3차원 이상체의 자력 반응을 계산하기 위해서는 단면을 다각형으로 근사하는 방법이 주로 사용되었다 (Nettleton, 1942; Talwani, 1973). 간단한 모양으로 근사가 가능한 원판형 이상체에 대한 총자력 반응식은 Singh *et al.* (1979)에 의해 유도되었다.

축 대칭을 갖지만 그 모양이 변하는 이상체의 경우 대칭축에 수직인 얇은 원판들을 더하여 이상체를 근사할 수 있다. 관입 화산암의 경우 지하 구조에 따라 마그마 챔버에서 지표까지 이어진 화도의 두께가 변하는 경우 (Szitkar *et al.*, 2015), 이에 대한 자력 반응을 모델링하려면 얇은 원판형 이상체에 대한 자력 해석해가 필요하다. 또한 자력탐사를 불발탄(unexploded ordnance, UXO)을 찾는데 이용할 때, 불발탄의 복잡한 모양 때문에 일반적으로 단순화시킨 자기 쌍극자로 모델링한다 (Munsch *et al.*, 2007; Davis *et al.*, 2010). 그러나 불발탄은 대개 축 대칭을 가지며 그 단면의 반지름이 일정하지 않은 형태이므로 이 논문에서 유도한 판상형 이상체의 조합으로 불발탄에 대한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응을 더 정밀하게 모델링할 수 있다.

이 논문에서는 원판형 이상체에 의한 벡터 자력, 총자력 및 자력 변화율 텐서의 해석해를 유도하고자 한다. 이미 기존 연구에서 원판형 이상체에 의한 원통 좌표계에서 총자력은 유도하였으나 (Singh, 1979), 여기서는 벡터 자력의 모든 성분을 직교 좌표계에서 유도하고, 이를 미분하여 자력 변화율 텐서 반응식을 유도한다.

## 원판형 이상체의 자력

일정한 자화 방향을 가지는 원판형 이상체에 대한 벡터 자력은 식 (1)과 같은 동일한 이상체의 중력 변화율 텐서를 포아

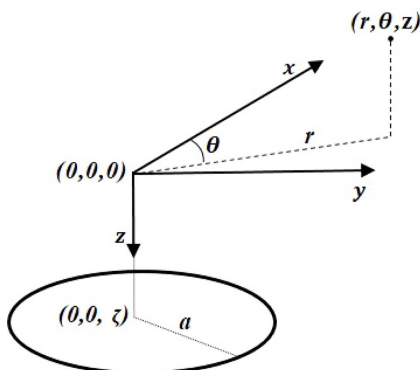


Fig. 1. Geometry of the circular disk.

송 관계식(Poisson's relation)으로 변환하여 유도한다 (Blakely, 1996). Fig. 1은 원판형 이상체의 모식도이다.

원판형 이상체의 z-축 방향 대칭성을 이용하여 원통 좌표계에서 측정점  $(r, \theta, z)$ 에서 중력 변화율 텐서( $g_{ij}$ )를 구한 후 (Rim, 2020), 포아송 관계식을 이용하여 벡터 자력을 유도한다. 식 (1)에서  $G$ 는 중력상수,  $\sigma$ 는 원판형 이상체의 면밀도에 해당한다. 측정점에서 벡터 자력을 표현하기 위해서 북쪽이 x축, 동쪽이 y축, 깊이 방향이 z축인 오른손 직교 좌표계를 이용한다.

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \frac{1}{G\sigma} \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{xz} & g_{yz} & g_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

식 (1)에서 자화 벡터  $(m_x, m_y, m_z)$ 는 식 (2)와 같다.

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cos I \cos D \\ m \cos I \sin D \\ m \sin I \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서  $(m, I, D)$ 는 각각 자화 강도, 복각, 편각이다.

원판형 이상체의 중력 변화율 텐서(Rim, 2021)은 원판형 이상체의 축 방향 대칭성을 고려하여 원통 좌표계를 기반으로 유도되었다. 포아송 관계식인 식 (1)에 기존 중력 변화율 텐서를 대입하여 벡터 자력을 식 (3)~(5)와 같이 유도한다.

$$B_x = 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} & \left\{ -\cos^2 \theta I(1, 0; 1) + \frac{1}{r} (2\cos^2 \theta - 1) I(1, 1; 0) \right\} m_x \\ & + \sin \theta \cos \theta \left( -I(1, 0; 1) + \frac{2}{r} I(1, 1; 0) \right) m_y - \cos \theta I(1, 1; 1) m_z \end{aligned} \right] \quad (3)$$

$$B_y = 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} & \sin \theta \cos \theta \left( -I(1, 0; 1) + \frac{2}{r} I(1, 1; 0) \right) m_x \\ & + \left\{ -\sin^2 \theta I(1, 0; 1) + \frac{1}{r} (2\sin^2 \theta - 1) I(1, 1; 0) \right\} m_y \\ & - \sin \theta I(1, 1; 1) m_z \end{aligned} \right] \quad (4)$$

$$B_z = 2\pi a \Delta \zeta \left[ -\cos \theta I(1, 1; 1) m_x - \sin \theta I(1, 1; 1) m_y + I(1, 0; 1) m_z \right] \quad (5)$$

여기서  $a$ 는 원판형 이상체의 반지름,  $\Delta \zeta$ 는 얇은 두께에 해당한다. 식 (3)~(5)에서  $I(\mu, \nu; \lambda)$ 는 립슈츠-한켈(Lipschitz-Hankel) 적분인데 다항식과 축 대칭함수인 베셀 함수의 곱이 포함된 적분으로 표현되고 축 방향 대칭성을 가지는 적분에서 유용하다 (Eason *et al.*, 1955). 이 논문에서 필요한 립슈츠-한켈 적분 식들은 부록에 정리하였다. 벡터 자력 식에 포함된 삼각 함수는 관측점의 좌표를 표시하고 이를 직교 좌표계로 표현하면 식 (6)이다.

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r}\end{aligned}\quad (6)$$

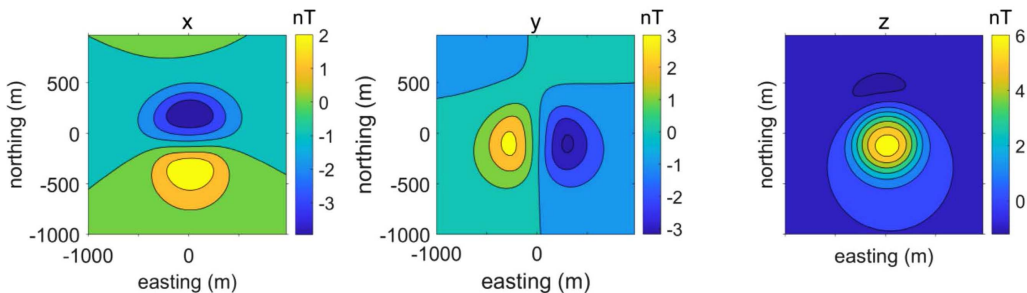
### 원판형 이상체의 자력 변화율 텐서

자력 변화율 텐서는 벡터 자력을 직교 좌표계에서 미분하여 유도한다. 주어진 자력 반응식이 원통 좌표계를 기본으로 유도 되었으므로 직교 좌표계의 미분을 식 (7)과 같이 원통 좌표계로 표현하여 미분한다(Arfken *et al.*, 2012).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}\quad (7)$$

식 (7)로 벡터 자력을 미분하여 원판형 이상체에 대한 자력 변화율 텐서를 식 (8)~(13)와 같이 유도한다.

$$\begin{aligned}B_{xx} &= 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} &\cos \theta \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 \theta I(1,1;2) + \frac{1}{r} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &-\frac{2}{r^2} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_x \\ &+ \sin \theta \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 \theta I(1,1;2) - \frac{1}{r} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &+\frac{2}{r^2} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_y \\ &+ \left\{ -\cos^2 \theta I(1,0;2) + \frac{1}{r} (2\cos^2 \theta - 1) I(1,1;1) \right\} m_z \end{aligned} \right] \quad (8) \\ B_{yy} &= 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} &\cos \theta \left\{ \begin{aligned} &\sin^2 \theta I(1,1;2) - \frac{1}{r} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &+\frac{2}{r^2} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_x \\ &+ \sin \theta \left\{ \begin{aligned} &\sin^2 \theta I(1,1;2) + \frac{1}{r} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &-\frac{2}{r^2} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_y \\ &+ \left\{ -\sin^2 \theta I(1,0;2) + \frac{1}{r} (2\sin^2 \theta - 1) I(1,1;1) \right\} m_z \end{aligned} \right] \quad (9)\end{aligned}$$



**Fig. 2.** Magnetic field due to a circular disk with a 300-m radius. It is located on the origin and the depth of the disk is 300 m. The magnetization strength, inclination, and declination of the disk are 100 A/m, 52°, -8°, respectively.

$$B_{zz} = 2\pi a \Delta \zeta \left[ -\cos \theta I(1,1;2) m_x - \sin \theta I(1,1;2) m_y + I(1,0;2) m_z \right] \quad (10)$$

$$B_{xy} = 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} &\sin \theta \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 \theta I(1,1;2) - \frac{1}{r} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &+\frac{2}{r^2} (4\sin^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_x \\ &+ \cos \theta \left\{ \begin{aligned} &\sin^2 \theta I(1,1;2) - \frac{1}{r} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,0;1) \\ &+\frac{2}{r^2} (4\cos^2 \theta - 3) I(1,1;0) \end{aligned} \right\} m_y \\ &- \sin \theta \cos \theta I(1,0;2) m_z \end{aligned} \right] \quad (11)$$

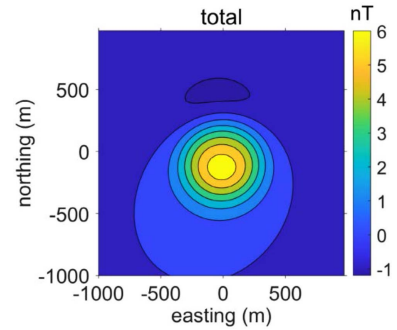
$$B_{xz} = 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} &\left\{ -\cos^2 \theta I(1,0;2) + \frac{1}{r} (2\cos^2 \theta - 1) I(1,1;1) \right\} m_x \\ &+ \sin \theta \cos \theta \left\{ -I(1,0;2) + \frac{2}{r} I(1,1;1) \right\} m_y \\ &- \cos \theta I(1,1;2) m_z \end{aligned} \right] \quad (12)$$

$$B_{yz} = 2\pi a \Delta \zeta \left[ \begin{aligned} &\sin \theta \cos \theta \left\{ -I(1,0;2) + \frac{2}{r} I(1,1;1) \right\} m_x \\ &+ \left\{ -\sin^2 \theta I(1,0;2) + \frac{1}{r} (2\sin^2 \theta - 1) I(1,1;1) \right\} m_y \\ &- \sin \theta I(1,1;2) m_z \end{aligned} \right] \quad (13)$$

자력 변화율 텐서에서 대각 성분 합 ( $B_{xx} + B_{yy} + B_{zz}$ )은 “0” 이고 비대각 성분은 서로 대칭인 성질을 갖으므로 총 5개의 독립 성분을 가진다(Blakely, 1996).

### 자력 및 자력 변화율 텐서 모델링

반지름이 300 m이고 중심이 (0 m, 0 m, 300 m)에 위치한



**Fig. 3.** Total magnetic field due to the same circular disk shown in Fig. 2.

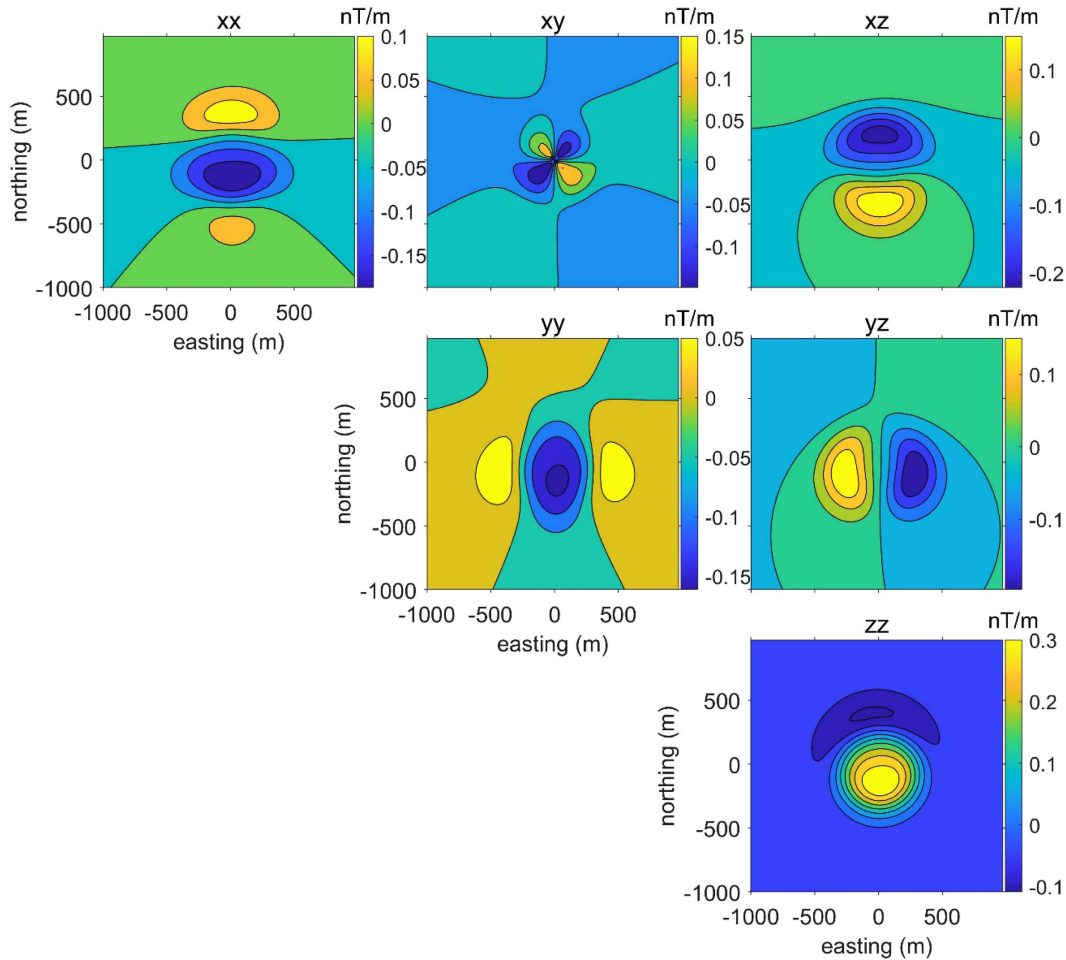


Fig. 4. Magnetic gradient tensor components due to the same circular disk shown in Fig. 2.

원판형 이상체에 대한 벡터 자력(Fig. 2)과 벡터 자력과 지자기장과의 내적으로 정의된 총자력(Fig. 3)의 반응 값을 계산하였다. 자화 방향은 국내에서 대표적인 북각과 편각인  $52^\circ$ ,  $-8^\circ$ 로 지자기장에 의한 유도 자기장을 가정하였다. 원판의 자화 강도는 계산된 반응 값들이 적당한 수치로 표현되도록  $100 \text{ A/m}$ 으로 가정하였다. 자력 변화율 텐서(Fig. 4)도 같은 물성을 가정하고 모델링하였다. 벡터 자력, 총자기 및 자력 변화율 텐서 반응값은 모두 구형 이상체의 반응과 같은 패턴을 보였고 원통형 이상체의 자력(Rim and Eom, 2020)과 자력 변화율 텐서(Rim, 2020)와 같은 양상을 보이지만 원판형 이상체는 두께가 없으므로 크기는 상대적으로 작게 계산된다. 원판형 이상체의 총자력 반응(Fig. 3)은 Singh *et al.*(1979)에서 제시한 예제 그림과 유사한 모습을 보여준다.

## 결 론

원판형 이상체에 대한 자력 및 자력 변화율 텐서 반응식을 유도하였다. 원판형 이상체의 자력은 원판형 이상체에 대한 중력 변화율 텐서 반응식을 포아송 관계식으로 변환하여 유도하

였다. 원판형 이상체의 축 방향 대칭성을 고려하여 원통 좌표계에서 립쉬츠-한켈 적분 형태로 자력 반응을 유도하였고, 현장 탐사에서 주로 총자력이 사용되고 있는 사정을 고려하여 유도한 자력 반응식과 지자기 방향과의 내적으로 구할 수 있는 총자력에 대한 예시도 함께 제시하였다.

자력 변화율 텐서는 유도한 자력 반응식을 미분하여 유도하는데, 자력 반응식이 축 대칭성을 고려한 원통 좌표계 기반 립쉬츠-한켈 적분의 형태이므로 직교 좌표계의 미분을 원통 좌표계의 미분으로 변환한 후 적용하였다.

화산체에서 마그마의 관입이나 축 대칭을 가진 불발탄과 같이 단면은 원형이지만 그 반지름이 변할 가능성이 있는 이상체를 단일 원통형 이상체로 근사하는 것이 불가능한 경우 이 논문에서 유도한 원판형 이상체의 조합으로 이상체를 재구성하여 자력 및 자력 변화율 이상 반응의 해석해를 계산할 수 있다.

## 감사의 글

논문에 대한 상세한 의견을 제시하여 완성도를 높여 주신 익명의 심사위원께 감사드립니다.

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2019R1F1A1055093).

## References

- Arfken, G. B., Weber, H. J., and Harris, F. E., 2012, *Mathematical methods for physicists 7th ed.*, Elsevier.
- Beiki, M., Clark, D. A., Austin, J. R., and Foss, C. A., 2012, Estimating source location using normalized magnetic source strength calculated from magnetic gradient tensor data, *Geophysics*, **77**(6), J23-J37, doi: 10.1190/geo2011-0437.1.
- Blakely, R. J., 1996, *Potential Theory in gravity and magnetic applications*, Cambridge University Press.
- Byrd, P. F., and Friedman, M. D., 1971, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer-Verlag, doi: 10.1007/978-3-642-65138-0.
- Carlson, B. C., 1995, Numerical computation of real and complex elliptic integrals, *Numer. Algorithms*, **10**, 13-26, doi: 10.1007/BF02198293.
- Carlson, B. C., and Notis, E. M., 1981, Algorithm 577: Algorithm for incomplete elliptic integrals, *AMC Trans. Math. Softw.*, **7**(3), 389-403, doi: 10.1145/355958.355970.
- Davis, K., Li, Y., and Nabighian, M., 2010, Automatic detection of UXO magnetic anomalies using extended Euler deconvolution, *Geophysics*, **75**(3), G13-G20, doi: 10.1190/1.3375235.
- Eason, G., Noble, B., and Sneddon, I. N., 1955, On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions, *Philos. Trans. R. Soc. A, Mathematical and Physical Sciences*, **247**(935), 529-551, doi: 10.1098/rsta.1955.0005.
- Heath, P. J., Greenhalgh, S., and Direen, N. G., 2005, Modelling gravity and magnetic gradient tensor responses for exploration within the regolith, *Explor. Geophys.*, **36**(4), 357-364, doi: 10.1071/EG05357.
- Luo, Y., Wu, M., Wang, P., Duan, S., Liu, H., Wang, J., and An, Z., 2015, Full magnetic gradient tensor from triaxial aeromagnetic gradient measurements: calculation and application, *Applied Geophysics*, **12**(3), 283-291, doi: 10.1007/s11770-015-0508-y.
- Munsch, M., Boulanger, D., Ulrich, P., and Bouiflane, M., 2007, Magnetic mapping for the detection and characterization of UXO: Use of multi-sensor fluxgate 3-axis magnetometers and methods of interpretation, *Journal of Applied Geophysics*, **61**(3-4), 168-183, doi: 10.1016/j.jappgeo.2006.06.004.
- Nettleton, L. L., 1942, Gravity and magnetic calculations, *Geophysics*, **7**(3), 293-310, doi: 10.1190/1.1445015.
- Noh, M., Lee, S., Lee, H., and Ahn, T., 2020, A development of fluxgate sensor-based drone magnetic exploration system, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23**(3), 208-214, doi: 10.7582/GGE.2020.23.3.00208. (in Korean with English abstract)
- Oruč, B., 2010, Location and depth estimation of point-dipole and line of dipoles using analytic signals of the magnetic gradient tensor and magnitude of vector components, *Journal of Applied Geophysics*, **70**(1), 27-37, doi: 10.1016/j.jappgeo.2009.10.002.
- Park, G., Lee, B., Kim, I., and Heo, C., 2014, A study on the characteristics of W-Mo ore deposit in Bayan-Onjuul, Mongolia using magnetic data, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **17**(4), 202-208, doi: 10.7582/GGE.2014.17.4.202. (in Korean with English abstract)
- Ren, Z., Chen, H., Chen, C., Zhong, Y., and Tang, J., 2019, New analytical expression of the magnetic gradient tensor for homogeneous polyhedrons, *Geophysics*, **84**(3), A31-A35, doi: 10.1190/geo2016-0470.1.
- Rim, H., 2020, The closed-form expressions of magnetic gradient tensor due to a circular cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23**(2), 67-71, doi: 10.7582/GGE.2020.23.2.067. (in Korean with English abstract)
- Rim, H., and Eom, J., 2020, The closed-form expressions of magnetic field due to a right cylinder, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **23**(1), 50-54, doi: 10.7582/GGE.2020.23.2.050. (in Korean with English abstract)
- Rim, H., 2021, Closed-form expressions of the vector gravity and gravity gradient tensor due to a circular disk, *Geophys. and Geophys. Explor.*, **24**(1), 1-5, doi: 10.7582/GGE.2021.24.1.1. (in Korean with English abstract)
- Salamon, N. J., and Dundurs, J., 1971, Elastic fields of a dislocation loop in a two-phase material, *J. Elasticity*, **1**, 153-164, doi: 10.1007/BF00046466.
- Sarma, B. S. P., Verma, B. K., and Satyanarayana, S. V., 1999, Magnetic mapping of Majhgawan diamond pipe of central India, *Geophysics*, **64**(6), 1735-1739, doi: 10.1190/1.1444678.
- Schmidt, P., Clark, D., Leslie, K., Bick, M., Tilbrook, D., and Foley, C., 2004, GETMAG – a SQUID magnetic tensor gradiometer for mineral and oil exploration, *Explor. Geophys.*, **35**(4), 297-305, doi: 10.1071/EG04297.
- Singh, S. K., Castro, R., and Guzman, M., 1979, Magnetic anomaly of a circular lamina, *Geophysics*, **44**(1), 102-107, doi: 10.1190/1.1440919.
- Szitkar, F., Petersen, S., Tontini, C. F., and Cocchi, L., 2015, High-resolution magnetics reveal the deep structure of a volcanic-arc-related basalt-hosted hydrothermal site (Palinuro, Tyrrhenian Sea), *Geochem. Geophys. Geosyst.*, **16**(6), 1525-2027, doi: 10.1002/2015GC005769.
- Talwani, M., 1973, Computer usage in the computation of gravity anomalies, *Methods in Computational Physics: Advances in Research and Applications*, **13**, 343-389, doi: 10.1016/B978-0-12-460813-9.50014-X.
- Yin, G., Zhang, Y., Li, Z., Fan, H., and Ren, G., 2016, Detection of ferromagnetic target based on mobile magnetic gradient tensor system, *J. Magn. Magn. Mater.*, **402**, 1-7, doi: 10.1016/j.jmmm.2015.11.034.

## 부록: 립쉬츠-한켈(Lipschitz-Hankel) 적분들

원판형 이상체의 자력 및 자력 변화를 텐서 반응식 유도에 필요한 립쉬츠-한켈 적분(Eason *et al.*, 1955, Salamon and Dundurs, 1971)을 정리하였다.

일반적인 형태의 립쉬츠-한켈 적분은 식 (A-1)과 같이 차수를 0 또는 1을 가지는 베셀함수 두 개와 다항식을 곱하여 적분하는 형태를 가진다. 여기서 ( $\mu$ ,  $\nu$ )는 베셀 함수의 차수로써 0 또는 1을 가진다.  $\lambda$ 는 립쉬츠-한켈 적분에서 다항식의 차수에 해당한다.

$$I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(a\eta) J_\nu(r\eta) e^{-\eta(\zeta-z)} \eta^\lambda d\eta \quad (\text{A-1})$$

각 차수 별로 립쉬츠-한켈 적분을 식 (A-2)~(A-6)에 정리하였다.

$$I(1, 1; 0) = \frac{1}{\pi k \sqrt{ar}} \left\{ (2 - k^2) K(k) - 2E(k) \right\} \quad (\text{A-2})$$

$$I(1, 1; 1) = \frac{(\zeta - z)k}{2\pi ar \sqrt{ar}} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 \right) k^{1-2} E(k) - K(k) \right\} \quad (\text{A-3})$$

$$I(1, 0; 1) = \frac{k^3 (a^2 - r^2 - (\zeta - z)^2)}{8\pi a k^2 ar \sqrt{ar}} E(k) + \frac{k}{2\pi a \sqrt{ar}} K(k) \quad (\text{A-4})$$

$$I(1, 1; 2) = \frac{k}{2\pi ar \sqrt{ar}} \left[ \frac{k^2}{k^2} \frac{1}{4ar} \left\{ \frac{(\zeta - z)^2 k^4}{k^2} - a^2 - r^2 \right\} E(k) + \left\{ 1 - \frac{(\zeta - z)^2 k^2 (2 - k^2)}{8ar} \right\} K(k) \right] \quad (\text{A-5})$$

$$I(1, 0; 2) = \frac{(\zeta - z) k^3}{8\pi a^2 r \sqrt{ar} k^2} \left[ \left\{ 3 + \frac{k^4}{4a^2 r^2 k^2} (a^4 - (r^2 + (\zeta - z)^2)^2) \right\} E(k) - \frac{(a^2 - r^2 - (\zeta - z)^2) k^2}{4ar} K(k) \right] \quad (\text{A-6})$$

여기서  $K$ 와  $E$ 는 1차와 2차 완전 타원 적분 (complete elliptic integral first and second kind)이고,  $\Lambda_0$ 는 Heuman 람다 함수 (Heuman's Lambda function)이다 (Byrd and Friedman, 1971).

완전 타원 적분은 식 (A-7)~(A-8)과 같이 정의되고, 완전 타원 적분의 변수들은 (A-9~10)와 같다.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{A-7})$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A-8})$$

$$k = \sqrt{\frac{4ar}{(a+r)^2 + (\zeta - z)^2}} \quad (\text{A-9})$$

$$\phi = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{(\zeta - z)^2}{(a-r)^2 + (\zeta - z)^2}} \right) \quad (\text{A-10})$$

Fig. 1에서 보듯이,  $a$ 는 원판형 이상체의 반지름이고,  $(r, \theta)$ 는 원통 좌표계로 표현한 관측점의 좌표이다. 완전 타원 적분의 계산은 Carlson and Notis (1981)과 Carlson (1995) 방법을 이용하였다.