Journal of Digital Convergence
Vol. 20. No. 2, pp. 345-351, 2022

ISSN 2713-6434 / eISSN 2713-6442
https://doi.org/10.14400/JDC.2022.20.2.345

Tabu Search를 이용한 지름이 2인 그래프에 대한 $L(2,1)$-coloring 문제 해결

김소정[1], 김찬수[2], 한근희[2*]
[1]공주대학교 응용수학과 석사과정, [2]공주대학교 응용수학과 교수

Using Tabu Search for $L(2,1)$-coloring Problem of Graphs with Diameter 2

SoJeong Kim[1], ChanSoo Kim[2], KeunHee Han[2*]
[1]Master student, Department of Applied Mathematics, Kongju National University
[2]Professor, Department of Applied Mathematics, Kongju National University

요 약 단순 무방향 그래프 G 의 L(2,1)-coloring은 $d(u,v)$가 두 정점 사이의 거리일 때 두 가지 조건 (1) $d(x,y)=1$ 라면 $|f(x)-f(y)| \geq 2$, (2) $d(x,y)=2$ 라면 $|f(x)-f(y)| \geq 1$ 을 만족하는 함수 $f: V \rightarrow [0,1,\cdots,k]$를 정의하는 것이다. 임의의 $L(2,1)$-coloring c 에 대하여 G 의 c-span 은 $\lambda(c)=\max\{|c(u)-c(v)| \mid u,v \in V\}$ 이며, $L(2,1)$-coloring number 인 $\lambda(G)$ 는 모든 가능한 c 에 대하여 $\lambda(G)=\min\{\lambda(c)\}$ 로 정의된다. 본 논문에서는 Harary의 정리에 기반하여 지름이 2인 그래프에 대하여 여그래프에 해밀턴 경로의 존재여부를 Tabu Search를 사용해 판단하고 이를 통해 $\lambda(G)$가 $n(=|V|)$과 같음을 분석한다.

주제어 : $L(2,1)$-coloring, $L(2,1)$-coloring number, 지름이 2인 그래프, 여그래프, Tabu Search

Abstract For simple undirected graph $G=(V,E)$, L(2,1)-coloring of G is a nonnegative real-valued function $f: V \rightarrow [0,1,\cdots,k]$ such that whenever vertices x and y are adjacent in G then $|f(x)-f(y)| \geq 2$ and whenever the distance between x and y is 2, $|f(x)-f(y)| \geq 1$. For a given $L(2,1)$-coloring c of graph G, the c-span is $\lambda(c)=\max\{|c(u)-c(v)| \mid u,v \in V\}$. L(2,1)-coloring number $\lambda(G)=\min\{\lambda(c)\}$ where the minimum is taken over all $L(2,1)$-coloring c of graph G. In this paper, based on Harary's Theorem, we use Tabu Search to figure out the existence of Hamiltonian Path in a complementary graph and confirmed that if $\lambda(G)$ is equal to $n(=|V|)$.

Key Words : $L(2,1)$-coloring, $L(2,1)$-coloring number, Graph with diameter 2, Complement graph, Tabu Search

*Corresponding Author : Keunhee Han(kehan@kongju.ac.kr)
Received November 22, 2021 Revised January 3, 2022
Accepted February 20, 2022 Published February 28, 2022

1. 서론

무선 기기들의 통신을 위해서는 라디오 주파수(Radio Frequency)가 사용되지만 주파수는 고가의 자원으로서 이를 효율적으로 분배하는 것이 필요하다. 주파수 할당 문제(Frequency Assignment Problem, FAP)는 무선 통신에 사용되는 주파수를 송신기들 사이에 간섭이 발생하지 않으면서 재사용이 가능하도록 할당함으로써 주어진 주파수 대역 내에서 최적의 상태로 주파수를 통신기에 분배하는 문제이며 무선 통신의 사용이 활발해지면서 본 문제의 중요도 또한 높아지고 있다 [1-3].

Griggs & Yeh [1] 는 FAP를 위하여 $L(h, k)$-coloring 문제를 제시하였으며 본 문제는 그래프에서 인접한 정점의 경우 각 정점에 부여되는 정수값들의 차이가 h 이상 그리고 거리가 2인 정점들의 경우 차이가 k 이상이 되도록 각 정점에 정수들을 부여하는 문제이며 특히 $h=2$ 및 $k=1$ 인 $L(2,1)$-coloring 문제가 가장 실용적인 문제로서 주목을 받고 있다.

단순 무방향 그래프 $G=(V,E)$ 는 정점 집합 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 및 간선집합 $E\subseteq \{(u,v)|u,v\in V\}$ 으로 구성되며, 정점 집합의 크기는 $|V|=n$ 으로 표기한다. $d(u,v)$는 G 내 임의의 두 개 정점 u, v 사이의 최단거리를, $diam(G)=\max\{d(u,v)|u,v\in V\}$는 G 의 지름 (diameter)을 각각 나타낸다. 그래프 G 의 $L(2,1)$-coloring 은 다음과 같은 두 가지 조건을 만족하는 함수 $f: V \rightarrow [0,1,\cdots,k]$를 정의하는 것이다.

(1) $d(x,y)=1$ 인 경우, $|f(x)-f(y)|\geq 2$
(2) $d(x,y)=2$ 인 경우, $|f(x)-f(y)|\geq 1$

그래프 G 에 대하여 c 를 임의의 $L(2,1)$ -coloring 이라 하면 $\lambda(c)=\max\{|c(u)-c(v)|\,|\,u,v\in V\}$ 는 G 의 c-span 이라 부르며 $L(2,1)$ -coloring number 인 $\lambda(G)$ 는 모든 가능한 c 에 대하여 $\lambda(G)=\min\{\lambda(c)\}$ 로 정의된다. [1]은 $L(2,1)$-coloring 문제가 NP-complete 계열에 속하는 문제이며, 모든 그래프에 대한 $\lambda(G)$의 상한값은 G 의 최대 차수를 Δ 라고 할 때 $\Delta^2+2\Delta$ 임을 증명하였다.

주파수 할당 문제 및 $L(2,1)$-coloring 문제를 해결하기 위해 다양한 알고리즘을 사용한 연구가 수행되었으며, 단순 그래프가 아닌 구간 그래프, 이분 그래프(bipartite graph) 등과 같은 다양한 특수 그래프에 대한 $\lambda(G)$의 상한값을 제시하는 등의 연구 또한 활발히 이루어졌다. [4]는 지역 탐색 알고리즘 및 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘(simulated annealing algorithm)을 사용하여 두 알고리즘의 FAP 계산 성능을 비교하였으며 [5]은 ant colony 알고리즘의 방식을 따르는 메타휴리스틱 알고리즘인 ANTS를 제안하고 두 종류의 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘(simulated annealing algorithm)과 비교하였다. [6]는 k-coloring 문제에 사용되는 Kernighan-Lin 의 양방향 균등 분할 절차(two way uniform partitioning procedure)를 기반으로 하는 FAP를 위한 알고리즘을 제안하였다. [7] 및 [8]는 FAP를 위해 각각 하이브리드 유전 알고리즘, 하이브리드 진화 알고리즘을 제안하였으며 교배 연산 등에 따른 성능 변화를 비교하였다. [9]은 $\lambda(G)$를 계산하는 4개 알고리즘을 제안하고 일반 그래프, 이분 그래프(bipartite grpah) 및 희소 그래프(sparce graph) 에 적용하여 알고리즘들의 성능을 비교하였고, [10]은 구간 그래프(interval graph)에 대해서 $\lambda(G)$의 상한값을 구하는 그래프 G의 정점 수가 n 이고 간선 수가 m 일 때 $O(m+n)$인 알고리즘을 제시하고 이를 확장해 원호 그래프(circular-arc graph)에 적용하였다. [11]은 코달 이분 그래프(chordal bipartite graph) 및 분할 그래프(split graph)에 대해 $\lambda(G)$의 상한값을, [12]은 OSF(odd-sun-free) chordal graph 및 sun-free chordal graph의 상한값을 제안하고 트리 T 에 대해 $\lambda(T)$를 다항 시간 내에 계산하는 알고리즘을 제시하였다.

본 논문에서는 지름이 2인 그래프에 대하여 Harary의 정리가 실제로 어느 정도 성립하는 지를 살펴보기 위한 연구를 수행하였으며, 논문의 나머지 부분은 다음과 같이 구성된다. 2절에서 Harary의 정리 및 문제 해결에 사용되는 Tabu Search 알고리즘을 설명하고 3절에서는 해밀턴 경로 포함 여부 및 $L(2,1)$-coloring의 결과를 제시한다. 마지막으로 4절에서 결론을 제시한다.

2. 연구방법

2.1 Harary의 정리

본 논문에서는 지름이 2인 그래프에 대하여 여그래프(complement graph)의 해밀턴 경로의 존재 여부를 판단하여 $L(2,1)$-coloring number $\lambda(G)$를 계산한다. 그래프 $G=(V,E)$ 의 여그래프 $\overline{G}$ 는 정점 집합 V 및

간선 집합 $\overline{E}=\{(u,v)|u,v\in V,\ (u,v)\notin E\}$로 구성되며, 해밀턴 경로(hamiltonian path)는 그래프의 모든 정점을 반드시 한 번씩 지나는 경로이고 그래프에서 해밀턴 경로가 존재하는 지를 판단하는 것은 NP-complete에 속하는 문제이다. Harary [2]는 대부분의 그래프의 $\lambda(G)$가 정점 수 n 과 동일함을 다음 Lemma를 사용해 제시하였으며, Lemma 2는 그래프의 지름이 2 일 때 적합한 것으로, 지름이 2보다 크다면 정점에 부여하는 정수 값들을 중복되게 사용할 수 있기 때문에 $\lambda(G)$가 정점 수 보다 작아지는 경향이 있다.

Lemma 1. 그래프 G 의 지름이 2보다 작거나 같다면 $\lambda(G)\geq n$ 이다[2].

Lemma 2. 그래프 G 의 여그래프 $\overline{G}$ 에 해밀턴 경로가 존재한다면 $\lambda(G)\leq n$ 이다 [2].

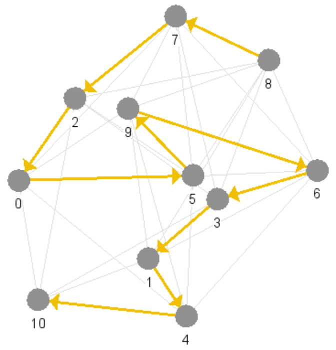
지름이 2보다 작거나 같은 경우 그래프의 모든 정점 사이의 거리가 2보다 작거나 같으므로 $L(2,1)$-coloring 정의에 의해 정수가 중복 사용되지 않으므로 Lemma 1은 명백히 성립하며, 여그래프에서 해밀턴 경로가 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$일 때 원 그래프에서 v_i 및 v_{i+1} 은 인접하지 않기 때문에 연속된 정수를 부여할 수 있으며 이러한 경우 n 개 정수 또는 그 이하의 정수로 $L(2,1)$-coloring이 가능하다.

Harary [2] 는 대부분의 그래프들의 지름이 2 이면서 또한 해밀턴 경로가 존재한다는 관찰로부터 다음과 같은 정리를 제시하였다.

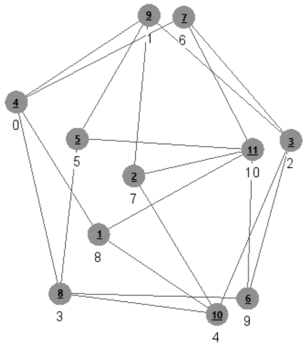
정리 1. 거의 모든 그래프 $G=(V,E)$ 에 대하여 $\lambda(G)=n$ 이다[2].

지름이 2인 그래프 G 는 Lemma 1 에 의해 $\lambda(G)\geq n$ 이고, G 의 여그래프 $\overline{G}$는 대부분의 그래프가 해밀턴 경로를 갖는다는 가정에 의해 Lemma 2 를 만족하여 $\lambda(G)\leq n$ 이 성립하므로 대부분의 그래프 G 에 대하여 $\lambda(G)=n$ 가 성립한다.

Fig 1은 DIMACS의 그래프 중 myciel3에 대한 것으로 (a)는 여그래프 내에 존재하는 해밀턴 경로를 표현한 그림이며 (b)는 해밀턴 경로 순서대로 1부터 11까지 정수(color)를 각 정점에 부여한 그림이다. Fig 1-(b)의 정점을 의미하는 원 내의 숫자는 정점에 부여된 정수



(a) Hamiltonian path in complement graph



(b) $L(2,1)$-coloring of graph

Fig. 1. myciel3 of DIMACS

(color)이고 정점 바깥쪽 아래에 위치한 숫자는 정점의 label을 의미한다. 각 정점에 부여된 정수가 모두 다르기 때문에 거리가 2인 정점과는 모두 다른 정수를 가지며, 인접한 정점과 모두 2 이상 차이가 나는 것을 확인할 수 있다. 따라서 여그래프의 해밀턴 경로를 기준으로 정점에 정수를 부여하면 n개 정수로 $L(2,1)$-coloring이 가능함을 볼 수 있다.

본 정리가 어느 정도 성립하는 지를 살펴보기 위해 DIMACS 그래프 150개를 수집하였으며 이를 대상으로 지름이 2인 그래프를 파악하고 여그래프의 해밀턴 경로 존재여부를 Tabu Search 를 사용해 판단하여 $\lambda(G)$가 n 과 동일함을 보인다. Tabu Search는 한 개의 해를 통해 이웃들을 생성하고 이동함으로써 지역 탐색(local search)을 수행하는 메타휴리스틱 알고리즘으로 단기 메모리를 사용해 일정 기간 내에 방문했던 해로 재이동 하지 않도록 하여 더욱 넓게 탐색공간을 이동할 수 있도록 한다[13].

2.2 Tabu Search

최적화 문제를 해결하기 위해 일반적으로 강하법(descent method)이 사용되어졌지만 해당 방법만으로 계산하기 어려운 문제들을 위해 유전 알고리즘, 시뮬레이티드 어닐링(simulated annealing) 및 Tabu Search 등과 같은 휴리스틱 알고리즘들이 제시되었으며, 강하법(descent method)과 달리 지역 최적값을 벗어날 수 있는 전략을 사용함으로써 우수한 성능을 보였다[13,14]. Tabu Search(TS)는 F. Glover [15] 가 처음 소개하였으며 문제의 형태에 상관없이 사용가능한 메타휴리스틱 알고리즘으로 다양한 분야의 최적화 문제에 적용되었다. TS는 지역 탐색 방법과 유사하게 한 개 해에서 다른 해로 이동해 최적 해를 탐색하고 종료 조건을 만나기 전까지 이동을 반복적으로 수행함으로써 문제를 해결한다[13]. 즉, TS는 현재 해를 기반으로 탐색 공간(search space)에서 현재 해가 도달할 수 있는 해인 이웃 해들을 생성하고 그 중 적합도가 가장 우수한 해로 이동하지만 지역 탐색 방법과의 차이점은 *tabu list* 라 불리는 단기 메모리를 사용한다는 점이다. *Tabu list* 는 이전에 방문했던 해를 일정 기간 동안 기록하고 기간 내에 기록된 해와 동일한 해로 재이동하려는 움직임을 금지한다. 이를 통해 TS는 해가 반복되는 현상을 방지하며 항상 우수한 방향으로 움직이는 결정론적 및 확률론적 방법보다 우수하지 않은 해가 선택될 가능성이 있는 탐색 방법이 최적화 문제 해결에 이점을 준다는 가정을 기반으로 한다[13,14]. 이웃 해로 이동하기 전에 *tabu list* 에 의해 금지되는 해인지 검사하고 그렇다면 다른 이웃 해를 선택한다. 해를 기록하는 일정 기간은 TS의 하이퍼 파라미터인 *tabu tenure* 에 의해 결정되며 *tabu tenure* 가 작을 경우 해가 반복되는 현상이 발생하는 것을 방지하지 못하고 *tabu tenure* 가 클 경우 선택되는 해의 품질 저하로 이어지기 때문에 이를 적절히 설정함으로써 TS의 성능을 높일 수 있다[14]. TS를 구현할 때 고려해야할 사항은 (1) 이웃을 구하는 연산 및 (2) tabu list 를 어떻게 정의할 것인가이다. 위 두가지 사항을 문제 및 해의 종류에 따라 자유롭게 정의할 수 있어 다양한 분야에 적용할 수 있다는 강점이 있지만 이들로 인해 알고리즘의 복잡도 및 성능이 결정되는 경향이 있다[13].

본 연구에서는 그래프 G 의 $\lambda(G)$가 $|V|$와 동일한지 아닌지를 판단하기 위해 $\overline{G}$의 해밀턴 경로(hamiltonian path)가 존재하는 지를 TS를 사용하여 판단한다. TS의 해는 정점의 순열을 사용하며 초기 해는 무작위로 순열을 생성하고 적합도는 missing edge 수로 설정하였다. $S=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$가 한 개 순열이라 할 때, S 의 missing edge는 $M_S=\{(v_i,v_j)\,|\,j=i+1, 1 \leq i \leq n-1, (v_i,v_j) \notin E\}$ 로서 S 내 누락된 간선 집합을 나타내며 만일 $M_S=\varnothing$ 인 경우 S 는 해밀턴 경로이다. $FM_S=(v_i, v_j) \in M_S$ 는 S 내 첫 번째 missing edge를 나타낸다. 예를 들어 정점이 9개인 그래프에 대하여 (4-6-3-9-1- 5-2-7-8) 가 한 개 순열이며 여그래프에서 정점 쌍 (1,5), (3,6) 및 (7,8) 이 인접하지 않는다고 하자. 해당 순열의 $|M_S|$ 는 3 이며 이후 이웃 해를 구할 때 사용되는 FM_S 는 (3,6)이다.

TS는 일반적으로 이웃 해를 다수 생성하여 그 중 가장 좋은 적합도를 가지면서 *tabu list* 를 어기지 않는 이웃으로 이동하는 방식을 사용하지만, 본 연구에서는 이웃 해 한 개만을 생성하며, *tabu list* 에 의해 금지된 이동이 아니라면 항상 해당 이웃으로 이동한다. 이웃 해는 순열의 FM_S 가 (v_k, v_{k+1}) 일 때 다음 과정을 통해 생성된다.

- step 1. 순열에서 v_k 이후에 위치한 정점들 $v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots, v_n$ 에 대하여 v_k와 인접 여부를 검사하고 만약 인접한 정점이 존재한다면, step 3 을 진행한다.
- step 2. 순열에서 v_k 이전에 위치한 정점들 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 에 대하여 v_k와 인접여부를 검사하며 인접한 정점이 없다면 무작위로 새로운 순열을 생성한다.
- step 3. step 1 또는 step 2를 통해 찾은 인접 정점이 v_i 일 때, v_{k+1} 와 위치를 변경한다.

Tabu list 는 그래프의 정점 수가 n 일 때 n x n 크기의 정방 행렬 M을 사용하며, 이웃이 생성된 시간 t 와 순서를 바꾼 두 정점 v_{k+1} 및 v_i 에 대하여 M[v_{k+1}][v_i] 및 M[v_i][v_{k+1}] 에 t 를 저장하고 *tabu tenure* 로 설정한 일정 기간 내에 v_{k+1} 및 v_i 의 순서를 변경하여 이웃을 생성하려 하는 경우 *tabu list* 에 의해 금지된다.

Algorithm 1은 현재 해의 이웃 해를 구하는 함수를, Algorithm 2는 그래프의 해밀턴 경로를 찾는 Tabu Search를 나타낸다. Algorithm 1의 *getFM* 함수는 현재 해 S 의 첫 번째 missing edge인 FM_S 를 찾아 인덱스를 돌려주는 함수이며, for 구문 내 if 문은 선택된 두 정점이 인접하면서 *tabu list* 에 의해 금지되는 행동이

아니라면, *updateTabuList* 함수를 사용하여 *tabu list* 를 갱신하고 이웃을 생성하는 과정이다. Algorithm 2을 통해 볼 수 있듯이 TS의 종료 조건은 최대 반복횟수를 사용해 설정하였다.

```
Algorithm 1. Get a neighbor solution
getNeighbor(array S, time t)
idx = getFM(S)
u = S[idx]
for i = idx+2 to len(S)
    v = S[i]
    if (u,v)∈E and isTabu(u,v) then
        NS = swap(S, idx, i)
        updateTabuList(t, u, v)
        return NS
end for
for i = 0 to idx-1
    v = S[i]
    if (u,v)∈E and isTabu(u,v) then
        NS = swap(S, idx, i)
        updateTabuList(t, u, v)
        return NS
end for
```

Algorithm 1. getNeighbor function

```
Algorithm 2. Tabu Search
INPUT : G=(V,E)
initial solution S_0
S=S_0, S_best=S_0, fitness_best=f(S_best)
for t = 0 to maxIteration
    Ns = getNeighbor(S, t)
    S = Ns
    if f(S) ≤ fitness_best
        fitness_best = f(S), S_best = S
end for
```

Algorithm 2. Tabu Search

3. 실험 및 결과

본 논문에서는 지름이 2인 그래프에 대한 $\lambda(G)$ 가 정점 수 n 과 동일함을 보이기 위해 DIMACS 그래프 150개를 수집하였으며 그 중 지름이 2인 그래프 106개를 대상으로 실험을 수행하였다. 실험에 사용한 그래프의 그룹을 Table 1 에 작성하였다.

Table 1. Group name on the graphs.

Group name		
p-hat	MANN	DSJC / DSJR
queen	keller	C
myciel	johnson	brock
san	gen	hamming
sanr	flat	r

TS의 하이퍼파라미터는 *maxIteration* 을 100,000 으로, *tabu tenure* 는 7로 설정하여 10번 독립적으로 수행하였으며 각 수행마다 해밀턴 경로를 찾았는지를 판단하였다. 106개의 그래프 중 9개의 그래프를 제외한 모든 그래프에 대해서 10번 수행에서 항상 해밀턴 경로를 찾을 수 있었다.

Table 2 는 제시한 TS 알고리즘으로 여그래프에서 해밀턴 경로를 계산하지 못한 9 개 그래프들의 간선 밀집도(edge density)를 보여주며 본 Table로부터 여그래프들의 간선 밀집도는 1% 이하임을 알 수 있다. Table 2 에서 r125.1c 그래프의 경우 여그래프가 비 연결된 그래프이므로 여그래프에 해밀턴 경로가 존재할 수 없음을 확인하였다.

r125.1c를 제외한 8개 그래프를 대상으로 *maxIteration* 을 500,000, *tabu tenure* 는 7로 설정하여 TS를 10번 수행하였을 때, 2개 그래프 hamming8-2 및 DSJR500.1c에

Table 2. The graph that cannot find the hamiltonian path

Graph	$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	$\lvert \bar{E} \rvert$	density of complement graph
DSJR500.1c	500	121275	3475	0.027856
hamming8-2	256	31616	1024	0.031373
hamming10-2	1024	518656	5120	0.009775
MANN_a9	45	918	72	0.072727
MANN_a27	378	70551	702	0.009852
MANN_a45	1035	533115	1980	0.003700
MANN_a81	3321	5506380	6480	0.001175
r125.1c	125	7501	249	0.032129
r250.1c	250	30227	898	0.02885

서 해밀턴 경로를 각각 2번, 1번 찾을 수 있었으나 나머지 6개 그래프에 대해서는 *tabu tenure* 를 변경하는 등의 매개변수 조정을 통해서도 해밀턴 경로를 찾을 수 없었다.

그래프의 정점에 대한 순열을 사전식 순서로 모두 검사하는 B&B(Brach and Bound) 알고리즘을 병렬 프로그램으로 구현하여 MANN_a9 에 대하여 실행한 결과 여그래프에 해밀턴 경로가 존재하지 않음을 확인하였지만, B&B 알고리즘은 정점 수에 따라 수행 시간이 증가하여 지수 시간(exponential time)을 요구하는 알고리즘으로, MANN_a9 이외의 그래프의 경우 100개 이상의 정점을 가지며 이로 인해 결과를 얻는 것은 현실적으로 불가능하였다. Table 2 의 그래프들 중 제시된 TS 알고리즘으로 여그래프에서 해밀턴 경로를 계산하지 못한 6개 그래프들의 경우 이들의 간선 밀집도를 고려할 때 해밀턴 경로가 존재하지 않을 가능성이 높다고 판단된다.

결론적으로, 실험에 사용된 150개의 DIMACS 그래프들 중 약 70% (106개)의 그래프의 지름이 2이며 이들 중 약 93% (99개) 그래프들이 $\lambda(G)=n$ 를 만족함을 보였다. 하지만 여그래프에서 해밀턴 경로가 존재하지 않는 그래프들의 경우 Lemma 1, 2 에 기반하여 $\lambda(G)=n$ 임을 보이지 못한 것 일뿐 해당 그래프들에 대하여 $\lambda(G)>n$ 라고 확정지을 수는 없다.

4. 결론

L(2,1)-coloring 문제는 주파수 할당 문제와 관련된 그래프 색칠 문제로 최단 거리가 1인 정점 사이의 정수가 2 이상 차이나도록 하고 최단 거리가 2인 정점 사이의 정수가 동일하지 않도록 할당하는 문제이다. 주파수 할당 문제의 연구 중요성이 높아지며 다양한 알고리즘으로 본 문제를 해결하거나 상한값을 제한하는 연구들이 수행되어져왔다.

본 논문에서는 Harary의 정리를 기반으로 하여 지름이 2인 단순 무방향 그래프 G 의 $\lambda(G)$가 그래프의 정점 수와 동일함 보이기 위해 Tabu Search를 사용해 여그래프의 해밀턴 경로 존재여부를 판단하였다.

106개의 지름이 2인 DIMACS 그래프에 대하여 실험을 수행한 결과 대부분의 그래프의 여그래프에 해밀턴 경로가 존재하는 것을 확인하였으나 해밀턴 경로를 구하지 못한 그래프의 $\lambda(G)$가 그래프의 정점 수와 다르다고 단정할 수는 없으므로 이러한 그래프들의 정확한 $\lambda(G)$를 계산하기 위한 연구가 추가적으로 필요하다고 판단된다.

REFERENCES

[1] J. R. Griggs, & R. K. Yeh. (1992). Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(4).* 586-595.

[2] F. Harary, & M. Plantholt. (1999). Graphs Whose Radio Coloring Number Equals the Number. *Graph Colouring and Applications, 23(23).* 99.

[3] K. I. Aardal, S. P. M. Van Hoesel, A. M. Koster, C. Mannino & A. Sassano. (2007). Models and solution techniques for frequency assignment problems. *Annals of Operations Research, 153(1).* 79-129.

[4] L. Liwei & F. Rongshuang. (2010, August). Simulated annealing algorithm in solving frequency assignment problem. *In 2010 3rd International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering (ICACTE)* (Vol. 1, pp. V1-361). IEEE.

[5] V. Maniezzo & A. Carbonaro. (2000). An ANTS heuristic for the frequency assignment problem. *Future Generation Computer Systems, 16(8).* 927-935.

[6] T. Park & C. Y. Lee. (1996). Application of the graph coloring algorithm to the frequency assignment problem. *Journal of the Operations Research society of Japan, 39(2).* 258-265.

[7] M. Alabau, L. Idoumghar & R. Schott. (2002). New hybrid genetic algorithms for the frequency assignment problem. *IEEE Transactions on Broadcasting, 48(1).* 27-34.

[8] J. K. Hao & R. Dorne. (1995, September). Study of genetic search for the frequency assignment problem. *In European Conference on Artificial Evolution.* (pp. 333-344). Berlin:Springer

[9] S. Vollala, S. Indrajeet, A. D. Joshi, P. S. Tamizharasan & J. Jose. (2017, July). Implementation of algorithms for L (2, 1)-coloring problems. *In 2017 8th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT) (pp. 1-6).* IEEE.

[10] S. Paul, M. Pal & A. Pal. (2015). L(2, 1)-labeling of interval graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing, 49(1).* 419-432.

[11] M. R. Cerioli & D. F. Posner. (2012). On L(2, 1)-coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics, 160(18).* 2655-2661.

[12] G. J. Chang & D. Kuo. (1996). The L(2,1)-labeling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics, 9(2).* 309-316.

[13] F. W. Glover & M. Laguna. (1998). *Tabu Search.* Springer Science & Business Media.

[14] E. K. Burke, E. K. Burke, G. Kendall & G. Kendall. (2014). *Search methodologies: introductory tutorials in optimization and decision support techniques.* Springer.

[15] F. Glover (1977) Heuristics for Integer programming using surrogate constraints, *Decision Sciences, 8(1).* 156-166

[16] K. I. Aardal, A. Hipolito, C. P. M. Van Hoesel, B. Jansen, C. Roos & T. Terlaky. (1996). A branch-and-cut algorithm for the frequency assignment problem. *Research Memorandum, 96(011).* 3-7.

[17] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan & J. Van Leeuwen (2004). Approximations for λ-colorings of graphs. *The Computer Journal, 47(2).* 193-204.

[18] D. H. Smith, S. Hurley & S. U. Thiel (1998). Improving heuristics for the frequency assignment problem. *European Journal of Operational Research, 107(1).* 76-86.

[19] W. K. Hale. (1980). Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE, 68(12).* 1497-1514.

김 소 정(SoJeong Kim) [정회원]

· 2020년 2월 : 공주대학교 응용수학과 졸업 (이학사)
· 2020년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 수학과 (석사)
· 관심분야 : 인공지능, 최적화 알고리즘
· E-Mail : 20200061@smail.kongju.ac.kr

김 찬 수(Chansoo Kim) [정회원]

· 1991년 : 부산대학교 전산통계학과 졸업
· 1997년 : 부산대학교 통계학과 졸업 (이학박사)
· 2002년 ~ 현재 : 공주대학교 응용수학과 교수
· 2021년 ~ 현재 : 공주대학교 자연과학대학 학장
· 관심분야 : 베이지안 추론, 기계학습, 딥러닝, 빅데이터 분석
· E-Mail : chanskim@kongju.ac.kr

한 근 희(Keunhee Han) [정회원]

· 1986년 : 건국대학교 물리학과 졸업 (학사)
· 1992년 : Univ. of Central Oklahoma 응용수학과 졸업(이학석사)
· 1996년 : Univ. of Central Oklahoma 컴퓨터학과 졸업(이학박사)
· 1996년 ~ 2000년 : 한국전자통신연구원
· 1999년 ~ 2000년 : 미국 NIST 객원연구원
· 2000년 ~ 현재 : 공주대학교 응용수학과 교수
· 관심분야 : 그래프 알고리즘, Genetic Algorithm, Genetic Programming
· E-Mail : kehan@kongju.ac.kr