JANT 한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술

J. Adv. Navig. Technol. 25(6): 551-556, Dec. 2021

비구조화된 불확실성과 시변 지연 시간을 갖는 이산 구간 시스템의 안정조건

Stability Condition for Discrete Interval System with Unstructured Uncertainty and Time-Varying Delay Time

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

본 논문에서는 시변 지연 시간이 있는 선형 구간 이산 시스템에 비구조화된 불확실성이 존재하는 경우에 대하여 안정조건을 다룬다. 이산 시스템의 시스템 행렬들이 구간행렬의 형태로 주어지는 구간시스템에 대하여, 지연 시간이 일정 구간 범위 안에서 시변으로 변동되고, 비선형성을 포함한 불확실성이 그 크기만이 주어지는 비구조화된 불확실성의 형태로 존재하는 시스템의 안정성 조건을 제안한다. 안정조건의 유도는 기존의 리아프노프 방정식의 상한 해를 이용한 방법과는 다르게 리아프노프 안정 조건을 기반으로 이루어지며, 간단한 부등식의 형태로 표현되어 안정성 판단에 편리하게 적용될 수 있는 장점을 갖는다. 또한, 제안된 안정조건은 기존에 발표된 다양한 선형 이산 시스템의 안정조건들을 포함하는 매우 포괄적이고 강력한 것으로, 시변 지연시간 변동 크기, 불확실성의 크기와 구간행렬의 범위를 모두 조건식에 포함하게 된다. 새로운 조건의 우수함은 유도과정에서 증명되어지며 수치예제를 통하여 제안된 조건의 효용성과 우수성을 검증한다.

[Abstract]

In this paper, we deal with the stability condition of linear interval discrete systems with time-varying delays and unstructured uncertainty. For the interval discrete system which has interval matrix as its system matrices, time-varying delay time within some interval value and unstructured uncertainty which can include non-linearity and be expressed by only its magnitude, the stability condition is proposed. Compared with the previous result derived by using a upper bound solution of the Lyapunov equation, the new results are derived by the form of simple inequality based on Lyapunov stability condition and have the advantage of being more effective in stability application. Furthermore, the proposed stable conditions are very comprehensive and powerful, including the previously published stable conditions of various linear discrete systems. The superiority of the new condition is proven in the derivation process, and the utility and superiority of the proposed condition are examined through numerical example.

Key word : Discrete system, Interval system, Stability condition, Time-varying delay, Unstructured uncertainty.

https://doi.org/10.12673/jant.2021.25.6.551

Received 29 November2021; **Revised** 1 December 2021
Accepted (Publication) 26 December 2021 (30 December 2021)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

Ⅰ. 서 론

시스템의 안정성에 영향을 미치는 요소는 다양하게 고려될 수 있으며 이를 시스템의 모델에 포함하여 안정조건을 유도하려는 시도는 오래전부터 진행되어 왔다.[1]-[2]. 선형 이산시스템에 대하여 고려되는 시스템 모델은 시스템 행렬의 시변/시불변 특성, 상태 지연에 영향을 주는 지연 시간의 특성이 시변/시불변 특성, 불확실성을 포함하지는 여부 등으로 구분하여 다양한 경우에 대한 연구 결과가 발표되었다[3]-[8]. 또한, 시스템 행렬의 변화에 대한 부분을 구간행렬(interval matrix)로 고려하여 구간행렬에 속한 임의의 행렬이 시스템 행렬로 정의되는 경우의 시스템 안정성에 대한 결과들도 제시되었다[9]-[14] 발표된 결과들에서 고려된 시스템의 특성은 시스템 행렬에 대한 것만 고려[12], 지연시간이 존재하는 경우도 고려[13,14]한 것들이 있다. 그러나, 구간행렬을 갖는 시스템에 대하여 비구조화된 불확실성과 시변 지연시간을 동시에 고려한 결과는 제시된 바가 없으며, 최근에 구간 행렬이 아닌 고정된 시불변 선형시스템에 불확실성과 시변 지연시간을 동시에 고려한 결과만 제시되었다[15]-[16]. 본 논문에서는 기존의 연구에서는 고려되지 못 한 구간시스템 행렬을 갖는 선형시스템에 비구조화된 불확실성과 시변 지연시간이 동시에 존재하는 경우에 대한 시스템 안정조건을 제시한다. 이는 각각의 요인에 대하여 연구되어진 기존의 결과들을 통합할 수 있는 가장 포괄적인 안정조건이며, 다양한 기존의 결과들을 포함하는 가장 일반적이고 효과적인 안정조건으로 볼 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 기존 결과를 요약하고, III장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하며, IV장에서 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

본 논문에서 사용하는 기호로는 $R^{n\times m}$는 실수 행렬 요소를 갖는 $n\times m$ 행렬이며, $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|$: X^TX행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $A=[a_{ij}]$는 행렬 요소 값 a_{ij} 로 구성된 행렬. $|A|=[|a_{ij}|], A\le_e B$는 행렬 요소별 부등식을 나타내며, I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

Ⅱ. 기존의 안정 조건 결과

식 (1)과 같은 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=A(\bullet)x(k)+B(\bullet)x(k-d(\bullet)) \\ +f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k) \tag{1}$$

여기서, A는 시스템 행렬, B는 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이며, $f(x(k),k), f_1(x(k-d),k)$는 비선형 불확실성을 나타내며, $A(\bullet), B(\bullet), d(\bullet)$의 시간에 따른 특성에 따라 다수의 결과가 발표되었다[1]-[8]. 특히, [8]에서는 식 (2)와 같이 비선형 불확실성을 포함한 시스템을 리아프노프 방정식의 상한해를 이용하여 다루었다. 이 시스템에서 지연시간은 시불변으로 고려하였음을 주목한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d)+f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k) \tag{2}$$

여기서, A,B는 시불변 시스템 행렬이며, $f(x(k),k), f_1(x(k-d),k)$는 식 (3)의 조건을 만족하는 비선형 불확실성을 나타낸다.

$$\|f(x(k),k)\|\le n\|x(k)\|, f_1(x(k-d),k)\le\gamma\|x(k-d)\| \tag{3}$$

기존 결과 1[8]: 식 (2), (3)를 만족하는 이산시스템은 식 (4)의 조건을 만족하면

$$((\|A\|+\|B\|+\eta+\gamma)\ (\frac{A^TA}{\|A\|}+\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n+\gamma I_n)<I_n \tag{4}$$

점근안정하다.

위의 결과가 시불변 지연시간에 대한 것에 반하여, 기존 결과 [15]에서는 다음 식과 같이 지연 시간이 시변, 비선형 불확실성에 대한 부분이 포함된 시스템에 대한 결과가 제시된다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k) \tag{5}$$

$$\|f(x(k),k)\|\le\eta\|x(k)\| \tag{6}$$
$$0\le d_m\le d(k)\le d_M,\ \ \forall k$$

기존 결과 2[15]: 수식 (5).(6)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시스템은 $D\equiv 1+d_M-d_m$ 에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n) \\ +\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|}\ \ <I_n \tag{7}$$

기존 결과 3[15]: 주어진 $d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (8)의 부등식을 만족하면 식 (5),(6)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|B\|<1 \tag{8}$$

기존 결과 4[16]: 주어진 $d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (9)의 부등식을 만족하면 식 (5),(6)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}\|B\|-1)^2<1 \tag{9}$$

위의 결과들은 고정된 시스템 행렬 A, B에 대한 것으로, 다음은 일정 구간 범위 내에서 시스템 행렬의 값이 정의되는 구간시스템에 대한 결과이다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k)) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &A\in[A^-,A^+]\subset R^{n\times n} \\ &A^-\le_e A\le_e A^+(a_{ij}^-\le a_{ij}\le a_{ij}^+)\ \forall i,j \\ &B\in[B^-,B^+]\subset R^{n\times n} \\ &B^-\le_e B\le_e B^+(b_{ij}^-\le b_{ij}\le b_{ij}^+)\ \forall i,j \end{aligned} \tag{11}$$

여기서, 식 (10)은 일반적인 지연 이산시스템이며, (11)를 포함하면 구간시스템으로 고려된다. A,B 행렬의 요소값은 정확히 알 수 없고 단지 동작조건에 따라 각 요소값의 하한값과 상한값에 따른 변동 범위만을 알 수 있다. 각 행렬의 구간행렬들을 이용하여 다음과 같은 행렬을 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &F=[f_{ij}],\ f_{ij}=\max(|a_{ij}^-|,|a_{ij}^+|)\ \forall i,j \\ &G=[g_{ij}],\ g_{ij}=\max(|b_{ij}^-|,|b_{ij}^+|)\ \forall i,j \end{aligned} \tag{12}$$

기존 결과 5[14] : 식 (10)와 식 (11)을 만족하는 구간시스템은 다음의 부등식을 만족하면 안정하다.

$$\|F\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|G\|<1 \tag{13}$$

보조정리 1 ([6],[7]) :임의의 벡터 x,y와 양의 상수 ϵ 에 대하여 식 (14)가 성립한다.

$$2x^Ty\le\epsilon^{-1}x^Tx+\epsilon y^Ty \tag{14}$$

보조정리 2([17,491쪽]): $|X|\le_e Y$ 를 만족하는 정방행렬 X,Y 에 대하여 다음의 관계식이 성립한다.

$$\|X\|\le\||X|\|\le\|Y\| \tag{15}$$

III. 새로운 안정 조건

식 (11)을 만족하고 불확실성을 갖는 구간시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k) \tag{16}$$

$$\|f(x(k),k)\|\le\eta\|x(k)\| \tag{17}$$

$$0\le d_m\le d(k)\le d_M,\ \ \forall k \tag{18}$$

여기서, 식 (16)은 식 (18)의 시변 지연시간을 갖는 선형 이산시스템이며, (11)의 구간시스템, (17)의 비구조화된 불확실성을 포함하는 것으로, 앞 장에서 제시된 기존 결과들을 모두 포함할 수 있는 시스템이다.

위의 시스템에 대하여, 리아프노프 함수를 식 (19)와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x(k))&=x^T(k)x(k)+\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &+\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}\sum_{i=k+j-1}^{k-1}x^T(i)Rx(i)=V_1+V_2+V_3 \end{aligned} \tag{19}$$

여기서, 대칭행렬 R은 양의 정칙행렬로 $R>0$.

보조정리 3: 식 (11),(16),(17),(18)의 시스템은 식(19)에 정의된 리아프노프 함수와 식(12)의 행렬, $\epsilon>0, d_M-d_m\ge 0$ 에 대하여 식 (20)의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &D\equiv 1+d_M-d_m \\ &V(x(k+1))-V(x(k))=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3 \\ &\le x^T(k)(A^TA-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad+x^T(k-d(k))(B^TB-R)x(k-d(k)) \\ &\quad+2x^T(k-d(k))B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ &\quad+2f^T(x(k),k)Bx(k-d(k))+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\ &\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n)x(k) \\ &+x^T(k-d(k))((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB-R)x(k-d(k)) \end{aligned} \tag{20}$$

증명: $V(x(k+1))-V(x(k))=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3$

$$\begin{aligned} &x_d(k)\equiv x(k-d(k)) \\ &\Delta V_1=x^T(k+1)x(k+1)-x^T(k)x(k) \\ &=x^T(k)(A^TA-I_n)x(k) \\ &\quad+2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ &\quad+x_d^T(k)B^TBx_d(k)+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_2&=\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k}x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &=x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &\quad-\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \tag{22}$$

참고문헌 [6]에서와 같이 식 (23)을 만족한다.

$$\begin{aligned} \Delta V_3&=\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}(x^T(k)Rx(k)-x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\ &=(-d_m+1-(-d_M+2)+1)x^T(k)Rx(k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1)-\ldots\\
&-x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1))\\
&=(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)-\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m}x^T(i)Rx(i)
\end{aligned} \tag{23}
$$

보조정리 1과 대칭행렬의 성질 $A^TA \le \|A\|^2 I_n$, $f^Tf \le \eta^2\|x(k)\|^2$ 을 이용하면 식 (24)을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
&2x_d^T(k)B^TAx(k)\\
&\le \frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^TAx(k)+\epsilon x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&2f^T(x(k),k)Bx_d(k)\\
&\le \frac{\|G\|}{\eta}f^Tf+\frac{\eta}{\|G\|}x_d^T(k)B^TBx_d(k) \le \eta\|G\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|G\|}x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&2f^T(x(k),k)Ax(k) \le \frac{\|F\|}{\eta}f^Tf+\frac{\eta}{\|F\|}x^T(k)A^TAx(k)\\
&\le \eta\|F\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|F\|}x^T(k)A^TAx(k)
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x(k+1))-V(x(k))=\Delta V_1+\Delta V_2+\Delta V_3\\
&\le x^T(k)(A^TA-I_n)x(k)\\
&\quad+2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k)\\
&\quad+x_d^T(k)B^TBx_d(k)+f^T(x(k),k)f(x(k),k)\\
&\quad+x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)\\
&\le x^T(k)(A^TA-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k)\\
&\quad+x_d^T(k)(B^TB-R)x_d(k)\\
&\quad+2x_d^T(k)B^TAx(k)+2f^T(x(k),k)Bx_d(k)+2f^T(x(k),k)Ax(k)\\
&\quad+f^T(x(k),k)f(x(k),k)\\
&\le x^T(k)(A^TA-I_n+DR)x(k)\\
&+x_d^T(k)(B^TB-R)x_d(k)\\
&+\frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^TAx(k)+\epsilon x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&+\eta\|G\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|G\|}x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&+\eta\|F\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|F\|}x^T(k)A^TAx(k)\\
&+\eta^2x^T(k)x(k)\\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n)x(k)\\
&+x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB-R)x_d(k)
\end{aligned} \tag{25}
$$

■

위의 보조정리3을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 1: 수식 (11),(16),(17,(18)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 시스템은 식 (12)의 행렬과 $D \equiv 1+d_M-d_m$ 에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$
\begin{aligned}
&(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|F\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta I_n)\\
&\qquad+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|G\|} \quad < I_n
\end{aligned} \tag{26}
$$

증명 : 식 (27)과 같이 행렬 R을 선택하여 대입하면 식 (28)이 성립한다.

$$
-R=\frac{(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA-I_n+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n}{1+d_M-d_m}<0 \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x(k+1))-V(x(k))\\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA-I_n\\
&\quad+DR+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n)x(k)\\
&\quad+x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB-R)x_d(k)\\
&=x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB-R)x_d(k)
\end{aligned} \tag{28}
$$

따라서, 식 (27)과 식(28)에 의하여

$$
\begin{aligned}
&(1+d_M-d_m)(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB+(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA-I_n\\
&+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n<0
\end{aligned}
$$

이 되면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여,

$$
\epsilon=\frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\;\|G\|}>0 \tag{29}
$$

로 정하고 식(29)를 식(28)에 대입하면 식 (30)이 된다.

$$
\begin{aligned}
&(1+d_M-d_m)(1+\frac{\|F\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\;\|G\|}+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB\\
&+(1+\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\;\|G\|}{\|F\|}+\frac{\eta}{\|F\|})A^TA+(\eta^2+\eta\|F\|+\eta\|G\|)I_n<I_n
\end{aligned} \tag{30}
$$

$D \equiv 1+d_M-d_m$ 로 하고 식(30)을 정리하면 식 (31)이 된다.

$$
\begin{aligned}
&(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|F\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta I_n)\\
&-\eta\sqrt{D}\|G\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta D\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta\|G\|I_n<I_n
\end{aligned} \tag{31}
$$

식 (31)의 마지막 4개의 항은 식 (32)의 관계를 만족한다.

$$
\begin{aligned}
&\eta D\frac{B^TB}{\|G\|}-\eta\sqrt{D}\|G\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta\|G\|I_n\\
&=\eta(D\frac{B^TB}{\|G\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}-\sqrt{D}\|G\|I_n+\|G\|I_n)
\end{aligned}
$$

$$\le \eta(D\frac{B^TB}{\|G\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\frac{B^TB}{\|G\|})$$
$$=\frac{\eta}{\|G\|}(\sqrt{D}-1)^2B^TB=\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|G\|}$$
$$(\because D\ge 1, 1-\sqrt{D}\le 0, 0\le\frac{B^TB}{\|G\|}\le\frac{\|B\|^2}{\|G\|}I_n\le\frac{\|G\|^2}{\|G\|}I_n\le\|G\|I_n,$$
$$(-\sqrt{D}\|G\|+\|G\|)I_n=\|G\|(1-\sqrt{D})I_n$$
$$\le\frac{B^TB}{\|G\|}(1-\sqrt{D})=-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\frac{B^TB}{\|G\|}) \tag{32}$$

식 (32)를 대입하면, 다음 식(33)을 만족하면 식(31)도 만족된다.

$$(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|F\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|G\|}+\eta I_n) \tag{33}$$
$$+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|G\|}<I_n$$

위의 부등식을 만족하면 식(20)의 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 만족된다. 식 (28)의 $(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|G\|})B^TB-R<0$이 만족되므로 $-R<0$ 은 당연히 만족하게 된다. ■

위의 안정조건은 식(11)의 구간행렬에 속한 모든 행렬 A, B 행렬에 대하여 만족하여야 하는 것으로 모든 행렬 A, B 에 대하여 수식을 직접 적용하여 안정성을 판단할 수는 없는 것이다. 따라서, 이를 실제 적용이 가능한 형태의 조건으로 변환하여야 하며 변환된 조건은 다음과 같이 유도된다.

따름정리 I: 수식 (11),(16),(17,(18)의 시변 지연시간과 불확실성을 갖는 구간 시스템은 식 (12)의 행렬에 대하여 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\|<1 \tag{34}$$

증명: 정리1의 안정 조건 식 (26)의 결과에서 보조정리2의 부등식을 적용하면 $\frac{A^TA}{\|F\|}\le\frac{\|A\|^2}{\|F\|}I_n\le\frac{\|A\|^2}{\|F\|}I_n\le\frac{\|F\|^2}{\|F\|}I_n\le\|F\|I_n$ 이고 마찬가지로 $\frac{B^TB}{\|G\|}<\|G\|I_n$ 를 이용하면 쉽게 증명된다. ■

위의 따름정리의 조건은 불확실성이 없는 경우($\eta=0$)의 식으로 고려하면 기존결과 5[14]의 것과 동일하게 된다. 또한, 구간 시스템이 아닌 경우에 대하여 고려하게 되면 기존결과3[15]의 그것과 동일하게 된다. 따라서, 기존결과를 포함하는 포괄적인 조건으로 우수한 조건임이 증명된다.

Ⅳ. 새로운 조건의 수치 예제 적용

수치예제를 통하여 제안된 안정조건에 대하여 기존 결과와의 비교를 수행한다.

예제 1[14]: 식 (11),(16),(17)과 같이 표현되는 시스템을 고려한다. [14]에서는 식 (18)의 비구조화된 불확실성을 포함할 수 없었으나 본 예제에서는 다음과 같이 불확실성을 포함한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k)$$

$$A^-=\begin{bmatrix}-0.2 & -0.2\\ -0.1 & -0.1\end{bmatrix},\ A^+=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix} \tag{35}$$
$$B^-=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix},\ B^+=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.15 & 0.25\end{bmatrix}$$

여기서, 식 (12)의 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.15 & 0.25\end{bmatrix}$$

따름정리 1의 조건을 지연시간이 시불변인 경우인 $d_M-d_m=0$로 적용하면, $\eta=0.25$ 인 경우 식 (34)의 조건 $(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\|=0.9216<1$ 가 되어 안정함을 확인할 수 있다. 이를 시변 지연시간인 $d_M-d_m=1$ 인 경우에 대하여 적용하면, $\eta=0.13$인 경우 식 (34)의 $(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\|=0.9813<1$ 이 되어 이 경우에도 안정함을 알 수 있다.

예제 2 :다음과 같은 구간 시스템 행렬을 고려한다.

$$A^-=\begin{bmatrix}-0.2 & -0.1\\ -0.1 & -0.1\end{bmatrix},\ A^+=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix} \tag{36}$$
$$B^-=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.1\\ -0.1 & -0.2\end{bmatrix},\ B^+=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.15 & 0.25\end{bmatrix}$$

식 (12)의 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.15 & 0.25\end{bmatrix}$$

따름정리 1의 조건을 시변 지연시간인 $d_M-d_m=2$ 인 경우에 대하여 적용하면, $\eta=0.13$인 경우 식 (34)의 $(\|F\|+\sqrt{D}\|G\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|G\|=0.9999<1$ 이 되어 이 경우에도 안정함을 알 수 있다.

위의 예에서와 같이 제안된 안정조건들로 구간 시스템 행렬에 대하여 시변 지연시간과 불확실성이 포함된 시스템의 안정성을 판단할 수 있으며, 기존의 결과를 포함하여 확장된 안정조건임을 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 일정 구간 내에 속하는 지연시간이 시변 특성

을 갖고 변화하고, 시스템 행렬 또한 일정 구간에서 변화되는 구간행렬로 정의되는 선형 이산 시스템에 비구조화된 불확실성이 있는 경우의 시스템 안정성 해석을 위한 효과적인 안정조건을 제시하였다. 리아프노프 안정성 이론에 기초하여 새로운 안정 조건식을 유도하고, 이를 간략한 수식으로 표현하였으며, 기존에 발표된 안정조건들과 비교하여 새로운 조건이 기존 조건들을 포함하는 매우 포괄적인 조건임을 보이고 이를 수치예제를 통하여 검증하였다. 추후 연구에서는 시변 구간 시스템에 대한 안정성 해석이 진행될 예정이다.

References

[1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, "The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview," *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, "Stability on time delay systems: A survey," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol. 20, No. 3, pp. 289-297, Mar. 2014.

[3] S. Xu, J. Lam, B. Zhang and Y. Zou, "A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 16, pp. 2512-2521, Oct. 2014.

[4] L. V. Hien, and H. Trinh, "New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems," *Automatica*, Vol. 71, pp. 197-201, Sep. 2016.

[5] C. H. Lee, "Sufficient conditions for robust stability of discrete large-scale interval systems with multiple time delays," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 5, No. 4, pp. 759-765, Apr. 2017.

[6] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, "Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay," *Chemical Industry & Chemical Engineering Quaterly,* Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.

[7] H. S. Han, "Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

[8] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, "Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation," *Innovative Computing Information and Control Express Letters,* Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May. 2011.

[9] N. S. Rousan and K. Jordan, "Stability of square interval matrices for discrete time systems," *Engineering of Journal of the University of Qatar*,Vol.14, pp.127-135, 2001.

[10] C. H. Lee and T. L. Hsien, "New sufficient conditions for the stability of continuous and discrete time-delay interval systems," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 334B, No. 2, pp. 233-240, 1997.

[11] P. Liuy, "Stability of continuous and discrete time-delay grey systems," *International Journal of Systems Science,* Vol. 32, No. 7, pp. 947-952, 2001.

[12] P. L. Liu and W.-J. Shyr, "Another sufficient condition for the stability of grey discrete-time systems," *Journal of the Franklin Institute,* Vol. 342, No. 1, pp. 15-23, Jan. 2005.

[13] J. Fang Han, J. Qing Qiu and J. Hua Zhai, "Stability analysis for perturbed discrete dynamic interval systems with time delay," in *Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC 2007)*, Kumamoto: Japan, pp. 587-587, Sep. 2007.

[14] H. S. Han, "Stability condition for discrete interval system with interval time-varying delay time," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 19, No. 6, pp. 574-580, Dec. 2015.

[15] H. S. Han, "Stability condition of discrete system with time-varying delay and unstructured uncertainty," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 22, No. 6, pp. 630-635, Dec. 2018.

[16] H. S. Han, "New stability condition for discrete delayed system with unstructured uncertainty," *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 24, No. 6, pp. 607-612, Dec. 2020.

[17] R. A. Hornand and C. R. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 491, 1985.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템