

<https://doi.org/10.7236/JIIBC.2022.22.1.103>
JIIBC 2022-1-16

최소위험 종목과 비양의 상관관계를 갖는 종목들 분산투자 포트폴리오 최적화

Portfolio Optimization of Diversified Investments with Minimum Risk Asset and Non-Positive Correlation Assets

이상운*

Sang-Un Lee*

요약 본 논문은 단일 종목에 투자금을 전액 투자하는 것에 비해 다수의 종목에 분산투자하는 것이 투자 위험을 보다 감소시킬 수 있다는 포트폴리오 최적화 문제를 다룬다. 널리 알려진 Markowitz의 수익률에 대한 평균-분산 기법(MV)은 위험요인인 분산(또는 표준편차)을 감소시키기 위해 지배원리를 적용하여 효율적 투자선에 있는 종목들을 대상으로 분산투자하는 포트폴리오를 구성하였다. 반면에, 본 논문에서는 최소표준편차를 가진 종목을 필수 투자종목으로 선정하고, 필수 투자종목과 비양(음의, 무)의 상관관계를 갖는 종목들을 대상으로 포트폴리오를 형성하였다. 제안된 방법을 실험한 결과 MV에 비해 보다 적은 위험(표준편차)을 보였다.

Abstract This paper deals with portfolio optimization problem that you could lower the total risk of an investment portfolio by adding risky assets to the mix than the minimum risk of single asset. Popular Markowitz's mean-variance(MV) model construct the portfolio with the point in the efficient frontier using principle of domination where the variance is minimized for a given mean return. While this paper suggest the portfolio with minimum risk asset with non-positive(negative and uncorrelated) correlation assets to it. As a result of experiments, the proposed method shows lower risk(standard deviation) than MV.

Key Words : asset, portfolio optimization, risk measures, mean-variance, non-positive correlation

1. 서론

대부분의 투자자들은 투자를 통해 수익을 얻고자 하기 때문에 고수익 투자종목에만 집중하지만 사실은 수익과 손실은 비대칭 형태를 나타내고 있어, 동일한 수준의 손익이라도 변동성(위험)이 적은 손익이 실제로는 더 큰 수

익을 가져다주기 때문에 “투자의 제1원칙”은 수익률을 최대화가 아닌 변동성을 최소화하는 것이다.

주식의 경우, 기대수익률(expected return)이 높으면 높을수록 위험(risk)도 증가하는 경향을 보이고 있다. 또한, 자산(assets)을 투자할 경우 위험도가 낮은 하나의 주식에 가용자산 전체를 투자하는 것에 위험부담이 매우

*정회원, 강원원주대학교 과학기술대학 멀티미디어공학과
접수일자 2022년 1월 2일, 수정완료 2022년 1월 31일
게재확정일자 2022년 2월 4일

Received: 2 January, 2022 / Revised: 31 January, 2022 /
Accepted: 4 February, 2022

*Corresponding Author: sulee@gwnu.ac.kr
Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National
University, Korea

커 큰 손실을 유발시킬 수 있다. 따라서 다수의 종목에 분산투자를 하는 것이 단일 자산 투자에 비해 위험부담을 보다 완화시킬 수 있는 최선책이다. 따라서 포트폴리오 최적화(portfolio optimization, PO)에 있어서 위험을 분산(완화)시킬 수 있는 전략을 채택해야만 한다.^[1]

PO에 관한 모델들은 모두 수익률(return) 데이터만을 사용한다. 출력변수로는 기대수익률로 평균수익률(mean return)을 채택하고 있으며, 차이점은 입력변수인 위험(수익률 변동)을 어떻게 정의하느냐에 따라 차별성을 나타내고 있다. 예를 들면, Markowitz^[2]는 위험을 수익률의 분산(variance, VAR) 또는 표준편차(standard deviation, SD)로 측정하여 수익률의 요구되는 비율수준에서 포트폴리오의 공분산(covariance)을 최소화시키도록 자산의 가중치(투자액 비율)을 찾고자 하는 평균분산(mean-variance, MV) 모델을, Kanno와 Yamazaki^[3]는 MV의 공분산을 계산하는 단점을 극복하기 위해 위험으로 평균 절대 편차(mean absolute deviation, MAD) 모델을, Young^[4]은 위험을 측정하는데 있어 최대수익률을 최소화(minimum return)시키는 minimax(MM) 모델을 제시하였다.

Lee^[5]는 다양한 위험척도들에 대해 연구한 결과 모든 상황에 적합한 유일한 하나의 위험척도가 없어 투자자의 투자목적과 위험기피에 따라 적절한 위험척도를 선택할 수밖에 없는 실정임을 제시하였다.

따라서 본 논문에서는 MV^[2]와 동일한 방법인 분산을 최소화시키는 위험척도를 적용하며, 차이점은 투자종목을 선정하는 방식을 효율적 투자선(efficient frontier, EF) 대신 단일종목 투자시 최소 표준편차를 갖는 투자종목과 이와 비양의 상관관계를 갖는 종목들을 선정하여 포트폴리오를 결정하는 방식을 제안한다. 2장에서는 포트폴리오 최적화 문제 정의와 위험 척도들에 대한 관련 연구와 문제점을 고찰해 본다. 3장에서는 투자종목을 선정하는 새로운 방식에 기반하여 포트폴리오 최적화를 수행하는 알고리즘을 제안하고, 4장에서는 실험 데이터에 적용하여 제안된 알고리즘의 적합성을 고찰해 본다.

II. 문제 정의, 관련연구와 문제점

본 장에서 적용된 기호는 다음과 같다.^[1]

- n : 포트폴리오의 자산 수(number of assets)
- σ_{ij} : 자산 i 와 j 간 공분산(covariance)
- ρ_{ij} : 자산 i 와 j 간의 상관계수(correlation

coefficient)

- x_j : 자산 j 의 투자액
- R_j : 자산 j 의 수익률(return)
- r_j : 투자 기간 당(per period) 자산 j 의 기대수익률(expected return) 또는 일별 수익률(daily returns)
- $\bar{y}_j = \bar{r}_j$: 자산 j 의 평균수익률 또는 평균 일별 수익률(average daily return)
- ρ : 투자자가 원하는 최소 수익률(minimal rate of return)
- M_0 : 투자 총액(total amount of fund)
- u_j : 자산 j (단일 주식)에 투자를 원하는 최대 투자액
- j : 투자 자산 종류, $j=1,2,\dots,n$
- t : 투자기간 내의 월(또는 주간) 단위, $t=1,2,\dots,T$
- y_{jt} : 시간주기 t 시점에서 자산 j 에 투자된 1\$당 수익률
- w_j : 자산 j 의 포트폴리오 배정
- M_p : 포트폴리오의 최소 수익률(minimum return)
- G : 수익률의 최소 수준(minimum level)
- W : 총 배정

Markowitz^[2]의 MV는 이차계획법 모델(quadratic programming model)로 식 (1)로 표현된다.^[1,5-7]

$$\text{minimize } w(x) = E\left[\sum_{j=1}^n x_j R_j - \sum_{j=1}^n \bar{r}_j x_j\right]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

$$\text{where } \sigma_p^2 = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n \bar{r}_j x_j \geq \rho M_0$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = M_0$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j=1,2,\dots,n.$$

MV는 수익률에 대한 평균(출력변수)과 분산(위험 입력변수)의 통계량만을 이용하는 단순성으로 인해 널리 알려져 있다. 그러나 단점은 자산들에 대한 $\frac{n(n+1)}{2}$ 개의 공분산을 계산하는데 매우 지루한 단점을 갖고 있다. 또한 대규모 문제에 있어서는 이차계획법을 풀기가 매우 어렵다.

Kanno와 Yamazaki^[3]의 MAD는 식 (2)의 선형계획법(linear programming, LP)로 표현된다.^[1,5-7]

$$\text{minimize } w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^n R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^n R_j x_j\right]\right|\right] \quad (2)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \bar{r}_j) x_j \right| = \sum_{t=1}^T \frac{y_t}{T}$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n E[R_j] x_j \geq \rho M_0$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T r_{jt} x_j \geq \rho M_0$$

$$\bar{r}_j = E[R_j] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{jt}$$

$$y_t + \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \bar{r}_j) x_j \geq 0$$

$$y_t - \sum_{j=1}^n (r_{jt} - \bar{r}_j) x_j \geq 0,$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = M_0$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, 2, \dots, n.$$

Young^[4]의 MM은 식 (3)으로 표현된다. 이는 최소수준 수익률(H)을 초과하는 포트폴리오 수익률을 전제로 기대수익률을 최대화시키고자 함이 목적이다.^[1,5-7]

$$\max M_p = \max \min_t \sum_{j=1}^n w_j y_{jt} \quad (3)$$

$$= \max E = \sum_{j=1}^n w_j \bar{y}_j$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n w_j y_{jt} - M_p \geq 0, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \bar{y}_j \geq H, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^n w_j \leq W$$

$$w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Lee^[5]는 위험척도(risk measures)에 있어서 MV, LPM(Lower Partial movement; downside risk), MAD, MaxDD(minimax and maximum drawdown) 등의 장단점을 기술하였으며, 표 1과 같이 모든 상황에 적합한 유일한 하나의 위험척도가 없어 투자목적과 위험기피에 따라 적절한 척도를 선택해야 함을 제시하였다.

PO에 관한 모델들은 그림 1과 같이 위험 입력변수와 평균수익률 출력변수에 대한 산점도를 그려 투자 대상종목을 선택한다.

표 1. 각기 다른 위험척도의 특성

Table 1. The characteristics of different risk measure

Characteristics	MV	LPM	MAD	MM	MaxDD
일반적, 단순	√				
투자자의 위험 반감 정도에 일관성을 유지하고자 할 때		√		√	
수익률분포에 대한 가정이 없을 때		√	√	√	√
이상점에 보다 덜 민감할 때			√		√
대규모 포트폴리오 최적화			√		
유의미한 추정오차			√		
시간종속형 금융시계열					√
계열 상관을 고려할 때					√

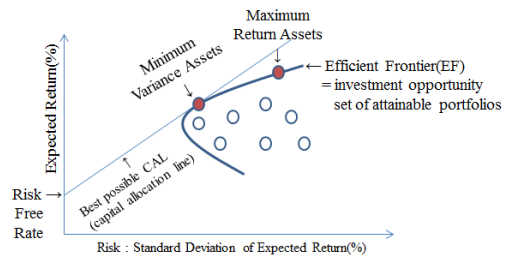


그림 1. 효율적 투자선
 Fig. 1. Efficient frontier

이때, 동일한 위험을 가진 주식 중에서는 기대수익률이 높은 것이 선택되고 동일한 기대수익률을 가진 주식들 중에서는 위험이 가장 낮은 주식이 선택되는 지배원리(principle of domination)^[2]에 따라 가장 우수한 주식투자 안들을 선정하여 연결한 선인 효율적 투자선(EF)의 주식들만을 대상으로 투자되는 자산의 비율인 자산가중치(weight of assets)를 결정한다.

Markowitz의 MV^[2]는 다중투자종목의 상관계수(양의 상관, 음의 상관, 무상관)의 영향으로 인해 단일 종목 투자에 비해 위험(기대 수익률의 표준편차)이 감소될 수 있다는 개념을 적용하여 지배원리를 이용한 EF를 대상으로 투자종목들을 선정하였다. 이러한 혁신적인 개념으로 인해 1990년 노벨경제학상을 수상하는 계기가 되었다. 그러나 Markowitz의 MV^[2] 단점은 다음과 같다.

- (1) 공분산을 계산하고 포트폴리오의 각 자산을 배정하는데 있어 $n \times n$ 의 공분산 행렬을 이용하는데 매우 지루한 과정을 거친다.
- (2) 대규모 문제에 있어서는 이차계획법을 풀기가 매우 어렵다.
- (3) EF에 이상점(outlier) 존재시 공분산의 가중평균(위험)이 이상점 쪽으로 치우치는 경향이 있다.

III. 최소 표준편차 자산과 비양의 상관 자산들 선택 방법

투자자가 위험을 최소화시키면서 수익을 극대화시키려면 어떤 종목들을 선정해야 하는가? 즉, 최소 위험(표준편차) $\min \sigma_j$ 을 가진 j 번째 종목(자산)보다 표준편차들이 큰 자산들 중 어떤 자산들을 선택하여 분산투자하면 투자자가 원하는 위험 σ' 는 최소 표준편차 $\min \sigma_j$ 보다 작아질 수 있는가? 이러한 목적을 달성하는 것이 포트폴리오 최적화의 최종 목표이다.

주식에서의 상관관계는 “함께 움직이는 정도”로 어느 한 주식의 투자수익률이 증가하거나 감소하면 다른 주식도 이와 동일한 방향으로 움직이면 양의 상관관계를, 반대로 움직이면 음의 상관관계를 가진다. 따라서 본 논문에서 제안하는 방법은 그림 2의 피어슨 상관계수에 근거하여, 최소 표준편차(위험)를 가진 단일 종목의 투자 위험을 보다 감소시키려면 최소 표준편차 종목과 양의 상관관계가 아닌 비양의 상관관계(non-positive correlation, NPC) 종목들을 선정하는 것이 최선책이 될 수 있다는 ‘비양의 상관원리’를 적용하였다는데 큰 차이점이 있다.

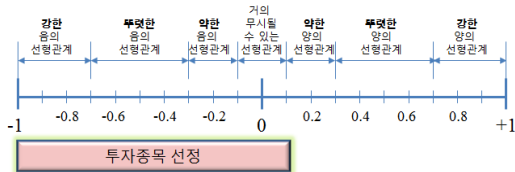


그림 2. 피어슨 상관계수
Fig. 2. Pearson correlation coefficient

본 장에서는 위에서 제시된 $MV^{[2]}$ 가 가지고 있는 3가지 단점을 해결한 전혀 새로운 NPC를 제안하였으며, 다음과 같이 수행된다.

Step 1. 투자자가 투자를 결정할 종목들 n 개를 선정하고, $t = 1, 2, \dots, T$ 시점의 투자 수익률 $r_i = (r_i - r_{i-1})/r_{i-1}$ 을 계산하여 평균 수익률 $\bar{r}_j, j = 1, 2, \dots, n$ 과 표준편차 σ_j 를 MS-Excel을 이용하여 계산하는 과정은 $MV^{[2]}$ 와 동일하다. 다만 σ_j 와 \bar{r}_j 간의 관계인 산점도로부터 EF 투자종목을 선정하는 과정을 생략하는 대신, $\min \sigma_j$ 인 투자종목을 필수(essential) 종목으로 선정하며, 후보종목은 균등투자시의 표준편차보다 적은 종목으로 결정한다.

Step 2. $j = 1, 2, \dots, n$ 개 투자종목에 대한 $t = 1, 2, \dots, T$ 시점의 투자 수익률 $r_i = (r_i - r_{i-1})/r_{i-1}$ 데이터로부터 $n \times n$ 의 공분산 행렬은 MS-Excel의 데이터 - 통계 '데이터분석' 대화상자 - '공분산분석' 도구를 이용하여 쉽게 구한다.

Step 3. 공분산분석 또는 상관분석에서 $\min \sigma_j$ 인 필수 투자종목과 비양의 상관관계를 갖는 종목을 투자 후보 종목으로 선정한다. 여기서 투자 후보 종목은 균등투자 투자를 하였을 경우의 σ_{equal} 을 상한치로 하여 $\sigma_j < \sigma_{equal}, \sigma_{ij} < 0.1$ 만을 대상으로 한정시킨다. 이러한 투자종목 선정 방식은 $MV^{[2]}$ 의 EF 종목 선정 방식과 차별성이 있다.

Step 4. 투자종목 최종 선정은 필수 투자종목과 더불어 Step 1의 단일종목에서 선정된 후보종목과 Step 3에서 비양의 상관관계를 가진 후보종목들 중에서 교집합을 선택한다. 단, Step 1의 후보종목이 $\{\phi\}$ 이면 Step 3의 후보종목들로 결정한다.

Step 5. 선정된 투자종목들에 대해 x_j 를 균등 투자한 초기치를 설정한다. 이 초기치에 대해 $\min \sigma_j$ vs. σ_j 에 대해 $\pm 10, \pm 1.0, \pm 0.1, \pm 0.01$ 로 위험표준편차를 최소화시킨다. 다음으로, σ_j vs. σ_j 에 대해 $\pm 10, \pm 1.0, \pm 0.1, \pm 0.01$ 로 위험표준편차를 최소화시킨다. 이 방법은 2차계획법이나 선형계획법에 대한 소프트웨어 패키지를 이용하지 않고도 MS-Excel로 쉽게 해를 얻을 수 있는 방법이다.

IV. 적용 및 결과분석

본 장에서는 MV 와 제안된 NPC의 성능을 비교분석하여 본다. 실험에 적용된 데이터는 3개로, P_1 는 Thorp^[8], P_2 는 Urbani^[9], P_3 는 Thorp^[10]에서 인용되었으며 그림 3에 제시되어 있다.

그림 3의 실험데이터들에 대해 제안된 NPC 방법과 MV 방법(Efficient Frontier(EF), Dominating Set(DS))을 실험하였다. 각 데이터에 대한 상관계수는 그림 4에 제시되어 있다. 각 데이터에 대한 EF, DS와 NPC의 투자종목들 선정 결과는 그림 5에 제시되어 있다. 각 데이터들에 대한 공분산을 계산하고, 식 (1)에 따른 분산을 최소화 시키는 투자종목별 투자액 x_j , 이에 따른 평균 기대 수익률과 표준편차를 계산한 결과는 그림 6에 제시되어 있다.

Year	DUK	AZO	Equal weights
2010	9.12	72.45	40.8
2009	20.92	13.34	17.1
2008	-21.12	16.31	-2.4
2007	8.77	3.76	6.3
2006	25.57	25.95	25.8
평균수익률	7.2284	24.3307	16.5513
표준편차	16.2685	24.1070	15.0532

(a) P_1

Month	Prices				Average Total Returns (%)				
	ANZ	BHP	CBA	RIO	ANZ	BHP	CBA	RIO	Equal weights
12-Dec	25.05	37.10	62.18	66.01	-	-	-	-	-
13-Jan	26.65	37.80	64.79	66.80	6.39	1.89	4.20	1.20	3.42
13-Feb	28.55	36.59	67.07	66.25	7.13	-3.20	3.52	-0.82	1.66
13-Mar	28.53	32.76	68.01	57.20	-0.07	-10.47	1.40	-13.66	-5.70
13-Apr	31.84	32.45	73.02	55.32	11.60	-0.95	7.37	-3.29	3.68
13-May	27.50	34.51	66.89	54.85	-13.63	6.35	-8.39	-0.85	-4.13
13-Jun	28.42	31.37	68.73	52.38	3.35	-9.10	2.75	-4.50	-1.88
13-Jul	29.87	34.86	74.36	57.85	5.10	11.13	8.19	10.44	8.72
13-Aug	29.80	35.46	73.13	59.17	-0.23	1.72	-1.65	2.28	0.53
13-Sep	30.75	35.67	71.31	61.30	3.19	0.59	-2.49	3.60	1.22
평균 수익률					2.304	-0.436	1.534	-0.819	0.751%
표준편차					6.68	6.45	4.90	6.18	4.12%

(b) P_2

Average Annual Total Returns											
Year	ARO	ARW	ASI	GLW	GTIV	KLIC	MKSI	OME	PL	SNDK	Equal %
2010	8.60%	15.70%	48.00%	1.10%	-1.50%	33.60%	40.80%	85.80%	64.20%	72.00%	36.83%
2009	111.50%	57.20%	9.40%	104.70%	-7.70%	217.10%	17.60%	8.70%	18.70%	202.00%	73.92%
2008	-39.30%	-52.00%	-32.80%	-59.40%	53.70%	-75.20%	-22.70%	-56.80%	-63.00%	-71.10%	-41.86%
2007	28.80%	24.50%	5.90%	28.80%	-0.10%	-18.30%	-15.20%	20.20%	-11.80%	-22.90%	3.99%
2006	17.40%	-1.50%	10.80%	-4.80%	29.30%	-5.00%	26.20%	15.20%	10.40%	-31.50%	6.65%
2005	-10.60%	31.80%	2.50%	67.00%	-11.80%	2.55%	-3.60%	-22.00%	4.30%	151.60%	21.18%
2004	59.10%	5.00%	24.60%	12.90%	32.30%	-40.06%	-36.00%	11.40%	28.20%	-18.40%	7.90%
2003	158.10%	80.90%	86.50%	215.10%	43.50%	151.40%	76.50%	95.40%	25.30%	201.50%	113.42%
평균수익률	29.15%	13.12%	14.92%	25.41%	14.83%	2.93%	5.13%	9.40%	2.05%	22.00%	19.94%
표준편차	61.11%	37.32%	33.00%	78.72%	23.74%	93.51%	34.81%	47.30%	34.30%	104.46%	44.51%

(c) P_3

그림 3. 실험 데이터
 Fig. 3. Experimental data

Correlation		
	DUK	AZO
DUK	1	
AZO	0.07723	1

(a) P_1

Correlation				
	ANZ	BHP	CBA	RIO
ANZ	1			
BHP	-0.192409	1		
CBA	0.874576	-0.0462	1	
RIO	0.106338	0.857122	0.130619	1

(b) P_2

Correlation											
	ARO	ARW	ASI	GLW	GTIV	KLIC	MKSI	OME	PL	SNDK	
ARO	1.0000										
ARW	0.8357	1.0000									
ASI	0.7284	0.7304	1.0000								
GLW	0.8727	0.9371	0.7274	1.0000							
GTIV	0.0598	-0.3921	0.0434	-0.0968	1.0000						
KLIC	0.8155	0.8299	0.5234	0.7946	-0.2941	1.0000					
MKSI	0.5725	0.6371	0.7796	0.6661	0.0184	0.6635	1.0000				
OME	0.6137	0.6483	0.9421	0.5663	-0.0827	0.4882	0.7857	1.0000			
PL	0.4409	0.5695	0.7488	0.3698	-0.4099	0.4400	0.5169	0.7937	1.0000		
SNDK	0.6607	0.8702	0.5515	0.8533	-0.4202	0.8670	0.6226	0.4344	0.4690	1.0000	

(c) P_3

그림 4. 실험데이터에 대한 상관계수
 Fig. 4. Correlation for experimental data

Portfolio Optimization of Diversified Investments with Minimum Risk Asset and Non-Positive Correlation Assets

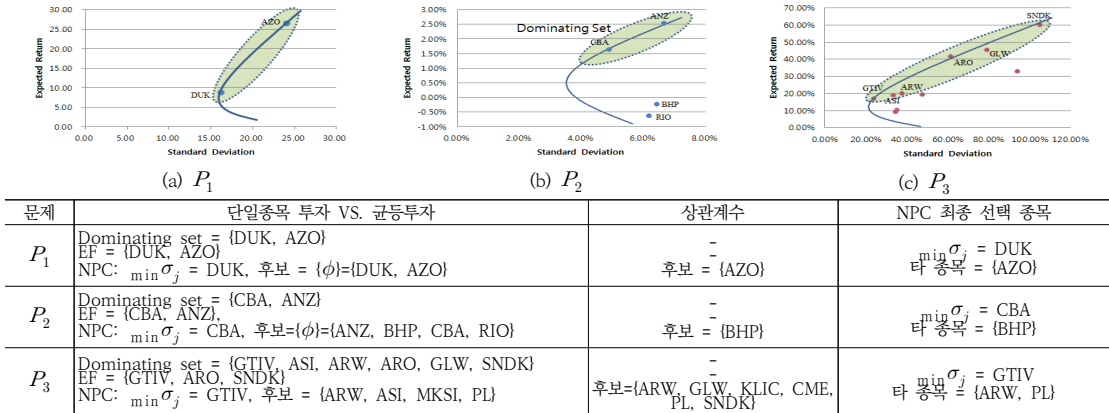


그림 5. 실험데이터에 대한 투자종목
Fig. 5. Investing Assets for experimental data

Covariance		
	DUK	AZO
DUK	0.026467	0.003029
AZO	0.003029	0.058115

Covariance				
	ANZ	BHP	CBA	RIO
ANZ	0.004462	-0.000829	0.00286	0.000439
BHP	-0.000829	0.004155	-0.000146	0.003417
CBA	0.00286	-0.000146	0.002396	0.000395
RIO	0.000439	0.003417	0.000395	0.003825

Year	100%		초기치	+ -10	+ -1.0	+ -0.1
	DUK	AZO	50:50	70:30	70:30	70.2:29.8
2010	9.12	72.45	40.8	28.1	28.0	28.0
2009	20.92	13.34	17.1	18.6	18.7	18.7
2008	-21.12	16.31	-2.4	-9.9	-10.0	-10.0
2007	8.77	3.76	6.3	7.3	7.3	7.3
2006	25.57	25.95	25.8	25.7	25.7	25.7
Avg Return	8.652	26.362	17.507	13.965	13.930	13.930
Std Dev	16.2685	24.1070	15.0532	13.9539	13.9538	13.9538
Average SD	20.1878					

Stock	Equal-weighted portfolio	Single Portfolio	NPC	EF, DS
ANZ	25.00%	0.00%	0.00%	10.00%
BHP	25.00%	0.00%	37.21%	31.00%
CBA	25.00%	100.00%	62.79%	50.00%
RIO	25.00%	0.00%	0.00%	9.00%
Avg Return	0.84%	1.65%	0.95%	0.95%
Std Dev	4.12%	4.90%	3.81%	3.87%

(a) P_1

(b) P_2

Covariance										
	ARO	ARW	ASI	GLW	GTIV	KLIC	MKSI	OME	PL	SNDK
ARO	0.3734	0.1906	0.1469	0.4198	0.0087	0.4660	0.1218	0.1774	0.0924	0.4218
ARW	0.1906	0.1393	0.0900	0.2753	-0.0347	0.2896	0.0828	0.1145	0.0729	0.3392
ASI	0.1469	0.0900	0.1089	0.1890	0.0034	0.1615	0.0896	0.1471	0.0848	0.1901
GLW	0.4198	0.2753	0.1890	0.6197	-0.0181	0.5850	0.1825	0.2109	0.0999	0.7017
GTIV	0.0087	-0.0347	0.0034	-0.0181	0.0564	-0.0653	0.0015	-0.0093	-0.0334	-0.1042
KLIC	0.4660	0.2896	0.1615	0.5850	-0.0653	0.8745	0.2160	0.2160	0.1412	0.8469
MKSI	0.1218	0.0828	0.0896	0.1825	0.0015	0.2160	0.1212	0.1294	0.0617	0.2264
OME	0.1774	0.1145	0.1471	0.2109	-0.0093	0.2160	0.1294	0.2238	0.1288	0.2147
PL	0.0924	0.0729	0.0848	0.0999	-0.0334	0.1412	0.0617	0.1288	0.1177	0.1681
SNDK	0.4218	0.3392	0.1901	0.7017	-0.1042	0.8469	0.2264	0.2147	0.1681	1.0912

Stock	Equal-weighted portfolio	Single Portfolio	NPC	DS	EF
ARO	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
ARW	10.00%	0.00%	16.98%	34.00%	0.00%
ASI	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GLW	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
GTIV	10.00%	100.00%	59.67%	66.00%	88.20%
KLIC	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
MKSI	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
OME	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
PL	10.00%	0.00%	23.35%	0.00%	0.00%
SNDK	10.00%	0.00%	0.00%	0.00%	11.80%
Expected Return	27.75%	17.21%	15.93%	18.23%	22.31%
Std Dev	44.51%	23.74%	14.12%	15.83%	19.32%

(c) P_3

그림 6. 실험 결과
Fig. 6. Result of experiments

P_1 과 P_2 는 단일종목에 집중하여 투자하는 것에 비해 균 등투자를 하는 것이 보다 위험(표준편차)이 증가함을 보인 반면에, P_3 는 단일 투자 종목들의 위험이 보다 적은 경우를 보였다. 이러한 특성을 반영하여 최적의 투자종목 후보를 결정하기 위해 본 논문에서는 비양의 상관관계를 가진 투자 종목들을 추가로 고려하는 방법을 제시한 특징이 있다.

P_3 에서 $\min \sigma_j = \text{GTIV}$ 로 결정되었으며, 단일종목의 표준편차가 균등투자시의 표준편차보다 작은 후보 = {ARW, ASI, MKSI, PL}, GTIV와 비양의 상관관계를 가지는 후보={ARW, GLW, KLIC, CME, PL, SNDK}로 최종 후보는 교집합인 {ARW, PL}로 결정되어 단지 GTIV, ARW와 PL의 3개 종목에 대한 최적의 분산투자 비율 x_j 를 결정하여 해를 얻을 수 있었다. 이와 같이 수행한 이유는 'SNDK'를 예를 들면 균등투자시의 표준편차 44.51%에 비해 'SNDK' 단독 투자시의 표준편차가 104.46%로 이상점을 보였기 때문이다.

그림 4로부터 $\min \sigma_j$ 단일 종목에 투자액 전액을 투자하는 것에 비해 분산투자를 할 경우 보다 위험을 감소시킬 수 있음을 알 수 있다. 이러한 위험을 최대로 감소시킬 수 있는 최선책으로는 Markowitz의 $MV^{[2]}$ 가 선택한 Efficient Frontier(EF), Dominating Set(DS)에 비해 NPC가 보다 좋은 선택방법임을 알 수 있다.

Average Total Returns					
Periods	ATT	GMC	USX	TBILL	Equal %
1	0.111	0.223	0.122	0.05	12.65%
2	0.114	0.46	3.00E-03	0.05	15.68%
3	0.323	-0.09	0.111	0.05	9.85%
4	1.00E-03	-0.107	0.054	0.05	-0.05%
5	-0.209	0.12	0.169	0.05	3.25%
6	0.223	0.309	-0.035	0.05	13.68%
7	0.26	0.411	0.133	0.05	21.35%
8	0.21	0.05	0.732	0.05	26.05%
9	0.144	0.1	0.021	0.05	7.88%
10	0.412	0.445	0.131	0.05	25.95%
11	-0.013	0.123	6.00E-03	0.05	4.15%
12	0.553	0.55	0.908	0.05	51.53%
Avg Return	17.74%	21.62%	19.63%	5.00%	16.00%
Std Dev	19.44%	20.96%	28.77%	0.00%	13.45%

(a) P_4

Average Total Returns							
Periods	Stocks	Money Market	Bonds	Realty	FoxEx	Hedge	Equal %
1	0.2224	0.0964	0.1008	0.0620	0.0475	0.1058	10.58%
2	0.1616	0.0706	0.0816	-0.0350	0.0563	0.0670	6.70%
3	0.0527	0.0768	0.0846	-0.0250	0.0835	0.0545	5.45%
4	0.1546	0.0826	0.0918	0.3210	0.0921	0.1484	14.84%
5	0.2062	0.0855	0.0926	0.1530	0.0610	0.1197	11.97%
6	-0.0042	0.0826	0.0906	0.0478	0.0370	0.0508	5.08%
Avg Ret	13.22%	8.24%	9.03%	8.73%	6.29%	9.10%	9.10%
Std Dev	8.16%	0.79%	0.61%	12.16%	1.93%	3.62%	3.62%

(b) P_5

그림 7. 추가 실험 데이터
 Fig. 7. Additional experimental data

추가적으로 그림 7의 P_4 와 P_5 에 대해 실험을 수행한 결과는 그림 8에 제시하였다.

Assets	Portfolio Scenarios				
	Risk Minimized(Desired Return : 15%)				
	Equal-weighted	Single Portfolio	NPC	EF=DS	Excel Solver
ATT	25.00%	78.50%	14.42%	41.00%	13.60%
GMC	25.00%	0.00%	38.58%	29.00%	39.20%
USX	25.00%	0.00%	11.98%	0.00%	12.00%
TBILL	25.00%	21.50%	35.02%	30.00%	35.20%
Portfolio Return	15.9958%	15.0022%	15.0001%	15.0429%	15.0016%
Std Dev	13.4530%	15.2604%	11.4289%	12.2420%	11.4296%

(a) P_4

Assets	Portfolio Scenarios				
	Risk Minimized				
	Equal-weighted	Single Portfolio	NPC	EF	Excel Solver
Stocks	16.67%	0.00%	16.40%	3.55%	0.00%
Money Market	16.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Bonds	16.67%	100.00%	58.46%	96.45%	85.34%
Realty	16.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
FoxEx	16.67%	0.00%	25.14%	0.00%	14.66%
Hedge	16.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Portfolio Return	9.10%	9.03%	9.03%	9.18%	8.63%
Std Dev	3.0082%	0.6138%	0.0195%	0.5396%	0.5245%

(b) P_5

그림 8. 추가 실험 데이터에 대한 결과
 Fig. 8. Result of additional experimental data

그림 4와 그림 8의 실험 결과인 위험(표준편차)를 요약하면 표 2와 같다. 제안된 NPC는 3개 실험데이터를 모두에서 위험을 최소로 감소시킬 수 있는 전략임을 알 수 있다.

표 2. 알고리즘 성능 비교
 Table 2. Compare with algorithm performance

문제	$\min \sigma_j$ 단일 종목 투자	위험(표준편차)			
		분산투자			
		DS	EF	Excel Solver	NPC
P_1	16.27%	13.95%	13.95%	-	13.95%
P_2	4.90%	3.87%	3.87%	-	3.81%
P_3	23.74%	15.83%	19.32%	-	14.12%
P_4	15.26%	12.24%	12.24%	11.4296%	11.4289%
P_5	0.6138%	0.5396%	0.5396%	0.5245%	0.0195%

V. 결론

본 논문에서는 포트폴리오 최적화 문제(POP)에 대한

여 위험(표준편차)을 최소화시키는 방법을 제안하였다.

포트폴리오 최적화에 적용되는 위험척도로는 분산(표준편차, MV), 평균절대오차(MAD), 최소최대방법(MM) 등 다양한 척도들이 제안되었다. 본 논문에서는 단일종목 투자시 표준편차가 최소인 투자종목을 필수 투자종목으로 선정하고, 이 종목과 비양의 상관관계를 가지는 종목들을 후보 종목으로 선정한 포트폴리오를 구성하여 위험을 최소로 시키는 각 종목의 투자비율을 결정하는 방법을 제시하였다.

제안된 NPC 알고리즘을 실험한 결과 단일종목 투자시 표준편차가 최소인 투자종목의 위험을 크게 줄일 수 있는 결과를 얻었으며, 이 결과는 MV의 지배집합(DS)이나 효율적 투자선(EF) 방법들 보다 좋은 결과를 나타내었다.

제안된 NPC는 MV의 2차계획법이나 MAD의 선형계획법에 대한 소프트웨어 패키지를 이용하지 않고도 MS-Excel로 쉽게 해를 얻을 수 있었으며, EF에 이상점이 존재하는 P_3 문제의 'SNDK'와 같이 공분산의 가중평균(위험)이 이상점 쪽으로 치우치는 경향을 가진 MV의 단점을 미연에 방지할 수 있었다.

References

[1] L. W. Hoe, J. S. Hafizah, and I. Zaidi, "An Empirical Comparison of Different Risk Measures in Portfolio Optimization," *Business and Economic Horizons*, Vol. 1, No. 1, pp. 39-45, Apr. 2010, <https://doi.org/10.22004/ag.econ.95934>

[2] H. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91, Mar. 1952, <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>

[3] H. Kanno and H. Yamazaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market," *Management Science*, Vol. 37, No. 5, pp. 519-531, May 1991, <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.5.519>

[4] M. Young, "A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution," *Management Science*, Vol. 44, No. 5, pp. 673-683, May 1998, <https://doi.org/10.1287/mnsc.44.5.673>

[5] C. L. Lee, "The Strengths and Limitations of Risk Measures in Real Estate: A Review," *Malaysian Journal of Real Estate*, Vol. 1, No. 1, pp. 68-74, 2006.

[6] K. L. Teo and X. Q. Yang, "Portfolio Selection Problem with Minimax Type Risk Function," *Annals of Operations Research*, Vol. 101, No. 1-4, pp. 333-349, Jan. 2001, <https://doi.org/10.1023/A:1010909632198>

[7] S. H. Jaaman, W. H. Lam and L. Z. Isa, "Risk Measures

and Portfolio Construction in Different Economic Scenarios," *Sains Malaysiana*, Vol. 42, No. 6, pp. 875-880, Jun. 2013.

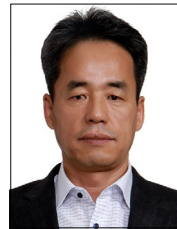
[8] W. A. Thorp, "Mean Variance Optimization," *Computer Investing*, <http://www.aaii.com/computerizedinvesting/article/mean-variance-optimization>, Third Quarter, 2011.

[9] P. Urbani, "Mean-Absolute Deviation(MAD) Portfolio Optimization in Excel and VBA," http://www.academia.edu/11074736/Mean_Absolute_Deviation_MAD_Portfolio_Optimization_in_Excel_and_VBA, 2017.

[10] W. A. Thorp, "Mean Variance Optimization," *Computer Investing*, <http://www.aaii.com/computerizedinvesting/article/mean-variance-optimization-multi-asset-portfolio>, Fourth Quarter, 2011.

저 자 소 개

이 상 운(정회원)



- 1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용

과 전임강사

- 2004년 ~ 2007년 2월 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007년 3월 ~ 2015년 3월 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
- 2015년 4월 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 정교수
- 관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 개발 방법론, 분석과 설계 방법론, 시험 및 품질보증, 소프트웨어 신뢰성, 인공지능과 빅데이터분석, 최적화 알고리즘
- e-mail : sulee@gwnu.ac.kr