East Asian Math. J.
Vol. 38 (2022), No. 2, pp. 257-275
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2022.016

초등학생의 연산법칙 이해 수준과 학습 방안 연구[1)]

A Study on the Understanding and Instructional Methods of Arithmetic Rules for Elementary School Students

김 판 수

ABSTRACT: Recently, there are studies the argument that arithmetic rules established by the four fundamental arithmetic operations, in other words, commutative laws, associative laws, distributive laws, should be explicitly described in mathematics textbooks and the curriculum. These rules are currently implicitly presented or omitted from textbooks, but they contain important principles that foster mathematical thinking. This study aims to evaluate the current level of understanding of these computation rules and provide implications for the curriculum and textbook writing. To this end, the correct answer ratio of the five arithmetic rules for 1-4 grades 398 in five elementary schools was investigated and the type of error was analyzed and presented, and the subject to learn these rules and the points to be noted in teaching and learning were also presented. These results will help to clarify the achievement criteria and learning contents of the calculation rules, which were implicitly presented in existing national textbooks, in a new 2022 revised curriculum.

I. 서론

우리나라에서 수학과 교육과정과 수학 교과서에 대한 연구는 광범위하고 지속적으로 이루어져 왔다. 외국의 교육과정 소개, 우리나라와 외국의 교육과정 내용이나 체제 비교, 교육과정별 비교, 교육과정과 교과서 또는 익힘책의 연계성 연구, 그리고 우리나라와 외국의 교과서 비교 등 다양한 형태의 교육과정과 교과서 연구를 쉽게 찾아볼 수 있다. 교육과정과 교과서는 분리하기 힘든 연구 주제이다. 김유경, 방정숙(2017)에 의해 이루어진 최근 7년간의

Received February 11, 2022; Accepted February 21, 2022.
1) 본 연구는 2021년도 부산교육대학교 학술연구과제로 지원을 받아 수행되었음
2010 Mathematical Subject Classification: 97D10, 97D70
Key Words: arithmetic rule, arithmetic operation, operational property, instructional method

초등수학교육 연구동향에서 교육과정 연구가 약 20%에 이를 정도로 많았고, 이 두 주제를 하나의 범주로 둔 것에서도 알 수 있다. 우리나라와 외국의 교육과정 내용을 비교 분석하는 것은 국제적 흐름에 대한 통찰력을 얻을 수 있으나(방정숙 외, 2015) 교과서를 배제한 채 교육과정을 논의하는 것은 현장성이 결여된 논의일 것이다.

흔히 교과서는 교육과정의 성취기준과 학습요소 등과 같은 문서에 기초하여 편찬하기에 교육과정을 구현한 교수·학습 자료로 본다. 그러나 사람들은 문서로 이루어진 교육과정을 읽고 이해하기보다 교과서를 보고 교육과정을 파악하는 것이 더 많은 정보를 얻을 수 있다고 본다. 한편 국내외 교과서 비교 분석을 통해 우리나라 교과서에서 연산의 성질에 대한 학습을 강조한 연구는 드물지 않았다(변희현, 2011; 방정숙·최지영, 2011; 장혜원, 2017; 백대현, 2017). 선우진(2019)은 초등학교에서 연산법칙(교환법칙, 결합법칙, 분배법칙)을 하나의 규칙으로 학습할 기회 제공의 필요성을 역설하였고, 김미환 외(2017)는 중국과 일본의 초등학교 교육과정에 분배법칙이 명문화가 되어 있어 초등학교 수학 교과서에 매우 명확하고 비중 높게 분배법칙을 다루고 있음을 밝히고 있다. 이렇게 연구자들은 우리나라도 연산법칙을 초등학교 교육과정에서부터 명문화하는 방안을 제안하고 있다.

우리나라 초등수학 교과용도서는 검정으로 전환되어 2022년부터 학생들은 새로운 3~4학년 교과서를 접하게 된다. 동일한 교육과정 아래에서 만들어지는 다양한 종류의 교과서에 대한 기대감도 있으나 교육과정에서 언급되지 않은 내용에 대한 여러 가지 해석과 논란이 우려된다. 예컨대 2015 개정 수학과 교육과정의 중등에서는 '교환법칙, 결합법칙, 분배법칙'이 수와 연산 영역의 학습요소로 언급되고 있으나 초등수학 교육과정에서는 이에 관련된 내용을 찾을 수 없다. 중학교 교육과정에 나오는 내용을 초등학교 교과서에서 명시적으로 다루는 데 부담을 느껴 이들 주제를 암묵적 제시하거나 소극적으로 다루고 있다. 예를 들면, 2학년 2학기에서 배우는 곱셈구구에서 곱셈의 교환법칙 활용은 많은 시간을 절약해 준다. 그리고 곱셈구구 수업을 하는 대부분의 교사는 곱셈의 교환성을 활용하는 것을 확인할 수 있다(김판수·김성준·김혜정, 2021). 그러나 현행 교과서에서는 곱셈의 교환성을 이용하여 곱셈구구를 지도하도록 설계되어 있는 것이 아니라 곱셈구구에 대한 본차시 수업을 마친 후 곱셈 교환성의 활용을 다루고 있다.

암묵적으로 다루어지고 있는 학습내용을 교육과정의 성취기준으로 기술하였을 때 부가되는 학습 부담에 대한 우려가 있다. 학습자의 학습 부담 경감은 2015 개정 교육과정의 개발 방향 중 하나였으며 지금까지의 진행된 여러 번의 교육과정 개정에서 학습 내용의 감축은 지속적으로 이루어져 왔다. 우리나라 초등학교 수학과 교육과정에 명시되지 않은 연산규칙에 대한 성질을 학생들은 어느 정도 알고 있는지를 이해한다면 새로 개정되는 2022 개정 수학과 교육과정에서 학습 부담을 주지 않으면서 이를 명문화할 수 있는 근거를 마련하게 될 것이다. 교육의 목표가 결정되고 교육과정이 정해지면 그에 따른 교과서 개발과 학습이 이루어지는 것이 순서일 것이나 잠재적 교육과정(hidden curriculum)의 가치를 인정하는 사람들의 입장은 다르다. 이제 교육과정은 '의도된 계획'에서 '전개된 활동'이나 '실현된 결

과'까지를 포함하는 개념으로 그 의미가 확대되었다. 개발 패러다임에서 교육과정의 전부를 가리키는 것으로 이해되었던 의도된 계획, 즉 작용 전 양상은 교육과정의 하위 영역 중의 하나인 '계획된 교육과정'으로 간주되기 시작하였고, 의도된 계획을 실천하는 행위인 상호작용 양상은 '전개된 교육과정'으로, 교육적 행위가 이루어진 다음에 나타나는 결과인 작용 후 양상은 '실현된 교육과정'으로 개념화되었다(김재춘 외, 2017). 잠재적 교육과정 연구를 통해 밝혀진 사실들이 이후의 교육 계획에 반영됨으로 학교 교육과 교육과정의 효율화를 제고하는 데 기여했다(김재춘, 2002).

본 연구의 취지는 수학 수업의 교실에서 일어나고 있는 교육적 행위로부터 교육과정과 교과서를 보완하고 개선하는 데 있다. 초등수학에서 자연수의 사칙연산이 비중 있게 다루어지고 있다. 연산의 성질을 다루는 내용은 기초적인 대수적 사고 개발에 중요하며, 수학과 교육과정 전반에 걸쳐 지속적으로 다루어야 할 핵심 주제로 강조되고 있다(최지영·방정숙, 2011). 이에 본 연구는 자연수의 사칙연산에서 성립하는 3가지의 법칙에 대한 학생들의 이해 수준을 조사하여 새로운 교육과정 개발과 교과서 편찬에 도움을 주고자 한다. 이에 본 연구에서는 다음과 같은 연구문제를 설정한다.

첫째, 우리나라 학생들을 연산법칙(덧셈 교환법칙, 곱셈 교환법칙, 덧셈 결합법칙, 곱셈 결합법칙, 분배법칙)에 대해서 어느 정도 이해하고 있는가?

둘째, 연산 규칙에서 발생하는 오류는 어떤 것들이 있으며, 이들 법칙을 적용할 학년과 지도방안은 무엇인가?

II. 이론적 배경

초등학교에서 다루는 사칙연산은 수에 작용하는 일종의 이항연산이다. 말하자면, 세 개의 집합 A, B, C에 대해서 곱집합 A×B에서 C로의 사상을 말한다. 곱집합 A×B의 원소를 순서쌍 (a, b)으로 나타내므로 A×B에서 C로의 사상은 순서쌍 (a, b)를 C의 어떤 원소 c에 대응시키는 방법이다. 주어진 순서쌍을 원소 c에 대응시키는 방법은 많을 것이다. 범자연수집합에서 덧셈은 (a, b)를 a+b에 대응시키고, 곱셈은 (a, b)를 a×b에 대응시킨다. 모든 연산은 제각각 연산 규칙을 갖는다. 연산 규칙은 연산이 작용하는 원소들 간의 관계를 특징적으로 그려낸 것이 대수적 구조이며, 이는 이후 상급학교에서 다루게 되는 대수적 사고의 기초가 된다.

초등학교에서의 대수는 중학교와 같은 상급학교에서 보다 정교화된 대수 학습의 준비과정으로의 이해와 경험을 쌓도록 해야 한다(NCTM, 2000). 여러 나라의 교육과정을 동시에 비교 분석한 연구(방정숙 외, 2015)에서 한국, 중국, 일본, 미국의 수학과 교육과정에서 학년 구성 및 내용 영역을 잘 알 수 있도록 조사한 <표 1>을 보면, 우리나라가 대수 영역이 다소 덜 강조되는 것을 알 수 있다. 여러 면에서 우리나라와 비슷한 조건을 갖추고 있는 일본의 교육과정에서는 연산의 성질을 알아보고, 그것을 사용하여 계산 방법을 생각

하거나 그 결과를 확인하는 데 활용하도록 하고 있다(2008년 고시, p.37). 그리고 2017년에 고시한 ‘소학교학습지도요령’ 산수편에서는 연산의 성질에 관한 내용들이 명시적으로 기술되어 있음을 확인할 수 있다.

<표 1> 주요 나라의 교육과정 영역(방정숙 외, 2015)

	미국		중국 (2011년)	일본[2] (2008년)
	PSSM	CCSSM(K-5학년)		
내용영역	• 수와 연산 • 대수 • 기하 • 측정 • 자료 분석과 확률	• 연산과 대수적 사고 • 수와 연산(십진법) • 측정과 자료 • 기하 • 수세기와 기수(유치원) • 수와 연산(분수)(3-5학년)	• 수와 대수 • 도형 및 기하 • 통계와 확률 • 종합과 실천	• 수와 계산 • 도형 • 양과 측정 • 수량관계

한편 초등학교 수와 연산 영역을 중심으로 외국의 교육과정과 비교한 연구는 많지 않았다. 안지영 외(2014)가 미국의 CCSSM(Common Core State Standards for Mathematics)과 우리나라 교육과정을 분석한 후 내린 결론을 보면 연산과 관련된 내용은 한국이 미국보다 한두 학년 정도 이르지만 CCSSM에서는 수를 다루고 다양하게 표현하는 것(estimate, model, compare, order, represent)을 기본적으로 강조하고 있다. 최지영·방정숙(2011)은 2007 개정 교육과정에 따른 1~4학년 교과서에서 연산의 성질과 관계를 분석했다. 변희현(2011)은 두 나라의 초등교과서에서 분배법칙의 개념을 비교 분석하여 한국에 비해 일본의 교과서가 분배법칙과 관련된 계산 규칙의 일반화 정도에 차이가 있음을 밝혔다.

최지영·방정숙(2011)은 초등학생들이 연산법칙에 대한 이해 분석을 위해 2, 4, 6학년을 대상으로 덧셈과 곱셈의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 구체적인 수 상황에서 알맞은 식을 찾을 수 있는지, 연산법칙을 적용하여 □의 값을 구할 수 있는지, 그리고 임의의 수 상황에서 알맞은 식을 구할 수 있는지에 대한 반응 분석을 하였다. 이들 연구는 본 연구와 중첩되는 부분이 있으나 본 연구와 같이 연산 규칙을 교육과정과 교과서 개선에 주목적을 둔 것은 아니었으며, 더욱이 연산규칙을 특히 많이 공부하는 3학년이 대상에서 제외되었다. 그리고 방정숙·최인영(2016)의 연구에서는 3학년을 대상으로 대수적 사고 실태를 조사하였으나 본 연구의 방향과는 다르다.

지금까지의 연구들은 교육과정이나 교과서의 비교, 연산규칙에 대한 학생들의 이해 수

2) 2017년에 고시한 일본의 소학교학습지도요령해설 산수편에서는 영역의 구분을 A:수와 연산, B:도형, C:측정(1~3학년), 변화와 관계(4~6학년), D:데이터의 활용으로 두어 2008년에 고시한 것과는 차이는 있으나 영역은 4개로 같다.

준, 교과서에서 다루는 등식이나 연산 규칙에 대한 자료 분석 등이다. 이들 연구 결과는 각각 독립된 전문성을 가진 것이나 이들을 통합적으로 관찰한 연구는 없었다. 본 연구에서는 연산을 배우는 학년과 연산법칙의 수준을 설정하여 학생들의 이해 정도를 알아보고 지도 방안을 제시한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

초등학생들은 연산의 성질을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 지방의 대도시에 있는 5개의 초등학교, 20개 학급, 398명을 대상으로 삼았다. COVID-19로 인하여 자료수집이 1년간의 시간을 두고 <표 2>와 같이 2차례 이루어졌다. 5개의 연산규칙에 대해 교과서에 제시된 학습의 위계를 고려하여 2~3개 학년에 걸쳐 조사를 했으며, 각 규칙별 그리고 학년별로 2개 학급을 기준으로 삼았다. 덧셈의 교환법칙은 2개 학교 2개 학년에서 4개 학급, 곱셈의 교환법칙은 2차에 걸쳐 2개 학교 3개 학년에서 4개 학급, 덧셈의 결합법칙과 곱셈의 결합법칙은 2차 조사에서 각각 2개 학년에서 4개 학급을 선정했으며, 분배법칙은 2차 조사에서 2개의 학년에 걸쳐 4개 학급을 대상으로 하였다.

<표 2> 연구 대상과 자료 수집

인원수 학년	덧셈 교환법칙	곱셈 교환법칙	덧셈 결합법칙	곱셈 결합법칙	분배법칙	계(명)
1학년	20(1차), 22(2차)					42
2학년	38(2차)	20(1차)	37(2차)			95
3학년		20(2차)	46(2차)	30(2차)	46(2차)	142
4학년		49(2차)		27(2차)	43(2차)	119
계(명)	80	89	83	57	89	398

2. 질문지 개발

질문지에 사용된 문제는 5종으로 덧셈과 곱셈의 교환법칙, 분배법칙, 덧셈과 곱셈의 결합법칙으로 구성하였다. 각각의 규칙에 대해 3가지 수준으로 구분된 10문제 내외를 개발하였다. 3가지 수준이란 <표 3>과 같이 계산이 가능하여 계산으로 알 수 있는 수준, 구체적인 수에서 계산 원리를 일반화할 수 있는 수준, 상징적인 기호로 계산 원리를 이해하는 수준으로 구분하였다. '계산 수준'에서는 모든 연구 대상이 계산으로 해결할 수 있는 쉬운

문항으로 구성하여 등식의 이해 여부, 학습 부진과 같은 연구 대상의 적절성 여부를 판단하는 데 사용하였다. ‘일반화 수준’은 법칙의 규칙이나 원리를 이해하고 일반화할 수 있는지를 알아보기 위해 구성한 문제로 학교 교육과정만을 이수한 학생은 쉽게 해결할 수 없는 문제이다. 예를 들면, 2학년은 <표 3>의 ‘구체적 수준’에 있는 27+6과 같은 문제해결을 학습했으나 1학년은 학교에서 배우지 않았다. ‘상징적 수준’은 수가 아니라 기호로 형식화된 수준에서 규칙의 일반화 수준을 알아보는 문제로 구성하였다. 질문지 개발 단계에서 문항 구성의 수준과 타당성을 위해 실험에 참여한 3개 학교 교사들과 논의하였다.

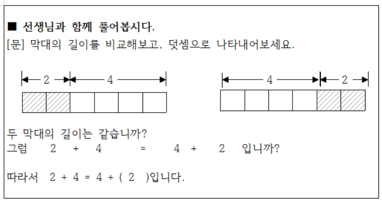
<표 3> 질문지 개발과 문제 예시

문제의 수준		덧셈 교환성	
계산 수준		[문1] 3+4 = 4+( )	[문2] 2+7 = ( )+2
일반화 수준	구체적 수준	[문6] 27+6 = 6+ ( )	[문7] 24 + 5 = ( )+24
	상징적 수준	[문8] 8 + ■ = ■ + ( )	[문9] ▲ + 9 = 9 + ( )
		[문10] △ + □ = ( ) +( )	

3. 자료의 수집과 분석

모든 문항은 단답형으로 구성하였다. 검사의 진행은 각 학급별로 담임교사가 맡아 9월 넷째 주에서 10월 둘째 주 사이에 이루어졌다. 교사는 학생들이 문제를 해결하기 전에 [그림 1]과 같은 ‘예시 문제’를 보고 어떻게 푸는지 설명하는 시간을 10분 정도 가졌다. ‘예시 문제’는 ‘계산 수준’의 문제이며 해당 규칙의 원리를 추론할 수 있도록 구성하여 그 이후에 나오는 수준의 문제에서 정답을 어느 정도 맞힐 수 있도록 하였다.

각 질문지에 답하는 학생에게 10분의 시간을 주었다. 질문지의 분석에서는 영재교육 대상자, 학습부진은 제외했으며 검사 실시 후 검사를 실시한 교사와 면담을 하여 학생들의 이해 정도와 오답에 대해 알아보았다. 본 연구자가 질문지의 유형에 따른 정답 비율과 학생의 수준을 파악하고 오답의 유형을 분석하였다.



[그림 1] 질문지: 선생님과 함께 풀기

Ⅳ. 연산 규칙에 대한 이해도 분석과 지도 방안

여기서는 다섯 가지 연산 규칙에 대한 학생들의 이해 정도를 분석하여, 분석 결과를 토

대로 지도 시기와 지도 방안을 제안한다. 본 논문에서는 연산 규칙을 지도하는 여러 가지 방법을 제안하는 것이 아니라 현재의 교육과정에 따라 편찬된 초등수학 교과서의 학습 계열을 기준으로 지도 방안을 제안한다.

1. 덧셈의 교환법칙

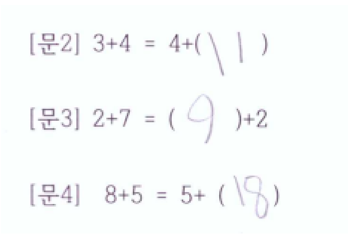
가. 덧셈 교환법칙에 대한 이해도 분석

현재 수학 교과서에서는 덧셈의 교환성을 1학년 2학기 교과서(p. 80-81)에서 다루게 되는데, 이 차시에서는 이어세기로 10이 넘는 덧셈식 표현하기와 두 수를 바꾸어 더해도 합이 같음을 이해하는 활동으로 구분되어 있다. 즉, 2가지 주요 활동 중 하나가 두 수를 바꾸어 더해도 결과가 같음을 이해하는 학습이다. 조사 시점에 1학년(42명)은 덧셈의 교환성을 배우지 않았으나 2학년(38명)은 이를 이미 배운 학생들이었다. 이들 연구 대상자는 3가지 수준의 덧셈 교환성에 대한 질문지에 답하기 전에 덧셈의 교환성에 대한 계산 수준의 문제 하나([그림 1])를 선생님과 함께 풀어본 후에 나머지 문제를 해결하도록 하였다. 수준별로 채점을 하였으며, 각 수준에 있는 문항에서 단순 실수로 보이는 문항을 제외하였다. 질문지에 대한 연구 대상자의 정답 비율은 <표 4>와 같다.

<표 4> 덧셈의 교환법칙 정답 비율

문제 유형		문항 수	정답수와 빈도(백분율)	
			1학년	2학년
계산 수준		3	30(71.4%)	33(86.8%)
일반화 수준	구체적 수준	2	27(64.3%)	34(89.5%)
	상징적 수준	3	19(45.2%)	21(55.3%)
전체 연구 대상자(명)		9	42명	38명

1~2학년 교과서에서는 두 수를 바꾸어 더해도 값이 같다는 것을 3+4=4+3과 같은 등식으로 나타내는 예를 발견할 수 없으며, 3+4=1+6이나 3+4=9-2와 같이 두 수의 합과 차를 등식(=)의 양쪽에 나타내는 예시도 찾을 수 없었다. 이에 대한 선행연구가 있는데, 기정순과 정영옥(2008)의 연구에서 덧셈과 뺄셈이 있는 교과서(7차 교육과정에 따른 교과서)를 분석해보니 등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥은 전체의 0.3%뿐이며 98.6%가 등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥으로 이루어져 있었다.



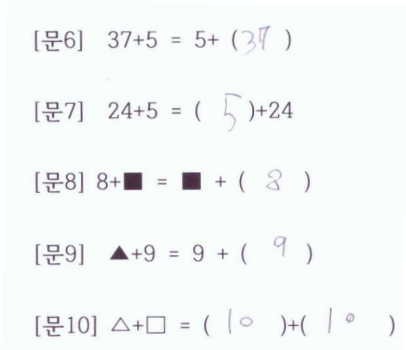
[그림 2] 계산 수준에서 오류

2009 개정 교육과정에 따른 전체 교과서를 분석한 연구에서는 A형(9=3+3+3, 3=9÷□와 같이 우변에 한 종류의 계산 기호와 2개 이상의 수 또는 변수 또는 명수가 있는 등식)은 1~2학년군의 교과서에서는 1건, 3~4학년군에서는 4건뿐이었다. 2종류 이상의 연산이 등식의 오른쪽에 나오는 식은 없었다(고준석, 최종현, 이승은, 박교식, 2016). 그럼에도 불구하고 2+7=( )+2와 같은 식에서 1~2학년의 정답 비율이 높게 나왔으며, 37+5=5+( )와 같은 구체적 수준의 문제에서도 상당히 높은 정답 비율을 보이고 있다. 한편 학생들의 오류를 분석한 결과 대부분의 오류는 [그림 2]와 같이 등식의 의미를 잘 파악하지 못해서 나타난 오류였다. 이는 3학년을 대상으로 한 방정숙·최인영(2016)의 연구결과(정답이 67%, [문4] 형태의 오류가 29.4%)와 거의 일치하며, 기정순, 정영옥(2008)의 연구에서 4학년에서도 덧셈과 뺄셈에서 등호를 결과로 인식(32%)하거나 모든 수를 연산하는 오류(12.7%)가 전형적인 오류라는 결과와 일치하였다.

나. **덧셈 교환법칙 지도 방안**

위 결과를 바탕으로 다음과 같은 지도 방안을 제시한다.

첫째, 덧셈의 교환법칙은 1학년에 지도할 수 있으며, 구체적 수준에서 일반화도 가능함을 확인할 수 있다. 분석 결과에 의하면 계산 수준의 문제를 해결한 학생은 대부분 [그림 3]의 6~7번 문제와 같이 구체적 수준에서 원리를 이해하는 것으로 나타났다. 2학년은 상징적 수준의 문제([그림 3]의 8~10번)에서 상징 기호로 나타내는 것에는 한계가 있는 것으로 나타났다. 그러므로 1학년에서 덧셈 교환법칙의 원리를 이해하는 지도가 가능하나 상징 기호의 사용은 바람직하지 않고 이는 2학년 이후에서 가능할 것으로 보인다.



[그림 3] 상징적 수준에서 오류

둘째, 교과서에서 덧셈의 교환법칙을 보다 명시적으로 지도할 수 있도록 구성할 필요가 있다. 덧셈 계산을 학습하는 차시와 연산의 성질을 다루는 차시를 분리하여 독립 차시를 구성해야 할 것이다. 또한 '두 수를 바꾸어 더하면 합이 어떻게 될까?' 등과 같이 차시 제목도 학습 목표에 보다 더 가깝게 설정할 수 있을 것이다.

셋째, 여러 가지 시각적 모델을 사용하여 직관적 이해가 가능한 활동으로 구성할 수 있다. 현재 교과서와 같이 3+8의 계산을 이어세기를 통해 답을 구해서 확인할 수도 있겠지만 덧셈 교환법칙의 일반화를 위해서는 여러 가지 직관적 모델을 사용할 것을 추천한다. 아래와 같은 수모형이나 수띠를 이용하여 3+8과 8+3의 결과가 같다는 것을 인식하도록 할 수 있다.

	3					8				

				8					3	

넷째, 등식에 대한 이해도 병행되어야 할 것이다. 이를 테면 □+3=7, 7=□+3, 3+4=□+3, 3+4=2+□와 같은 문제를 1~2학년에 걸쳐서 점진적으로 제시해야 할 것이다. 그리고 등식에 대한 인식과 이해에 대한 학습은 좌변과 우변의 식 전체를 조망하는 관점에서 덧셈과 곱셈의 교환법칙을 다루는 연습문제를 통해서 이루어질 수 있을 것이다.

2. 곱셈의 교환법칙

가. 곱셈 교환법칙에 대한 이해도 분석

곱셈을 배우는 2~4학년을 대상으로 곱셈 교환법칙의 이해도를 알아보는 3가지 수준의 문제로 구성된 질문지로 조사를 하였다. 질문지 분석에 의하면 <표 5>와 같이 2학년에서 계산적 수준과 구체적 수준에서의 원리 이해가 가능했으며, 기호를 사용한 상징적 수준의 문제를 맞힌 비율도 상당히 높은 것으로 나타났다.

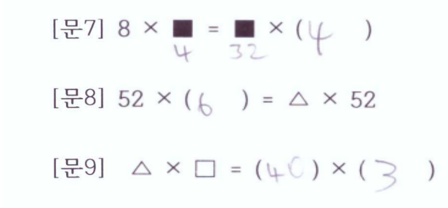
<표 5> 곱셈의 교환법칙 정답 비율

문제 유형		문항 수	정답수와 빈도(백분율)		
			2학년	3학년	4학년
계산 수준		3	19(95%)	19(95%)	49(100%)
일반화 수준	구체적 수준	3	19(95%)	19(95%)	49(100%)
	상징적 수준	3	13(65%)	16(80%)	47(95.9%)
전체 연구 대상자(명)		9	20	20	49

덧셈 문제에서는 2+7=(9)+2와 같은 형태의 오답이 많았으나 곱셈의 교환성 문제에 대해서는 계산 수준과 구체적 일반화 수준에서 2×7=(14)×2 형태의 오류를 찾을 수 없었다. 그러나 상징적 수준의 문제에서 나타나는 오류에서는 덧셈과 같이 □안에 어떤 구체적인 숫자를 넣어 계산하는 등의 오류를 범했다([그림 4] 참조).

나. 곱셈 교환법칙 지도 방안

2학년 1학기에 곱셈 개념을 도입하고, 2학년 2학기에는 곱셈구구를 다루며, 3학년과 4학년에서 두 자리 수와 한 자리 수의 곱셈, 두 자리 수끼리의 곱셈, 세 자리 수와 두 자리 수



[그림 5] 상징적 수준의 오류

의 곱셈을 단계적으로 익힌다. 곱셈의 교환법칙은 2학년 2학기 2단원 10차시(교과서 p.50∼51)의 세 번째 활동 '5×7과 7×5를 알아봅시다.'에서 다루어진다. 덧셈의 교환성을 설명하는 차시처럼 본 차시에서도 곱셈구구의 구성 원리를 알아보는 활동과 곱셈의 교환성을 알아보는 활동으로 구성되어 있다. 그리고 4학년 1학기 세 자리 수와 두 자리 수의 곱셈을 배울 때까지 곱셈의 교환성 원리를 이용하거나 언급하는 예를 찾을 수 없다. 그럼에도 곱셈의 교환성에 대한 학생들의 인식이 높은 것은 곱셈을 다루는 단원이 2학년 1학기부터 5개 학기동안 단계적으로 지속적으로 나타날 뿐만 아니라 곱셈구구에서 교환법칙을 충분히 활용하기 때문으로 해석된다. 이에 우리는 다음과 같은 지도 방안을 제언한다.

첫째, 곱셈의 교환법칙의 원리를 2학년에서 다룰 수 있고, 언어적 일반화도 가능할 것으로 보인다. 그러나 상징 기호를 사용한 학습은 3학년에서 충분히 가능할 것으로 예상된다(<표 5> 참조).

둘째, 2학년 2학기 곱셈구구를 다루는 단원에서 곱셈의 교환성을 보다 적극적으로 다룰 필요가 있다. 현재 교과서에서는 9단까지의 곱셈구구를 다룬 후에 '곱셈표를 만들어 볼까요.' 차시(교과서 p.50∼51)에서 다루고 있다. 학생들이 곱셈의 교환법칙을 더 일찍 발견하게 하고, 이를 활용하여 곱셈구구를 효율적으로 기억하도록 도움을 줄 필요가 있다. 앞에서 언급한 것처럼 교과서에서 곱셈의 교환성을 소개하기 전에 교사는 곱셈의 교환법칙을 사용하여 곱셈구구를 지도한다는 점을 참조해야 할 것이다.

셋째, 정규 교육과정에서 △×□=△×○와 같은 곱셈 교환성을 기호적으로 다루고 있지 않음에도 불구하고 현재 4학년 학생들의 대부분이 <표 5>와 같이 상징적 수준에서 이 원리를 알고 있는 것으로 나타났으므로 3∼4학년군에서 곱셈의 교환법칙을 다룰 수 있도록 수학과 교육과정에서 명시하고 교과서에도 이와 같은 원리를 다루는 차시를 배정하여도 무리가 없음을 확인할 수 있다.

3. 덧셈 결합법칙

가. 덧셈 결합법칙에 대한 이해도 분석

자연수의 덧셈을 3학년까지만 배우게 되어 2학년(37명)과 3학년(46명)을 대상으로 조사를 하였다. 선생님과 함께 계산 수준의 문제를 풀어보고 질문지를 해결한 응답자의 정답 비율은 <표 6>과 같다. 계산 수준의 문제에서 2학년과 3학년의 정답 비율은 각각 약 35%, 약 61%로 나타났으며 구체적 수준에서는 각각 약 30%와 41%로 조금 낮아졌다. 그

러나 상징적 수준에서는 정답을 맞힌 학생이 거의 없었다. 이에 현행 교과서를 배운 학생들이 덧셈의 결합법칙에서 등식 이해도가 매우 낮음을 알 수 있다.

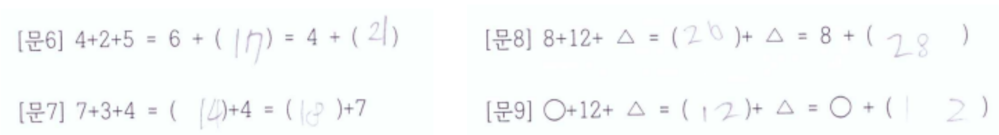
본 연구에서 사용한 구체적 수준의 문제와 유사한 문제가 최지영·방정숙(2011)의 연구에서 사용되었는데, 그때 2학년과 4학년, 6학년이 각각 52.6%, 77%, 92.5%의 정답 비율을 나타내었다. 이 연구에서 정답 비율이 본 연구에 비해 더 높게 나온 이유는 본 연구에서는 단답형으로 2개 문항, 4개의 답으로 구성한 것에 비해 그들의 연구에서는 4지 선택형으로 하나의 문항으로 구성한 탓이 큰 것으로 풀이된다. 본 연구에서 정답을 맞힌 학생은 일반화 수준에서 덧셈 결합법칙의 원리 이해를 하고 있는 것이다.

<표 6> 덧셈의 결합법칙 정답 비율

문제 유형		문항 수	정답자 수와 빈도(백분율)	
			2학년	3학년
계산 수준		4	13(35.1%)	28(60.9%)
일반화 수준	구체적 수준	2	11(29.7%)	19(41.3%)
	상징적 수준	2	2(5.4%)	1(2.2%)
총 문항 수/ 총 대상자		8	37	46

덧셈의 결합법칙에서 나타나는 오류는 덧셈의 교환법칙에서 나타난 것처럼 등식 이해에 대한 오류가 가장 큰 것으로 조사되었다. 전형적인 오류는 괄호 앞에 있는 수의 전부나 또는 2개를 더하여 ( )안에 넣은 답이었다. 예를 들면, 계산 수준([그림 5])과 구체적 수준([그림 6])의 원리 이해에서 나타나는 3+4+6=(13)+6, 7+3+4=(14)+4=(18)+7과 같은 오류들이다.

[그림 6] 계산 수준에서의 오류



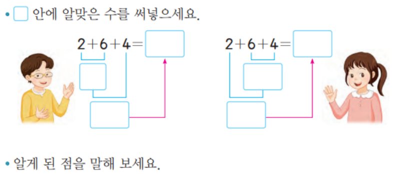
[그림 7] 일반화 수준에서 오류

오류의 유형이 1~2학년을 대상으로 한 덧셈 교환성에서 나타난 것과 유사하나 2~3학년을 대상으로 조사한 덧셈 결합성에서 오류가 더 높게 나타났다. 그 이유는 덧셈 결합성

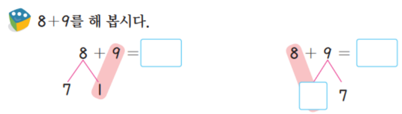
에 사용된 수가 더 많아 등식의 전체 구조를 인식하는 데 따른 어려움 때문으로 보인다.

나. 덧셈 결합법칙 지도 방안

학생들이 학교에서는 덧셈의 결합법칙을 학습하지는 않으나 1학년 2학기에서 10을 만들어 더해보는 활동([그림 7])과 수를 가르기하여 받아올림이 있는 덧셈([그림 8])과 뺄셈을 배우는 단원에서 수를 더하는 순서와 그에 따른 결과를 학습한 바 있다.



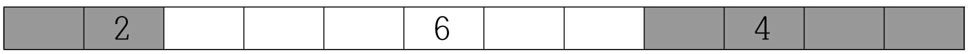
[그림 8] 1학년 2학기 교과서(p.88)



[그림 9] 1학년 2학기 교과서(p.123)

그리고 2학년 1학기에서는 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈에서 28+16-14와 같은 세 수의 계산에서 왼쪽부터 차례로 더하는 계산 순서를 학습하나 그 이후 덧셈이 이루어지는 4학년 1학기까지의 교과서에서 덧셈의 결합성과 관련된 다른 활동을 찾을 수 없었다. 그리고 자연수의 혼합계산을 다루는 5학년 1학기까지는 괄호 ( )를 사용한 수식 표현도 나타나지 않았다. 이는 현재의 교과서 구성에서 학생들이 덧셈의 결합법칙을 형식적으로 이해하는 데 무리가 따른다는 것을 암시한다. 우리는 다음과 같은 방안을 제안한다.

첫째, 덧셈의 결합법칙은 3학년 또는 그 이후에 학습해야 할 것이다. 특히 상징을 사용한 일반화는 4학년이 되어야 가능할 것이다. 한편 덧셈 결합법칙의 원리 이해를 위한 학습 모델로 수모형이나 수띠를 사용한다면 2+6+4의 결과가 덧셈을 하는 순서와 상관없이 일정하다는 추론을 하는데 도움이 될 것이다. 적절한 모델을 사용한 결합법칙의 원리 이해는 2학년이면 가능할 것으로 보이나 이를 언어적으로 또는 수식으로 표현하는 방식에는 다양한 수준이 있어 2학년부터 점진적으로 학습해야 될 것이다.



둘째, 본 연구에서 나타난 학생들의 오류는 등식의 구조를 파악하지 못한 것에 기인한 것이 가장 많았다. 등호 기호의 의미를 아는 것은 등식의 구조를 파악하고 연산의 성질을 이해하는 데 도움이 되므로 수학 수업에서 의도적으로 활동을 구성하는 것이 필요하다(방정숙·최인영, 2016). 등호의 의미와 대수식의 구조를 파악할 수 있도록 여러 가지 활동을 하도록 제안한다.

셋째, 4학년 정도에서는 괄호를 사용하여 세 수의 덧셈의 순서를 (2+6)+4와 같은 식으로 나타낼 수 있기를 제안한다. 이런 표현은 덧셈의 교환법칙을 보다 용이하게 설명할 수

있다.

4. 곱셈 결합법칙

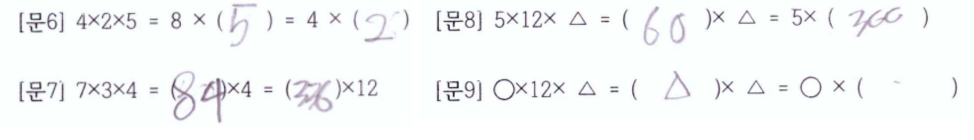
가. 곱셈 결합법칙에 대한 이해도 분석

곱셈의 결합법칙에 대한 질문지에 대해서도 덧셈의 결합법칙과 유사한 방법으로 먼저 계산 수준의 문제를 선생님과 함께 풀어본 후에 3학년(30명)과 4학년(27명)이 질문지를 해결하였다. 그들의 답지를 분석한 것이 <표 7>과 같다. 3학년에서는 교환법칙뿐만 아니라 결합법칙에서도 등식을 인식하는 데 어려움이 있는 것으로 나타났다. 이에 비해 4학년은 상징적 수준에서도 50%가 넘는 정답 비율을 보이고 있다.

<표 7> 곱셈의 결합법칙 정답 비율

문제 유형		문항 수	정답자 수와 빈도(백분율)	
			3학년	4학년
계산 수준		4	12(40.0%)	23(85.2%)
일반화 수준	구체적 수준	2	9(30.0%)	20(74.1%)
	상징적 수준	2	1(3.3%)	14(51.9%)
총 문항 수/ 총 대상자		8	30	27

곱셈 결합성에 대한 문제에서는 오답에 대한 반응들이 상당히 다양하게 나타났다. 이에 대한 구체적인 조사나 연구의 필요성이 제기되지만 본 연구에서는 대표적인 오류만을 소개한다. 계산 수준과 원리 이해의 구체적 수준에서는 [그림 9]의 왼쪽과 같이 문제의 조건에 무관하게 앞에 있는 세 수 중 하나의 수를 답으로 보거나, 두 수의 합을 ( )안에 넣거나, 또는 앞에 있는 모두 수를 합한 것을 답으로 생각하는 오류를 범했다. 그리고 형식적 수준에서의 원리 이해에서는 ( )에 어떤 수가 들어갈 것이라는 오류를 범했다. 이런 오류는 등식 이해의 부족에 기인하며 더욱이 등호의 양쪽에 있는 3개의 수들 때문에 더 많은 혼란을 겪는 것으로 볼 수 있다.



[그림 10] 일반화 수준의 문제와 오류

나. 곱셈 결합법칙 지도 방안

2학년부터 4학년 1학기까지 매학기 곱셈을 배우지만 곱셈 결합성과 관련된 내용을 찾

을 수 없었다. 곱셈에서 결합법칙의 원리 이해는 의외로 복잡하다. (3×4)×5의 답을 구하는 과정에서 곱의 의미를 생각해보면, 3×4는 3개씩 4묶음이므로 12개, 그리고 12개씩 5묶음이면 60개라는 것에서 (3×4)×5=60을 알 수 있다. 한편 4×5는 4개씩 5묶음에서 20개, 그리고 3개씩 20묶음이면 60개라는 것에서 2×(3×4)를 구한다. 여기서 '20개'라는 개수 단위에서 '20묶음' 단위로의 전환이 사고의 혼동을 가져오기도 하지만, 이를 구체화시킬 수 있는 적절한 예시는 대략 4학년 수준이 될 것이다. 예를 들면, 빵 하나를 만드는 데 들어가는 설탕의 양은 3g인데, 빵을 4개씩 5줄을 만들려면 총 몇 g의 설탕이 필요한가? 그리고 보다 더 알아보기 쉬운 모델은 3×4×5로 이루어진 3차원 수모형이나 이것도 역시 5~6학년에 나오는 부피 학습이 선행되어야 한다. 곱셈 결합법칙의 원리를 완전히 이해한 후 그것을 활용하는 수업은 효율적이지 못하다. 그러므로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 곱셈 결합법칙의 원리 이해는 4학년 수준이며, 상징적 형식화도 역시 4학년 이상에서 이루어져야 할 것이다. 그러나 이 법칙의 원리를 이해하기 이전에 우리는 수 감각적으로 세 수의 곱을 교환법칙과 결합법칙을 사용하여 여러 가지 방법으로 계산을 해보는 차원에서는 3학년에서 다룰 필요가 있다. 특히 세 수의 곱을 계산기로 구해보는 활동을 통해 곱셈 결합성의 결과를 알고 사용하는 것이 필요하다.

둘째, 곱셈의 결합법칙도 덧셈의 결합법칙의 지도와 같이 등식의 의미와 구조를 강조하는 의도된 활동으로 구성된 학습이 요구된다. 그러한 학습 중의 하나가 곱셈 학습에서 결합법칙이 보다 잘 드러나도록 구성할 필요가 있다.

셋째, 덧셈과 같이 괄호를 사용하여 세 수의 곱셈의 순서를 (12×3)×10과 같은 식으로 나타내면 곱셈의 결합법칙을 보다 용이하게 설명할 수 있을 것이다.

5. 분배법칙

가. 분배법칙에 대한 이해도 분석

초등학교 수학과 교육과정에서 혼합계산을 제외한 자연수의 사칙연산은 4학년까지 다루게 되어 있어 본 연구에서도 3학년(46명)과 4학년(43명)을 대상으로 조사를 하였다. 조사를 위한 질문지 개발에서 문제를 두 가지 형태로 나누었다. 즉, a(m+n)에서 a×m+a×n으로 전환시키는 분해형과 a×m+a×n에서 a(m+n)으로 전환하는 결합형으로 두었다. 상징적 수준에서는 기호를 분해할 수 없고, 구체적 수준의 분해형 문제와 수준이 유사하여 결합형 문제만 두었다.

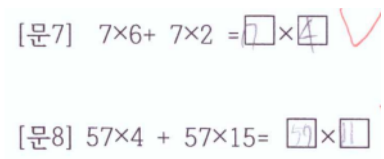
선생님과 함께 풀어보는 문제에서는 5개씩 12개 묶음은 5개씩 5개와 5개씩 7개의 합으로 나타낼 수 있다는 것을 그림으로 제시한 분해형만을 다루었다. 그리고 학생들이 이미 배웠던 곱셈 개념을 기억할 수 있도록 2개의 연습문제를 해결한 후에 문제를 풀도록 하였다. 유형별 문항에 대한 정답자 빈도는 <표 8>과 같다. 결합형보다는 분해형에서 정답 비율이 높게 나타났으며, 이는 학생들이 곱셈을 배울 때 '12×3을 10×3과 2×3의 합'으로 생각하는 방

법이 교과서에서 반복적으로 노출되었기 때문으로 풀이된다. 4학년은 형식적 수준에서 분배법칙을 배우지 않았으나 약 50% 정도가 지금까지 배운 내용을 바탕으로 이를 추론할 수 있다는 것을 보여주고 있다. 이에 비해 3학년은 계산 수준과 구체적 수준에서 상당한 정도의 정답 비율을 보이고 있으나 상징적 수준에서의 표현에는 여전히 어려움이 있는 것으로 나타났다.

<표 8> 분배법칙 정답 비율

문제 유형			문항 수	정답자 수와 빈도(백분율)	
				3학년	4학년
계산 수준		분해형	3	34(73.9%)	39(90.7%)
		결합형	1	22(47.8%)	32(74.4%)
일반화 수준	구체적 수준	분해형	1	23(50.0%)	35(81.4%)
		결합형	1	15(32.6%)	21(48.8%)
	상징적 수준	결합형	1	7(15.2%)	22(51.2%)
총 문항 수/ 총 대상자			7	46	43

오답 분석에서는 52×14 = 52×8 + 52×(22)와 같이 분해형과 결합형을 혼동하고 있었다. 특히, 분해형의 문제보다 결합형의 문제에 대한 정답 비율이 낮은 이유는 [그림 10]과 같이 등호의 위치를 잘 인식하지 못했거나 분해형에 익숙한 나머지 등호의 위치를 고려하지 않고 큰 수를 두 개의 작은 수로 분해하는 형식으로 문제를 해결하는 오류를 범한 것이 대표적이다. 그리고 상징적 수준의 문제에서는 앞에서 나타난 오류와 유사하게 상징 기호 대신에 어떤 수를 넣는 경우가 많았다.



[그림 11] 결합형의 오류

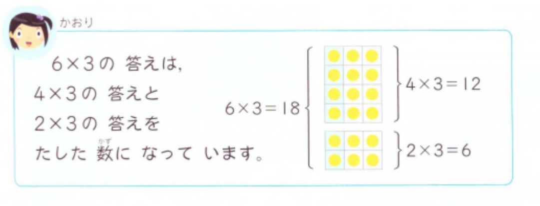
나. 분배법칙 지도 방안

선우진(2019)의 연구에서는 현재 2학년 2학기 곱셈구구 단원에서 분배법칙이 사용되었다고 보고하고 있으나, 그것은 곱셈구구의 원리에 더 가까운 것이며 지도서에서도 분배법칙에 대한 이야기는 언급되어 있지 않았다. 덧셈에 대한 곱셈의 분배성에 대한 내용이 보다 명확하게 사용된 것은 3학년 1학기 두 자리 수 곱셈 계산 12×3을 10×3과 2×3의 합으로 계산하는 차시임을 확인할 수 있다. 그러나 곱셈구구에서 분배법칙을 활용하여 곱셈구구를 익힐 수 있다. 예를 들면, 일본 교과서(藤井斉亮 외 , 2018a)에서는 [그림 11]과 같이 6×3을 4×3과 2×3의 합으로 나타내어, 6단의 곱셈구구를 4단과 2단의 곱셈구구의 합으로 계산한다. 분배법칙의 학습 방안에 대해 다음과 같은 제안을 한다.

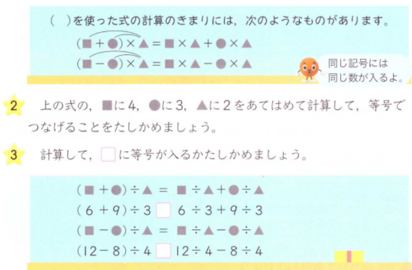
첫째, 2학년 2학기에 곱셈구구를 지도하거나 3학년 1학기에 곱셈구구를 복습할 때 곱셈구구를 셈하는 여러 가지 방법 사용에서 분배법칙의 원리를 공부할 수 있다. 4학년에서는 두 자리 수의 곱셈을 다루는 학습에서 분배법칙에 대한 상징적 수준에서 일반화를 학습할

수 있다. 외국의 초등학교 수학 교과서에서는 분배법칙을 상징적인 수준에서 다루고 있다. 예를 들면, [그림 12]는 4학년 2학기 일본 교과서(藤井斉亮 외 , 2018b)의 한 장면이며, [그림 13]은 4학년 1학기 중국 교과서(人民教育出版社, 2013)의 한 장면이다.

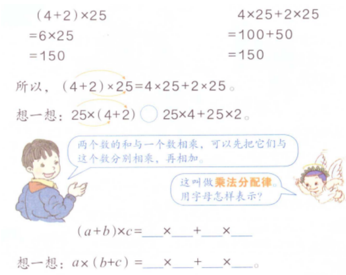
둘째, 분배법칙은 3학년에서 배우는 두 자리 수의 곱셈뿐만 아니라 나눗셈에서도 사용이 가능하다. 곱하는 수보다는 곱해지는 수를 분해하는 (a+b)×c 형태는 12×3에서 (10+2)×3으로, 36÷3을 30÷3과 6÷3으로 계산하는 데 이용될 수 있다.



[그림 12] 곱셈구구에서 분배법칙 사용



[그림 12] 일본 교과서



[그림 14] 중국 교과서

셋째, 3~4학년 교과서에서 분배법칙의 원리를 나타내는 12×3이 (10+2)×3과 (10×3)+(2×3)과 같은 것임을 그림이나 도식으로 나타내지만 이를 식으로 표현 방법을 회피하고 있다. 왜냐하면 혼합계산이 5~6학년군의 성취기준에 나오고 그리고 괄호 사용에 대한 부담감 때문이었다. 본 연구에서 덧셈과 곱셈 기호를 복합적으로 사용하는 문제에서의 정답 비율이 3학년과 4학년에서 비교적 높게 나타났다. 괄호를 사용하는 혼합계산의 일부를 5~6학년군에서 3~4학년군으로 하향 조정하여도 무리가 없는 것으로 보인다.

Ⅴ. 결론과 제언

본 연구에서는 사칙연산을 학습하는 학년을 대상으로 3가지 수준의 문제로 구성된 질문지를 통해 연산법칙에 대한 학생들의 이해와 지도 방안을 제시하였다. 이를 요약하면

다음과 같다.

첫째, 교과서에서 덧셈의 교환법칙은 1학년에서 곱셈의 교환법칙은 2학년에서 다루고 있지만 이를 일반화는 수준은 아니다. 그럼에도 불구하고 교환성에 대한 구체적 수준과 상징적 수준에서 상당히 높은 정답비율을 보였다. 이 문제에서 나타난 오류는 등식의 이해 부족에 기인한 것이다. 방정숙·최인영(2016)은 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 대수적 사고에 대한 실태 분석에서 덧셈과 뺄셈의 등식 이해는 70%의 정답률을 보였다. 7+3=□+4 문제에서 답을 맞히지 못한 오류의 대부분이 □에 10을 넣은 것으로 전체 반응의 약 30%나 되었다. 이에 오류 발생을 줄이기 위해서는 등식이 들어가는 여러 가지 대수식에 익숙하도록 학습할 필요가 있다.

둘째, 3학년에서는 덧셈과 곱셈의 결합법칙에 대한 전반적인 이해가 여전히 낮은 편이었다. 그러나 4학년은 곱셈 결합법칙에 높은 정답 비율을 보였다. 4학년에서 덧셈의 결합법칙은 조사하지 않았으나 최지영·방정숙(2011)의 연구에서 구체적 수준의 문제에서 78.5%의 정답 비율을 보였다. 4학년에서는 일반화 수준에서 덧셈과 곱셈의 결합법칙을 학습할 수 있는 수준으로 보인다. 이같이 3학년까지도 낮은 정답 비율을 보인 이유로는 등식의 양쪽에 나타나는 수가 많아 등식을 인식하기 어려울 뿐만 아니라 결합법칙을 이용하여 계산을 하는 경험의 부족으로 보인다.

셋째, 3～4학년에서 분배법칙에 대한 정답 비율이 높게 나타나 분배법칙을 3학년은 구체적 수준에서, 4학년은 상징적 수준에서 이해가 가능한 것으로 나타났다. 분배법칙이 곱셈의 결합법칙보다는 더 복잡해 보이는데 정답 비율이 높게 나온 것은 곱셈 알고리즘의 계산에서 분배법칙을 활용하는 예가 교과서에 많이 노출되었기 때문으로 풀이된다.

위와 같은 결과에 의해 2015 개정 교육과정의 방향 중 하나였던 학습자 부담 완화라는 취지를 크게 위배하지 않으면서 연산의 법칙을 교육과정과 교과서에 도입하는 것에 큰 무리가 없는 것으로 보인다. 그리고 이와 같은 결과에 함께 연산 규칙의 지도 방안으로 다음을 제안한다.

첫째, 연산법칙과 관련된 내용을 구체적으로 교육과정에 문서화할 필요가 있다. 2017년에 고시된 일본의 교육과정 해설인 일본의 ‘소학교학습지도요령’ 산수편은 400 페이지에 달하고 매우 정교하게 기술되어 있다. 우리나라에서도 연산법칙에 대한 성취기준과 그리고 교수·학습 방법 및 지도 사항을 학년과 지도 모델에 따라 수준별로 상술할 필요가 있다.

둘째, 본 연구에서 연산규칙에 대한 오류는 주어진 등식에서 등호에 대한 이해와 관련이 있음을 알 수 있었다. 우리나라 교과서에 나타나는 등호나 등식에 대한 기존 연구(기정순, 정영옥, 2008; 고준석 외, 2016)에서 짐작할 수 있는 바와 같이 교과서에서 등호의 양쪽을 조망할 수 있는 여러 가지 형태의 등식 노출이 거의 없음 알 수 있었다. 등식의 구조를 이해할 수 있도록 관련 내용을 점진적으로 배치를 할 필요가 있다.

셋째, 우리나라에서 교육과정을 개정할 때마다 어려운 내용을 상급 학년이나 학교로 이

동시키는 경향이 있었다. 어려운 내용을 모두 상급학교로 이동시키기보다 내용의 수준에 따라 점진적으로 학습해 가는 나선형 교육과정에 따라 낮은 수준에서 조금씩 노출시켜 보다 정교한 단계형 교육과정을 지향해야 할 것이다. 조금 어렵다고 생각되는 내용을 과감하게 초등학교에 초기에 도입하여 조금씩 학습시키고 있는 핀란드(신준식, 2011)의 교육방식을 참조할 필요가 있음을 상기시키고 싶다.

참 고 문 헌

[1] 고준석·최종현·이승은·박교식(2016). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서 제시하는 좌변이 단항식인 등식의 양태 분석. *한국초등수학교육학회지,* 20(4), 583-599.

[2] 기정순·정영옥(2008). 등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구, *대한수학교육학회지 <학교수학>,* 10(4), 537-555.

[3] 김미환·이수은·김수미(2017). 우리나라 초등학교 수학교과서에서 제시된 분배법칙 지도내용 분석. *수학교육학연구*, 27(3), 451-467.

[4] 김유경·방정숙(2017). 초등수학교육 연구동향: 최근 7년간 게재된 국내 학술지 논문을 중심으로. *초등수학교육*, 20(1), 19-36.

[5] 김재춘·부재율·소경희·양길석(2017). *예비 현직 교사를 위한 교육과정과 교육평가*. 서울: 교육과학사.

[6] 김재춘(2002). 잠재적 교육과정의 재개념화 필요성 탐색. *교육과정 연구,* 20(4), 51-66.

[7] 김판수·김성준·김혜정(2021). *초등 국정 수학과 교과용도서 수정·보완 검토·집필 연구-자연수의 연산 단원-*. 교육부·한국교과서연구재단 연구보고서 2021-03.

[8] 방정숙·이지영·이상미·박영은·김수경·최인영·선우진(2015). 미국·중국·일본·미국의 초등학교 수학과 교육과정 비교·분석: 도형 영역을 중심으로. *학교수학회논문집*, 18(3), 311-334.

[9] 변희현(2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. *한국초등수학교육학회지*, 15(1), 39-56.

[10] 방정숙·최인영(2016). 초등학교 3학년 학생들의 대수적 사고에 대한 실태 분석. *대한수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>*, 19(3), 223-247.

[11] 방정숙·최지영(2011). 범자연수와 연산에 관한 수학교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. *수학교육*, 50(1), 41-59.

[12] 백대현(2017). 초등학교 수학에서 연산의 성질과 등호의 사용에 대한 고찰. *한국초등수학교육학회지*, 21(4), 643-662.

[13] 선우진(2019). 한국, 일본, 미국의 초등학교 수학교과서에서 범자연수 곱셈의 연산 성질을 지도하는 방안에 대한 비교·분석. *한국수학교육학회지시리즈 C <초등수학교육>*, 22(3), 181-203.
[14] 신준식(2011). 핀란드 수학과 교육과정 비교 분석. *한국수학교육학회지시리즈 C <초등수학교육>*, 14(3), 225-236.
[15] 안지영·전영주·윤마병·이종학(2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과 교육과정 규준 CCSSM의 비교·분석 -초등학교 수와 연산 영역을 중심으로-. *한국학교수학회논문집*, 17(4), 2014년, 437-464.
[16] 장혜원(2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. *한국초등수학교육학회지*, 21(1), 1-22.
[17] 최지영·방정숙(2011). 초등학생들의 범자연수 연산의 성질에 대한 이해 분석. *대한수학교육학회지 수학교육학연구*, 21(3), 239-259.
[18] National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
[19] 藤井斉亮 외 (2018a). *新編 新しい算數 2-下*. 東京:東京書籍.
[20] 藤井斉亮 외 (2018b). *新編 新しい算數 4-下*. 東京:東京書籍.
[21] 人民教育出版社(2013). *義務教育教科書 數學 4, 年級 上冊*. 北京: 人民教育出版社

Kim, Pan Soo
Department of Mathematics Education
Busan National University of Education
24 Gyodae-ro, Yeonje-gu, Busan, Korea
E-mail: pskim@bnue.ac.kr