韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2022.25.1.57
2022. 1. 제 25권, 제 1호, 57–79

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2022, Vol. 25, No. 1, 57–79

초등학교 수학 교과서에 제시된 비례추론 과제의 분석

송동현(세종종촌초등학교, 교사)
박영희(청주교육대학교, 교수)†

본 연구에서 초등 교과서의 비와 비율 단원 및 비례식과 비례배분 단원에서 비와 비례 개념과 관련하여 제시된 활동을 분석하여 교과서에 제시된 비례추론 과제가 교육과정별로 어떠한지 알아보았다. 비와 비율 단원에 제시된 비례추론 과제가 2009 개정 때에는 비와 비율의 곱셈 구조 유형과 비례추론 활동이 모두 늘어 내용이 다양해졌지만, 백분율의 곱셈 구조 유형과 비례추론 활동은 모두 약화되었다. 2015 개정 때에도 둘 다 약화되었고, 백분율의 곱셈 구조 유형과 비례 추론 활동은 모두 늘어 내용이 다양해졌다. 비례식과 비례배분 단원에 제시된 비례추론 과제가 2009 개정 시기에는 비의 성질의 곱셈 구조 유형과 비례추론 활동이 모두 증가하여 내용이 다양해졌지만, 비례식과 비례배분은 곱셈 구조 유형만 늘고 비례추론 활동에는 큰 변화가 없어 이전과 내용이 비슷했다. 그리고 2015 개정 시기에 비례식의 곱셈 구조 유형과 비례추론 활동이 모두 늘어 내용이 다양해졌지만, 비의 성질과 비례배분은 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동에 큰 변화가 없어 이전 내용과 비슷하였다. 비와 비율 단원과 비례식과 비례배분 단원에서 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석하려는 시도가 주로 있었다.

I. 서론

학교에서 비와 비례를 지도할 때 학생들의 비형식적인 추론 전략을 다루기보다 형식적인 절차를 강조하는 경우가 많다(정은실, 2013). 비례추론은 비와 비율 그리고 비례 개념을 중심으로 수와 연산에서 분수와 소수, 곱셈과 나눗셈, 도형에서 닮음과 삼각법, 측정에서 단위 환산, 통계에서 비교 상황 등 수학 내적으로 많은 부분과 관련되어 있으며, 지리학에서 인구밀도나 축척, 과학에서 속도, 힘, 중력, 농도, 에너지, 경제학에서 이익과 손실, 역학에서 운동과 같이 수학 외적으로도 다양한 부분과 관련되어 있다(정영옥, 2015). 그런데 2007 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011d, p.39)에서 비와 비율 개념은 6학년에서 5학년으로, 정비례와 반비례 개념은 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 조정했다. 그리고 2009 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015a, p.66)에서 할푼리와 연비 개념은 삭제하였다. 또 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2020a, p.8)에서 정비례와 반비례 개념은 다시 중학교로 상향 이동했다. 이러한 과정에서 비와 비례 개념의 변화를 볼 필요가 있다.

본 연구에서 비와 비례 개념과 관련하여 각 교육과정에 따른 교과서에 제시된 비례추론 과제를 분석하기 위하여 다음과 같이 연구를 진행하였다. 첫째, 2007, 2009, 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서(교육과학기술부, 2011a, 2011b, 2011c; 교육부 2015a, 2015b, 2015c, 2016, 2020a, 2020b)에 제시된 비와 비율 단원의 활동을 분석하였다. 둘째, 2007, 2009, 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에 제시된 비례식과 비례배분 단원의 활동을 분석하였다.

권미숙, 김남균(2009)의 연구에서 학생들이 비례식으로만 해결하려고 할 때 어려움을 겪을 수 있으며 문제 상황을 이해하여 곱셈 추론 전략 등의 다른 접근도 필요하다고 하였다. 엄선영, 권혁진(2011)은 비례추론의 난이도가 높은 문제일수록 중·상 수준 학생들이 추론 과정을 생략하고 비례식으로만 문제를 해결하려고 한다고 하였다. 단순히 공식이나 기호를 무의미하게 조작하기보다 그 개념의 의미를 이해하도록 가르치기 위한 방안을 알아 볼 필요가 있다.

연구문제로서 초등 수학 교과서에 제시된 비와 비율 단원의 비례추론 과제는 교육과정별로 어떠한지, 그리고 초등 수학 교과서에 제시된 비례식과 비례배분 단원의 비례추론 과제는 교육과정별로 어떠한지를 알

* 접수일(2021년 12월 23일), 심사(수정)일(2022년 1월 12일), 게재확정일(2022년 1월 26일)
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 비례추론 과제, 곱셈 구조, 스칼라 연산자, 함수 연산자, 다중 묶음 관점, 변동 부분 관점
† 교신저자 : yhpark@cje.ac.kr

아보는 것으로 설정하였다. 연구 문제를 해결하기 위하여 Beckmann과 Izsák(2015)의 비례 관점으로 Vergnaud(1996)의 곱셈 구조를 재해석하여 비례추론 과제를 4가지 상황으로 표현하였다. 곱셈구조와 4가지 상황을 바탕으로 2007, 2009, 2015 개정 교과서에 제시된 비와 비율 단원과 비례식과 비례배분 단원의 곱셈 구조는 어떠한지, 그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하고 있는지 비교하여 살펴보았다.

II. 비례 추론에 대한 이론적 배경

1. 비

정은실(2003)은 비 개념의 두 가지 전통이 다음과 같이 혼재되어 있음을 밝혔다. 첫째, 비는 두 양 사이의 곱셈적인 관계이다. Euclid는 <원론>에서 비를 '같은 종류의 두 양 사이의 크기에 대한 일종의 관계'라고 정의하였다. 여기에서 양은 무한히 나눌 수 있는 양으로 길이나 넓이처럼 수가 아니라 선이나 면처럼 크기 그 자체를 의미한다. 이 연구에서 비를 수나 양으로 보지 않았기 때문에 분수로 표현하지 않고, 덧셈·곱셈을 하지 않았다.

둘째, 비는 두 양 사이의 상대적인 크기이다. Euclid는 비를 서로 곱하지는 않았지만, 복비를 구하는 연산을 했다. 이후에 이를 구하는 방법이 확장되어 '비의 크기' 개념이 도입되었고, 이 연산을 마치 수의 곱셈처럼 다루었다. 이처럼 비에 대한 새로운 해석은 모든 비가 그 비의 크기를 표현하는 수와 관련을 맺게 되었다. 그 영향으로 현재 비와 비의 값을 구별하지 않게 되어 비 $a:b$를 분수 $\frac{a}{b}$와 동치인 것으로 생각한다.

이처럼 비는 유클리드 원론의 정의에서 살펴볼 수 있는 바와 같이 역사적으로 같은 종류의 크기에만 한정해서 사용하다가, 이후에 과학의 발전과 더불어 다른 종류의 크기에 대해서도 사용하여 이를 비(ratio)와 비율(rate)로 구분하였다. 하지만, 우리나라 초등학교 교과서에서는 비와 비율을 두 양 사이의 관계 또는 크기를 나타내는지 구분하는 용어로 사용하며, 비와 비례도 두 양의 곱셈적 관계 또는 두 비가 같음을 의미하는지 구분하는 용어로 사용하고 있다(정영옥, 2015).

비의 진정한 의미는 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 것이다(정은실, 2003). Freudenthal(1983)은 이러한 비의 구조를 등속운동을 예로 들어 설명하였다. 등속 운동 상황에서 시간 t_1, t_2에 대응하는 거리를 각각 s_1, s_2라고 할 때, 다음과 같이 비례식으로 표현할 수 있다. 첫째, $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$이다. 양변의 두 비는 각각 한 체계 내에서의 비로 그 결과가 수인 내적비를 의미한다. 이때 한 체계 내에서의 비는 다른 체계 내에서의 대응되는 비와 서로 같다.

둘째, $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$이다. 양변의 두 비는 두 체계 사이의 비로 그 결과가 양인 외적비를 의미한다. 이때 양은 내포량으로 속력을 의미한다.

이처럼 Freudenthal(1983)은 외적인 상황과 두 양의 값은 계속해서 변하지만, 본질적으로 동일한 관계가 그 안에 존재함을 학생들이 인식하여 내적비의 불변성과 외적비의 일정성을 이해하고 동치인 비를 만들 수 있어야 비의 의미를 제대로 이해하였다고 보았다.

2. 비율

Vergnaud(1996)는 개념 장 이론을 통해 곱셈 구조를 측정 공간의 동형, 측정 공간의 곱, 그리고 다중비례로 구분하여 설명하였다(정은실, 1998). 여기에서 측정 공간의 동형은 두 측정 공간 M_1과 M_2 사이에 단순 비례 관계가 구성되는 구조이다. 여기에서 조합될 수 있는 비례 관계는 4가지 유형으로 곱셈, 나눗셈 제1유형, 나눗셈 제2유형, 삼수법(rule of three)이다. 이를 각각 표현하면 [그림 1]과 같다.

M_1	M_2
1	a
b	x

곱셈

M_1	M_2
1	$x=f(1)$
n	$b=f(n)$

나눗셈 제1유형

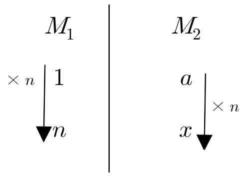
M_1	M_2
1	$a=f(1)$
x	$b=f(x)$

나눗셈 제2유형

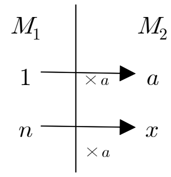
M_1	M_2
a	b
c	x

삼수법

[그림 1] 비례관계 4가지 유형



[그림 2] 스칼라 연산자



[그림 3] 함수 연산자

먼저 [그림 2]에서 ×n은 스칼라 연산자이다. M_1의 1을 n으로 관련시키는 스칼라 연산자(×n)를 M_2의 a를 x와 관련시키기 위해 사용할 수 있다. 따라서 $x = a \times n$이며, 이때 스칼라 연산자는 단위가 없는 수로 한 체계 내에서의 비인 내적비와 연결된다. 다음으로 [그림 3]에서 ×a는 함수 연산자이다. M_1의 1을 M_2의 a로 관련시키는 함수 연산자(×a)를 M_1의 n을 M_2의 x와 관련시키는 데 사용할 수 있다. 따라서 $x = n \times a$이며, 이때 함수 연산자는 두 양의 몫을 단위로 하는 내포량으로 두 체계 사이의 비인 외적비와 연결된다.

둘째, [그림 1]에서 나눗셈 제1유형과 나눗셈 제2유형은 각각 등분제와 포함제를 나타낸다. 먼저 등분제는 n과 $f(n)$를 알고 $f(1)$을 구하는 경우이다. 나눗셈 제1유형은 M_1의 n를 1로 관련시키는 스칼라 연산자 ÷n를 M_2의 b에 적용함으로써 해결할 수 있다. 다음으로 나눗셈 제2유형인 포함제는 $f(1)$과 $f(x)$를 알고 x를 구하는 경우이다. M_2의 a를 M_1의 1로 관련시키는 함수 연산자 ÷a를 M_2의 b에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이때 함수 연산자는 스칼라 연산자와는 달리 두 양의 몫을 단위로 하는 내포량이기 때문에 학생들이 이해하기에 어려울 수 있다. 그래서 이를 피하고자 M_2의 a를 b로 관련시키는 스칼라 연산자 $\times \dfrac{b}{a}$를 M_1의 1에 적용할 수 있다.

셋째, [그림 1]의 네 번째는 비례 관계 유형 중 가장 일반적인 구조인 삼수법(rule of three)을 나타낸다. x를 구하기 위해서는 다음과 같이 두 가지 방법이 있다. 먼저, M_1에서 a를 c로 관련시키는 스칼라 연산자 $\times \dfrac{c}{a}$를 M_2의 b에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 $x = b \times \dfrac{c}{a}$이다. 다음으로, M_1의 a를 M_2의 b로 관련시키는 함수 연산자 $\times \dfrac{b}{a}$를 M_1의 c에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 $x = c \times \dfrac{b}{a}$이다.

두 측정 공간 M_1과 M_2 사이의 관계에 따라 곱셈 구조 안에서 성립되는 곱의 관계가 달라질 수 있다. 따라서 교사는 학생들이 특정한 알고리즘을 문제 맥락에 그대로 적용하게 하는 것 보다 두 양의 관계를 먼저 추론할 수 있도록 해야 한다.

3. 비례

Beckmann과 Izsák(2015)는 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점을 제시하여 비례 상황에 내재한 공변과 불변을 이해하는 데 도움을 준다. 이들은 곱셈 및 나눗셈, 비례 관계를 모두 포함하는 곱셈 관계를 [표 1]과 같이 방정식으로 표현했다. 식에 표시된 M, N, P는 상수이고 각각 묶음의 개수, 묶음마다 단위량, 전체 단위량을 의미한다. x, y는 변수로서 각 식에서 구하여야 할 값이다.

여기에서 Beckmann과 Izsák(2015)은 방정식 E와 F를 각각 비례 관계에 대한 곱셈적 사고로서 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점으로 소개한다. 예를 들면 물과 포도 원액을 3:2의 비로 섞어서 포도 주스를 만들었을 때, 포도 주스의 양을 배로 늘리는 방법을 다음과 같이 두 가지 관점으로 해석할 수 있다.

첫째, 다중 묶음 관점은 방정식 E처럼 단위량(N)을 각각 고정한 채 그 묶음의 수(M)를 x배 한다. 포도 주스는 포도 원액 2컵당 물 3컵으로 만들어지며, 이를 유지한 채 묶음의 수인 물과 포도 원액의 컵 수만 동시에 늘리는 방법이다. 따라서 n번 반복하면, 물 3×x컵과 포도 원액 2×x컵으로 n개의 포도 주스 병을 만들 수 있다. 이처럼 포도 주스의 양이 변함에 따라 묶음의 수인 컵의 수가 공변하고, 단위량인 컵의 크기는 변하지 않는다.

둘째, 변동 부분 관점은 방정식 F처럼 묶음의 수(M)를 각각 고정한 채 그 단위량(N)을 x배 한다. 포도 주스는 같은 양의 물과 포도 원액을 각각 3번과 2

번씩 넣어서 만들어지며, 이를 유지한 채 단위량인 물과 포도 원액의 컵 크기만 동시에 늘리는 방법이다. 따라서 x배 큰 컵을 사용하면, 물 x×3컵과 포도 원액 x×2컵으로 x배 많은 포도 주스를 만들 수 있다. 이처럼 포도 주스의 양이 변함에 따라 단위량인 컵의 크기가 공변하고, 묶음의 수인 컵의 수는 변하지 않는다.

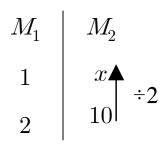
[표 1] 곱셈 관계에 대한 방정식(Beckmann & Izsák, 2015, p.19)
N×M=P
(각각 묶음의 단위량)×(묶음의 수)=(M개의 묶음에 있는 전체 단위량)

방정식 A	방정식 B	방정식 C
$N\times M=x$	$x\times M=P$	$N\times x=P$
묶음마다 단위량 N일 때, 묶음 M개의 전체의 단위량은?	각 묶음마다 단위량이 얼마씩 있는가?	묶음이 몇 개 있는가?
곱셈	나눗셈 (등분제)	나눗셈 (포함제)
방정식 D	방정식 E	방정식 F
$x\times y=P$	$N\times x=y$	$x\times M=y$
역비례 관계	단위량을 고정하고 묶음의 수가 변화됨	묶음의 수를 고정하고 단위량이 변화됨
	비례관계 (다중 묶음)	비례관계 (변동 부분)

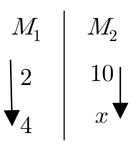
이처럼 변하는 두 양의 관계에서 변하는 측면과 변하지 않는 측면을 이해하는 것은 비 개념을 이해하는데 도움을 준다. Beckmann과 Izsák(2015)은 두 관점이 서로 상호 보완적이라고 하면서 교사는 학생들의 비례 추론 발달을 위해 이 두 가지 관점을 모두 이해할 수 있도록 적절한 경험을 제공해야 하며, 각 관점에 적합한 인지적 자원을 제시할 것을 제안한다.

4. 곱셈 구조의 재해석

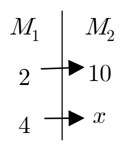
지금까지의 선행 연구를 검토하면, 교사는 학생들이 두 수를 비교하는 상황에서 두 양 사이의 곱셈적인 관계를 인식하고, 이를 다른 상황에서도 발견할 수 있도록 지도해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 Vergnaud(1996)의 곱셈 구조를 Beckmann과 Izsák(2015)의 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점으로 재해석하고자 한다. 예를 들어 다중 묶음 관점이면 사과 10개를 2명에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 이때 같은 양만큼 4명에게 나누어주려면 사과는 모두 몇 개가 필요한지 물어볼 수 있다. 이를 곱셈 구조로 표현하면 처음 상황은 [그림 4]와 같이 등분제 유형이며, 나중 상황은 [그림 5~6]과 같이 삼수법 유형으로 측정 공간 내의 분석과 측정 공간 사이의 분석을 시도할 수 있다.



[그림 4] 등분제 유형



[그림 5] 측정 공간 내의 분석 - 등분제

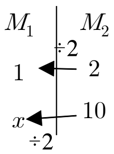


[그림 6] 측정 공간 사이의 분석 - 등분제

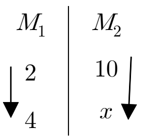
먼저, 등분제 유형이다. 사과 10개를 2명에게 똑같이 나누어주려면 1명에게 5개씩 주어야 하므로 x=5이다. 이를 식으로 나타내면 10(개)÷2(명)=5(개/명)로 (전체량)÷(묶음의 수)=(단위량)이다. 이때, 단위량은 두 양을 몫으로 하는 내포량이며, 이를 고정한 채 전체량과 묶음의 수 사이의 관계를 추론할 수 있다. 다시 말하면 5×(묶음의 수)=(전체량)이므로 다중 묶음 관점과 일치한다. 다중 묶음 관점은 두 외연량을 나눗셈으로 비교한 것이다. 지금의 문제 상황은 묶음의 수인 사람 수를 2명에서 4명으로 증가시켰다. 이를 측정 공간 내의 분석으로 해결할 수 있다. 사람 2명을 4명으로 관련시키는 스칼라 연산자 ×2를 사과 10개에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이때 2는 단위가 없는 수로 한 체계 내에서의 비인 내적비다. 즉, 사람 수가 2(명)×2(배)=4(명)이므로, 사과의 개수도 10(개)×2(배)=20(개)이다. 이 문제 상황을 측정 공간 사이의 분석으로 해결 할 수 있다. 사람 2명을 사과 10개로 관련시키는

함수 연산자 ×5를 사람 4명에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이때 5는 두 양의 몫을 단위로 하는 내포량으로 단위량인 한 사람당 사과의 개수 5개를 의미하며, 두 체계 사이의 비인 외적비다. 즉, 사람 수가 2명일 때 사과의 개수는 5(개/명)×2(명)=10(개)이므로, 사람 수가 4명일 때 사과의 개수는 5(개/명)×4(명)=20(개)이다. 따라서 x=20으로 사과 20개가 필요하다.

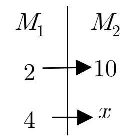
또한, 변동 부분 관점으로 사과 10개를 한 사람에게 2개씩 나누어 주려고 한다. 이때 같은 사람에게 한 사람당 4개씩 나누어주려면 사과는 모두 몇 개가 필요한지 물어볼 수 있다. 이를 곱셈 구조로 표현하면 처음 상황은 [그림 7]과 같이 포함제 유형이며, 나중 상황은 [그림 8~9]와 같이 삼수법 유형으로 측정 공간 내의 분석과 측정 공간 사이의 분석을 시도할 수 있다.



[그림 7] 포함제 유형



[그림 8] 측정 공간 내의 분석 - 포함제



[그림 9] 측정 공간 사이의 분석 - 포함제

를 추론할 수 있다. 다시 말하면 (단위량)×5=(전체량)이므로 변동 부분 관점과 일치한다. 지금의 문제 상황은 단위량인 한 사람당 사과의 개수를 2개에서 4개로 증가시켰다.

다음으로, 측정 공간 내의 분석을 통해, 한 사람당 사과의 개수 2개를 4개로 관련시키는 스칼라 연산자 ×2를 사과 10개에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이때 2는 단위가 없는 수로 한 체계 내에서의 비인 내적비다. 즉, 한 사람당 사과의 개수가 2(개/명)×2(배)=4(개/명)이므로, 사과의 개수도 10(개)×2(배)=20(개)이다. 측정 공간 사이의 분석을 통해, 한 사람당 사과의 개수 2개를 사과의 개수 10개로 관련시키는 함수 연산자 ×5를 한 사람당 사과의 개수 4개에 적용함으로써 해결할 수 있다. 이때 5는 외연량으로 묶음의 수인 사람 수 5명을 의미하며, 두 체계 사이의 비인 외적비다. 즉, 한 사람당 사과의 개수가 2개일 때 사과의 개수는 2(개/명)×5(명)=10(개)이므로, 한 사람당 사과의 개수가 4개일 때 사과의 개수는 4(개/명)×5(명)=20(개)이다. 따라서 x=20으로 사과 20개가 필요하며, 변동 부분 관점은 외연량과 내포량을 나눗셈으로 비교한 것이다.

이를 정리하면, 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점으로 측정 공간 내의 분석과 측정 공간 사이의 분석으로 해석하면 총 4가지 상황으로 볼 수 있으며 그림으로 표현하여 정리하면 [표 2]와 같다.

[표 2] 비례 관점에 따른 곱셈 구조 표현

비례관점	측정 공간 내의 분석		측정 공간 사이의 분석	
다중 묶음 관점	M_1 ② ②②	M_2 ❿ ❿❿	M_1 ①① ①①①①	M_2 ❺❺ ❺❺❺❺
변동 부분 관점	M_1 ①① ②②	M_2 ❶×10 ❷×10	M_1 ② ④	M_2 ❷❷❷❷❷ ❹❹❹❹❹

먼저, 포함제 유형이다. 사과 10개를 한 사람에게 2개씩 나누어주려면 5명에게 줄 수 있으므로 x=5이다. 이를 식으로 나타내면 10(개)÷2(개/명)=5(명)로 (전체량)÷(단위량)=(묶음의 수)이다. 이때, 묶음의 수는 외연량이며, 이를 고정한 채 전체량과 단위량 사이의 관계

첫째, 다중 묶음 관점에 따른 측정 공간 내의 분석을 해석하면, 단위량을 고정한 채 묶음의 수가 달라지므로 사람 4명은 사람 2명씩 2묶음이다. 그리고 이를 이용하면 사과 x개는 사과 10개씩 2묶음이다. 따라서

x=10×2로 표현할 수 있으며, 스칼라 연산자 ×2는 묶음의 수에 영향을 주었다.

둘째, 다중 묶음 관점에 따른 측정 공간 사이의 분석을 해석하면, 단위량을 고정한 채 묶음의 수가 달라지므로 사과 10개는 한 사람당 사과의 개수 5개씩 사람 2명에게 준 것이다. 그리고 이를 이용하면 사과 x개는 한 사람당 사과의 개수 5개씩 사람 4명에게 준 것이다. 따라서 x=5×4로 표현할 수 있으며, 함수 연산자 ×5는 단위량에 영향을 주었다.

셋째, 변동 부분 관점에 따른 측정 공간 내의 분석을 해석하면, 묶음의 수를 고정한 채 단위량이 달라지므로 한 사람당 사과의 개수 4개는 한 사람당 사과의 개수 2개가 각각 2배씩 늘어났다. 그리고 이를 이용하면 사과 x개는 사과 10개가 각각 2배씩 늘어났다. 따라서 x=2×10으로 표현할 수 있으며, 스칼라 연산자 ×2는 단위량에 영향을 주었다.

넷째, 변동 부분 관점에 따른 측정 공간 사이의 분석을 해석하면, 묶음의 수를 고정한 채 단위량이 달라지므로 사과 10개는 한 사람당 사과의 개수 2개씩 사람 5명에게 준 것이다. 그리고 이를 이용하면 사과 x개는 한 사람당 사과의 개수 4개씩 사람 5명에게 준 것이다. 따라서 x=4×5로 표현할 수 있으며, 함수 연산자 ×5는 묶음의 수에 영향을 주었다.

5. 비례 추론에 관한 선행연구 분석

이중수직선과 이중테이프 모델을 이용하여 Beckmann과 Izsák(2015)의 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점을 반영한 실생활 문제 해결 방법을 임재훈, 이형숙(2015)이 제안하였다. 조지원, 신항균(2018)은 공변성과 불변성을 이해하는 틀로 제시되는 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점을 반영할 수 있는 이중수직선과 이중테이프 모델을 활용한 비율 지도 수업을 통해 그런 모델을 활용한 수업이 학생들의 비례추론 능력에 긍정적인 영향을 준다고 하였으며 수학 학습 태도에도 긍정적 영향이 있었다고 하였다. 서은미, 방정숙, 이지영(2017)은 비례추론에서 형식적 절차의 기계적 활용을 비판하고 이에 대한 대안으로 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 이용하는 비례추론 수업을 구성하고 분석하여 이런 시각적 모델이 비례 의미 이해와 관련된 문제 해결에 중요한 역할을 할 수 있음을 알았다고 하였다.

외국 교과서에서 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점이 시각적 모델인 수직선, 테이프 다이어그램을 이용하여 구체적으로 나타나 있다고 박선영, 이광호(2018)는 밝혔는데 이 연구에서 분석한 싱가포르, 미국, 일본 초등교과서의 문제의 풀이과정이 자세하고 정확하게 제시되어 있어서 학생들의 비례추론 학습에 적절한 도움을 준다고 하였다.

Ⅲ. 연구 대상 및 연구 방법

본 연구에서는 교과서에 제시된 내용을 분석하면서 비례추론에 관한 내용 지식과 내용 교수 지식이 어떻게 구현되어 있는지 살펴보고자 한다. 이를 위해 2007 개정 교육과정부터 현행 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에 제시된 비와 비율 단원 및 비례식과 비례배분 단원의 내용을 분석 대상으로 선정하였다. 이 시기의 특징은 정비례와 반비례 내용이 2007 개정 교육과정에서 초등학교에 처음으로 등장했다가 2015 개정 교육과정에서 다시 중학교로 이동했다. 이때, 현행 교과서에 제시된 내용을 중심으로 이전에 삭제되거나 이동한 과거의 내용은 분석 대상에서 제외하였다. 또한, 현행 교과서의 구성 체제에 맞게 생각열기, 약속하기, 확인하고 다지기, 익히기, 마무리 등을 제외하고 본 차시의 활동만을 분석 대상으로 정하였다. 초등학교 수학 교과서의 비와 비율 및 비례식과 비례배분 단원에 반영된 교육과정을 시기별로 살펴보면 다음과 같다.

먼저 2007 개정 교과서에 반영된 단원별 교육과정을 살펴보면 비와 비율은 5학년 2학기 7단원에서, 비례식과 비례배분은 각각 6학년 1학기 7단원과 8단원에서 다루고 있다. 첫째, 비와 비율 단원은 총 6차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 '1차시: 두 수의 크기 비교', '2차시: 비율', '3차시: 백분율', '4차시: 할푼리'이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 1~3차시의 내용이다. 할푼리는 2009 개정 교육과정에서 삭제되었으므로 연구 대상에서 제외했다. 둘째, 비례식 단원은 총 8차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내

용은 ‘1차시: 비례식 알아보기’, ‘2차시: 비의 성질 알아보기’, ‘3차시: 가장 작은 자연수의 비로 나타내기’, ‘4차시: 비례식의 성질 알아보기’, ‘5차시: 비례식을 이용하여 문제 해결하기’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 1~5차시의 내용이다. 셋째, 연비와 비례배분 단원은 총 9차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 ‘1차시: 연비 알아보기’, ‘2~3차시: 두 비의 관계를 연비로 나타내기’, ‘4차시: 연비의 성질 알기’, ‘5차시: 비례배분 알기’, ‘6차시: 연비로 비례배분하는 방법 알기’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 5차시의 내용이다. 연비는 2009 개정 교육과정에서 삭제되었으므로 연구 대상에서 제외했다.

다음으로 2009 개정 교과서에 반영된 단원별 교육과정을 보면, 비와 비율은 6학년 1학기 4단원에서, 비례식과 비례배분은 6학년 2학기 2단원에서 다루고 있다. 첫째, 비와 비율 단원은 총 15차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 ‘2차시: 두 수를 비교할 수 있어요(1)’, ‘3차시: 두 수를 비교할 수 있어요(2)’, ‘4차시: 비를 알 수 있어요’, ‘5차시: 비율을 알 수 있어요’, ‘6차시: 백분율을 알 수 있어요’, ‘7차시: 사건이 일어날 가능성을 알 수 있어요’, ‘8차시: 비율과 기준량으로 비교하는 양을 구할 수 있어요’, ‘9차시: 비율과 비교하는 양으로 기준량을 구할 수 있어요’, ‘10차시: 비율이 사용되는 경우를 알 수 있어요(1)’, ‘11차시: 비율이 사용되는 경우를 알 수 있어요(2)’, ‘12차시: 비율이 사용되는 경우를 알 수 있어요(3)’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 1~6차시와 8~12차시의 내용이다. 사건이 일어날 가능성은 규칙성 영역이 아니라 확률과 통계 영역이므로 연구 대상에서 제외하였다. 둘째, 비례식과 비례배분 단원은 총 11차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 ‘2차시: 비례식을 알 수 있어요’, ‘3차시: 비의 성질을 알 수 있어요’, ‘4차시: 간단한 자연수의 비로 나타낼 수 있어요’, ‘5차시: 비례식의 성질을 알 수 있어요’, ‘6차시: 비례식을 이용하여 문제를 해결할 수 있어요’, ‘7차시: 비례배분을 할 수 있어요’, ‘8차시: 비례배분을 이용하여 문제를 해결할 수 있어요’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 2~8차시의 내용이다.

마지막으로 2015 개정 교과서에 반영된 단원별 교육과정을 보면, 비와 비율은 6학년 1학기 4단원에서, 비례식과 비례배분은 6학년 2학기 4단원에서 다루고 있다. 첫째, 비와 비율 단원은 총 10차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 ‘2차시: 두 수를 비교해 볼까요’, ‘3차시: 비를 알아볼까요’, ‘4차시: 비율을 알아볼까요’, ‘5차시: 비율이 사용되는 경우를 알아볼까요’, ‘6차시: 백분율을 알아볼까요’, ‘7차시: 백분율이 사용되는 경우를 알아볼까요’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 2~7차시의 내용이다. 둘째, 비례식과 비례배분 단원은 총 10차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 ‘2차시: 비의 성질을 알아볼까요’, ‘3차시: 간단한 자연수의 비로 나타내어 볼까요’, ‘4차시: 비례식을 알아볼까요’, ‘5차시: 비례식의 성질을 알아볼까요’, ‘6차시: 비례식을 활용해 볼까요’, ‘7차시: 비례배분을 해 볼까요’이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 2~7차시의 내용이다.

이렇게 2007 개정 교육과정부터 현행 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에 제시된 비와 비율 단원 및 비례식과 비례배분 단원의 내용을[표 3]과 같은 분석틀처럼 Vergnaud(1996)의 곱셈 구조에 따른 [그림 1]의 네 가지 유형을 중심으로 분류하고, 이를 다시 Beckmann과 Izsák(2015)의 다중 묶음 관점 및 변동 부분 관점이라는 비례추론 전략으로 분석하였다. 분석된 결과를 표로 정리하여 제시하고, 관련 사례를 정리하였다.

[표 3] 분석틀

곱셈 구조 (Vergnaud(1996))		비례관계 (Beckmann과 Izsák(2015))
고정된 두 대상 비교 유형		다중 묶음 관점
곱셈 유형		
나눗셈 제1유형		변동 부분 관점
나눗셈 제2유형		

IV. 연구 결과

1. 비와 비율 단원 분석 결과

교과서별로 비와 비율 단원에 제시된 차시를 살펴보면 [표 3]과 같다. 표에서 앞의 두 숫자는 개정된 교과서를 나타내며 뒤의 숫자는 도입하기 1차시를 제외한 차시를 나타낸다. 첫째, 2007 개정 교과서는 비, 비율, 백분율 개념을 각각 1차시씩 다루고 있다. 둘째, 2009 개정 교과서는 비 3차시, 비율 6차시, 백분율 1차시로 이전 교과서보다 비와 비율 내용이 확대되었다. 셋째, 2015 개정 교과서는 비 2차시, 비율 2차시, 백분율 2차시로 이전 교과서보다 비와 비율 내용은 축소되고 백분율 내용이 확대되었다. 이러한 변화를 먼저 비의 구조 관점에서 교과서에 제시된 활동의 곱셈 구조는 어떠한지, 그리고 비례추론 관점에서 두 측정 공간의 관계를 해석하는 방법은 어떠한지 살펴보고자 한다.

[표 4] 교과서별 비와 비율 단원에 제시된 차시

내용	2007 개정	2009개정	2015개정
비	07-1	09-1, 09-2, 09-3	15-1, 15-2
비율	07-2	09-4, 09-5, 09-6, 09-7, 09-8, 09-9	15-2, 15-3
백분율	07-3	09-10	15-4, 15-5

가. 비

교과서별로 비 개념과 관련하여 비와 비율 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 고정된 두 대상을 비교하기 위하여 비로 나타낸다. (07-1)의 주요 내용 및 활동은 비의 뜻을 이해하고, 서로 다른 두 수의 크기를 비교할 때 비의 기호를 사용하여 나타내게 한다. 여기에서 (07-1-1)은 남학생 3명과 여학생 2명을 비로 나타내는 방법을 알아보는 상황으로 어떤 학생 수를 기준으로 비교하느냐에 따라 비가 달라짐을 알아보도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전보다 다양하게 고정된 두 대상을 비교하거나, 이전과 다르게 곱셈과 나눗셈, 삼수법을 이용하여 어떤 대상을 기준으로 다른 대상이 몇 배인지 나타내기 위해 비로 나타낸다. 첫째, (09-1)는 두 수를 여러 가지 방법으로 비교하게 한다. 여기에서 (09-1-1)은 두 수를 비교하는 상황으로 남학생 수와 여학생 수를 비교하도록 한다. (09-1-2)는 나눗셈을 이용하여 두 수를 비교하는 상황으로 여학생 담당 선생님에 대한 여학생 수를 비교하도록 한다. [(09-1-3)은 두 수를 비교하는 상황으로 남학생 담당 선생님에 대한 남학생 수를 비교하도록 한다. (09-1-4)는 준이와 동생의 나이를 예상하는 상황으로 나이를 비교하는데 뺄셈으로 비교하는 절대적 비교 방법이 적용되는 비(非) 비례상황이다.

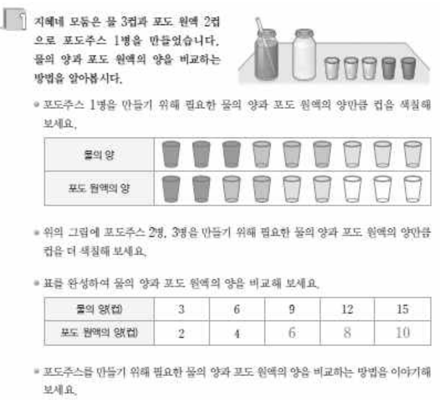
둘째, (09-2)의 주요 내용 및 활동은 변하는 두 수를 나눗셈의 방법으로 비교하게 한다. 여기에서 (09-2-1)은 남학생 수와 여학생 수를 나눗셈으로 비교하는 상황으로 모둠의 학생 수를 비교하도록 한다. (09-2-2)는 남학생 수와 여학생 수를 삼수법을 이용하여 비교하는 상황으로 여러 모둠의 학생 수를 비교하도록 한다. (09-2-3)은 한 모둠이 6명일 때 모둠 수에 따른 학생 수와 손전등 수를 비교하는 상황으로 학생 수와 손전등 수를 비교하도록 한다.

셋째, (09-3)의 주요 내용 및 활동은 두 수를 비교하여 비의 뜻을 알고. 비로 나타내고 읽게 한다. (09-3-1)은 물 양과 카레 가루 양을 컵의 수로 비교하는 상황으로 두 수를 곱셈을 이용하여 비교하였다. (09-3-2)는 쌀 양과 물 양을 비로 나타내는 상황으로 두 수를 비교하여 비로 나타내도록 한다. (09-3-3)은 초등학교별 학생 수를 비로 나타내는 상황으로 두 수를 비교하여 비로 나타내도록 한다.

마지막으로 2015 개정 교과서는 이전보다 단순하게 두 대상을 비교하거나, 삼수법을 이용하여 두 대상을 나눗셈으로 비교하기 위해 비로 나타낸다. 첫째, (15-1)는 두 양의 크기를 뺄셈과 나눗셈으로 비교하게 하고, 변하는 두 양의 관계를 알아보게 한다. 여기에서 (15-1-1)은 준비하는 사람 수와 판매하는 사람 수를 비교하는 상황으로 두 양의 크기를 비교하도록 한다. 이때 두 수의 크기를 비교하는 방법과 두 수의 관계를 생각해 보도록 한다. (15-1-2)는 모둠 수에 따른 준비

하는 사람 수와 판매하는 사람 수의 크기를 비교하는 상황으로 변하는 두 양의 관계를 알아보도록 한다. 이때 각각의 정비례 관계보다는 준비하는 사람 수와 판매하는 사람 수의 크기를 비교하는데 중점을 두도록 한다. 또한, 상대적 비교와 절대적 비교 사이의 차이점을 명확하게 이해하도록 한다. (15-1-3)은 나무의 높이와 그림자 길이를 비교하는 상황으로 두 양의 크기를 비교하고 두 양의 관계에 대해 이야기하도록 한다.

둘째, (15-2)의 주요 내용 및 활동은 비의 뜻을 알아보고, 생활 속 문제 상황을 비로 나타내게 한다. 여기에서 (15-2-1)은 [그림 10]처럼 물의 양과 포도 원액의 양을 [그림 1]의 삼수법으로 비교하는 방법을 알아보는 상황으로 비가 필요한 상황을 파악하고, 비의 뜻을 이해하도록 한다.



[그림 10] 2015 개정 수학 6-1 활동(15-2-1, 삼수법 유형)

(15-2-2)는 기부 금액과 판매 금액을 비교하는 상황으로 문제 상황을 비로 나타낸 것의 옳고 그름을 이유를 들어 이야기하도록 한다. (15-2-3)은 출발점에서부터 장애물까지 거리와 장애물에서부터 도착점까지 거리의 비를 구하는 상황으로 두 거리의 비를 구하도록 한다.

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ a & b \end{array}$$

[그림 11] 고정된 두 대상 비교 유형

이처럼 비 개념과 관련하여 비와 비율 단원에서 제시된 활동의 곱셈 구조를 정리하면 네 가지 유형이 된다. 첫째 유형은 [그림 11]처럼 고정된 두 대상을 비교한 것이다. 둘째 유형은 [그림 1]의 곱셈 유형으로 두 대상을 비교한 것이다. 셋째 유형은 [그림 1]의 나눗셈 제1유형으로 두 대상을 비교한 것이다. 넷째 유형은 [그림 1]의 삼수법 유형으로 두 대상을 비교한 것이다. 이를 교과서별로 비교하면 [표 5]와 같다.

[표 5] 교과서별 비 개념 곱셈 구조

곱셈 구조	2007개정	2009개정	2015개정
고정된 두 대상 비교 유형	07-1-1	09-1-1, 09-2-1, 09-3-2, 09-3-3	15-1-1, 15-1-3, 15-2-2, 15-2-3
곱셈 유형		09-3-1	
나눗셈 제1유형		09-1-2, 09-1-3	
나눗셈 제2유형		09-1-4*, 09-2-2, 09-2-3	15-1-2, 15-2-1

* : 비(非) 비례 상황

그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면, 2007 개정 교과서는 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않는다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전과 다르게 3개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석으로 해석한다. 첫째, (09-2-2)는 표를 통해 단위량인 여학생 한 명당 남학생 수를 고정한 채 묶음의 수인 모둠 수를 늘려 남학생 수와 여학생 수를 비교하여 측정 공간 내를 분석한다. 또 두 수를 나눗셈으로 비교하고, 그 관계를 이야기하게 하여 측정 공간 사이를 분석한다. 둘째, (09-2-3)은 표를 통해 단위량인 손전등 한 개당 학생 수는 고정한 채 묶음의 수인 모둠 수를 늘려 학생 수와 손전등 수를 비교하여 측정 공간 내를 분석한다. 또 두 수를 나눗셈으로 비교하고, 그 관계를 이야기하게 하여 측정 공간 사이를 분석한다.

셋째, (09-3-1)은 표를 통해 단위량인 카레 가루 양에 대한 물의 양은 고정한 채 묶음의 수인 컵 수를 늘려 물의 양과 카레 가루 양을 비교하여 측정 공간 내를 분석한다. 또 두 수를 나눗셈으로 비교하고, 그 관계를 이야기하게 하여 측정 공간 사이를 분석한다.

2015 개정 교과서는 이전보다 단순하게 2개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석으로 해석한다. 첫째, (15-1-2)는 표를 통해 단위량인 판매하는 사람 한 명당 준비하는 사람 수는 고정한 채 묶음의 수인 모둠 수를 늘려 준비하는 사람 수와 판매하는 사람 수를 비교하여 측정 공간 내를 분석한다. 또 두 수를 뺄셈과 나눗셈으로 비교하고, 두 방법의 차이를 이야기하게 하여 측정 공간 사이를 분석한다. 둘째, (15-2-1)은 그림 모델을 통해 단위량인 포도 원액의 양에 대한 물의 양은 고정한 채 묶음의 수인 컵 수를 늘려 물의 양과 포도 원액의 양을 비교하여 측정 공간 내를 분석한다. 또 두 양을 비교하는 방법을 이야기하게 하여 측정 공간 사이를 분석한다.

2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서에서 제시된 비 개념의 활동은 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다. 그리고 학생들에게 '비교하는 양:기준량'이라는 비 개념을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있었다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 1개에서 4개로 늘었으며, 비례추론 활동은 0개에서 3개의 활동으로 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석으로 해석하여 이전보다 내용이 다양해졌다. 그러나 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 4개에서 2개로 줄었으며, 비례추론은 활동 3개에서 2개의 활동으로 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석으로 해석하여 이전보다 내용이 단순해졌다.

나. 비율

교과서별로 비율 개념과 관련하여 비와 비율 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 2007 개정 교과서는 나눗셈을 이용하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율로 나타낸다. (07-2)의 주요 내용 및 활동은 비에서 비교하는 양, 기준량, 비율의 관계를 구분하여 말하도록 하고, 비율을 이해하여 이를 분수와 소수로 나타내게 한다. 여기에서 (07-2-1)은 남자 선생님 5명은 여자 선생님 20명의 얼마인지 알아보는 상황으로 남자 선생님과 여자 선생님 수 사이의 비와 각각의 수의 몇 배인지 알아보도록 한다. 또한, 남자 선생님의 수는 여자 선생님의 수를 기준으로 했을 때 얼마인지 분수로 나타내도록 한다. 이때 '~에 대한'이라는 말에 주의하여 비를 나타내도록 한다. 그래서 나눗셈을 통해 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타낸다. (07-2-2)는 어느 버스에 탄 사람들이 더 넓게 느꼈을지 알아보는 상황으로 16인승 버스와 20인승 버스에 각각 12명과 16명이 나누어 탔을 때 비율의 크기를 비교하도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전보다 다양하게 나눗셈을 이용하거나, 이전과는 다르게 곱셈과 삼수법을 이용하여 비교하는 양을 기준량으로 나눈 값을 비의 값 또는 비율로 나타낸다. 첫째, (09-4)의 주요 내용 및 활동은 비율을 알고, 분수나 소수로 나타내어 크기를 비교하게 한다. 여기에서 (09-4-1)은 예선을 통과한 학생 수는 퀴즈 대회에 참가한 학생 수의 몇 배인지 알아보는 상황으로 비의 값을 구하도록 한다. 그래서 나눗셈을 통해 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타낸다. (09-4-2)는 세로에 대한 가로의 비율을 분수와 소수로 나타내어 비교하는 상황으로 비율을 구하여 이를 비교하도록 한다.

둘째, (09-6)의 주요 내용 및 활동은 주어진 비율과 기준량으로 비교하는 양을 구하게 한다. (09-6-1)은 처음 사진에서 일정한 비율로 축소한 사진의 가로는 얼마가 되는지 알아보는 상황으로 비교하는 양을 구하도록 한다. 그래서 곱셈을 통해 주어진 비율과 기준량으로 비교하는 양을 구하도록 한다. (09-6-2)는 처음 사진에서 일정한 비율로 확대한 사진의 가로는 얼마인지 알아보는 상황으로 식을 세워 비교하는 양을 구하도록 한다. (09-6-3)은 가게에서 같은 할인율로 다른 물건을 사면 얼마를 할인받는지 알아보는 상황으로 비율을 구하고 비교하는 양을 구하도록 한다. 그래서 삼수법을 통해 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 구하고 비교하는 양을 구하도록 한다.

셋째, (09-7)의 주요 내용 및 활동은 주어진 비율과 비교하는 양으로 기준량을 구하게 한다. (09-7-1)은 일

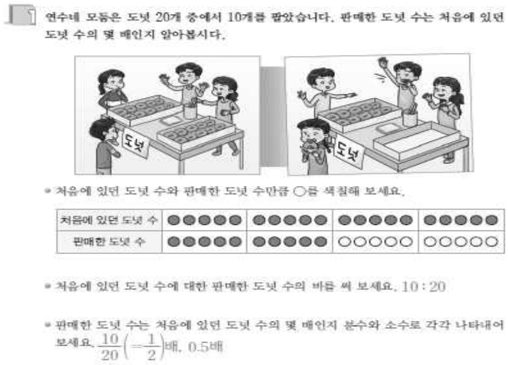
정한 비율로 축소된 사진에서 처음 사진의 가로는 얼마가 되는지 알아보는 상황으로 기준량을 구하도록 한다. (09-7-2)는 일정한 비율로 확대된 사진에서 처음 사진의 가로는 얼마인지 알아보는 상황으로 식을 세워 기준량을 구하도록 한다. (09-7-3)은 전교생의 수에 대한 여학생의 수의 비율로 전교생은 몇 명인지 알아보는 상황으로 비율을 구하고 기준량을 구하도록 한다.

넷째, (09-8)의 주요 내용 및 활동은 속력의 의미를 알고 속력을 구하게 한다. (09-8-1)은 새마을호 열차는 1시간 동안 평균 몇 km를 갔는지 알아보는 상황으로 속력의 의미를 알도록 한다. (09-8-2)는 무궁화호 열차의 속력을 알아보는 상황으로 속력을 구하도록 한다. (09-8-3)은 태풍 매미의 순간 최대 풍속과 KTX 열차의 속력을 비교하는 상황으로 두 속력을 비교하도록 한다.

다섯째, (09-9)의 주요 내용 및 활동은 인구밀도의 의미를 알고 인구밀도를 구하게 한다. (09-9-1)은 각 지역의 1㎢에 평균 몇 명이 살고 있는지 알아보는 상황으로 인구밀도의 의미를 알도록 한다. (09-9-2)는 서울과 마닐라의 인구밀도를 알아보는 상황으로 두 도시의 인구밀도를 구하고 비교하도록 한다.

여섯째, (09-10)의 주요 내용 및 활동은 용액의 진하기의 의미를 알고 용액의 진하기를 구하게 한다. (09-10-1)은 용질과 용액의 뜻을 생각하며 소금물의 진하기를 알아보는 상황으로 용액의 진하기의 의미를 알아보도록 한다. (09-10-2)는 맛있는 간장을 만들기 위하여 소금과 물이 각각 얼마나 필요한지 알아보는 상황으로 용액의 진하기를 구하도록 한다. (09-10-3)은 두 설탕물에 녹아 있는 설탕의 양을 비교하는 상황으로 용질의 양을 비교하도록 한다.

2015 개정 교과서는 이전보다 단순하게 나눗셈을 이용하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율로 나타낸다. 첫째, (15-3)의 주요 내용 및 활동은 비율의 뜻을 알아보고, 비율을 분수와 소수로 나타내게 한다. 그리고 비율을 구하여 크기를 비교해 보게 한다. (15-3-1)은 [그림 12]처럼 판매한 도넛 수는 처음에 있던 도넛 수의 몇 배인지 알아보는 상황으로 비율이 필요한 상황을 파악하고, 비율의 뜻을 이해하도록 한다. 그래서 나눗셈을 통해 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타내었다. (15-3-2)는 세로에 대한 가로의 비율을 비교하는 상황으로 길이의 비율을 구하여 크기를 비교하도록 한다. (15-3-3)은 어느 모둠이 방을 더 넓다고 느꼈을지 이야기하는 상황으로 실생활 상황에서 비율을 구하여 크기를 비교하도록 한다.



[그림 12] 2015 개정 수학 6-1 활동(15-3-1, 나눗셈 제1유형)

둘째, (15-4)의 주요 내용 및 활동은 실생활에서 비율이 사용되는 여러 가지 경우를 알아보게 한다. (15-4-1)은 고속 철도가 서울에서 광주까지 가는 데 걸린 시간에 대한 간 거리의 비율을 알아보는 상황으로 시간에 대한 거리의 비율을 알아보도록 한다. 이때 걸린 시간을 기준량, 간 거리를 비교하는 양으로 하여 비율을 구하되, 속력의 개념이나 속력을 구하는 별도의 공식은 지도하지 않도록 한다. (15-4-2)는 두 지역의 넓이에 대한 인구의 비율을 비교해 보는 상황으로 넓이에 대한 인구의 비율을 알아보도록 한다. 이때 넓이를 기준량, 인구를 비교하는 양으로 하여 비율을 구하되, 인구 밀도의 개념이나 인구 밀도를 구하는 별도의 공식은 지도하지 않도록 한다. (15-4-3)은 누가 만든 회색 물감이 더 어두운지 비교하는 상황으로 흰색 물감 양에 대한 검은색 물감 양의 비율을 알아보도록 한다. 이때 흰색 물감 양을 기준량, 검은색 물감 양을 비교하는 양으로 하여 비율을 구하되, 농도의 개념이나 농도를 구하는 별도의 공식은 지도하지 않도록 한다. (15-4-4)는 주변에서 비율이 사용되는 경우를 찾아 이야기하는 상황으로 야구 선수의 타율과 지도의 축척, 소금물의 진하기를 예로 제시하고 있다.

이처럼 비율 개념과 관련하여 비와 비율 단원에 제

시된 활동의 곱셈 구조를 세 가지 유형으로 정리할 수 있다. 첫째 유형은 곱셈 유형으로 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타낸 것이다. 둘째 유형은 나눗셈 제1유형으로 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타낸 것이다.

셋째 유형은 삼수법 유형으로 두 대상을 비교하여 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 나타낸 것이다. 이를 다시 교과서별로 비교하면 [표 6]과 같다.

[표 6] 교과서별 비율 개념 곱셈 구조

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
곱셈 유형		09-6-1, 09-6-2, 09-8-3, 09-10-1-3, 09-10-2-1, 09-10-3	
나눗셈 제1유형	07-2-1 07-2-2	09-4-1, 09-4-2, 09-7-1, 09-7-2, 09-7-3, 09-8-1, 09-8-2, 09-9-1, 09-9-2, 09-10-1-2, 09-10-2-2	15-3-1, 15-3-2, 15-3-3, 15-4-1, 15-4-2, 15-4-3
삼수법 유형		09-6-3	

두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면, 2007 개정 교과서는 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않았다.

2009 개정 교과서는 이전과 다르게 3개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다. 첫째, (09-6-1)은 이중 척도 모델을 통해 처음 사진의 가로 길이를 일정 비율로 줄일 때, 단위량을 축소 비율(%)로 고정한 채 묶음의 수를 줄여 측정 공간 내를 분석한다. 둘째, (09-7-1)은 이중 척도 모델을 통해 축소한 사진의 가로 길이로 처음 사진의 가로 길이를 구할 때, 단위량을 축소 비율로 고정한 채 묶음의 수를 늘려 측정 공간 내를 분석한다. 셋째, (09-7-3)은 막대 모델을 통해 여학생 수와 전교생에 대한 여학생 수의 비율을 알고 전교생을 구할 때, 단위량을 전교생에 대한 여학생 수의 비율로 고정한 채 묶음의 수를 늘려 측정 공간 내를 분석한다.

그런데 2015 개정 교과서는 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않는다.

다중 묶음 관점과 변동 부분 관점이라는 비례추론 전략을 교과서별로 비교하면, 2009 개정 교과서에서 제시된 비율 개념의 활동은 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다. 따라서 학생들에게 '비교하는 양÷기준량'이라는 비율 개념을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있었다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 1개에서 3개로 늘었으며, 비례추론은 활동 0개에서 3개의 활동으로 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석하여 이전보다 내용이 다양해졌다. 그러나 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 3개에서 1개로 줄었으며, 비례추론은 활동 3개에서 0개로 이전보다 내용이 단순해졌다.

다. 백분율

백분율 개념과 관련하여 비와 비율 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 교과서별로 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 2007 개정 교과서에서는 삼수법을 이용하여 비율의 기준량을 100으로 하는 백분율로 나타내거나, 나눗셈을 이용하여 백분율을 분수나 소수로 나타낸다. (07-3)의 주요 내용 및 활동은 백분율의 뜻을 알고, 백분율을 분수와 소수로, 분수와 소수를 백분율로 나타내게 한다. 여기에서 (07-3-1)은 20문제 중에서 16문제를 맞힌 국어와 25문제 중에서 18문제를 맞힌 수학 중 어느 과목을 더 잘 보았는지 알아보는 상황으로 성취도 평가에서 시험 문제 전체 문항 중에서 맞힌 문항을 비율로 나타내도록 한다. 그래서 나눗셈을 이용하여 기준량을 1로 할 때 비율을 구하도록 한다. (07-3-2)는 25에 대한 9의 비율을 백분율로 나타내는 상황으로 비율을 백분율로 나타내는 원리를 알아보도록 한다. (07-3-3)은 지금까지 모눈 칸에 받은 칭찬 도장이 전체의 77%라고 할 때, 이를 소수로 나타내려면 어떻게 해야 하는지 알아보는 상황으로 백분율을 분수 또는

소수로 나타내는 원리를 알아보도록 한다. 그래서 삼수법을 이용하여 비율의 기준량을 100으로 하는 백분율로 나타내도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서에는 이전 교과서와는 다르게 곱셈을 이용하여 비율에 100을 곱해 백분율로 나타낸다. (09-5)의 주요 내용 및 활동은 백분율을 알고, 백분율을 분수와 소수로, 분수와 소수를 백분율로 나타내게 한다. 여기에서 (09-5-1)은 [그림 13]과 같이 하이킹에 참가한 학생 수에 대한 완주한 학생 수의 비율을 알아보는 상황으로 비율에 100을 곱하도록 한다. (09-5-2)는 체험 교실별 참가 학생 수를 비교하는 상황으로 백분율을 알아보도록 한다.


활동1 하이킹에 참가한 학생 수에 대한 완주한 학생 수의 비율을 알아보시오.

- 비율을 분수로 나타내어 보시오. $\frac{36}{50}(=\frac{18}{25})$
- 비율을 분모가 100인 분수로 나타내어 보시오. $\frac{72}{100}$
- 비율을 소수로 나타내어 보시오. 0.72
- 소수로 나타낸 비율에 100을 곱해 보시오. 72
- 하이킹에 100명이 참가할 때 완주하는 학생은 몇 명이라고 생각합니까? 72명

[그림 13] 2009 개정 수학 6-1 활동(09-5-1, 곱셈 유형)

2015 개정 교과서에는 2007 개정 교과서보다 단순하게 삼수법을 이용하여 비율의 기준량을 100으로 하는 백분율로 나타낸다. 첫째, (15-5)의 주요 내용 및 활동은 백분율의 뜻을 알고, 비율을 백분율로 나타내게 한다. 여기에서 (15-5-1)은 티셔츠와 바지의 판매율을 비교하는 상황으로 백분율이 필요한 상황을 파악하고, 백분율의 뜻을 이해하도록 한다. 그래서 삼수법을 이용하여 비율의 기준량을 100으로 할때 백분율로 나타내도록 한다. (15-5-2)는 화단 넓이는 텃밭 넓이의 얼마인지 백분율로 나타내는 상황으로 비율을 백분율로 나타내도록 한다. 둘째, (15-6)의 주요 내용 및 활동은 실생활에서 백분율이 사용되는 여러 가지 경우를 알아보게 한다. 여기에서 (15-6-1)은 모자와 양말의 할인율을 비교하는 상황으로 두 물건의 할인율을 비교하도록 한다. (15-6-2)는 각 후보의 득표율을 알아보는 상황으로 전교 학생 회장 선거에서 득표율을 비교하도록 한다. (15-6-3)은 누가 만든 소금물이 더 진한지 비교하는 상황으로 과학 시간에 만든 소금물의 진하기를 비교하도록 한다. 이때 농도라는 개념 자체와 농도를 구하는 공식은 직접적으로 지도하지 않도록 한다.

이처럼 백분율 개념과 관련하여 비와 비율 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 정리하면 첫째 유형은 곱셈 유형으로 비율에 100을 곱하여 백분율로 나타낸 것이다. 둘째 유형은 나눗셈 제1유형으로 기준량을 1로 할 때의 비율을 구하는 것이다. 셋째 유형은 삼수법 유형으로 비율의 기준량을 100으로 하여 백분율로 나타낸 것이다. 이를 다시 교과서별로 비교하면 [표 7]과 같다.

[표 7] 교과서별 백분율 개념 곱셈 구조

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
곱셈 유형		09-5-1, 09-5-2	
나눗셈 제1유형	07-3-3		
삼수법 유형	07-3-1, 07-3-2		15-5-1, 15-5-2, 15-6-1, 15-6-2, 15-6-3

그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 2개의 활동에서 각각 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. 첫째, (07-3-2)는 사각형 모델을 통해 단위량을 전체 칸에 대한 색칠한 칸의 비율로 고정한 채 전체 칸의 수와 색칠한 칸의 수를 비교하게 함으로써 다중 묶음 관점으로 해석하게 한다. 둘째, (07-3-3)은 사각형 모델을 통해 묶음의 수인 77개는 고정한 채 전체를 100칸에서 1칸으로 보아 단위량인 칸의 크기가 1칸에서 0.01칸으로 줄게 되므로 백분율을 분수 또는 소수로 나타내는 원리를 알게 한다.

2009 개정 교과서는 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않는다.

2015 개정 교과서는 3개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. 첫째, (15-5-1)은 이중수직선 모델을 통해 단위량은 1벌로

고정한 채 전체량을 100별로 보아 묶음의 수를 늘려 비교하므로 다중 묶음 관점으로 해석하게 한다. 둘째, (15-5-2)는 단위량을 전체 칸에 대한 색칠한 칸의 비율로 고정한 채 전체 칸의 수와 색칠된 칸의 수를 비교하게 함으로써 다중 묶음 관점으로 해석하게 한다. 셋째, (15-6-1)은 이중수직선 모델을 통해 단위량을 할인율로 고정한 채 묶음의 수로 비교하게 하므로 다중 묶음 관점으로 해석하게 한다.

이러한 비례추론 전략을 교과서별로 비교하면 [표 8]과 같다. 2007 개정 교과서에서 제시된 백분율 개념의 활동은 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다. 그리고 2015 개정 교과서에서 제시된 백분율 개념의 활동은 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다.

[표 8] 교과서별 백분율 개념 활동의 비례추론 전략

비례 관점	측정 공간 내의 분석	측정 공간 사이의 분석
다중 묶음 관점	07-3-2 15-5-1, 15-5-2, 15-6-1	
변동 부분 관점	07-3-3	

따라서 학생들에게 '비율×100'이라는 백분율 개념을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 2개에서 1개로 줄었으며, 비례추론은 활동 2개에서 0개의 활동으로 이전보다 내용이 단순해졌다. 그러나 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 이전과 다른 유형으로 바뀌었으며, 비례추론은 활동 0개에서 3개의 활동으로 측정 공간 내의 분석을 다중 묶음 관점에 따라 해석하여 이전보다 내용이 다양해졌다.

2. 비례식과 비례배분 단원 분석 결과

교과서별로 비례식과 비례배분 단원에 제시된 차시를 살펴보면 [표 9]와 같다. 표에서 앞의 두 숫자는 개정된 교과서를 나타내며 뒤의 숫자는 도입 차시를 제외한 차시를 나타낸다. 그리고 [표 10]의 숫자 표시에서 마지막에 두 숫자가 추가되었는데, 이는 해당 차시의 활동 순서를 나타낸다.

[표 9] 교과서별 비례식과 비례배분 단원에 제시된 차시

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
비의 성질	07-2, 07-3	09-2, 09-3	15-1, 15-2
비례식	07-1, 07-4, 07-5	09-1, 09-4, 095	15-3, 15-4, 15-5
비례배분	07-6	09-6, 09-7	15-6

2007 개정 교과서는 비의 성질 2차시, 비례식 3차시. 비례배분 1차시를 다루고 있다. 2009 개정 교과서는 비의 성질 2차시, 비례식 3차시, 비례배분 2차시로 이전 교과서보다 비례배분 내용이 확대되었다. 2015 개정 교과서에서는 비의 성질 2차시, 비례식 3차시, 비례배분 1차시로 이전 교과서보다 비례배분 내용이 다시 축소되고 지도 순서가 바뀌었다. 이러한 변화를 먼저 비 관점에서 교과서에 제시된 활동의 곱셈 구조는 어떠한지, 그리고 비율 관점에서 곱셈 구조의 측정 공간을 어떻게 분석하고 있는지 살펴보고자 한다. 또한, 비례 관점에서 두 측정 공간의 관계를 해석하는 방법은 어떠한지 살펴보고자 한다.

가. 비의 성질

비의 성질과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 교과서별로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 나눗셈을 이용하여 비의 값이 같음을 알게 한 후, 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타낸다. 첫째, (07-2)의 주요 내용 및 활동은 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비의 값이 같음을 이해하게 한다. 여기에서 (07-2-1)은 나누어 가진 딱지 수와 비의 값을 비교하는 상황으로 비의 전항과 후항을 어떻게 해야 비율이 같게 되는지 알아보도록 한다. 그래서 나눗셈을 이용하여 두 비의 값이 같음을 확인하였다. (07-2-2)는 두 바퀴의 회전수의 비의 값을

알아보는 상황으로 비의 전항과 후항을 어떻게 해야 비의 값이 같은 비를 구할 수 있는지 알아보도록 한다.

둘째, (07-3)의 주요 내용 및 활동은 비율을 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내게 한다. 여기에서 (07-3-1)은 음식과 그릇을 만든 찰흙의 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내는 상황으로 분수의 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내도록 한다. 그래서 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누었다. (07-3-2)는 소수의 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내도록 한다. (07-3-3)은 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 나누어 가장 작은 자연수의 비로 나타내도록 한다. (07-3-4)는 소수와 분수가 있는 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전과는 다르게 곱셈과 삼수법을 이용하여 비율이 같음을 알게 한 후, 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 간단한 자연수의 비로 나타낸다. (09-2)의 주요 내용 및 활동은 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 같음을 이해하게 한다. 여기에서 (09-2-1)은 같은 빠르기로 7km를 이동하는 데 걸리는 시간을 알아보는 상황으로 비의 성질을 알아보도록 한다. (09-2-2)는 같은 빠르기로 10m인 비탈길을 내려오는 데 걸리는 시간을 알아보는 상황으로 비의 성질을 알아보도록 한다.

둘째, (09-3)의 주요 내용 및 활동은 비율을 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 간단한 자연수의 비로 나타내게 한다. 여기에서 (09-3-1)은 날것일 때와 익혔을 때 섬유소의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내는 상황으로 소수의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다. (09-3-2)는 분수의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다. (09-3-3)은 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 나누어 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다. (09-3-4)는 소수와 분수가 있는 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다.

마지막으로 2015 개정 교과서에서는 이전처럼 삼수법을 이용하거나, 이전과는 다르게 나눗셈을 이용하여 비율이 같음을 알게 한 후, 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 간단한 자연수의 비로 나타낸다. (15-1)의 주요 내용 및 활동은 비의 전항과 후항을 알고, 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 같음을 이해하게 한다. 여기에서 (15-1-1)은 한 모둠일 때와 두 모둠일 때 필요한 유리 막대 수와 비커 수의 비를 구하고 그 비율을 비교하는 상황으로 비의 성질을 알아보도록 한다. (15-1-2)는 주차장의 가로와 주차할 수 있는 자동차 수의 비율을 비교하는 상황으로 비의 성질을 알아보도록 한다. (15-1-3)은 비의 성질을 이용하여 12:18과 비율이 같은 비를 구하는 상황으로 비의 성질을 이용하여 비율이 같은 비를 구하도록 한다.

첫째, (15-2)의 주요 내용 및 활동은 비의 성질을 이용하여 주어진 비를 간단한 자연수의 비로 나타내게 한다. 여기에서 (15-2-1)은 물의 양과 폐식용유 양의 비를 간단히 나타내는 방법을 알아보는 상황으로 소수의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다. (15-2-2)는 꽃병을 만든 찰흙 양과 꽃을 만든 찰흙 양의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내는 상황으로 분수의 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다. (15-2-3)은 소수와 분수가 있는 비를 간단한 자연수의 비로 나타내도록 한다.

$$\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ a & b \\ x & y \end{array}$$

[그림 14] 비의 전항과 후항에 같은 수를 곱하거나 나누는 유형

이처럼 비의 성질과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 정리하면, 첫째 유형은 [그림 14]처럼 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눈 것이다. 둘째 유형은 곱셈 유형으로 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱한 것이다. 셋째 유형은 나눗셈 제1유형으로 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 나눈 것이다. 넷째 유형은 삼수법 유형으로 비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나눈 것이다. 이를 다시 교과서에 적용하면 [표 10]과 같다. 표에서 앞의 두 숫자는 개정된 교과서를 나타내며 뒤

그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으

로 제시하지 않는다.

[표 10] 교과서별 비의 성질 곱셈 구조

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
전항, 후항에 같은 수를 곱하거나 나누는 유형	07-3-1, 07-3-2, 07-3-3, 07-3-4	09-3-1, 09-3-2, 09-3-3, 09-3-4	15-2-3, 15-3-2, 15-3-3
곱셈 유형		09-3-1	
나눗셈 제1유형	07-2-1, 07-2-2		15-2-1, 15-2-2
삼수법 유형		09-3-2	15-3-1

다음으로 2009 개정 교과서는 2개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. 첫째, (09-2-1)은 표를 통해 단위량을 각각 1km와 5분으로 고정한 채 묶음의 수를 동시에 늘려 이동한 거리와 걸린 시간의 일정한 변화를 보여주며 측정 공간 내를 분석한다. 둘째, (09-2-2)는 표를 통해 단위량을 각각 길이(m)와 시간(초)으로 고정한 채 묶음의 수를 동시에 줄여 이동한 거리와 걸린 시간의 일정한 변화를 보여주며 측정 공간 내를 분석한다.

마지막으로 2015 개정 교과서는 2개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. 첫째, (15-1-1)은 이중수직선 모델을 통해 단위량을 유리 막대 3개와 비커 수 4개로 각각 고정한 채 묶음의 수를 동시에 늘려 일정한 변화를 보여주며 측정 공간 내를 분석한다. 둘째, (15-1-2)는 이중수직선 모델을 통해 단위량을 길이(m)와 수(대)로 각각 고정한 채 묶음의 수를 동시에 줄여 일정한 변화를 보여주며 측정 공간 내를 분석한다.

이러한 비례추론 전략을 교과서별로 비교하면 2009 개정 교과서와 2015 개정 교과서에서 제시된 비의 성질에 관한 활동은 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다.

따라서 학생들에게 '비의 전항과 후항에 0이 아닌 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 같다'라는 비의 성질을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 2개에서 3개로 늘었으며, 비례추론은 활동 0개에서 2개의 활동으로 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석하여 이전보다 내용이 다양해졌다. 그러나 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 바뀌었으며, 비례추론 전략은 거의 변화가 없어 이전 내용과 비슷하다.

나. 비례식

비례식과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 교과서별로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 나눗셈과 삼수법을 이용하여 비의 값이 같은 두 비를 등식으로 나타내어 비례식을 세운다. 첫째, (07-1)의 주요 내용 및 활동은 비례식을 이해하여 비의 전항과 후항, 비례식의 외항과 내항을 구별하게 한다. 여기에서 (07-1-1)은 두 비 3:2와 6:4에서 여러 가지를 알아보는 상황으로 비의 값이 같은 두 비를 식으로 나타내도록 한다.

셋째, (07-4)의 주요 내용 및 활동은 비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱이 같음을 이해하고, 비례식의 성질을 이용하여 비례식에서 미지항의 값을 구하게 한다. 여기에서 (07-4-1)은 빵을 10개 만들려면 달걀이 몇 개 필요한지 알아보는 상황으로 비례식에서 외항의 곱과 내항의 곱을 구하여 비교해 보도록 한다. [그림 56]은 (07-4-1)의 장면이다. (07-4-2)는 2:3=8:□에서 □를 구해 보는 상황으로 비례식의 성질을 이용하여 비례식에서 미지항을 구하도록 한다.

넷째, (07-5)의 주요 내용 및 활동은 비례식을 이용하여 여러 가지 문제를 해결하게 한다. 여기에서 (07-5-1)은 실제 화단의 세로가 6m라고 할 때 실제 가로의 길이를 알아보는 상황으로 비례식을 이용하여 실생활의 문제를 해결하도록 한다. (07-5-2)는 톱니바퀴 ㉮가 56번 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 번 돌게 되는지 알아보는 상황으로 비례식이 이용되는 실생활 장면의 문제를 해결하도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전처럼 나눗셈과 삼수법을 이용하거나, 이전과 다르게 곱셈을 이용하여 비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 비례식으로 나타낸다. 첫째, (09-1)의 주요 내용 및 활동은 비례식을

이해하여 비의 전항과 후항, 비례식의 외항과 내항을 구별하게 한다. 여기에서 (09-1-1)은 설계 도면에 그려진 가구의 도면상의 길이와 실제 길이의 비를 알아보는 상황으로 비율이 같은 비를 알아보도록 한다.(09-1-2)는 비율이 같은 두 비를 나타내는 방법을 알아보는 상황으로 비율이 같은 두 비를 등호를 사용하여 나타내도록 한다.

셋째, (09-4)의 주요 내용 및 활동은 비례식의 성질을 알고, 미지항의 값을 구하게 한다. 여기에서 (09-4-1)은 비례식을 성질을 알아보도록 한다. (09-4-2)는 비례식의 성질을 이용하여 실제 거리를 알아보는 상황으로 비례식을 활용하도록 한다.

넷째, (09-5)의 주요 내용 및 활동은 비례식을 이용하여 생활 속 문제를 해결하게 한다. 여기에서 (09-5-1)은 소금 12kg을 얻기 위해서 필요한 바닷물의 양을 비례식을 이용하여 알아보는 상황으로 비례식을 이용하여 문제를 해결하도록 한다. (09-5-2)는 톱니바퀴 ㉮가 56바퀴 도는 동안에 톱니바퀴 ㉯는 몇 바퀴 도는지 알아보는 상황으로 비례식을 이용하여 문제를 해결하도록 한다.

마지막으로 2015 개정 교과서는 이전처럼 곱셈과 나눗셈, 삼수법을 이용하여 비율이 같은 두 비를 기호 ‘=’를 사용하여 비례식으로 나타낸다. 첫째, (15-3)의 주요 내용 및 활동은 비율이 같은 두 비를 등식으로 나타내어 비례식을 이해하고, 비례식의 외항과 내항을 알게 한다. 여기에서 (15-3-1)은 사진기 화면과 컴퓨터 화면에 있는 사진의 길이를 비교하는 상황으로 비율이 같은 비를 알아보도록 한다. (15-3-2)는 비례식을 이용하여 비의 성질을 나타내도록 한다. (15-3-3)은 비율이 같은 두 비를 찾아 비례식을 세우도록 한다.

셋째, (15-4)의 주요 내용 및 활동은 비례식의 성질을 알고, 이를 이용하여 비례식 문제를 해결하게 한다. 여기에서 (15-4-1)은 가구 모형 8개를 만들려면 나무판이 몇 개 필요한지 알아보는 상황으로 비례식의 성질을 알아보도록 한다. (15-4-2)는 책상 모형과 실제 책상의 길이의 비가 1:5라면 실제 책상의 가로는 얼마인지 알아보는 상황으로 비례식의 성질을 활용하도록 한다. (15-4-3)은 비례식을 찾고, 그 이유를 설명하도록 한다.

넷째, (15-5)의 주요 내용 및 활동은 실생활에서 비례식이 활용되는 여러 가지 경우를 알게 한다. 여기에서 (15-5-1)은 전기 자동차가 500km를 달리려면 몇 분 동안 충전해야 하는지 알아보는 상황으로 비례식의 성질을 이용하여 미지항의 값을 구하도록 한다. (15-5-2)는 양파 껍질이 25g이 있다면 물은 몇 L 필요한지 알아보는 상황으로 비례식의 성질을 이용하여 미지항의 값을 구하도록 한다. (15-5-3)은 연수가 세운 비례식을 보고 가족 수에 맞게 김밥을 만들려면 밥을 몇 g을 준비해야 하는지 알아보는 상황으로 미지항이 있는 비례식에서 정보를 파악하고, 미지항의 값을 구하도록 한다.

이처럼 비례식과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 정리하면 첫째 유형은 두 비를 비례식으로 세운 것인데 [그림 14]로 나타낼 수 있다. 둘째 유형은 곱셈 유형으로, 셋째 유형은 나눗셈 제1유형으로, 넷째 유형은 삼수법 유형으로 두 비를 비례식으로 세운 것이다. 이에 따라 교과서 활동을 분류하면 [표 11]과 같다.

[표 11] 교과서별 비례식 개념 곱셈 구조

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
전항, 후항에 같은 수를 곱하거나 나누는 유형			15-3-2
곱셈 유형		09-1-1-4, 09-4-1, 09-4-2	15-4-2
나눗셈 제1유형	07-1-1	09-1-1-2, 09-1-1-3, 09-1-2	15-3-1, 15-3-3, 15-4-3
삼수법 유형	07-4-1, 07-4-2, 07-5-1, 07-5-2	09-5-1, 09-5-2	15-4-1, 15-5-1, 15-5-2, 15-5-3

그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 두

측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않는다.

다음으로 2009 개정 교과서도 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석해야 하는지 명시적으로 제시하지 않는다.

2015 개정 교과서는 1개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. (15-4-1)은 이중수직선 모델을 통해 단위량을 가구 모형 수 2개와 나무판 수 5개로 고정한 채 묶음의 수를 동시에 늘려 일정한 변화를 보여주며 측정 공간 내를 분석한다. 이를 정리하면 [표 12]와 같다. 그래서 2015 개정 교과서에서 제시된 비의 성질에 관한 활동은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석한다고 볼 수 있다.

[표 12] 2015 개정 교과서의 비례식 개념 활동 비례추론 전략

내용	곱셈 구조 분석		곱셈 구조 표현	
15-4-1	M_1 2×1 2×(1×4)	M_2 5×1 5×(1×4)	M_1 ② ②② ②②	M_2 ❺ ❺❺ ❺❺

따라서 학생들에게 'a:b=-4:d'라는 비례식과 '외항의 곱은 내항의 곱과 같다.'는 비례식의 성질을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 2개에서 3개로 늘었으며, 비례추론은 활동 0개로 이전 내용과 비슷하다. 그리고 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 3개에서 4개로 늘었으며, 비례추론은 활동 0개에서 1개의 활동으로 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석하는 활동으로 이전보다 내용이 다양해졌다.

다. 비례배분

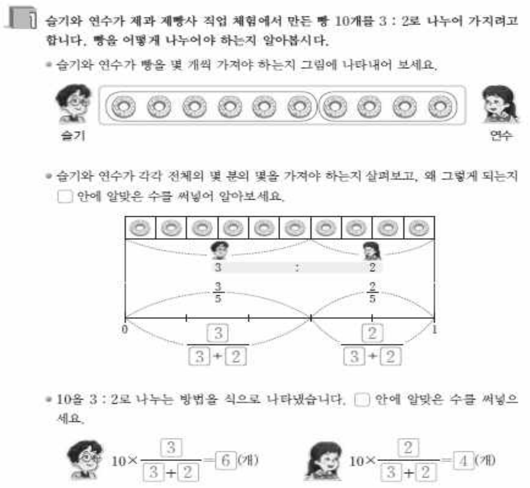
비례배분과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 교과서별로 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 곱셈과 나눗셈을 이용하여 전체를 주어진 비로 배분한다. (07바)의 주요 내용 및 활동은 비례배분의 개념을 알게 한다. (07바-1)은 오빠와 동생이 연필을 어떻게 나누어 가져야 하는지 알아보는 상황으로 비례배분을 알아보도록 한다. (07바-2)는 공책 15권을 동생과 누나에게 2:3으로 비례배분하는 방법을 알아보는 상황으로 비례배분하는 방법을 발견하도록 한다.

다음으로 2009 개정 교과서는 이전처럼 곱셈과 나눗셈을 다양하게 이용하거나, 이전과는 새롭게 포함제를 이용하여 전체를 주어진 비로 배분한다. 첫째, (09바)의 주요 내용 및 활동은 비례배분의 의미를 알게 한다. (09바-1)은 지수와 효정이가 조개를 1:2로 나누어 가지면 각자 가지게 되는 조개의 수는 얼마인지 알아보는 상황으로 비례배분의 의미를 비로 알아보도록 한다. (09바-2)는 지수와 효정이가 각각 전체의 얼마를 가질 수 있을지 알아보는 상황으로 비례배분의 의미를 분수로 알아보도록 한다. (09바-3)은 비에 따라 비례배분을 하는 방법을 알아보도록 한다.

둘째, (09사)의 주요 내용 및 활동은 비례배분을 이용하여 여러 가지 문제를 해결하게 한다. 여기에서 (09사-1)은 주방장 아저씨께서 주신 용돈이 7000원이라면 지수와 효정이는 받은 용돈을 어떻게 나누어야 하는지 알아보는 상황으로 무게의 비로 비례배분하도록 한다. (09사-2)는 빵 반죽에 들어간 밀가루와 쌀가루의 양을 알아보는 상황으로 생활 속에서 비례배분하도록 한다.

마지막으로 2015 개정 교과서는 이전보다 단순하게 곱셈과 나눗셈을 이용하거나, 이전과는 새롭게 삼수법을 이용하여 전체를 주어진 비로 배분한다. (15-6)의 주요 내용 및 활동은 비례배분의 의미를 알고 주어진 양을 비례배분하게 한다. 여기에서 (15-6-1)은 [그림 15]처럼 빵을 어떻게 나누어야 하는지 알아보는 상황으로 비례배분이 필요한 상황을 이해하고 비례배분을 하는 방법을 알아보도록 한다.

(15-6-2)는 사탕 18개를 2:7로 나누어보는 상황으로 비례배분 문제를 해결하도록 한다. (15-6-3)은 사각형 모양 과자를 만드는 데 사용되는 반죽양은 얼마인지 알아보는 상황으로 비례배분 문제를 해결하는 방법을 비교하도록 한다.



[그림 15] 2015 개정 수학 6-2 활동1(15-6-1, 변동부분 관점)

이처럼 비례배분과 관련하여 비례식과 비례배분 단원에 제시된 활동의 곱셈 구조를 정리하면 첫째 유형은 [그림 14]와 같은 구조로서 주어진 비로 전체를 배분한 것이다. 둘째 유형은 곱셈 유형으로, 셋째 유형은 나눗셈 제1유형으로, 넷째, 유형은 나눗셈 제2유형으로, 다섯째 유형은 삼수법 유형으로 주어진 비로 전체를 배분한 것이다. 이를 교과서에 적용하면 [표 13]과 같다.

[표 13] 교과서별 비례배분 개념 곱셈 구조

내용	2007 개정	2009 개정	2015 개정
주어진 비로 전체배분	07-6-1	09-6-2-1, 09-6-2-2,	
곱셈 유형	07-6-2-3	09-6-1, 09-6-3-3, 09-7-1, 09-7-2-1. 09-7-2-2	15-6-1-3, 15-6-2-2
나눗셈 제1유형	07-6-2-2	09-6-2-3, 09-6-2-4, 09-6-3-1,	15-6-1-2, 15-6-2-1
나눗셈 제2유형		09-7-2-3	
삼수법 유형			15-6-3

그리고 두 측정 공간의 관계를 어떻게 해석하는지 살펴보면 다음과 같다. 먼저 2007 개정 교과서는 2개의 활동에서 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내 분석으로 해석한다. 첫째, (07바-1)은 그림 모델을 통해 단위량을 연필 3자루와 2자루로 고정한 채 묶음의 수를 늘려 전체를 주어진 비에 따라 배분하며 측정 공간 내를 해석한다. 둘째, (07바-2)는 그림 모델을 통해 단위량을 공책 2권과 3권으로 고정한 채 묶음의 수를 늘려 전체를 주어진 비에 따라 배분하며 측정 공간 내를 해석한다.

다음으로 2009 개정 교과서도 1개의 활동에서 다중 묶음 관점으로 해석한다. (09바-1)은 표를 통해 단위량을 조개 1개와 2개로 고정한 채 묶음의 수를 늘려 전체를 주어진 비에 따라 배분하므로 다중 묶음 관점으로 해석하게 한다.

2015 개정 교과서는 1개의 활동에서 변동 부분 관점으로 해석한다. (15-6-1)은 [그림 15]처럼 그림 모델과 수직선을 통해 묶음의 수를 10으로 고정한 채 단위량을 빵 1개에서 전체에 대한 분수로 바꾸어서 전체를 주어진 비에 따라 배분하므로 변동 부분 관점으로 해석하게 한다.

따라서 학생들에게 '$N=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$'라는 비례배분을 지도하기 위해 교과서마다 제시된 활동에 차이가 있다. 2007 개정 교과서에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 3개에서 4개로 늘었으며, 비례추론 전략은 활동 2개에서 활동 1개로 이전 내용과 비슷하다. 그리고 2009 개정 교과서에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 4개에서 3개로 줄었으며, 비례추론 전략은 이전과 다른 방법으로 내용에 차이가 있다.

다중 묶음 관점, 변동 부분 관점에 따라 측정 공간 내의 분석, 측정 공간 사이의 분석으로 각각 나누어진 네 가지 유형 별로 [표 14]에 비와 비율 단원과 비례식과 비례배분 단원마다 활동들을 분류하여 [표 14]에 나타내었다.

[표 14] 교과서별 비례추론 전략

<table>
<tr><th colspan="2">비례 관점</th><th>측정 공간 내의 분석</th><th>측정 공간 사이의 분석</th></tr>
<tr><td rowspan="6">다중 묶음 관점</td><td>비</td><td colspan="2">09-2-2, 09-2-3, 09-3-1, 15-1-2, 15-2-1</td></tr>
<tr><td>비율</td><td>096-1, 09-7-1, 09-7-3</td><td></td></tr>
<tr><td>백분율</td><td>07-3-2
15-5-1, 15-5-2, 15-6-1</td><td></td></tr>
<tr><td>비의 성질</td><td>09-2-1,
09-2-2
15-1-1,
15-1-2</td><td></td></tr>
<tr><td>비례식</td><td>15-4-1</td><td></td></tr>
<tr><td>비례배분</td><td>07-6-1,
07-6-2
09-6-1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">변동 부분 관점</td><td>비</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>비율</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>백분율</td><td>07-3-3</td><td></td></tr>
<tr><td>비의 성질</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>비례식</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>비례배분</td><td>15-6-1</td><td></td></tr>
</table>

교과서 모두 대부분의 활동이 다중 묶음 관점 및 측정 공간 내의 분석에 치우쳐 있음을 알 수 있다. 그리고 2009 개정 교과서의 백분율 단원과 2015 개정 교과서의 비례배분 단원에서 한 활동씩만 변동 부분 관점의 측정 공간 내 분석과 관련되었다. 측정 공간 사이의 분석과 관련된 활동은 비 개념 단원에만 나타나 있다. 비례 배분 개념 활동에서 다중 묶음 관점에 해당하는 활동이 이전 개정 교과서에는 있었지만 가장 최근에 만들어진 2015 개정 교과서는 빠져 있으며 이전 교과서들과 마찬가지로 변동 부분 관점 및 측정 공간 사이의 분석에 해당하는 활동이 거의 없다. 따라서 이에 해당하는 활동들이 새로 개발될 교과서에 제시되어 학생들이 다양한 비례 추론 전략을 경험할 수 있도록 해야 할 필요가 있다.

V. 결론

본 연구에서는 비와 비례 개념이 마치 가르치고 배우기 쉬운 것처럼 다루어지는 동안 그 본질이 어떻게 변화하였는지 확인하기 위하여 2007, 2009, 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서에 제시된 비와 비율 단원과 비례식과 비례배분 단원의 활동을 분석했다. 이때, Beckmann과 Izsák(2015)의 비례 관점으로 Vergnaud(1996)의 곱셈 구조를 재해석하여 비례추론 과제를 4가지 유형으로 나누었다.

먼저 비와 비율 단원에 제시된 비례추론 과제를 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 비 개념은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내와 사이의 분석을 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 전략 활동이 모두 늘어나 내용이 다양해졌다. 하지만, 2009에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 줄어 내용이 단순해졌다. 둘째, 비율 개념은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 늘어나 내용이 다양해졌다. 하지만, 2009에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 줄어 내용이 단순해졌다. 셋째, 백분율 개념은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 줄어 내용이 단순해졌다. 하지만, 2009에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 다른 유형으로 바뀌었고, 비례추론 활동이 늘어나 내용이 다양해졌다.

다음으로 비례식과 비례배분 단원에 제시된 비례추론 과제를 분석한 결과는 다음과 같다. 첫째, 비의 성질은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 늘어나 내용이 다양해졌다. 하지만 2009에서 2015 개정 교과서

로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 바뀌었으며, 비례추론 활동은 유지하여 이전과 내용이 비슷하다. 둘째, 비례식 개념은 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 늘어났지만, 비례추론 활동은 변화가 없어 이전과 내용이 비슷하다. 하지만 2009에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형과 비례추론 활동이 모두 늘어나 내용이 다양해졌다. 셋째, 비례배분 개념은 변동 부분 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 다루고 있다. 2007에서 2009 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 늘었지만, 비례추론 활동은 줄어 이전과 내용이 비슷하다. 그리고 2009에서 2015 개정 교과서로의 변화는 곱셈 구조의 유형이 줄고, 비례추론만 다른 방법으로 접근하여 이전과 내용이 비슷하다.

이처럼 초등학교 수학 교과서에 제시된 비례추론 과제의 곱셈 구조 유형과 측정 공간을 분석하는 방법, 또 두 양의 관계를 해석하는 관점은 교육과정이 개정됨에 따라 다양해지거나 단순해지는 변화를 볼 수 있었다. 또한, 비와 비율 단원과 비례식과 비례배분 단원에서 모두 다중 묶음 관점에 따라 측정 공간 내의 분석으로 해석하려는 시도가 주로 있었다. 그런데 비례추론 능력을 기르기 위해서는 어떤 상황에서 무엇인가 공변하면서도 동시에 변하지 않는 것은 무엇인지 학생들이 곱셈적으로 생각하고 표현하게 하는 것이 중요하므로 다양한 문제 상황이 필요하다. 하지만 본 연구 결과, 현행 교과서는 이전 교과서보다 활동이 적더라도 다양한 유형의 문제 상황을 경험하게 하기보다는 문제 상황의 유형이 단순해져 학생들이 비례추론에 대한 풍부한 경험을 하는데 제한적이다. 따라서 교사는 교과서에 제시된 활동의 곱셈 구조와 측정 공간을 분석하는 방법, 또 두 양의 관계를 해석하는 관점을 분석하고 가르칠 개념에 따라 이와 같은 요소를 변형하여 학생들이 여러 비례추론을 경험할 수 있도록 재구성하는 노력이 필요하다. 그리고 교과서 저자와 교육과정 개발자는 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점을 포함하면서 곱셈 구조의 네 가지 유형 등을 반영한 활동들이 다양하게 교과서에서 제시되도록 하여 학생들이 비례 추론의 다양한 본질을 학습할 수 있도록 해야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2011a). 수학 5-2. 두산동아.

교육과학기술부(2011b). 수학 6-1. 두산동아.

교육과학기술부(2011c). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책 8]. 교육과학기술부.

교육과학기술부(2011d). 초등학교 교육과정 해설(수학과). 교육과학기술부.

교육부(2015a). 수학 6-1. ㈜천재교육.

교육부(2015b). 수학 6-2. ㈜천재교육.

교육부(2015c). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]. 교육부.

교육부(2020a). 수학 6-1. ㈜비상교육.

교육부(2020b). 수학 6-2. ㈜비상교육.

권미숙, 김남균(2009). 초등학교 6학년 학생들의 교과서 비례 문제 해결과 비례 추론에 관한 연구. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 211-229.

박선영, 이광호(2018). 초등 수학 교과서 비와 비율 단원의 모델 비교 분석 -비례에 대한 곱셈적 사고 및 비례 상황의 구조를 중심으로-. 초등수학교육, 21(2), 237-260.

서은미, 방정숙, 이지영(2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석: 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 중심으로. 수학교육학연구, 27(4), 791-810.

엄선영, 권혁진(2011). 학업성취도에 따른 초등학교 6학년 학생들의 비례 추론 능력 및 전략 분석. 초등수학교육논문집, 15(3), 537-556.

임재훈, 이형숙(2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. 수학교육연구, 25(2), 189-206.

정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. 수학교육학연구, 25(1), 21-58

정은실(1998). 곱셈 구조에 대한 개념적 장 연구. 과학교육연구, 24, 57-68.

정은실(2003). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. 학교수학, 5(4), 421-440.

정은실(2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. 수학교육학연구, 23(4), 505-516.

조지원, 신항균(2018). 이중수직선과 이중테이프 모델을 활용한 비율 지도가 초등학생의 비례추론 능력고가 수학적 태도에 미치는 영향. 한국초등교육, 29(4), 51-67.

Beckmann, S., & Izsák (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Fredenthal, H. (1983). *Didatical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Vergnaud, G. (1996). *The theory of conceptual fields*. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning,* 219-239. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

The Analysis of Proportional Reasoning Tasks in Elementary School Mathematics Textbooks

Song, Dong Hyun
Sejong, Jongchon Elementary School
E-mail : dh11927@naver.com

Park, Young Hee†
Cheongju National Universtiy of Education
E-mail : yhpark@cje.ac.kr

Current mathematics It is necessary to ensure that ratio and proportion concept is not distorted or broken while being treated as if they were easy to teach and learn in school. Therefore, the purpose of this study is to analyze the activities presented in the textbook. Based on prior work, this study reinterpreted the proportional reasoning task from the proportional perspective of Beckmann and Izsák(2015) to the multiplicative structure of Vergnaud(1996) in four ways. This compared how they interpreted the multiplicative structure and relationships between two measurement spaces of ratio and rate units and proportional expression and proportional distribution units presented in the revised textbooks of 2007, 2009, and 2015 curriculum.

First, the study found that the proportional reasoning task presented in the ratio and rate section varied by increasing both the ratio structure type and the proportional reasoning activity during the 2009 curriculum, but simplified the content by decreasing both the percentage structure type and the proportional reasoning activity. In addition, during the 2015 curriculum, the content was simplified by decreasing both the type of multiplicative structure of ratio and rate and the type of proportional reasoning, but both the type of multiplicative structure of percentage and the content varied. Second, the study found that, the proportional reasoning task presented in the proportional expression and proportional distribute sections was similar to the previous one, as both the type of multiplicative structure and the type of proportional reasoning strategy increased during the 2009 curriculum. In addition, during the 2015 curriculum, both the type of multiplicative structure and the activity of proportional reasoning increased, but the proportional distribution were similar to the previous one as there was no significant change in the type of multiplicative structure and proportional reasoning.

Therefore, teachers need to make efforts to analyze the multiplicative structure and proportional reasoning strategies of the activities presented in the textbook and reconstruct them according to the concepts to teach them so that students can experience proportional reasoning in various situations.

---

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : proportional reasoning task, multiplicative structure, scalar operator, function operator, multiple-batches perspective, Variable-parts perspective

† Corresponding Author